

# MPE\_VPAM: VYBRANÉ PARTIE APLIKOVANÉ MATEMATIKY

PETR ZEMÁNEK (MASARYKOVA UNIVERZITA, BRNO)

Kapitola 2: Integrální počet v  $\mathbb{R}$

(verze: 3. října 2020)



- 1 PRIMITIVNÍ FUNKCE
- 2 ZÁKLADNÍ INTEGRAČNÍ METODY
- 3 URČITÝ INTEGRÁL
- 4 NEVLASTNÍ INTEGRÁL
- 5 INTEGRÁL ZÁVISLÝ NA PARAMETRU

Primitivní  
funkce

Nechť funkce  $f$  a  $F$  jsou definované na intervalu  $I$ . Jestliže platí

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pro všechna } x \in I,$$

pak říkáme, že funkce  $F$  je primitivní funkcí k funkci  $f$  na intervalu  $I$ .

Množinu všech primitivních funkcí k funkci  $f$  nazýváme neurčitý integrál funkce  $f$  a označujeme

$$\int f(x) dx.$$

Funkci  $f(x)$  nazýváme integrandem. Výraz  $dx$  je tzv. diferenciál proměnné  $x$  a je součástí označení pro integrál.

Pokud není interval  $I$  otevřený, pak v krajních bodech uvažujeme jednostranné derivace.

Kolik je  
primitivních  
funkcí?

Je-li funkce  $F(x)$  primitivní k funkci  $f(x)$  na intervalu  $I$ , pak každá jiná primitivní funkce k funkci  $f$  má tvar  $F(x) + c$ , kde  $c \in \mathbb{R}$ .

Odtud plyne

$$\int f(x) dx = F(x) + c,$$

kde  $c \in \mathbb{R}$  je tzv. nazývá integrační konstanta.

Z definice neurčitého integrálu také vyplývá, že

$$\left( \int f(x) dx \right)' = f(x), \quad \int F'(x) dx = F(x) + c,$$

tj. operace derivování a integrování jsou navzájem komplementární.

**Existence  
primitivní  
funkce****Vlastnosti  
primitivních  
funkcí**

Je-li funkce  $f$  spojitá na intervalu  $I$ , pak k ní na tomto intervalu existuje primitivní funkce.

Nechť na intervalu  $I$  existují neurčité integrály  $\int f(x) dx$  a  $\int g(x) dx$  a necht'  $\alpha$  je libovolná konstanta. Pak na  $I$  existuje neurčitý integrál funkcí  $f \pm g$  a  $\alpha f$  a platí

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx,$$
$$\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx.$$

Vzorce pro  
výpočet  
integrálu

$$\int 1 \, dx = x + c,$$

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1,$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + c,$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0, \quad a \neq 1,$$

$$\int e^x \, dx = e^x + c,$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c,$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + c,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{cotg} x + c,$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + c.$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + c,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{a} + c, \quad a > 0,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} \, dx = \ln |x + \sqrt{x^2+a}| + c, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{(x-x_0)^2+a^2} \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left( \frac{x-x_0}{a} \right) + c, \quad a > 0.$$

## Příklad

Vypočtěte neurčité integrály:

(a)  $\int (x^3 - 3x^2 + 5) dx,$       (b)  $\int (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2x^6) dx,$

(c)  $\int \left(2^x - \frac{2}{x}\right) dx,$       (d)  $\int \left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{5}{1+x^2}\right) dx.$

- 1 PRIMITIVNÍ FUNKCE
- 2 ZÁKLADNÍ INTEGRAČNÍ METODY
- 3 URČITÝ INTEGRÁL
- 4 NEVLASTNÍ INTEGRÁL
- 5 INTEGRÁL ZÁVISLÝ NA PARAMETRU



Metoda integrování per-partes je odvozena z derivace součinu. Víme, že platí  $(uv)' = u'v + uv'$ . Odtud integrací dostaneme

$$uv = \int u'v + \int uv'.$$

Známe-li jeden integrál, můžeme určit integrál druhý.

Metoda  
per-partes

Nechť funkce  $u(x)$  a  $v(x)$  mají derivaci na intervalu  $I$ . Existuje-li primitivní funkce  $k$  funkci  $u'(x)v(x)$ , pak

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx.$$

Zejména má-li  $u(x)$  spojitou derivaci na  $I$ , je existence primitivní funkce  $k$   $u'(x)v(x)$  zaručena.

