

M5170: MATEMATICKÉ PROGRAMOVÁNÍ

PETR ZEMÁNEK (MASARYKOVA UNIVERZITA, BRNO)

Kapitola 4: Základy matematického programování

(verze: 10. listopadu 2020)



Nyní se již dostáváme k úlohám matematického programování (a jejich řešení), tj.

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X, \quad (4.1)$$

kde *přípustná množina* X je zadána systémem rovností a nerovností

$$X := \{x \in P \subseteq \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, \quad g_j(x) = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad j = k + 1, \dots, m\}, \quad (4.2)$$

tj.

$$X = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, k\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) = 0, \quad j = k + 1, \dots, m\},$$

přičemž funkce f, g_1, \dots, g_m nemusí být nutně diferencovatelné. Omezení $x \in P \neq \emptyset$ se nazývá *přímé* (typicky: \mathbb{R}^n , \mathbb{R}_+^n nebo \mathbb{R}_{++}^n) a omezení určená funkcemi g_1, \dots, g_m se nazývají *funkcionální* (BÚNO lze uvažovat úlohy s omezeními výhradně ve tvaru rovností/nerovností \rightsquigarrow výhodné?).

4.1 OBEČNÁ OPTIMALIZAČNÍ ÚLOHA

4.2 NUTNÉ A POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKY OPTIMALITY V MP

4.3 TEORIE (LAGRANGEOVY) DUALITY

4.4 ANALÝZA CITLIVOSTI

Nejdřívě se podíváme na obecnou úlohu MP, tj. na úlohu (4.1) s (blíže nespécifikovanou) množinou $X \subseteq \mathbb{R}^n$ a funkcí $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Zavedme si dvě množiny

$$\mathcal{V}(x^*, X) := \left\{ h \in \text{Lin } X \mid \exists \alpha_0 > 0 : x^* + th \in X \text{ pro } \forall t \in (0, \alpha_0) \right\},$$

$$\mathcal{U}(x^*, f) := \left\{ h \in \text{Lin } X \mid \exists \alpha_0 > 0 : x^* + th \in D(f) \ \& \right. \\ \left. \& f(x^* + th) < f(x^*) \text{ pro } \forall t \in (0, \alpha_0) \right\}.$$

Význam těchto množin?

- (i) $\mathcal{V}(x^*, X)$ je tzv. *množina přípustných vektorů* (směrů pro $\|h\| = 1$) v bodě x^* . Je to kužel? Konvexní? A je-li $x^* \in \text{ri } X$?
- (ii) $\mathcal{U}(x^*, f)$ obsahuje tzv. *spádové vektory* a jedná se o tzv. *kužel zlepšujících vektorů* (směrů pro $\|h\| = 1$) funkce f v bodě x^* .

S využitím těchto dvou množin obdržíme první nutnou podmínku pro existenci lokálního řešení úlohy (4.1). Tvzení je asi víceméně zřejmé a důkaz relativně snadný, ale význam tohoto tvrzení pro námi budovanou teorii je značný.

Lemma 4.1.1

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ a $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ jsou dány. Je-li bod $x^* \in X$ lokálním řešením úlohy (4.1), potom

$$\mathcal{V}(x^*, X) \cap \mathcal{U}(x^*, f) = \emptyset. \quad (4.1.1)$$

Důkaz. Sporem. Nechť $x^* \in X$ je lokálním řešením úlohy (4.1) a existuje $h \in \mathcal{V}(x^*, X) \cap \mathcal{U}(x^*, f)$, tj. $\exists \alpha_u, \alpha_v > 0$ taková, že $x^* + th \in X$ pro $t \in (0, \alpha_v)$ a $f(x^* + th) < f(x^*)$ pro $t \in (0, \alpha_u)$. Potom tedy pro libovolné $t \in (0, \alpha)$, kde $\alpha \in (0, \min\{\alpha_v, \alpha_u\})$, je současně $x^* + th \in X \subset D(f)$ a $f(x^* + th) < f(x^*)$ ζ ■



Obrázek.

Podmínka (4.1.1) bude jistě splněna, pokud $\mathcal{U}(x^*, f) = \emptyset$. Kdy to nastane? Pro spojitě diferencovatelnou funkci dostaneme požadavek

$$\langle \text{grad } f(x^*), h \rangle \geq 0$$

pro každý vektor $h \in \text{Lin } X$ splňující $x^* + th \in D(f)$ pro $t > 0$ dostatečně malá. Zejména v případě $\text{Lin } X = \mathbb{R}^n$ a $x^* \in \text{int } D(f)$ musí platit $\text{grad } f(x^*) = 0$.

Nicméně toto je zbytečně silný požadavek, nám postačuje (4.1.1), což nás přivádí k následující definici (viz Poznámku 2.4.3A).

Definice 4.1.2

Nechť množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní a funkce $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ diferencovatelná na (nějaké otevřené množině obsahující) X . Řekneme, že bod $x^* \in X$ je *stacionárním bodem* úlohy (4.1) (nebo *stacionárním bodem funkce f na množině X*), jestliže

$$\langle \text{grad } f(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad (4.1.2)$$

pro každé $x \in X$.

Je-li $X = \mathbb{R}^n$, pak podmínka (4.1.2) je tvaru

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} (x_i - x_i^*) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

což je splněno pouze v případě $\text{grad } f(x^*) = 0$ (viz „klasická“ definice stacionárního bodu).

Následující věta ukazuje, že stacionární bod ve smyslu Definice 4.1.2 má přesně ty vlastnosti, které od něj očekáváme.

Věta 4.1.3

Nechť funkce $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná na (nějaké otevřené množině obsahující konvexní množinu) $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

- (i) Je-li $x^* \in X$ lokálním extrémem funkce f na X (tj. lokálním řešením úlohy (4.1)), pak x^* je stacionárním bodem funkce f na X .
- (ii) Naopak, je-li f (ostře) konvexní na X a $x^* \in X$ je stacionárním bodem f na X , pak x^* je (jediným) řešením úlohy (4.1), tj. (jediným) globálním minimem f na X .

První část Věty 4.1.3 udává nutnou podmínku pro řešení úlohy (4.1), ze které se ovšem ve druhé části (po přidání požadavku konvexnosti funkce f) stala postačující \rightsquigarrow máme totiž úlohu konvexního programování (minimalizujeme konvexní funkci na konvexní množině \rightsquigarrow stačí „pouze“ najít stacionární body – ty jsou totiž zároveň globálními minimy; pozor na Větu 2.2.6).



Obrázek.

Důkaz. Nechť $x^* \in X$ je lokálním řešením úlohy (4.1) a neplatí (4.1.2), tj. existuje $x \in X$ takové, že $\langle \text{grad } f(x^*), x - x^* \rangle < 0$. Potom pro $h := x - x^*$ máme $h \in \mathcal{V}(x^*, X)$, neboť z konvexnosti množiny X plyne

$$x^* + th = x^* + t(x - x^*) = tx + (1 - t)x^* \in X \quad \text{pro každé } t \in [0, 1],$$

a současně $h \in \mathcal{U}(x^*, f)$, neboť platí

$$0 > \langle \text{grad } f(x^*), x - x^* \rangle = f'_h(x^*) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x^* + th) - f(x^*)}{t},$$

tj. existuje $\alpha_0 > 0$ takové, že $f(x^* + th) < f(x^*)$ pro každé $t \in (0, \alpha_0)$. Tedy celkem $h \in \mathcal{V}(x^*, X) \cap \mathcal{U}(x^*, f) \neq \emptyset$.

Naopak, je-li funkce f (ostře) konvexní a $x^* \in X$ splňuje (4.1.2) pro každé $x \in X$, pak z Věty 2.4.2 plyne

$$f(x) \underset{(>)}{\geq} f(x^*) + \langle \text{grad } f(x^*), x - x^* \rangle \quad \forall x \in X,$$

což vzhledem k (4.1.2) znamená

$$f(x) \underset{(>)}{\geq} f(x^*) \quad \forall x \in X,$$

tj. x^* je (jediným) řešením úlohy (4.1). ■

Z praktického pohledu (viz např. příklady později) je velmi důležitá situace

$$X = \mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \dots, x_n \geq 0\}.$$

V takovém případě obdržíme z Věty 4.1.3 následující důsledek.

Důsledek 4.1.4

Nechť funkce $f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná na nějaké otevřené množině obsahující \mathbb{R}_+^n . Je-li $x^* \in \mathbb{R}_+^n$ řešením úlohy

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in \mathbb{R}_+^n, \quad (4.1.3)$$

pak platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) \geq 0 \quad \& \quad x_i^* \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.1.4)$$

neboli pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ máme

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) \geq 0 \quad \text{a navíc} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0 \quad \text{v případě } x_i^* > 0$$

Naopak, splňuje-li bod $x^* \in \mathbb{R}_+^n$ podmínku (4.1.4) a funkce f je navíc konvexní na \mathbb{R}_+^n , pak x^* je řešením úlohy (4.1.3).



Obrázek.

DŮKAZ DŮSLEDKU 4.1.4

Nechť $x^* \in \mathbb{R}^n$ je řešením (lokálním = globálním) úlohy (4.1.3). Pak podle Věty 4.1.3 je x^* stacionárním bodem, tj.

$$\langle \text{grad } f(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^n$$

neboli

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) (x_i - x_i^*) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^n. \quad (*)$$

Potom ale nutně $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) (x_i - x_i^*) \geq 0$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ a $x \in \mathbb{R}_+^n$. Vskutku, jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) (\tilde{x}_j - x_j^*) < 0$ pro nějaký index $j \in \{1, \dots, n\}$ a nějaké $\tilde{x} \in \mathbb{R}_+^n$, pak stačí vzít $\tilde{x} \in \mathbb{R}_+^n$ takové, že $\tilde{x}_i - x_i^* = 0$ (tj. $\tilde{x}_i = x_i^*$) pro $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$ a $\tilde{x}_j = \tilde{x}_j \neq x_j^*$ (to lze, neboť $X = \mathbb{R}_+^n$). Tím ale dostaneme spor s (*). Tedy (*) skutečně platí právě tehdy, když $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) (x_i - x_i^*) \geq 0$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ a $x \in \mathbb{R}_+^n$ (opačná implikace je triviální).

DŮKAZ DŮSLEDKU 4.1.4 (POKR.)

Jenže současně platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*)(x_i - x_i^*) \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, x \in \mathbb{R}_+^n \iff \text{platí (4.1.4).}$$

Pro dokončení první části důkazu proto musíme ještě ukázat tuto ekvivalenci.

(i) Nechť pro $i \in \{1, \dots, n\}$ platí levá strana ekvivalence.

- (a) Je-li $x_i^* = 0$, pak $x_i - x_i^* \geq 0$ pro všechna $x \in X$, takže nutně $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) \geq 0$, tj. platí (4.1.4)(i) a podmínka (4.1.4)(ii) je v tomto případě splněna triviálně.
- (b) Je-li $x_i^* > 0$, pak rozdíl $x_i - x_i^*$ může nabývat kladných i záporných hodnot na X , takže nutně $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0$, tedy zjevně platí (4.1.4)(i) a (4.1.4)(ii).

(ii) Naopak, nechť pro $i \in \{1, \dots, n\}$ platí (4.1.4).

- (a) Je-li $x_i^* = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) \geq 0$, pak $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) x_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) (x_i - x_i^*) \geq 0$ pro každé $x \in X$.
- (b) Je-li $x_i^* > 0$, pak $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0$ dle (4.1.4), a tudíž $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) (x_i - x_i^*) = 0$ pro každé $x \in X$.

Odtud plyne, že vždy platí $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) (x_i - x_i^*) \geq 0$.

Důkaz první části je tímto hotov.

DŮKAZ DŮSLEDKU 4.1.4 (POKR.)

Naopak, necht' pro $x^* \in X$ platí (4.1.4) a funkce f je konvexní na \mathbb{R}_+^n . Potom dle předchozí části $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*)(x_i - x_i^*) \geq 0$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ a $x \in \mathbb{R}_+^n$, a tudíž také $\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*)(x_i - x_i^*) \geq 0$ neboli

$$\langle \text{grad } f(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^n,$$

tj. $x^* \in \mathbb{R}^n$ je stacionární bod funkce f na X . Ovšem vzhledem ke konvexnosti funkce f plyne z Věty 4.1.3, že x^* je řešením úlohy (4.1.3). ■

Podobně jako v Důsledku 4.1.4 můžeme z Věty 4.1.3 získat nutné (a v případě konvexní funkce také postačující) podmínky pro (lokální/globální) řešení úlohy (4.1) pro některé další významné typy množiny X .

(i) Pro množinu

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, i \in I\}, \quad I \subset \{1, \dots, n\}$$

je (nutná/postačující) podmínka tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) \geq 0 \quad \& \quad x_i^* \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0 \quad \text{pro } i \in I \quad \& \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0 \quad \text{pro } i \in \{1, \dots, n\} \setminus I.$$

(ii) Pro množinu

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i, i = 1, \dots, n\},$$

kde $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ jsou daná čísla a $\alpha_i < \beta_i$, je (nutná/postačující) podmínka tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) \begin{cases} \geq 0, & x_i^* = \alpha_i, \\ \leq 0, & x_i^* = \beta_i, \\ = 0, & \alpha_i < x_i^* < \beta_i. \end{cases}$$

(iii) Pro množinu

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = r\},$$

kde $r > 0$ je dané číslo (jedná se o zobecnění jednotkového $(n-1)$ -simplexu), je (nutná/postačující) podmínka ve tvaru implikace

$$x_i^* > 0 \implies \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) \leq \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) \text{ pro } \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

V případě, že funkce f není konvexní, potřebujeme k rozhodnutí o „extrémnosti“ stacionárního bodu x^* nějaký další nástroj. Je-li $f \in C^2$, pak máme podmínky druhého řádu:

**Nutná
podmínka
pro (4.1)**

Je-li $x^* \in X$ lokálním minimem funkce $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2$, na konvexní množině $X \subseteq \mathbb{R}^n$, pak

$$(x - x^*)^\top \nabla^2 f(x^*) (x - x^*) \geq 0$$

pro všechna $x \in X$ taková, že $\text{grad}^\top f(x^*) (x - x^*) = 0$, tj. pro vektory $(x - x^*) \in \text{Ker grad}^\top f(x^*)$.

**Postačující
podmínka
pro (4.1)**

Bod $x^* \in X$ je lokálním minimem funkce $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2$, na konvexní množině $X \subseteq \mathbb{R}^n$, jestliže

$$\text{grad}^\top f(x^*) (x - x^*) \geq 0, \quad \forall x \in X$$

(tj. je to stacionární bod), množina X je polyedr a platí

$$(x - x^*)^\top \nabla^2 f(x^*) (x - x^*) > 0$$

pro všechna $x \in X$ taková, že $x \neq x^*$ a $(x - x^*) \in \text{Ker grad}^\top f(x^*)$.

Proč polyedr? V takovém případě je totiž množina $\mathcal{V}(x^*, X)$ uzavřená.

Některé
historické
úlohy

- Keplerův problém: Do dané koule vepište válec s maximálním objemem (planimetrická formulace: kruh \rightsquigarrow obdélník \rightsquigarrow obsah).
- Steinerův problém: V rovinném trojúhelníku najděte takový bod, že součet jeho vzdáleností od vrcholů trojúhelníku je minimální (\rightsquigarrow /Fermatův–/Toricelliho bod).
- Tartagliova úloha: Rozdělte číslo 8 na dvě části tak, aby jejich součin s jejich rozdílem byl maximální.

„Moderní“
úlohy

- Lineární programování (LP)

$$c^T x \rightarrow \min, \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0,$$

kde $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ jsou dány (viz M4140 nebo M0160). Např. optimální výrobní program, dopravní problém atd. Toto úzce souvisí s celočíselným programováním (ZLP), např. problém batohu/zloděje, problém obchodního cestujícího (viz M0160).

- ekonomické úlohy: maximalizace užítku/zisku, minimalizace výdajů/nákladů, tvorba portfolia \rightsquigarrow kvadratické programování (viz M0160)

4.1 OBECNÁ OPTIMALIZAČNÍ ÚLOHA

4.2 NUTNÉ A POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKY OPTIMALITY V MP

4.3 TEORIE (LAGRANGEOVY) DUALITY

4.4 ANALÝZA CITLIVOSTI

V předchozí části jsme řešili obecnou minimalizační úlohu (4.1) a viděli jsme, že důležitou roli zde hraje geometrie množiny X (vektory $x - x^*$). Abychom se mohli v našich úvahách posunout dále musíme určit množinu X blíže, proto se dále budeme zabývat úlohou (4.1) & (4.2), tj.

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X, \quad (4.1)$$

$$X := \{x \in P \subseteq \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, \quad g_j(x) = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad j = k + 1, \dots, m\}. \quad (4.2)$$

Její speciální případ s $P = \mathbb{R}^n$ a $k = 0$ již řešit umíme za předpokladu regularity Jacobiho matice $DG(x)$ s pomocí stacionárních bodů přidružené (regulární) Lagrangeovy funkce

$$L(x, y) = f(x) + \sum_{i=1}^m y_i g_i(x).$$

Podobně budeme postupovat i v případě obecné úlohy (4.1) & (4.2). K této úloze přidružíme (obecnou) *Lagrangeovu funkci* $L : P \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ danou předpisem

$$L(x, y_0, y) := y_0 f(x) + \sum_{i=1}^m y_i g_i(x), \quad (4.2.1)$$

přičemž v případě $y_0 = 1$ bude $L(x, 1, y) =: L(x, y)$. Čísla y_0, \dots, y_m opět nazýváme *Lagrangeovými multiplikátory*.

Pro výklad ještě potřebujeme následující množiny

$$Q := \{y = (y_1, \dots, y_m)^T \mid y_1, \dots, y_k \geq 0\},$$

$$I(x^*) := \{i \in \{1, \dots, k\} \mid g_i(x^*) = 0\}, \quad x^* \in X,$$

$$S(x^*) := I(x^*) \cup \{k+1, \dots, m\}, \quad x^* \in X.$$

Množina $I(x^*)$ značí množinu *aktivních omezení* v bodě x^* . Množina $S(x^*)$ pak je tvořena indexy všech funkcí určujících množinu X , které se v bodě x^* realizují jako rovnosti.

Věta 4.2.1

(Lagrangeův princip) Necht množina $P \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní, funkce $f, g_1, \dots, g_k : P \rightarrow \mathbb{R}$ jsou diferencovatelné v bodě $x^* \in X$ a $g_{k+1}, \dots, g_m : P \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojitě diferencovatelné v nějakém okolí bodu x^* . Je-li bod $x^* \in X$ lokálním řešením úlohy (4.1) & (4.2), pak existují Lagrangeovy multiplikátory $y_0^*, y_1^*, \dots, y_k^* \geq 0, y_{k+1}^*, \dots, y_m^* \in \mathbb{R}$, tj. $y_0^* \geq 0$ a $y^* \in Q$, taková, že ne všechna y_0^*, \dots, y_m^* jsou nulová a platí

$$\langle \text{grad}_x L(x^*, y_0^*, y^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in P, \quad (4.2.3)$$

$$y_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.2.4)$$

Podmínka (4.2.3) \rightsquigarrow x^* je stacionárním bodem funkce $L(x, y_0^*, y^*)$ na P .

Podmínka (4.2.4) \rightsquigarrow podmínka komplementarity.

Požadavek $y_1^*, \dots, y_k^* \geq 0$ \rightsquigarrow podmínka duality.

(4.2.3)+(4.2.4) \rightsquigarrow Johnovy podmínky a pro $y_0^* = 1$ \rightsquigarrow KKT-podmínky.

DŮKAZ VĚTY 4.2.1

Pro jednoduchost se omezíme na situaci, kdy funkce g_{k+1}, \dots, g_m jsou pouze afinní (v opačném případě je potřeba použít Větu o implicitní funkci). Nechť $x^* \in X$ je lokální řešení úlohy (4.1) & (4.2) a uvažme systém nerovností a rovností na množině P ve tvaru

$$\left. \begin{aligned} \langle \text{grad } f(x^*), x - x^* \rangle &< 0, \\ \langle \text{grad } g_i(x^*), x - x^* \rangle &< 0, \quad i \in I(x^*), \\ \langle \text{grad } g_j(x^*), x - x^* \rangle &= 0, \quad j = k + 1, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (4.2.5)$$

Předpokládejme, že existuje řešení $\tilde{x} \in P$ tohoto systému. Označme $h := \tilde{x} - x^*$. Potom $x^* + th \in P$ pro libovolné $t \in [0, 1]$. Ukážeme, že $h \in \mathcal{U}(x^*, f)$ a současně $h \in \mathcal{V}(x^*, X)$:

- (i) Jelikož funkce f je diferencovatelná v bodě x^* , může využít Taylorovu větu, čímž dostaneme

$$\frac{f(x^* + th) - f(x^*)}{t} = \langle \text{grad } f(x^*), h \rangle + \frac{o(\|th\|)}{t\|h\|} \|h\| < 0 \quad t \rightarrow 0^+,$$

takže $h \in \mathcal{U}(x^*, f)$.

DŮKAZ VĚTY 4.2.1 (POKR.)

(ii) Podobně pro $i \in I(x^*)$ plyne ze druhé nerovnosti, že funkce g_i jsou klesající ve směru h a současně $g_i(x^*) = 0$, tedy $g_i(x^* + th) \leq 0$ pro dostatečně malé $t > 0$, tj. $h \in \mathcal{U}(x^*, g_i)$ pro $i \in I(x^*)$. Pro $i \in \{1, \dots, k\} \setminus I(x^*)$ máme $g_i(x^*) < 0$, tedy v tomto případě $g_i(x^* + th) \leq 0$ pro $|t|$ dostatečně malé, takže celkem $h \in \mathcal{U}(x^*, g_i)$ pro $i \in \{1, \dots, k\}$. Pro $i \in \{k+1, \dots, m\}$ využijeme předpoklad afinnosti a třetí rovnost v systému (4.2.5), tj.

$$g_i(x^* + th) = g_i(x^*) + t \operatorname{grad}^\top g_i(x^*) h = g_i(x^*) = 0 \quad \text{pro libovolné } t,$$

a tudíž $h \in \mathcal{U}(x^*, g_i)$ pro všechna $i \in \{1, \dots, m\}$. Jelikož $x^* + th \in P$ plyne odtud, že $h \in \mathcal{V}(x^*, X)$, tj. $h \in \mathcal{V}(x^*, X) \cap \mathcal{U}(x^*, f) \neq \emptyset$ ∇ s Lemma 4.1.1.

Proto systém (4.2.5) nemá řešení na P a z Věty 2.3.12 plyne existence čísel $y_0^*, y_i^* \geq 0$ pro $i \in I(x^*)$ a $y_{k+1}^*, \dots, y_m^* \in \mathbb{R}$ takových, že

$$y_0^* \langle \operatorname{grad} f(x^*), x - x^* \rangle + \sum_{i \in S(x^*)} y_i^* \langle \operatorname{grad} g_i(x^*), x - x^* \rangle \geq 0,$$

tj.

$$\left\langle y_0^* \operatorname{grad} f(x^*) + \sum_{i \in S(x^*)} y_i^* \operatorname{grad} g_i(x^*), x - x^* \right\rangle \geq 0 \quad \forall x \in P.$$

DŮKAZ VĚTY 4.2.1 (POKR.)

Jestliže ještě dodefinujeme $y_i^* := 0$ pro $i \in \{1, \dots, k\} \setminus I(x^*)$, pak z poslední nerovnosti dostáváme (4.2.3), tj.

$$\left\langle y_0^* \text{grad } f(x^*) + \sum_{i=1}^m y_i^* \text{grad } g_i(x^*), x - x^* \right\rangle \geq 0 \quad \forall x \in P.$$

Podmínka (4.2.4) je splněna triviálně. ■

Podmínka
(4.2.3) ve
speciálních
případech

(i) Je-li $x^* \in \text{int } P$ (tedy zejména je-li P otevřená), pak podmínka (4.2.3) se změnila na rovnost, tj.

$$\text{grad}_x L(x^*, y_0^*, y^*) = 0.$$

(ii) Je-li

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i, \quad i = 1, \dots, n\},$$

kde $-\infty \leq \alpha_i < \beta_i \leq \infty$ pro $i \in \{1, \dots, n\}$, pak (4.2.3) znamená

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*, y_0^*, y^*) \begin{cases} = 0, & \alpha_i < x_i^* < \beta_i, \\ \geq 0, & x_i^* = \alpha_i \neq -\infty, \\ \leq 0, & x_i^* = \beta_i \neq \infty. \end{cases}$$

(iii) Je-li

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, s\},$$

kde $s \in \{1, \dots, n\}$, pak (4.2.3) znamená

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*, y_0^*, y^*) \geq 0 \quad \& \quad x_i^* \frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*, y_0^*, y^*) = 0, \quad i \in \{1, \dots, s\},$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*, y_0^*, y^*) = 0, \quad i \in \{s+1, \dots, n\}.$$

Je Věta 4.2.1 konzistentní s výkladem pro úlohy s omezeními pouze ve tvaru rovností?

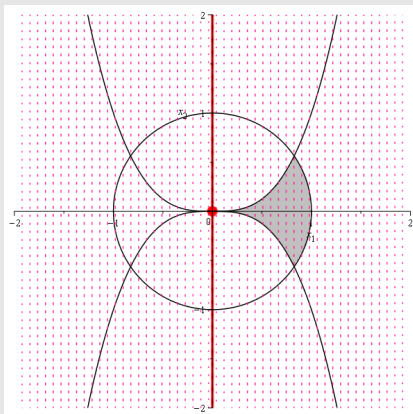
Příklad

Uvažme úlohu s $P = \mathbb{R}^2$ a

$$f(x_1, x_2) = x_1 \rightarrow \min,$$

$$g_1(x_1, x_2) = -x_1^3 + x_2 \leq 0, \quad g_2(x_1, x_2) = -x_1^3 - x_2 \leq 0,$$

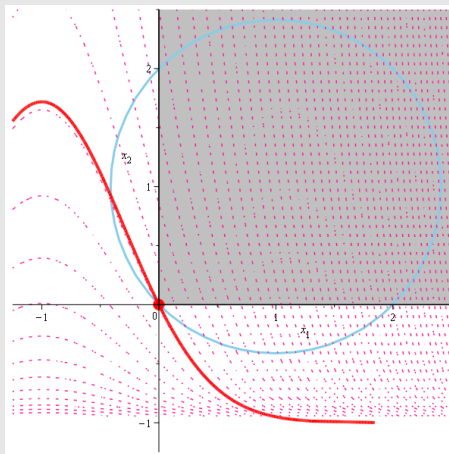
$$g_3(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0.$$



„Divočejší“
příkladUvažme úlohu ($P = \mathbb{R}^2$)

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 1)^2 + \ln(x_2 + 1) \rightarrow \min,$$

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 = 2, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$



Situace s $y_0^* = 0$ je velmi problematická \rightsquigarrow potřebujeme zaručit $y_0^* \neq 0$, což je ekvivalentní s $y_0^* = 1$ (tzv. podmínky kvalifikovaného omezení).

Např. *regulárnost* bodu x^* , tj. lineární nezávislost vektorů $\text{grad } g_i(x^*)$ pro $i \in S(x^*)$.

Věta 4.2.1A

Nechť jsou splněny předpoklady Věty 4.2.1 a $x^* \in \text{int } P$. Jestliže x^* je regulární bod, pak existují (jediné) multiplikátory $y^* \in Q$ takové, že platí (4.2.3) & (4.2.4) s $y_0^* = 1$.

Regulárnost při omezení na znaménko?

V literatuře lze nalézt i několik dalších podmínek zaručující $y_0^* = 1$ při $x^* \in \text{int } P$ (lokální vs. globální).

Věta 4.2.1B

Nechť jsou splněny předpoklady Věty 4.2.1 a $x^* \in \text{int } P$. Potom existují (jediné) multiplikátory $y^* \in Q$ splňující (4.2.3) & (4.2.4) s $y_0^* = 1$, jestliže je splněna (alespoň) jedna z následujících podmínek

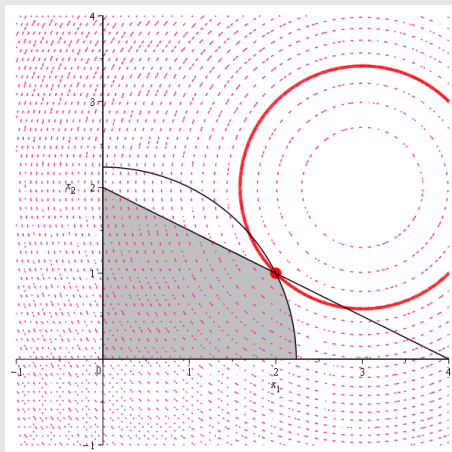
- (i) (afinní omezení) funkce g_1, \dots, g_m jsou afinní;
- (ii) (Slaterova podmínka) g_1, \dots, g_k jsou konvexní, g_{k+1}, \dots, g_m jsou afinní, konstantní vektory $\text{grad } g_i$ jsou lineárně nezávislé pro $i \in \{k+1, \dots, m\}$ a existuje $\bar{x} \in P$ takový, že $g_i(\bar{x}) < 0$ pro $i \in \{1, \dots, k\}$ a $g_i(\bar{x}) = 0$ pro $i \in \{k+1, \dots, m\}$.

Příklad

Uvažme úlohu

$$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \min,$$

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 5, \quad x_1 + 2x_2 \leq 4, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$



Věta 4.2.1 dává pouze nutnou podmínku, tj. ne každý bod splňující (4.2.3) a (4.2.4) je řešením úlohy (4.1) & (4.2) \rightsquigarrow potřebujeme nějakou postačující podmínku („certifikát optimality“).

Nalezení řešení úlohy (4.1) & (4.2) není ekvivalentní s nalezením extrému Lagrangeovy funkce, a to ani v případě $y_0^* = 1$. Nicméně je to postačující.

Věta 4.2.1C

Nechť množina $P \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní, funkce $f, g_1, \dots, g_k : P \rightarrow \mathbb{R}$ jsou diferencovatelné v bodě $x^* \in X$ a $g_{k+1}, \dots, g_m : P \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojitě diferencovatelné v nějakém okolí bodu x^* . Nechť dále pro $x^* \in X$ existují multiplikátory $y^* \in Q$ takové, že platí (4.2.3) a (4.2.4) s $y_0^* = 1$. Je-li x^* bodem globálního minima funkce $L(x, y^*)$ na P , pak x^* je globálním řešením úlohy (4.1) & (4.2).

DŮKAZ VĚTY 4.2.1C

Z předpokladů plyne, že $L(x^*, y^*) \leq L(x, y^*)$ pro každé $x \in P$. Navíc z (4.2.4) dostáváme

$$f(x^*) = f(x^*) + \sum_{i=1}^m y_i^* g_i(x^*) = L(x^*, y^*).$$

Proto pro každé $x \in X$ platí

$$f(x^*) = L(x^*, y^*) \leq L(x, y^*) = f(x) + \sum_{i=1}^m y_i^* g_i(x) = f(x) + \sum_{i=1}^k y_i^* g_i(x) \leq f(x),$$

neboť $g_i(x) = 0$ pro $i \in \{k+1, \dots, m\}$ a $y_i^* g_i(x) \leq 0$ pro každé $x \in X$. To znamená, že x^* je globálním minimem funkce f na množině X . ■

Kdy budou splněny podmínky Věty 4.2.1C? Zejména ve chvíli, kdy funkce $L(x, y^*)$ je konvexní \rightsquigarrow úloha konvexního programování.

Důsledek 4.2.2

Nechť $P \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina, funkce f, g_1, \dots, g_m jsou diferencovatelné na (nějaké otevřené množině obsahující) P a pro $x^* \in X$ existují multiplikátory $y^* \in Q$ takové, že platí (4.2.3) a (4.2.4) s $y_0^* = 1$. Nechť je dále splněn (alespoň) jeden z následujících předpokladů:

- (i) funkce $L(x, y^*)$ je konvexní na množině P ,
- (ii) úloha (4.1) & (4.2) je úlohou konvexního programování, tj. na konvexní množině P jsou funkce f, g_1, \dots, g_k konvexní a funkce g_{k+1}, \dots, g_m afinní.

Pak bod x^* je globálním řešením úlohy (4.1) & (4.2).

Důkaz. Jelikož $y^* \in Q$, předpoklad (ii) je speciálním případem (i). Podmínka (4.2.3) znamená, že bod x^* je stacionárním bodem funkce $L(x, y^*)$ na P . Jelikož funkce $L(x, y^*)$ je konvexní a množina P je také konvexní, plyne z Věty 4.1.3, že bod x^* je bodem globálního minima funkce $L(x, y^*)$ na P . Proto tvrzení plyne z Věty 4.2.1C. ■

Mohla by úloha konvexního programování vypadat i jinak než je popsáno v (ii)?

Předchozí důsledek ukazuje, že zejména v případě úlohy konvexního programování je existence stacionárního bodu s Lagrangeovým multiplifikátorem $y_0^* = 1$ dokonce postačující pro globální řešení.

Kvalifikovanost omezení & konvexnost úlohy \rightsquigarrow základní tvrzení konvexního/nelineárního programování:

Věta 4.2.3

(Karushova–Kuhnova–Tuckerova v diferenciálním tvaru) Necht $P \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina, funkce f, g_1, \dots, g_k konvexní na P a diferencovatelné na (nějaké otevřené množině obsahující) P , funkce g_{k+1}, \dots, g_m afinní na P a necht platí (alespoň) jedna z následujících podmínek:

- (i) (LNZ) množina P je otevřená, vektory $\text{grad } g_i(x)$, $i \in S(x)$, jsou lineárně nezávislé pro každé $x \in X$;
- (ii) (Slaterova) funkcionální omezení jsou pouze ve tvaru nerovností, tj. $k = m$, a existuje bod $\bar{x} \in P$ takový, že $g_i(\bar{x}) < 0$ pro $i \in \{1, \dots, k\}$;
- (iii) (lineární) množina P je polyedr a funkce g_1, \dots, g_k jsou afinní.

Pak x^* je řešením úlohy (4.1) & (4.2) právě tehdy, když existuje $y^* \in Q$ takové, že platí (4.2.3) a (4.2.4) s $y_0^* = 1$.

Podmínky (ii) a (iii) Věty 4.2.3 se trochu liší od Věty 4.2.1B, což je způsobeno konvexností funkce f , která umožňuje využití regulárních modifikací Věty 2.3.12. V LP a QP vždy platí (iii).

DŮKAZ VĚTY 4.2.3

„ \Leftarrow “ To plyne přímo z Důsledku 4.2.2 (i bez dodatečných podmínek).

„ \Rightarrow “ Musíme dokázat pouze „dostatečnost“ uvedených předpokladů. Nechť tedy $x^* \in X$ řeší úlohu (4.1) & (4.2). V případě podmínky (i) plyne tvrzení přímo z Věty 4.2.1A. Uvažme nyní podmínku (ii). Nechť tedy $k = m$ a uvažme systém nerovností

$$\langle \text{grad } f(x^*), x - x^* \rangle < 0, \quad (4.2.6)$$

$$\langle \text{grad } g_i(x^*), x - x^* \rangle < 0, \quad i \in I(x^*). \quad (4.2.7)$$

Pak tento systém nemá řešení na P — kdyby totiž $\tilde{x} \in P$ řešilo (4.2.6) a (4.2.7), pak (podobně jako v důkazu Věty 4.2.1) by z diferencovatelnosti funkcí g_i plynulo pro $h = \tilde{x} - x^*$, že

$$g_i(x^* + \alpha h) = g_i(x^*) + \underbrace{\langle \text{grad } g_i(x^*), \alpha h \rangle}_{< 0 \text{ dle (4.2.7)}} + o(\|\alpha h\|),$$

tj. $g_i(x^* + \alpha h) < g_i(x^*)$ pro $\alpha > 0$ dostatečně malé. Neboť $x^* + \alpha h = \alpha \tilde{x} + (1 - \alpha)x^* \in P$ pro $\alpha \in [0, 1]$, plyne odtud, že $x^* + \alpha h \in X$ pro $\alpha > 0$ dostatečně malé, a tudíž $h \in \mathcal{V}(x^*, X)$. Současně z (4.2.6) plyne, že směrová derivace funkce f v bodě x^* a směru h je záporná, tj.

$$f(x^* + \alpha h) < f(x^*)$$

pro $\alpha > 0$ dostatečně malé, tj. $h \in \mathcal{U}(x^*, f)$. To ale znamená, že $h \in \mathcal{U}(x^*, f) \cap \mathcal{V}(x^*, X) \neq \emptyset$ ∇ s Lemma 4.1.1.

DŮKAZ VĚTY 4.2.3 (POKR.)

Nicméně systém (4.2.7) má řešení \bar{x} , neboť s využitím Věty 2.4.2 totiž máme

$$\langle \text{grad } g_i(x^*), \bar{x} - x^* \rangle \leq g_i(\bar{x}) - g_i(x^*) = g_i(\bar{x}) < 0.$$

Proto z Věty 2.3.13 plyne existence $y_i^* \geq 0$ pro $i \in I(x^*)$ takových, že platí

$$\left\langle \text{grad } f(x^*) + \sum_{i \in I(x^*)} y_i^* \text{grad } g_i(x^*), x - x^* \right\rangle \geq 0.$$

Dodefinujeme-li $y_i^* = 0$ pro $i \in \{1, \dots, k\} \setminus I(x^*)$, pak dostáváme multiplikátory $y_1^*, \dots, y_k^* \geq 0$, pro které platí (4.2.3) a (4.2.4) s $y_0^* = 1$.

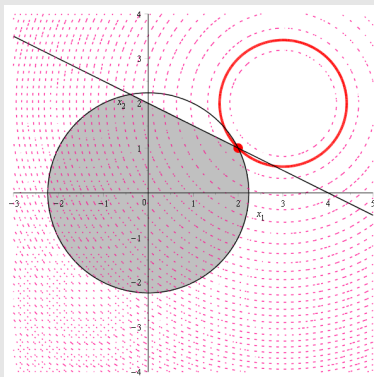
Důkaz tvrzení za podmínky (iii) plyne z Věty 2.3.14. ■

Příklad

Vyřešme

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \min,$$

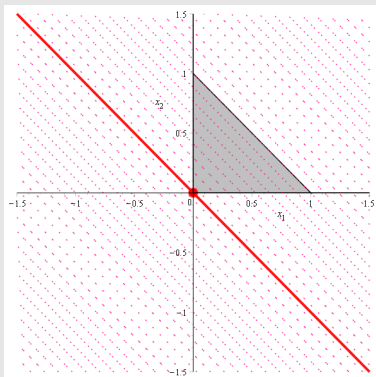
$$x_1^2 + x_2^2 \leq 5, \quad x_1 + 2x_2 \leq 4.$$



Příklad

Vyřešme

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow \min,$$
$$x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

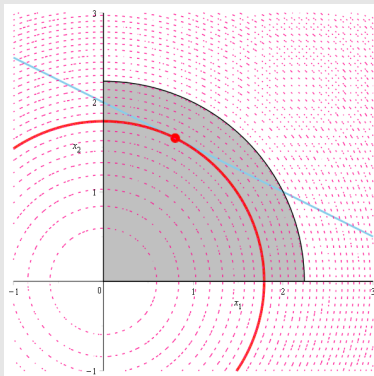


Příklad

Vyřešme

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min,$$

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 5, \quad x_1 + 2x_2 = 4, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$



Pro kontrolu vlastních výpočtů je k dispozici maplet s Lagrangeovým principem, viz <https://goo.gl/w2JUvL>.

Věty 4.2.1C a 4.2.3 dávají postačující podmínky, za kterých stačí pro řešení úlohy (4.1) & (4.2) najít pouze stacionární bod Lagrangeovy funkce.

Bez platnosti těchto podmínek potřebujeme nějaké další kritérium. To je jako vždy založeno na definitnosti matice

$$\nabla_x^2 L(x^*, y_0^*, y^*).$$

Věta 4.2.4

Nechť funkce f, g_1, \dots, g_m jsou dvakrát spojitě diferencovatelné v bodě x^* a $x^* \in \text{int } P$ je takový, že existují multiplikátory $y^* \in Q$ splňující (4.2.3) a (4.2.4) s $y_0^* = 1$ a současně $y_i^* > 0$ pro $i \in I(x^*)$ (tzv. *podmínka ostré komplementarity*), tj.

$$\text{grad}_x L(x^*, y^*) = 0,$$

$$g_i(x^*) \leq 0 \quad \text{pro } i \in \{1, \dots, k\}, \quad g_i(x^*) = 0 \quad \text{pro } i \in \{k+1, \dots, m\},$$

$$y_i^* > 0 \quad \text{pro } i \in I(x^*), \quad y_i^* = 0 \quad \text{pro } i \in \{1, \dots, k\} \setminus I(x^*),$$

$$y_i^* \in \mathbb{R} \quad \text{pro } i \in \{k+1, \dots, m\}.$$

Jestliže

$$\nabla_x^2 L(x^*, y^*) > 0 \quad \text{na } \text{Ker}(\text{grad}^T g_i(x^*))_{i \in S(x^*)},$$

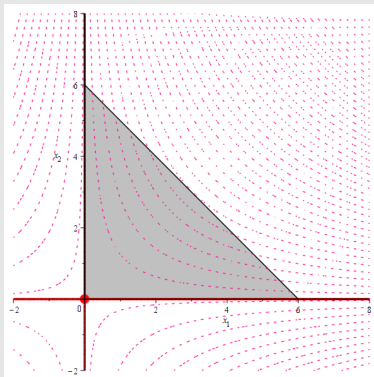
tj. $h^T \nabla_x^2 L(x^*, y^*) h > 0$ pro všechna $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ taková, že $\langle \text{grad } g_i(x^*), h \rangle = 0$ pro $i \in S(x^*)$, pak bod x^* je ostré lokální minimum funkce f na množině X .

Příklad

Uvažme úlohu

$$-x_1 x_2 \rightarrow \min,$$

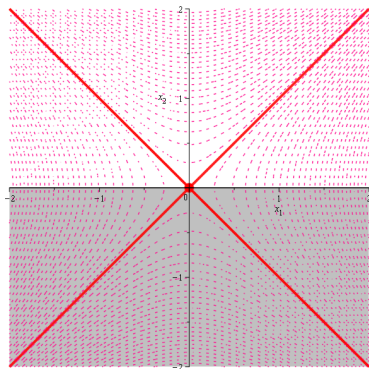
$$x_1 + x_2 \leq 6, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$



Pozor! Obrázek generován z MAPLE, který dává chybné řešení!

Případ s $y_i^* = 0$ pro nějaké $i \in S(x^*)$, ukazuje jistou „degenerovanost“ tohoto omezení. Např.

$$\frac{x_1^2 - x_2^2}{2} \rightarrow \min, \quad x_2 \leq 0.$$



- 4.1 OBECNÁ OPTIMALIZAČNÍ ÚLOHA
- 4.2 NUTNÉ A POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKY OPTIMALITY V MP
- 4.3 TEORIE (LAGRANGEOVY) DUALITY
- 4.4 ANALÝZA CITLIVOSTI

Definice 4.3.1

Vektor $y^* \in Q$ se nazývá *Kuhnovým–Tuckerovým vektorem* (K–T vektorem) úlohy (4.1) & (4.2), jestliže

$$f^* \leq f(x) + \sum_{i=1}^m y_i^* g_i(x) = L(x, y^*) \quad \forall x \in P, \quad (4.3.0)$$

kde $f^* := \inf_{x \in X} f(x)$ je hodnota úlohy (4.1) & (4.2).

Existuje K–T vektor vždy? Uvažme např. úlohy

- (i) $-x^2 \rightarrow \min, \quad x = 0, \quad P = \mathbb{R},$
- (ii) $x - 1 \rightarrow \min, \quad x^2 - 1 = 0, \quad P = \mathbb{R}_+,$
- (iii) $e^x \rightarrow \min, \quad x \leq 0, \quad P = \mathbb{R}.$

Proto k zaručení existence K–T vektoru potřebujeme některé dodatečné podmínky, které lze získat z regulárních modifikací Věty 2.3.12.

Věta 4.3.2

Nechť úloha (4.1) & (4.2) je úlohou konvexního programování, tj. množina $P \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní, funkce f, g_1, \dots, g_k konvexní na P a g_{k+1}, \dots, g_m afinní, a necht' dále platí (alespoň) jedna z podmínek regularity:

- (i) (Slaterova) $k = m$ a existuje $\bar{x} \in P$ takové, že $g_i(\bar{x}) < 0$ pro $i = 1, \dots, m$,
- (ii) (lineární) množina P je polyedr, funkce f, g_1, \dots, g_k jsou afinní a $X \neq \emptyset$.

Pak existuje K–T vektor úlohy (4.1) & (4.2).

Úloha konvexního programování doplněná o některou z dodatečných podmínek uvedených ve Větě 4.3.2 se nazývá regulární úloha konvexního programování. Podmínka (ii) se ale drobně liší od podmínky (iii) ve Větě 4.2.3 (zde nám LNZ nepomůže; existence vs. neexistence a řešitelnost).

Terminologické „zamyšlení“:

omezení \rightsquigarrow kvalifikované omezení \rightsquigarrow ostrá komplementarita

úloha MP

\Downarrow

úloha KP

\Downarrow

regulární úloha KP (kvalifikované omezení)

\Downarrow

silně regulární úloha KP (existuje K–T vektor)

DŮKAZ VĚTY 4.3.2

Je-li $f^* = -\infty$, pak nerovnost (4.3.1) je splněna triviálně pro každé $y \in Q$. Nechť tedy $f^* > -\infty$ a platí podmínka (i). Uvažujme systém nerovností

$$f(x) - f^* < 0, \quad g_i(x) < 0, \quad i \in \{1, \dots, m\}.$$

Tento systém nemá řešení na P (kdyby nějaké x splňovalo druhou část, pak $x \in X$ a první část vede ke sporu s definicí f^*). Vynecháme-li první nerovnost, pak systému jistě vyhovuje bod \bar{x} (dle předpokladů). Pak z Věty 2.3.13 plyne existence $y_1^*, \dots, y_m^* \geq 0$ takových, že

$$f(x) - f^* + \sum_{i=1}^m y_i^* g_i(x) \geq 0 \quad \forall x \in P.$$

Tedy $y^* = (y_1, \dots, y_m)^\top$ je K–T vektorem úlohy (4.1) & (4.2). ■

Úloha (4.1) & (4.2) \rightsquigarrow primární \longleftrightarrow duální úloha = úloha konkávního programování.

Motivační příklad 1

Uvažme úlohu

$$\begin{aligned} &4x_1 + 14x_2 \rightarrow \min, \\ &x_1 + 2x_2 \geq 3, \quad x_1 + 4x_2 \geq 4, \\ &3x_1 + x_2 \geq 3, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Motivační příklad 2

Uvažme úlohu

$$\begin{aligned} &x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 \rightarrow \min, \\ &x_1 + x_2 = 0. \end{aligned}$$

Definice 4.3.3

Nechť $y \in Q$. Definujme funkci

$$\varphi(y) := \inf_{x \in P} L(x, y) = \inf_{x \in P} \left[f(x) + \sum_{i=1}^m y_i g_i(x) \right]$$

a množinu (tzv. efektivní definiční obor)

$$Y := \{y \in Q \mid \varphi(y) > -\infty\}.$$

Pak úloha

$$\varphi(y) \rightarrow \max, \quad y \in Y, \quad (4.3.1)$$

se nazývá *duální úlohou* k úloze (4.1) & (4.2). Číslo

$$\varphi^* := \sup_{y \in Y} \varphi(y)$$

se nazývá *hodnotou duální úlohy* (4.3.1).

Věta 4.3.4

Úloha (4.3.1) je úlohou konkávního programování, tj. množina Y je konvexní a funkce φ je konkávní na Y .

Důkaz. Necht' $y_1, y_2 \in Y$ a $\lambda \in [0, 1]$ jsou libovolná. Potom platí

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) &= \inf_{x \in P} L(x, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) = \\ &= \inf_{x \in P} [\lambda L(x, y_1) + (1 - \lambda)L(x, y_2)] \geq \\ &\geq \lambda \inf_{x \in P} L(x, y_1) + (1 - \lambda) \inf_{x \in P} L(x, y_2) = \\ &= \lambda \varphi(y_1) + (1 - \lambda)\varphi(y_2), \end{aligned}$$

tj. funkce φ je konkávní. Současně odtud také plyne, že pro $y_1, y_2 \in Y$ (tj. $\varphi(y_1) > -\infty$ a $\varphi(y_2) > -\infty$) je také $\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \in Y$, neboť $\varphi(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \geq \lambda \varphi(y_1) + (1 - \lambda)\varphi(y_2) > -\infty$, tj. množina Y je konvexní. ■

Příklad

Určeme duální úlohu k úloze LP, tj.

$$\langle c, x \rangle \rightarrow \min, \quad x \in X,$$

kde množina X je určena podmínkami

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i, \quad i \in \{1, \dots, k\}, \quad \text{tj. } \langle a_i, x \rangle \geq b_i,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i \in \{k+1, \dots, m\}, \quad \text{tj. } \langle a_i, x \rangle = b_i,$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, s\},$$

kde $c, a_i \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $s \in \{0, \dots, n\}$ jsou dány.

Věta 4.3.5

Existuje nějaký vztah mezi f^* a φ^* ?

(Slabá věta o dualitě) Pro každé $x \in X$ a každé $y \in Q$ platí

$$f(x) \geq \varphi(y).$$

Zejména, pokud $X \neq \emptyset$ a $Y \neq \emptyset$, pak $f^* \geq \varphi^*$ (v případě $X = \emptyset$ a/nebo $Y = \emptyset$ je nerovnost splněna triviálně, neboť $\inf \emptyset = \infty$ a $\sup \emptyset = -\infty$).

Důkaz. Pro každé $x \in X$ a $y \in Q$ platí

$$f(x) \geq f(x) + \underbrace{\sum_{i=1}^m y_i g_i(x)}_{\leq 0} = L(x, y) \geq \inf_{x \in X} L(x, y) \geq \inf_{x \in P} L(x, y) \geq \varphi(y).$$

Tato nerovnost musí platit také v případě, že na levé straně vezmeme infimum pro $x \in X$ a na pravé straně supremum pro $y \in Y$. ■

Věta 4.3.5 říká, že rozdíl mezi hodnotou účelové funkce primární a duální úlohy je vždy nezáporný, tj. pro libovolná $x \in X \neq \emptyset$ a $y \in Y \neq \emptyset$ platí (v takovém případě jsou obě úlohy nutně řešitelné)

$$g(x, y) := f(x) - \varphi(y) \geq 0.$$

Pak číslo $g(x^*, y^*) := f^* - \varphi^*$ udává tzv. „optimální duální rozdíl“ (*optimal duality gap*). Věta 4.3.5 také říká, že pro libovolné $y \in Q$ je hodnota $\varphi(y)$ dolní hranici minima účelové funkce úlohy (4.1) & (4.2).

Navíc odtud plyne velmi „jednoduchý“ test řešitelnosti úlohy (4.1) & (4.2):

Je-li primární úloha (4.1) & (4.2) neohraničená (tj. $f^* = -\infty$), pak nutně $\varphi^* = -\infty$, tj. $Y = \emptyset \rightsquigarrow$ duální úloha (4.3.1) je nepřipustná.

Naopak, je-li duální úloha (4.3.1) neohraničená (shora, tj. $\varphi^* = \infty$), pak nutně $f^* = \infty$, tj. $X = \emptyset \rightsquigarrow$ primární úloha (4.1) & (4.2) je nepřipustná.

Celkem může nastat 9 možností ohledně přípustnosti, ohraničenosti a řešitelnosti primární a duální úlohy. Věta 4.3.5 vylučuje 3 možnosti a 2 možnosti potvrzuje (více zatím není možné rozhodnout):

DÚ \ PÚ	NP ($f^* = \infty$)	PaO	NO ($f^* = -\infty$)
NO ($\varphi^* = \infty$)	✓	✗	✗
PaO	?	?	✗
NP ($\varphi^* = -\infty$)	?	?	✓

PÚ: primární úloha; **DÚ**: duální úloha; **NP**: nepřipustná úloha (tj. $X = \emptyset$ nebo $Y = \emptyset$); **NO**: neohraničená úloha (tj. $f^* = -\infty$ nebo $\varphi^* = \infty$); **PaO**: přípustná a ohraničená úloha (tj. existuje konečné f^* nebo φ^*)

Věta 4.3.5 také dává velmi „jednoduchou“ postačující podmínku pro ověření optimality.

Jsou-li $x^* \in X$ a $y^* \in Q$ taková, že platí

$$f(x^*) = \varphi(y^*),$$

pak x^* a y^* jsou optimálními řešeními svých příslušných úloh (ekvivalence? viz Větu 4.3.8).

Duální rozdíl je také úzce spojen s existencí K–T vektoru. Jestliže duální rozdíl je nenulový, tj. $f^* > \varphi^*$, pak množina K–T vektorů musí být prázdná. Vskutku, připusťme, že existuje K–T vektor $y^* \in Q$, tj.

$$f^* \leq \inf_{x \in P} L(x, y^*) = \varphi(y^*) \leq \varphi^* < f^*$$

(v případě $X = \emptyset$ je $f^* = \infty$, a tudíž také $\varphi^* = \infty \not\leq$, podobně pro $Y = \emptyset$ je $\varphi^* = -\infty$, a tudíž $f^* = -\infty \not\geq$).

To ale znamená, že existence K–T vektoru zaručuje nulový duální rozdíl. Připomeňme, že situaci $f^* = -\infty$ jsme již vyřešili.

Věta 4.3.6

(Silná věta o dualitě) Necht' úloha (4.1) & (4.2) je regulární úlohou konvexního programování (viz Věta 4.3.2). Pokud $f^* > -\infty$, pak platí tzv. *vztah duality*

$$f^* = \varphi^*, \quad \text{tj.} \quad \inf_{x \in P} \sup_{y \in Q} L(x, y) = \sup_{y \in Q} \inf_{x \in P} L(x, y),$$

přičemž množina řešení duální úlohy (4.3.1) je neprázdná a shodná s množinou všech K–T vektorů úlohy (4.1) & (4.2).

Samozřejmě nulového duálního rozdílu lze dosáhnout i za jiných předpokladů (např. P konvexní a uzavřená, f, g_1, \dots, g_k konvexní a spojitě na P , g_{k+1}, g_m afinní a množina řešení primární úlohy je neprázdná a ohraničená, pak $Y \neq \emptyset$ a $f^* = \varphi^*$).

Praktický význam tvrzení Věty 4.3.6 nemusí být na první pohled zřejmý, ale v některých případech může být duální úloha jednodušší (za daných předpokladů jsou obě úlohami KP) – některé algoritmy LP a QP jsou založeny právě na řešení duální úlohy.

Záměna maxima (suprema) a minima (infima) \rightsquigarrow von Neumannova věta o „minimaxu“ \rightsquigarrow sedlový bod (viz později) \rightsquigarrow teorie her.

DŮKAZ VĚTY 4.3.6

Jelikož máme regulární úlohu KP, podle Věty 4.3.2 existuje K–T vektor $y^* \in Q$ úlohy (4.1) & (4.2), a tudíž (opět)

$$f^* \leq \inf_{x \in P} L(x, y^*) = \varphi(y^*) \leq \varphi^*.$$

Jelikož $f^* > -\infty$, je také $\varphi^* > -\infty$, a tedy $y^* \in Y \neq \emptyset$. Současně předpoklady zaručují $X \neq \emptyset$. Proto z Věty 4.3.5 máme $f^* \geq \varphi^*$, takže celkem $f^* = \varphi^*$.

Nechť nyní $y^* \in Y$ je řešením duální úlohy (4.3.1). Potom

$$f^* = \varphi^* = \varphi(y^*) = \inf_{x \in P} L(x, y^*) \leq f(x) + \sum_{i=1}^m y_i^* g_i(x), \quad \forall x \in P,$$

tj. y^* je K–T vektorem úlohy (4.1) & (4.2).

Konečně, necht' $y^* \in Q$ je K–T vektorem úlohy (4.1) & (4.2). Pak platí

$$\varphi^* = f^* \leq f(x) + \sum_{i=1}^m y_i^* g_i(x) = L(x, y^*), \quad \forall x \in P.$$

Odtud plyne $\varphi^* \leq \inf_{x \in P} L(x, y^*) = \varphi(y^*)$, a tudíž z definice φ^* dostáváme rovnost $\varphi^* = \varphi(y^*)$. To ale znamená, že y^* je řešením úlohy (4.3.1). ■

Důsledek 4.3.7

Z Věty 4.3.6 bezprostředně vyplývají dvě důležité implikace.

Nechť úloha (4.1) & (4.2) je regulární úlohou konvexního programování (viz Věta 4.3.2).

- (i) Jestliže $Y \neq \emptyset$, pak duální úloha je řešitelná a $f^* > -\infty$.
- (ii) Jestliže $Y = \emptyset$, pak $f^* = -\infty$.

Důkaz.

- (i) Jestliže platí $Y \neq \emptyset$, z definice φ^* vyplývá $\varphi^* > -\infty$. Potom z Věty 4.3.5 plyne $f^* \geq \varphi^* > -\infty$, takže úloha (4.1) & (4.2) je řešitelná podle Věty 4.3.6.
- (ii) Jestliže platí $Y = \emptyset$, pak nutně $f^* = -\infty$ (v případě $f^* > -\infty$ totiž dostaneme spor s Větou 4.3.6). ■

Z Vět 4.3.5 a 4.3.6 a z Důsledku 4.3.7 vyplývá, že v případě regulární úlohy KP mohou nastat pouze dvě možnosti (regularita $\rightsquigarrow X \neq \emptyset$):

DÚ \ PÚ	NP ($f^* = \infty$)	PaO	NO ($f^* = -\infty$)
NO ($\varphi^* = \infty$)	✘	✘	✘
PaO	✘	✓	✘
NP ($\varphi^* = -\infty$)	✘	✘	✓

V případě, kdy primární úloha může být i nepřipustná máme 4+1 možnost:

DÚ \ PÚ	NP ($f^* = \infty$)	PaO	NO ($f^* = -\infty$)
NO ($\varphi^* = \infty$)	✓	✘	✘
PaO	?✓?	✓	✘
NP ($\varphi^* = -\infty$)	✓	✘	✓

Pozor: v úlohách LP a QP varianta PÚ=NP & DÚ=PaO není možná, neboť duální úloha je téhož typu (\rightsquigarrow záměna role primární a duální úlohy). