

UKÁZKOVÁ ZKOUŠKOVÁ PÍSEMNÁ PRÁCE

- Jméno a příjmení (UČO): _____
- Počet listů s řešením: _____

$1_{1,5}$	$2_{1,5}$	3_2	4_2	5_3	Σ_{10}	\curvearrowright

- Všechny své výpočty a odpovědi řádně zdůvodněte.
- Čas na vypracování je **120 minut**.
- Z písemné části lze získat nejvýše 10 bodů. Pro postoupení k ústní části je nutné získat **alespoň 4 body**. Ústní část začne **xx. xxx 20xx v xx hodin** v pracovně zkoušejícího (2. poschodí, kancelář 02021a).
- Předběžné rozdělení známek dle bodů z písemné části (může se změnit na základě ústní části):

$$[10,9] = \mathbf{A}, \quad (9,8] = \mathbf{B}, \quad (8,7] = \mathbf{C}, \quad (7,6] = \mathbf{D}, \quad (6,5] = \mathbf{E}, \quad (5,0] = \mathbf{F}.$$

- **HODNĚ ŠTĚSTÍ!** (Pokud jej potřebujete.)

UKÁZKOVÁ ZKOUŠKOVÁ PÍSEMNÁ PRÁCE

ZADÁNÍ PÍSEMNÉ ČÁSTI

1. (1,5 bodu) Nalezněte všechna $z \in \mathbb{C}$ vyhovující rovnosti

$$\cos z + \sin z = i.$$

2. (1,5 bodu) Necht' $v(x, y) = e^{-x}(y \cos y - x \sin y)$.

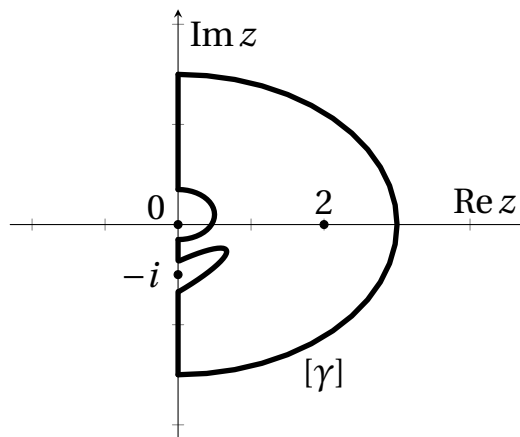
- (i) Určete maximální množinu v \mathbb{R}^2 (vzhledem k množinové inkluzi), na které je tato funkce harmonická.
- (ii) Nalezněte komplexní funkci f a oblast $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ tak, že $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ je holomorfní, platí $\operatorname{Im} f(x + iy) = v(x, y)$ a $f(0) = 1$.

3. (2 body) Bez použití reziduové věty vypočtete

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z(z-2)^2[z^2 - 2i + (i-2)z]} dz,$$

jestliže γ je

- (a) dána předpisem $\gamma(t) = \frac{1}{2}e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$;
- (b) dána předpisem $\gamma(t) = -1 + i + 3e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$;
- (c) kladně orientovaná Jordanova cesta, jejíž graf je na obrázku níže.



4. (2 body) V okolí $z_0 = 0$ a $z_1 = \infty$ nalezněte Laurentovy rozvoje funkce

$$f(z) = \frac{(i-1)z^2 + iz + 2}{z(z-1)(z+2i)} = \frac{i}{z} + \frac{1}{z-1} - \frac{2}{z+2i}.$$

Určete také maximální množiny v \mathbb{C} (vzhledem k množinové inkluzi), na kterých jsou nalezené rozvoje platné.

Bonus (kdybyste se nudili): Určete Laurentův rozvoj v mezikruží $1 < |z - 1 + 2i| < 2$.

5. (3 body) Určete všechny izolované singularity funkce $f(z) = \frac{z}{(z-2\pi)(e^{iz}-1)}$. Je také bod $z = \infty$ také izolovanou singularitou? S pomocí získaných výsledků a reziduové věty vypočtete $\int_{\gamma} f(z) dz$, jestliže γ je kladně orientovaná Jordanova cesta, jejímž grafem je kružnice se středem v bodě $z_0 = -4$ a poloměrem $r = 5$.

Bonus (kdybyste se opravdu nudili): Vypočtete tentýž integrál v případě $z_0 = 4$.