MPE_VPAM: Vybrané partie aplikované matematiky

Petr Zemánek (Masarykova Univerzita, Brno)

Kapitola 2: Integrální počet v $\mathbb{R}$

(verze: 24. září 2021)

Primitivní funkce

Nechť funkce f a F jsou definované na intervalu I. Jestliže platí

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{pro všechna } x \in I,$$

pak říkáme, že funkce F je <u>primitivní funkcí k funkci f na intervalu</u> I.

Množinu všech primitivních funkcí k funkci f nazýváme <u>neurčitý integrál</u> funkce f a označujeme

$$\int f(x)\,dx.$$

Funkci $f(x)$ nazýváme integrandem. Výraz dx je tzv. diferenciál proměnné x a je součástí označení pro integrál.

Pokud není interval I otevřený, pak v krajních bodech uvažujeme jednostranné derivace.

Kolik je primitivních funkcí?

Je-li funkce $F(x)$ primitivní k funkci $f(x)$ na intervalu I, pak každá jiná primitivní funkce k funkci f má tvar $F(x) + c$, kde $c \in \mathbb{R}$.

Odtud plyne
$$\int f(x)\,dx = F(x) + c,$$
kde $c \in \mathbb{R}$ je tzv. nazývá integrační konstanta.

Z definice neurčitého integrálu také vyplývá, že
$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x), \quad \int F'(x)\,dx = F(x) + c,$$
tj. operace derivování a integrování jsou navzájem komplementární.

Existence primitivní funkce

Je-li funkce f spojitá na intervalu I, pak k ní na tomto intervalu existuje primitivní funkce.

Vlastnosti primitivních funkcí

Nechť na intervalu I existují neurčité integrály $\int f(x)\,dx$ a $\int g(x)\,dx$ a nechť α je libovolná konstanta. Pak na I existuje neurčitý integrál funkcí $f \pm g$ a αf a platí

$$\int \big[f(x) \pm g(x)\big]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx,$$

$$\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)dx.$$

Vzorce pro výpočet integrálu

$$\int 1\,dx = x + c, \qquad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \;\; n \neq -1,$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c, \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \;\; a > 0, \;\; a \neq 1,$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c, \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + c,$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg}\,x + c, \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c.$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + c, \quad a > 0,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + c, a \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{(x-x_0)^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-x_0}{a}\right) + c, \quad a > 0.$$

Příklad

Vypočtěte neurčité integrály:

(a) $\displaystyle\int (x^3 - 3x^2 + 5)\,dx$, (b) $\displaystyle\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2x^6\right) dx$,

(c) $\displaystyle\int \left(2^x - \frac{2}{x}\right) dx$, (d) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{5}{1+x^2}\right) dx$.

Metoda integrování per-partes je odvozena z derivace součinu. Víme, že platí $(uv)' = u'v + uv'$. Odtud integrací dostaneme

$$uv = \int u'v + \int uv'.$$

Známe-li jeden integrál, můžeme určit integrál druhý.

Metoda per-partes

Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají derivaci na intervalu I. Existuje-li primitivní funkce k funkci $u'(x)\,v(x)$, pak

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx.$$

Zejména má-li $u(x)$ spojitou derivaci na I, je existence primitivní funkce k $u'(x)\,v(x)$ zaručena.

Většinu integrálů řešených metodou per-partes můžeme rozdělit do dvou skupin. Je-li $P(x)$ polynom, pak první skupinou jsou integrály typu

$$\int P(x)e^{ax}\,dx, \quad \int P(x)\sin ax\,dx, \quad \int P(x)\cos ax\,dx.$$

Zde volíme $u = P(x)$. Druhou skupinou jsou integrály

$$\int P(x)\ln x\,dx, \quad \int P(x)\,\operatorname{arctg} ax\,dx, \quad \int P(x)\arcsin ax\,dx.$$

Zde volíme $v' = P(x)$.

Příklad

Vypočtěte neurčité integrály:

(a) $\int x\cos x\,dx$, (b) $\int x^2\,e^{2x}\,dx$,

(c) $\int x\ln x\,dx$, (d) $\int \ln x\,dx$,

(e) $\int e^x\sin x\,dx$.

Substituční metoda plyne ze vzorce pro derivování složené funkce.

Substituční metoda

Nechť funkce f má na intervalu J primitivní funkci F, funkce $t = \varphi(x)$ má derivaci na intervalu I a $\varphi(x) \in J$ pro $x \in I$. Pak má složená funkce $f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$ primitivní funkci na intervalu I a platí

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + c.$$

Při výpočtu postupujeme takto: položíme $t = \varphi(x)$, odkud formálně plyne

$$dt = \varphi'(x)\,dx,$$

a tedy můžeme psát

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx \,\left|\, \begin{array}{c} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x)\,dx \end{array} \,\right| = \int f(t)\,dt =$$

$$= F(t) + c = F(\varphi(x)) + c.$$

Podobně lze použít substituci opačnou, tj. $x = \psi(t)$, přičemž $\psi(t)$ musí mít nenulovou derivaci na uvažovaném intervalu. Tuto substituční metodu můžeme zapsat ve tvaru

$$\int f(x)\,dx \left| \begin{array}{c} x = \psi(t) \\ dx = \psi'(t)\,dt \end{array} \right| = \int f\big(\psi(t)\big)\,\psi'(t)\,dt.$$

Příklad

Vypočtěte neurčité integrály:

(a) $\int (3x-4)^7\,dx$, (b) $\int \sin(7x+3)\,dx$,

(c) $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$, (d) $\int x^2 \cos x^3\,dx$,

(e) $\int \cos^3 x\,dx$, (f) $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$,

(g) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$,

Integrace racionální lomené funkce

Racionální lomená funkce je funkce tvaru

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde P, Q jsou nenulové polynomy.

- Je-li $R(x)$ neryze lomená funkce, rozložíme ji na součet polynomu a ryze lomené funkce.
- Ryze lomenou racionální funkci rozložíme na parciální zlomky, které jsou dvou typů:

$$\frac{M}{(x-\alpha)^k} \qquad \text{nebo} \qquad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$$

  podle toho, zda daný zlomek přísluší reálnému kořenu nebo komplexně sdružené dvojici kořenů polynomu Q.

Integrace racionální lomené funkce: nejkomplikovanější případ

Jsou-li čísla $\alpha \pm i\beta$ dvojnásobné komplexně sdružené kořeny polynomu Q, pak R má dva parciální zlomky tvaru

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} + \frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^2}.$$

Podobný rozklad dostaneme pro n-násobné ($n \geqslant 3$) komplexní kořeny. Při výpočtu použijeme rekurentní vzorec

$$K_n(x) = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{3-2n}{2-2n} K_{n-1}(x),$$

kde

$$K_1(x) = \operatorname{arctg} x,$$

a rozklad

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\, dx = \int \frac{Ax+B}{\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^n}\, dx =$$

$$= \frac{A}{2} \frac{1}{(1-n)\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^{n-1}} + \frac{B+A\alpha}{\beta^{2n-1}} K_n\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right).$$

Příklad

Vypočtěte neurčité integrály:

(a) $\displaystyle\int \frac{2x^2+6x-2}{x(x+2)(x-1)}\,dx,$ (b) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)^3}\,dx,$

(c) $\displaystyle\int \frac{4x^2-21x+27}{(x-4)(x^2-4x+7)}\,dx,$ (d) $\displaystyle\int \frac{10x+31}{(x^2+5x+8)^2}\,dx.$

V další části bude symbol $R(a, b)$ značit racionální lomenou funkci v proměnných a, b, tj.

$$R(a, b) = \frac{P(a, b)}{Q(a, b)},$$

kde $P(a, b)$ a $Q(a, b)$ jsou polynomy v proměnných a, b (podobně i pro větší počet proměnných).

Integrace funkcí s odmocninami (i)

Integrál z funkce typu

$$R\left(x, \sqrt[q_1]{x^{p_1}}, \sqrt[q_2]{x^{p_2}}, \dots, \sqrt[q_n]{x^{p_n}}\right),$$

kde $p_1 \dots, p_n, q_1, \dots, g_n \in \mathbb{N}$, můžeme substitucí

$$x = t^s,$$

kde s je nejmenší společný násobek čísel $q_1, \dots, q_n$, převést na integraci racionální lomené funkce.

Příklad

Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \frac{\sqrt[6]{x} + 1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} \, dx.$$

Integrace funkcí s odmocninami (ii)

Integrály z funkcí tvaru

$$R\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$$

převedeme na integrál z racionální lomené funkce substitucí

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Příklad

Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{1}{(1+x)^2}\,dx.$$

Integrace goniometrických funkcí (i)

Integrál typu
$$\int \sin^n x \cos^m x \, dx,$$
kde $n, m \in \mathbb{N}$ můžeme vždy vhodnou substitucí převést na integrál z polynomu.

Je-li n liché číslo, použijeme substitucí $u = \cos x$, je-li m liché, použijeme substituci $v = \sin x$. Jsou-li obě tato čísla lichá, budou fungovat obě substituce, technicky výhodnější je substituovat funkci, která je ve vyšší mocnině. V případě, že jsou obě čísla sudá, použijeme vzorce
$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Příklad

Vypočtěte neurčité integrály:

(a) $\displaystyle\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx,$ (b) $\displaystyle\int \sin^4 x \, dx.$

Integrace goniometrických funkcí (ii)

Předchozí příklady můžeme zobecnit a dostaneme následující případy funkcí typu $R(\sin x, \cos x)$:

i) Je-li integrovaná funkce lichá vůči cosinu, tj. platí-li

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

pak volíme substituci $t = \sin x$.

ii) Je-li integrovaná funkce lichá vůči sinu, tj. platí-li

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

pak volíme substituci $t = \cos x$.

iii) Platí-li

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

volíme substituci $t = \operatorname{tg} x$. Z definice goniometrických funkcích v pravoúhlém trojúhelníku pak můžeme odvodit, že platí

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}, \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}.$$

Tato substituce je vhodná i pro integrály typu $R(\operatorname{tg} x)$.

Integrace goniometrických funkcí (iii)

Integrál z funkce typu $R(\sin x, \cos x)$ můžeme vždy převést na integrál z racionální lomené funkce pomocí tzv. univerzální substituce

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Ze substituční rovnice plyne $x = 2\operatorname{arctg} x$ a tedy $dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$. Pomocí definice goniometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku (tentokrát s úhlem $x/2$) a vzorců pro dvojnásobný úhel můžeme odvodit, že

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Příklad

Pomocí univerzální substituce vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}\,dx.$$

Pro úplnost si ještě naznačíme postup při integraci některých složitějších funkcí.

Eulerovy substituce

Integrály z funkcí typu

$$R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$$

můžeme v případě, kdy má kvadratická rovnice reálné kořeny, upravit na předchozí typ. Má-li rovnice komplexně sdružené kořeny, použijeme tzv. Eulerovy substituce, které jsou například pro $a > 0$ tvaru

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a}x \pm t,$$

a pro $c \geqslant 0$ tvaru

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm xt \pm \sqrt{c}.$$

Druhou možností je doplnění výrazu pod odmocninou na čtverec, čímž získáme některý z typů

$$R(x, \sqrt{x^2 - a^2}), \qquad R(x, \sqrt{x^2 + a^2}), \qquad R(x, \sqrt{a^2 - x^2}),$$

které lze vyřešit pomocí substitucí (v uvedeném pořadí)

$$x = \frac{a}{\sin t}, \qquad x = a \operatorname{tg} t, \qquad x = a \sin t.$$

Binomické integrály

Integrály z funkcí typu
$$x^m(a+bx^n)^p,$$
kde $a, b, m, n, p \in \mathbb{R}$, nazýváme binomické. Tyto integrály lze převést na integrály z racionální lomené funkce v těchto případech:

i) $p \in \mathbb{Z}$, a to substitucí $x = t^s$, kde s je společný jmenovatel čísel m, n;

ii) $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, a to substitucí $a + bx^n = t^s$, kde s je jmenovatel čísla p;

iii) $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, a to substitucí $ax^{-n} + b = t^s$, kde s je jmenovatel p.

Vyšší transcendentní funkce

Závěrem poznamenejme, že není vždy možné vyjádřit primitivní funkci k dané funkci pomocí elementárních funkcí (ačkoli víme, že existuje). Mezi takové patří například tyto neurčité integrály

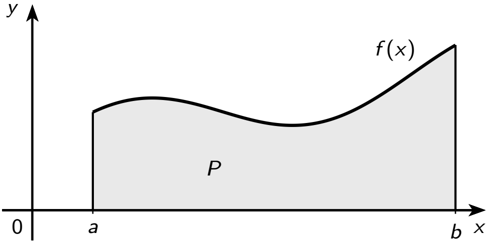
$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{\ln x}, \qquad \int e^{-x^2}\,dx, \qquad \int \sin x^2\,dx.$$

V těchto případech lze primitivní funkci vyjádřit například pomocí nekonečné mocninné řady. Například

$$\int_0^t \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)\cdot(2n-1)!}.$$

Určitý integrál (I)

Nechť f je nezáporná ohraničená funkce definovaná na $[a, b]$, která je pro jednoduchost spojitá na intervalu $[a, b]$. Určeme obsah plochy P ohraničené grafem funkce f, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$. Tato plocha se někdy pro jednoduchost nazývá *podgraf* funkce.



Určitý integrál (II)

Obsah podgrafu nemůžeme určit přímo, vyjádříme jej přibližně tak, že jej aproximujeme pomocí obdélníčků:

i) Interval $[a, b]$ rozdělíme na n intervalů $[x_{i-1}, x_i]$ (tzv. dělicí intervaly) stejné délky tak, že $x_0 = a$ a $x_n = b$. Délka Δx_i každého dělicího intervalu je

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}.$$

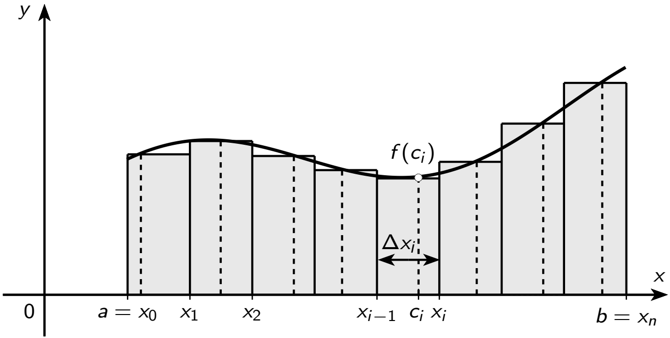
ii) Na každém dělicím intervalu aproximujeme plochu vymezenou funkcí f a osou x obdélníkem o stranách Δx_i a $f(c_i)$, kde c_i náleží do dělicího intervalu. Pro obsah P_i tohoto obdélníku platí

$$P_i = f(c_i)\Delta x_i$$

a součet všech těchto obdélníků přibližně určuje obsah P plochy

$$P \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Určitý integrál (III)



Určitý integrál (iv)

Čím větší bude číslo n (počet dělicích bodů), tím přesnější (lepší) bude tato aproximace. Provedeme-li limitní přechod pro $n \to \infty$, dostaneme přesnou hodnotu obsahu plochy

$$P = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x_i.$$

Pro spojité funkce tato limita existuje a nezávisí na výběru bodů c_i. Obecně pro funkce, které nejsou spojité, toto nemusí platit. Pokud však tato limita existuje a nezávisí na výběru bodů c_i, nazýváme ji určitým integrálem a označujeme

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Symbol $\int$ vznikl jako prodloužení písmene S, které bylo vybráno, protože integrál je limitou sumy.

Určitý integrál

Nechť f je funkce ohraničená na intervalu $[a, b]$. Nechť $a = x_0 < x_1 < x_2, \dots, x_n = b$ jsou body dělící interval $[a, b]$ na n stejných subintervalů délky $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ a nechť $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$. Určitým integrálem funkce f od a do b rozumíme

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x,$$

jestliže tato limita existuje a nezávisí na výběru bodů c_i. Píšeme

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

a říkáme, že funkce f je integrovatelná na $[a, b]$.

Číslo a nazýváme dolní mez, číslo b horní mez a funkci f integrand.

Vlastnosti určitého integrálu (i)

Jsou-li funkce f a g spojité na intervalu $[a, b]$, pak platí tyto vztahy:

a) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$;

b) $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$;

c) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, kde $a < c < b$;

d) $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$, jestliže $f(x) \geqslant 0$ na intervalu $[a, b]$;

e) $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$, jestliže $f(x) \geqslant g(x)$ na intervalu $[a, b]$.

Vlastnost c) lze použít pro případ, kdy je funkce f spojitá na intervalu $[a, c]$ a $[c, b]$, ale není spojitá v bodě c.

Vlastnosti určitého integrálu (ii)

Integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ pro $a > b$ definujeme vztahem

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,$$

a integrál $\int_a^a f(x)\,dx$ definujeme vztahem

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Definujeme-li pro každé číslo $x \in [a, b]$ funkci

$$U(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

pak derivace této funkce je $U'(x) = f(x)$ a $U(a) = 0$. Tímto způsobem někdy vyjadřujeme funkce, které jsou primitivní k funkci f, ale nejsou elementárními funkcemi, např. funkce

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt, \qquad \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Zásadní roli hraje tzv. Newtonova–Leibnitzova formule, která dává do souvislosti určitý integrál funkce a její primitivní funkci (neurčitý integrál).

Newtonova–Leibnitzova formule

Je-li funkce f spojitá na $[a, b]$, pak platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

kde F je primitivní funkce k funkci f na intervalu $[a, b]$.

Často píšeme místo $F(b) - F(a)$ symbol $\big[F(x)\big]_a^b$, tj.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b.$$

Příklad

Vypočtěte určité integrály:

$$\text{(a)} \quad \int_0^\pi \sin x\,dx, \qquad \text{(b)} \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

Metoda per-partes pro určitý integrál

Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají derivaci na intervalu $[a, b]$ a nechť $u'(x)$ a $v'(x)$ jsou integrovatelné na $[a, b]$. Pak platí

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Substituce pro určitý integrál

Nechť funkce $f(t)$ je spojitá na intervalu $[a, b]$. Nechť funkce $\varphi(x)$ má derivaci na intervalu $[\alpha, \beta]$, $\varphi'(x)$ je integrovatelná na $[\alpha, \beta]$ a $\varphi(x)$ zobrazuje interval $[\alpha, \beta]$ do intervalu $[a, b]$. Pak platí

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt.$$

Příklad

Vypočtěte určité integrály:

(a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x\,dx,$ (b) $\displaystyle\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{1+3x}}\,dx.$

Obsah rovinného obrazce

Nechť funkce f je spojitá a nezáporná na intervalu $[a, b]$. Obsah podgrafu funkce f je dán vzorcem

$$P = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Plocha, jejíž obsah chceme určit, může být vymezena grafy dvou funkcí. Platí-li například $f(x) \geqslant g(x)$ pro $x \in [a, b]$, jedná se o plochu ohraničenou grafy funkcí $f(x)$, $g(x)$ a přímkami $x = a$ a $x = b$. Jsou-li navíc funkce f, g spojité na $[a, b]$, platí pro obsah P takto vymezené plochy

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

Příklad

Určete obsah kruhu s poloměrem $r = 1$. (A obecné $r > 0$?)

Příklad

Určete obsah omezené plochy určené grafy funkcí $y = 1 - x^2$ a $y = -3$.

Příklad

Určete obsah plochy vymezené grafy funkcí $f(x) = 2 - x$, $g(x) = 4 - x^2$ a přímkami $x = -2$, $x = 3$.

Délka křivky

Nechť funkce f je spojitá a má spojitou derivaci f' na intervalu $[a, b]$. Délka grafu této funkce na intervalu $[a, b]$ je dána

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Objem rotačního tělesa

Nechť funkce $y = f(x)$ je spojitá a nezáporná na intervalu $[a, b]$. Objem tělesa, které vznikne rotací podgrafu funkce f

$$P = \{[x, y] \mid \ a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

kolem osy x je dán určitým integrálem

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Povrch rotačního tělesa

Nechť f je nezáporná funkce mající spojitou derivaci na intervalu $[a, b]$. Obsah pláště tělesa, které vznikne rotací podgrafu funkce f kolem osy x, je dán určitým integrálem

$$Q = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Příklad

Horkovzdušný balón stoupá konstantní rychlostí 4 m/s a ve výšce 24 m je z něj vyhozen balíček. Za jak dlouho dopadne balíček na zem?

Příklad

Předpokládejte, že v čase $t = 0$ začne těžařská společnost čerpat ropu z vrtu, který v tomto čase obsahuje K barelů ropy.

Příklad

Data shromažďovaná daňovými úřady mohou být použita k získání některých informací o rozdělení příjmů v daném roce.

Příklad

Měření dopadů změn v ekonomickém prostředí na výroba spotřebitele patří mezi velmi důležité oblasti mikroekonomie.

A jiné využití?!

$\boxed{\text{DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE!}}$

Obecně: $F(x, y, y') = 0$ případně $y' = f(x, y)$

(počáteční problém)

DR se separovanými proměnnými: $y' = f(x)g(y)$

Lineární DR 1. řádu: $y' + f(x)\,y = g(x)$

Řešitelnost DRsSP

Nechť funkce $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ a $g : (c, d) \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ (přičemž $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ a $-\infty \leqslant c < d \leqslant \infty$) jsou spojité. Pak pro libovolnou dvojici $x^* \in (a, b)$ a $y^* \in (c, d)$ má počáteční problém

$$y' = f(x)g(y) \quad \& \quad y(x^*) = y^*$$

jediné řešení. To lze implicitně vyjádřit jako

$$\int_{y^*}^{y(x)} \frac{dt}{g(t)} = \int_{x^*}^{x} f(s)\, ds$$

Spoření

V rámci skvělého programu péče o zaměstnance MU nabízí univerzita spořící účet s ročním úrokem 3 %, přičemž je tento úrok připisován spojitě. Takovou možnost jsem si nemohl nechat ujít, takže jsem si vypůjčil všude možně a vložil na účet 500 tisíc Kč. Kolik peněz mi tato investice vynese za 10 let (a pro jednoduchost ignorujme 17% úrok na části získané nebankovní půjčkou)? Jak se tato částka změní, pokud budu během každého roku průběžně ukládat na účet ještě částku 10 tisíc Kč? A na jak dlouho mi celková částka vystačí, budu-li následně vybírat 60 tisíc Kč ročně?

Řešitelnost LDR

Nechť funkce $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ a $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ (přičemž $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$) jsou spojité. Pak pro libovolnou dvojici $x^* \in (a, b)$ a $y^* \in (c, d)$ má počáteční problém

$$y' + f(x)y = g(x) \quad \& \quad y(x^*) = y^*$$

jediné řešení. To lze explicitně vyjádřit jako

$$y(x) = e^{-\int_{x^*}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t} \left(y^* + \int_{x^*}^{x} g(t)\, e^{\int_{x^*}^{t} f(s)\,\mathrm{d}s}\, \mathrm{d}t \right).$$

Příklad

V „továrně na absolutno“ pracuje na výrobní lince pan K. ve 12-hodinových směnách. Za první hodinu vyrobí 25 kusů zboží a za druhou hodinu 45 kusů. Pomocí vhodné DR určete jeho maximální produkci za hodinu, pokud víte, že to, jak rychle je učí vyrábět výrobky, je přímo úměrné rozdílu mezi maximem a tím, kolik jich v čase t vyrobí. Poté využijte tuto hodnotu maxima a změňte rovnici tak, že do ní zakomponujete faktor únavy $u(t) = t^2/4$. Tento faktor únavy modeluje situaci, kdy produkce pracovníka klesá v důsledku délky pracovní doby. Jak se liší počet výrobků v 6. a 12. hodině směny? A ve kterém čase je jeho hodinová produkce na nejvyšší úrovni?

Nevlastní integrál na neohraničeném intervalu (i)

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, \infty)$. Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

říkáme, že nevlastní integrál

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

konverguje. Jeho hodnota je

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

V opačném případě, kdy je limita (1) nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál diverguje.

Nevlastní integrál na neohraničeném intervalu (ii)

Podobně definujeme nevlastní integrál

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

a nevlastní integrál na přímce

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Pozor na konvergenci „v.p.“!

Příklad

Vypočtěte nevlastní integrály:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx$,

(c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$, (d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$,

(e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$, (f) $\displaystyle\int_0^\infty \sin x\,dx$.

Nevlastní integrál z neohraničené funkce

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $(a, b]$ a funkce f není ohraničená na $[a, b]$. Pak bod a nazýváme singulárním bodem a definujeme nevlastní integrál

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

Jestliže je tato limita vlastní, říkáme, že integrál konverguje. V opačném případě, kdy je limita (2) nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál diverguje.

Podobně definujeme nevlastní integrál pro singulární bod b.

Příklad

Určete singulární body a vypočtěte nevlastní integrály:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx,$ (b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{2-x}\,dx,$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx,$ (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$

(e) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx,$ (f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx.$

Motivace

$$\int_1^e \frac{\ln(bx) - \ln(ax)}{x}\,dx \quad \text{pro } a, b > 0$$

vs.

$$\int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x}\,dx \quad \text{pro } a, b > 0$$

Parametrický integrál

Nechť funkce f je definovaná na obdélníku $[a, b] \times [c, d]$ a nechť pro každé $t \in [c, d]$ je funkce $g(x) := f(x, t)$ integrovatelná na intervalu $[a, b]$. Pak funkci

$$F(t) := \int_a^b f(x, t)\,dx$$

nazýváme integrálem závislým na parametru (parametrickým integrálem).

Vlastnosti PI

Je-li funkce $f(x, t)$ *spojitá* na obdélníku $[a, b] \times [c, d]$, pak

- i funkce $F(t) := \int_a^b f(x, t)\,dx$ je spojitá na $[c, d]$;
- platí

$$\int_c^d F(t)\,dt = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, t)\,dx \right) dt = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, t)\,dt \right) dx.$$

Při počítání integrálů s parametrem hraje velmi důležitou roli následující věta o možnosti záměny integrálu a derivace.

Leibnizův vzorec

Nechť funkce $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ je *spojitá* na obdélníku $[a, b] \times [c, d]$ a nechť má *spojitou parciální derivaci vzhledem k* t, tj. funkce $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ je *spojitá* na $[a, b] \times [c, d]$. Pak funkce $F(t) \coloneqq \int_a^b f(x, t)\, dx$ je diferencovatelná na $[c, d]$ a platí

$$F'(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_a^b f(x, t)\, dx\right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\, dx.$$

Příklad

$$\int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x}\, dx \quad \text{pro } a, b > 0.$$

Poznámka

Integrály závislé na parametru lze rozšířit i na případ nevlastních integrálů (obou druhů). V takovém případě platí velmi analogická tvrzení jako výše.

A k čemu?!

Zejména kvůli gamma funkci

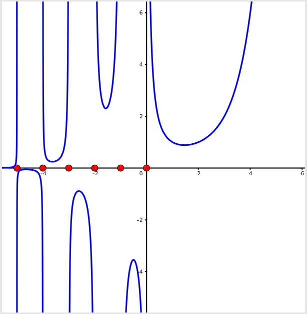
$$\Gamma(t) \coloneqq \int_0^\infty x^{t-1}\, e^{-x}\, dx$$

a případně beta funkci

$$B(p,q) \coloneqq \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Vlastnosti $\Gamma(t)$

- Konvergentní pro $t > 0$ a divergentní pro $t \leqslant 0$. Je ale definována pro $t \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}$.



Vlastnosti $\Gamma(t)$ (pokr.)

- Platí
$$\Gamma'(t) = \int_0^\infty x^{t-1} (\ln x)\, e^{-x}\, dx$$
- Je to zobecnění faktoriálu, neboť
$$\Gamma(a+n) = (a+n-1)\cdot(a+n-2)\cdots(a+1)\cdot a\cdot\Gamma(a)$$
pro $n \in \mathbb{N}$ a $a \in (0,1]$, což zejména pro $a = 1$ dává
$$\Gamma(n+1) = n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1 = n!,$$
a tedy $\Gamma(1) = 1 = \Gamma(2)$.
- Pro $t \in (0,1)$ platí
$$\Gamma(t)\,\Gamma(1-t) = \frac{\pi}{\sin(\pi t)},$$
a tudíž $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
- Pro $n \in \mathbb{N}$ platí
$$\Gamma(n+1/2) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\,\Gamma(1/2).$$

Konec.