Většinu integrálů řešených metodou per-partes můžeme rozdělit do dvou skupin. Je-li  $P(x)$  polynom, pak první skupinou jsou integrály typu

$$\int P(x)e^{ax} dx, \quad \int P(x) \sin ax dx, \quad \int P(x) \cos ax dx.$$

Zde volíme  $u = P(x)$ . Druhou skupinou jsou integrály

$$\int P(x) \ln x dx, \quad \int P(x) \operatorname{arctg} ax dx, \quad \int P(x) \arcsin ax dx.$$

Zde volíme  $v' = P(x)$ .

### Příklad

Vypočtěte neurčité integrály:

$$(a) \int x \cos x dx, \quad (b) \int x^2 e^{2x} dx,$$

$$(c) \int x \ln x dx, \quad (d) \int \ln x dx,$$

$$(e) \int e^x \sin x dx.$$

Substituční  
metoda

Substituční metoda plyne ze vzorce pro derivování složené funkce.

Nechť funkce  $f$  má na intervalu  $J$  primitivní funkci  $F$ , funkce  $t = \varphi(x)$  má derivaci na intervalu  $I$  a  $\varphi(x) \in J$  pro  $x \in I$ . Pak má složená funkce  $f(\varphi(x)) \varphi'(x)$  primitivní funkci na intervalu  $I$  a platí

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + c.$$

Při výpočtu postupujeme takto: položíme  $t = \varphi(x)$ , odkud formálně plyne

$$dt = \varphi'(x) dx,$$

a tedy můžeme psát

$$\begin{aligned} \int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx \Big|_{\substack{t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x) dx}} &= \int f(t) dt = \\ &= F(t) + c = F(\varphi(x)) + c. \end{aligned}$$

Podobně lze použít substituci opačnou, tj.  $x = \psi(t)$ , přičemž  $\psi(t)$  musí mít nenulovou derivaci na uvažovaném intervalu. Tuto substituční metodu můžeme zapsat ve tvaru

$$\int f(x) dx \left| \begin{array}{l} x = \psi(t) \\ dx = \psi'(t) dt \end{array} \right| = \int f(\psi(t)) \psi'(t) dt.$$

### Příklad

Vypočtete neurčité integrály:

$$(a) \int (3x - 4)^7 dx, \quad (b) \int \sin(7x + 3) dx,$$

$$(c) \int \frac{x}{x^2+1} dx, \quad (d) \int x^2 \cos x^3 dx,$$

$$(e) \int \cos^3 x dx, \quad (f) \int x\sqrt{1-x^2} dx,$$

$$(g) \int \sqrt{1-x^2} dx,$$

## Integrace racionální lomené funkce

Racionální lomená funkce je funkce tvaru

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde  $P$ ,  $Q$  jsou nenulové polynomy.

- Je-li  $R(x)$  neryze lomená funkce, rozložíme ji na součet polynomu a ryze lomené funkce.
- Ryze lomenou racionální funkci rozložíme na parciální zlomky, které jsou dvou typů:

$$\frac{M}{(x - \alpha)^k} \quad \text{nebo} \quad \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

podle toho, zda daný zlomek přísluší reálnému kořenu nebo komplexně sdružené dvojici kořenů polynomu  $Q$ .

Integrace  
racionální  
lomené  
funkce:  
nejkompli-  
kovanější  
případ

Jsou-li čísla  $\alpha \pm i\beta$  dvojnásobné komplexně sdružené kořeny polynomu  $Q$ , pak  $R$  má dva parciální zlomky tvaru

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} + \frac{Cx + D}{(ax^2 + bx + c)^2}.$$

Podobný rozklad dostaneme pro  $n$ -násobné ( $n \geq 3$ ) komplexní kořeny. Při výpočtu použijeme rekurentní vzorec

$$K_n(x) = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{3-2n}{2-2n} K_{n-1}(x),$$

kde

$$K_1(x) = \arctg x,$$

a rozklad

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n} dx &= \int \frac{Ax + B}{((x - \alpha)^2 + \beta^2)^n} dx = \\ &= \frac{A}{2} \frac{1}{(1-n)((x - \alpha)^2 + \beta^2)^{n-1}} + \frac{B + A\alpha}{\beta^{2n-1}} K_n\left(\frac{x - \alpha}{\beta}\right). \end{aligned}$$

## Příklad

Vypočtěte neurčité integrály:

(a) 
$$\int \frac{2x^2 + 6x - 2}{x(x+2)(x-1)} dx,$$

(b) 
$$\int \frac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)^3} dx,$$

(c) 
$$\int \frac{4x^2 - 21x + 27}{(x-4)(x^2 - 4x + 7)} dx,$$

(d) 
$$\int \frac{10x + 31}{(x^2 + 5x + 8)^2} dx.$$

V další části bude symbol  $R(a, b)$  značit racionální lomenou funkci v proměnných  $a, b$ , tj.

$$R(a, b) = \frac{P(a, b)}{Q(a, b)},$$

kde  $P(a, b)$  a  $Q(a, b)$  jsou polynomy v proměnných  $a, b$  (podobně i pro větší počet proměnných).

Integrál z funkce typu

$$R(x, \sqrt[q_1]{x^{p_1}}, \sqrt[q_2]{x^{p_2}}, \dots, \sqrt[q_n]{x^{p_n}}),$$

kde  $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n \in \mathbb{N}$ , můžeme substitucí

$$x = t^s,$$

kde  $s$  je nejmenší společný násobek čísel  $q_1, \dots, q_n$ , převést na integraci racionální lomené funkce.

### Příklad

Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \frac{\sqrt[6]{x} + 1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} dx.$$

Integrace  
funkcí s od-  
mocninami  
(i)



Integrace  
funkcí s od-  
mocninami  
(ii)

Integrály z funkcí tvaru

$$R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$$

převědeme na integrál z racionální lomené funkce substitucí

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Příklad

Vypočtete neurčitý integrál

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{1}{(1+x)^2} dx.$$

Integrace  
goniomet-  
rických  
funkcí (i)

Integrál typu

$$\int \sin^n x \cos^m x \, dx,$$

kde  $n, m \in \mathbb{N}$  můžeme vždy vhodnou substitucí převést na integrál z polynomu.

Je-li  $n$  liché číslo, použijeme substituci  $u = \cos x$ , je-li  $m$  liché, použijeme substituci  $v = \sin x$ . Jsou-li obě tato čísla lichá, budou fungovat obě substituce, technicky výhodnější je substituovat funkci, která je ve vyšší mocnině. V případě, že jsou obě čísla sudá, použijeme vzorce

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Příklad

Vypočtěte neurčité integrály:

(a)  $\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx,$       (b)  $\int \sin^4 x \, dx.$

Integrace  
goniometrických  
funkcí (ii)

Předchozí příklady můžeme zobecnit a dostaneme následující případy funkcí typu  $R(\sin x, \cos x)$ :

- i) Je-li integrovaná funkce lichá vůči cosinu, tj. platí-li

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

pak volíme substituci  $t = \sin x$ .

- ii) Je-li integrovaná funkce lichá vůči sinu, tj. platí-li

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

pak volíme substituci  $t = \cos x$ .

- iii) Platí-li

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

volíme substituci  $t = \operatorname{tg} x$ . Z definice goniometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku pak můžeme odvodit, že platí

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}.$$

Tato substituce je vhodná i pro integrály typu  $R(\operatorname{tg} x)$ .

Integrace  
goniometrických  
funkcí (iii)

Integrál z funkce typu  $R(\sin x, \cos x)$  můžeme vždy převést na integrál z racionální lomené funkce pomocí tzv. univerzální substituce

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Ze substituční rovnice plyne  $x = 2 \operatorname{arctg} t$  a tedy  $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$ . Pomocí definice goniometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku (tentokrát s úhlem  $x/2$ ) a vzorců pro dvojnásobný úhel můžeme odvodit, že

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Příklad

Pomocí univerzální substituce vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x} dx.$$

Pro úplnost si ještě naznačíme postup při integraci některých složitějších funkcí.

Integrály z funkcí typu

$$R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$$

můžeme v případě, kdy má kvadratická rovnice reálné kořeny, upravit na předchozí typ. Má-li rovnice komplexně sdružené kořeny, použijeme tzv. Eulerovy substitute, které jsou například pro  $a > 0$  tvaru

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{ax} \pm t,$$

a pro  $c \geq 0$  tvaru

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm xt \pm \sqrt{c}.$$

Druhou možností je doplnění výrazu pod odmocninou na čtverec, čímž získáme některý z typů

$$R(x, \sqrt{x^2 - a^2}), \quad R(x, \sqrt{x^2 + a^2}), \quad R(x, \sqrt{a^2 - x^2}),$$

kteří lze vyřešit pomocí substitucí (v uvedeném pořadí)

$$x = \frac{a}{\sin t}, \quad x = a \operatorname{tg} t, \quad x = a \sin t.$$

Binomické  
integrály

Integrály z funkcí typu

$$x^m(a + bx^n)^p,$$

kde  $a, b, m, n, p \in \mathbb{R}$ , nazýváme binomické. Tyto integrály lze převést na integrály z racionální lomené funkce v těchto případech:

- i)  $p \in \mathbb{Z}$ , a to substitucí  $x = t^s$ , kde  $s$  je společný jmenovatel čísel  $m, n$ ;
- ii)  $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ , a to substitucí  $a + bx^n = t^s$ , kde  $s$  je jmenovatel čísla  $p$ ;
- iii)  $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$ , a to substitucí  $ax^{-n} + b = t^s$ , kde  $s$  je jmenovatel  $p$ .

Vyšší  
transcenden-  
dentní  
funkce

Závěrem poznamenejme, že není vždy možné vyjádřit primitivní funkci k dané funkci pomocí elementárních funkcí (ačkoli víme, že existuje). Mezi takové patří například tyto neurčité integrály

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}, \quad \int e^{-x^2} dx, \quad \int \sin x^2 dx.$$

V těchto případech lze primitivní funkci vyjádřit například pomocí nekonečné mocninné řady. Například

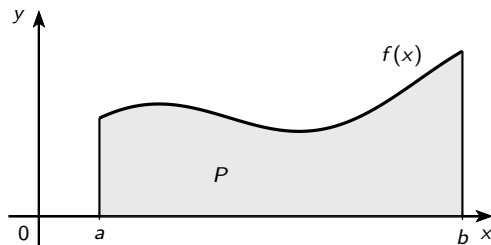
$$\int_0^t \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^{2n-1}}{(2n-1) \cdot (2n-1)!}.$$

- 1 PRIMITIVNÍ FUNKCE
- 2 ZÁKLADNÍ INTEGRAČNÍ METODY
- 3 URČITÝ INTEGRÁL
- 4 NEVLASTNÍ INTEGRÁL
- 5 INTEGRÁL ZÁVISLÝ NA PARAMETRU



## URČITÝ INTEGRÁL (I)

Nechť  $f$  je nezáporná ohraničená funkce definovaná na  $[a, b]$ , která je pro jednoduchost spojitá na intervalu  $[a, b]$ . Určeme obsah plochy  $P$  ohraničené grafem funkce  $f$ , osou  $x$  a přímkami  $x = a$ ,  $x = b$ . Tato plocha se někdy pro jednoduchost nazývá *podgraf* funkce.



## URČITÝ INTEGRÁL (II)

Obsah podgrafu nemůžeme určit přímo, vyjádříme jej přibližně tak, že jej aproximujeme pomocí obdélníků:

- i) Interval  $[a, b]$  rozdělíme na  $n$  intervalů  $[x_{i-1}, x_i]$  (tzv. dělicí intervaly) stejné délky tak, že  $x_0 = a$  a  $x_n = b$ . Délka  $\Delta x_i$  každého dělicího intervalu je

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b - a}{n}.$$

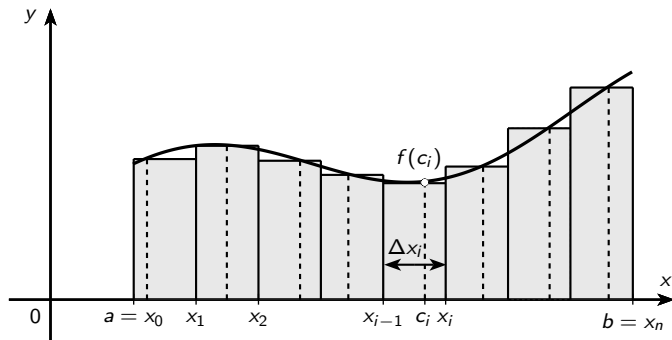
- ii) Na každém dělicím intervalu aproximujeme plochu vymezenou funkcí  $f$  a osou  $x$  obdélníkem o stranách  $\Delta x_i$  a  $f(c_i)$ , kde  $c_i$  náleží do dělicího intervalu. Pro obsah  $P_i$  tohoto obdélníku platí

$$P_i = f(c_i)\Delta x_i$$

a součet všech těchto obdélníků přibližně určuje obsah  $P$  plochy

$$P \approx \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i.$$

## URČITÝ INTEGRÁL (III)



## URČITÝ INTEGRÁL (IV)

Čím větší bude číslo  $n$  (počet dělicích bodů), tím přesnější (lepší) bude tato aproximace. Provedeme-li limitní přechod pro  $n \rightarrow \infty$ , dostaneme přesnou hodnotu obsahu plochy

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i.$$

Pro spojitě funkce tato limita existuje a nezávisí na výběru bodů  $c_i$ . Obecně pro funkce, které nejsou spojitě, toto nemusí platit. Pokud však tato limita existuje a nezávisí na výběru bodů  $c_i$ , nazýváme ji určitým integrálem a označujeme

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Symbol  $\int$  vznikl jako prodloužení písmene  $S$ , které bylo vybráno, protože integrál je limitou sumy.

## Určitý integrál

Nechť  $f$  je funkce ohraničená na intervalu  $[a, b]$ . Nechť  $a = x_0 < x_1 < x_2, \dots, x_n = b$  jsou body dělící interval  $[a, b]$  na  $n$  stejných subintervalů délky  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  a nechť  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Určitým integrálem funkce  $f$  od  $a$  do  $b$  rozumíme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x,$$

jestliže tato limita existuje a nezávisí na výběru bodů  $c_i$ . Píšeme

$$\int_a^b f(x) dx,$$

a říkáme, že funkce  $f$  je integrovatelná na  $[a, b]$ .

Číslo  $a$  nazýváme dolní mez, číslo  $b$  horní mez a funkci  $f$  integrand.

Vlastnosti  
určitého  
integrálu (i)

Jsou-li funkce  $f$  a  $g$  spojité na intervalu  $[a, b]$ , pak platí tyto vztahy:

$$\text{a) } \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx;$$

$$\text{b) } \int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx;$$

$$\text{c) } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \text{ kde } a < c < b;$$

$$\text{d) } \int_a^b f(x) dx \geq 0, \text{ jestliže } f(x) \geq 0 \text{ na intervalu } [a, b];$$

$$\text{e) } \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx, \text{ jestliže } f(x) \geq g(x) \text{ na intervalu } [a, b].$$

Vlastnost c) lze použít pro případ, kdy je funkce  $f$  spojitá na intervalu  $[a, c]$  a  $[c, b]$ , ale není spojitá v bodě  $c$ .

Vlastnosti  
určitého  
integrálu  
(ii)

Integrál  $\int_a^b f(x) dx$  pro  $a > b$  definujeme vztahem

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx,$$

a integrál  $\int_a^a f(x) dx$  definujeme vztahem

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

Definujeme-li pro každé číslo  $x \in [a, b]$  funkci

$$U(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

pak derivace této funkce je  $U'(x) = f(x)$  a  $U(a) = 0$ . Tímto způsobem někdy vyjadřujeme funkce, které jsou primitivní k funkci  $f$ , ale nejsou elementárními funkcemi, např. funkce

$$\int_0^x e^{-t^2} dt, \quad \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

Zásadní roli hraje tzv. Newtonova–Leibnitzova formule, která dává do souvislosti určitý integrál funkce a její primitivní funkci (neurčitý integrál).

Newtonova–  
Leibnitzova  
formule

Je-li funkce  $f$  spojitá na  $[a, b]$ , pak platí

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a),$$

kde  $F$  je primitivní funkce k funkci  $f$  na intervalu  $[a, b]$ .

Často píšeme místo  $F(b) - F(a)$  symbol  $[F(x)]_a^b$ , tj.

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b.$$

Příklad

Vypočtete určité integrály:

$$(a) \int_0^{\pi} \sin x \, dx, \quad (b) \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$



**Metoda  
per-partes  
pro určitý  
integrál**

Nechť funkce  $u(x)$  a  $v(x)$  mají derivaci na intervalu  $[a, b]$  a necht'  $u'(x)$  a  $v'(x)$  jsou integrovatelné na  $[a, b]$ . Pak platí

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

**Substituce  
pro určitý  
integrál**

Nechť funkce  $f(t)$  je spojitá na intervalu  $[a, b]$ . Necht' funkce  $\varphi(x)$  má derivaci na intervalu  $[\alpha, \beta]$ ,  $\varphi'(x)$  je integrovatelná na  $[\alpha, \beta]$  a  $\varphi(x)$  zobrazuje interval  $[\alpha, \beta]$  do intervalu  $[a, b]$ . Pak platí

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt.$$

**Příklad**

Vypočtete určité integrály:

(a)  $\int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx,$

(b)  $\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{1+3x}} dx.$

Obsah  
rovinného  
obrazce

Nechť funkce  $f$  je spojitá a nezáporná na intervalu  $[a, b]$ . Obsah podgrafu funkce  $f$  je dán vzorcem

$$P = \int_a^b f(x) dx.$$

Plocha, jejíž obsah chceme určit, může být vymezena grafy dvou funkcí. Platí-li například  $f(x) \geq g(x)$  pro  $x \in [a, b]$ , jedná se o plochu ohraničenou grafy funkcí  $f(x)$ ,  $g(x)$  a přímkami  $x = a$  a  $x = b$ . Jsou-li navíc funkce  $f, g$  spojité na  $[a, b]$ , platí pro obsah  $P$  takto vymezené plochy

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

## Příklad

Určete obsah kruhu s poloměrem  $r = 1$ . (A obecně  $r > 0$ ?)

## Příklad

Určete obsah omezené plochy určené grafy funkcí  $y = 1 - x^2$  a  $y = -3$ .

## Příklad

Určete obsah plochy vymezené grafy funkcí  $f(x) = 2 - x$ ,  $g(x) = 4 - x^2$  a přímkami  $x = -2$ ,  $x = 3$ .

Délka  
křivky

Nechť funkce  $f$  je spojitá a má spojitou derivaci  $f'$  na intervalu  $[a, b]$ .  
Délka grafu této funkce na intervalu  $[a, b]$  je dána

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Objem  
rotačního  
tělesa

Nechť funkce  $y = f(x)$  je spojitá a nezáporná na intervalu  $[a, b]$ . Objem  
tělesa, které vznikne rotací podgrafu funkce  $f$

$$P = \{[x, y] \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

kolem osy  $x$  je dán určitým integrálem

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Povrch  
rotačního  
tělesa

Nechť  $f$  je nezáporná funkce mající spojitou derivaci na intervalu  $[a, b]$ .  
Obsah pláště tělesa, které vznikne rotací podgrafu funkce  $f$  kolem osy  $x$ ,  
je dán určitým integrálem

$$Q = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

## Příklad

Horkovzdušný balón stoupá konstantní rychlostí 4 m/s a ve výšce 24 m je z něj vyhozen balíček. Za jak dlouho dopadne balíček na zem?

## Příklad

Předpokládejte, že v čase  $t = 0$  začne těžařská společnost čerpat ropu z vrtu, který v tomto čase obsahuje  $K$  barelů ropy.

## Příklad

Data shromažďovaná daňovými úřady mohou být použita k získání některých informací o rozdělení příjmů v daném roce.

## Příklad

Měření dopadů změn v ekonomickém prostředí na výroba spotřebitele patří mezi velmi důležité oblasti mikroekonomie.

A jiné  
využití?!

### DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE!

Obecně:  $F(x, y, y') = 0$  případně  $y' = f(x, y)$   
(počáteční problém)

DR se separovanými proměnnými:  $y' = f(x)g(y)$

Lineární DR 1. řádu:  $y' + f(x)y = g(x)$

## Řešitelnost DRsSP

Nechť funkce  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  a  $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  (přičemž  $-\infty \leq a < b \leq \infty$  a  $-\infty \leq c < d \leq \infty$ ) jsou spojité. Pak pro libovolnou dvojici  $x^* \in (a, b)$  a  $y^* \in (c, d)$  má počáteční problém

$$y' = f(x)g(y) \quad \& \quad y(x^*) = y^*$$

jediné řešení. To lze implicitně vyjádřit jako

$$\int_{y^*}^{y(x)} \frac{dt}{g(t)} = \int_{x^*}^x f(s) ds$$

## Spoření

V rámci skvělého programu péče o zaměstnance MU nabízí univerzita spořicí účet s ročním úrokem 3 %, přičemž je tento úrok připisován spojitě. Takovou možnost jsem si nemohl nechat ujít, takže jsem si vypůjčil všude možné a vložil na účet 500 tisíc Kč. Kolik peněz mi tato investice vynese za 10 let (a pro jednoduchost ignorujme 17% úrok na části získané nebankovní půjčkou)? Jak se tato částka změní, pokud budu během každého roku průběžně ukládat na účet ještě částku 10 tisíc Kč? A na jak dlouho mi celková částka vystačí, budu-li následně vybírat 60 tisíc Kč ročně?

## Řešitelnost LDR

Nechť funkce  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  a  $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  (přičemž  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ) jsou spojité. Pak pro libovolnou dvojici  $x^* \in (a, b)$  a  $y^* \in (c, d)$  má počáteční problém

$$y' + f(x)y = g(x) \quad \& \quad y(x^*) = y^*$$

jediné řešení. To lze explicitně vyjádřit jako

$$y(x) = e^{-\int_{x^*}^x f(t)dt} \left( y^* + \int_{x^*}^x g(t) e^{\int_{x^*}^t f(s)ds} dt \right).$$

## Příklad

V „továrně na absolutno“ pracuje na výrobní lince pan K. ve 12-hodinových směnách. Za první hodinu vyrobí 25 kusů zboží a za druhou hodinu 45 kusů. Pomocí vhodné DR určete jeho maximální produkci za hodinu, pokud víte, že rychlost jeho produktivity je přímo úměrná rozdílu mezi maximem a tím, kolik v čase  $t$  vyrobí. Poté využijte tuto hodnotu maxima a změňte rovnici tak, že do ní zakomponujete faktor únavy  $u(t) = t^2/4$ . Tento faktor únavy modeluje situaci, kdy produkce pracovníka klesá v důsledku délky pracovní doby. Jak se liší počet výrobků v 6. a 12. hodině směny? A ve kterém čase je jeho hodinová produkce na nejvyšší úrovni?

- 1 PRIMITIVNÍ FUNKCE
- 2 ZÁKLADNÍ INTEGRAČNÍ METODY
- 3 URČITÝ INTEGRÁL
- 4 NEVLASTNÍ INTEGRÁL
- 5 INTEGRÁL ZÁVISLÝ NA PARAMETRU



Nevlastní  
integrál na  
neohraniče-  
ném  
intervalu (i)

Nechť funkce  $f$  je spojitá na intervalu  $[a, \infty)$ . Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \, dx, \quad (1)$$

říkáme, že nevlastní integrál

$$\int_a^{\infty} f(x) \, dx$$

konverguje. Jeho hodnota je

$$\int_a^{\infty} f(x) \, dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \, dx.$$

V opačném případě, kdy je limita (1) nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál diverguje.

Nevlastní  
integrál na  
neohraniče-  
ném  
intervalu (ii)

Podobně definujeme nevlastní integrál

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

a nevlastní integrál na přímce

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{\infty} f(x) dx.$$

Pozor na konvergenci „v.p.“!

Příklad

Vypočtěte nevlastní integrály:

(a)  $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx,$

(b)  $\int_0^{\infty} e^{-x} dx,$

(c)  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx,$

(d)  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx,$

(e)  $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx,$

(f)  $\int_0^{\infty} \sin x dx.$

**Nevlastní  
integrál  
z neohrani-  
čené  
funkce**

Nechť funkce  $f$  je spojitá na intervalu  $(a, b]$  a funkce  $f$  není ohraničená na  $[a, b]$ . Pak bod  $a$  nazýváme singulárním bodem a definujeme nevlastní integrál

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx. \quad (2)$$

Jestliže je tato limita vlastní, říkáme, že integrál konverguje. V opačném případě, kdy je limita (2) nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál diverguje.

Podobně definujeme nevlastní integrál pro singulární bod  $b$ .

**Příklad**

Určete singulární body a vypočtěte nevlastní integrály:

(a)  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx,$

(b)  $\int_0^2 \frac{1}{2-x} dx,$

(c)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx,$

(d)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx,$

(e)  $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} dx,$

(f)  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx.$

- 1 PRIMITIVNÍ FUNKCE
- 2 ZÁKLADNÍ INTEGRAČNÍ METODY
- 3 URČITÝ INTEGRÁL
- 4 NEVLASTNÍ INTEGRÁL
- 5 INTEGRÁL ZÁVISLÝ NA PARAMETRU

## Motivace

$$\int_1^e \frac{\ln(bx) - \ln(ax)}{x} dx \quad \text{pro } a, b > 0$$

vs.

$$\int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x} dx \quad \text{pro } a, b > 0$$

Parametrický  
integrál

Nechť funkce  $f$  je definovaná na obdélníku  $[a, b] \times [c, d]$  a nechť pro každé  $t \in [c, d]$  je funkce  $g(x) := f(x, t)$  integrovatelná na intervalu  $[a, b]$ . Pak funkci

$$F(t) := \int_a^b f(x, t) dx$$

nazýváme integrálem závislým na parametru (parametrickým integrálem).

Vlastnosti  
PI

Je-li funkce  $f(x, t)$  *spojitá* na obdélníku  $[a, b] \times [c, d]$ , pak

- i funkce  $F(t) := \int_a^b f(x, t) dx$  je *spojitá* na  $[c, d]$ ;
- platí

$$\int_c^d F(t) dt = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, t) dx \right) dt = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, t) dt \right) dx.$$

Při počítání integrálů s parametrem hraje velmi důležitou roli následující věta o možnosti záměny integrálu a derivace.

### Leibnizův vzorec

Nechť funkce  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  je *spojitá* na obdélníku  $[a, b] \times [c, d]$  a nechť má *spojitou parciální derivaci vzhledem k t*, tj. funkce  $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$  je *spojitá* na  $[a, b] \times [c, d]$ . Pak funkce  $F(t) := \int_a^b f(x, t) dx$  je diferencovatelná na  $[c, d]$  a platí

$$F'(t) = \frac{d}{dt} \left( \int_a^b f(x, t) dx \right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx.$$

### Příklad

$$\int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x} dx \quad \text{pro } a, b > 0.$$

### Poznámka

Integrály závislé na parametru lze rozšířit i na případ nevlastních integrálů (obou druhů). V takovém případě platí velmi analogická tvrzení jako výše.

## A k čemu?!

Zejména kvůli gamma funkci

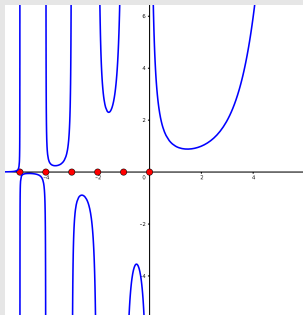
$$\Gamma(t) := \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$$

a případně beta funkci

$$B(p, q) := \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Vlastnosti  
 $\Gamma(t)$

- Konvergentní pro  $t > 0$  a divergentní pro  $t \leq 0$ . Je ale definována pro  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ .



## Vlastnosti $\Gamma(t)$ (pokr.)

- Platí

$$\Gamma'(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} (\ln x) e^{-x} dx$$

- Je to zobecnění faktoriálu, neboť

$$\Gamma(a+n) = (a+n-1) \cdot (a+n-2) \cdots (a+1) \cdot a \cdot \Gamma(a)$$

pro  $n \in \mathbb{N}$  a  $a \in (0, 1]$ , což zejména pro  $a = 1$  dává

$$\Gamma(n+1) = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!,$$

a tedy  $\Gamma(1) = 1 = \Gamma(2)$ .

- Pro  $t \in (0, 1)$  platí

$$\Gamma(t) \Gamma(1-t) = \frac{\pi}{\sin(\pi t)},$$

a tudíž  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ .

- Pro  $n \in \mathbb{N}$  platí

$$\Gamma(n+1/2) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \Gamma(1/2).$$



Konec.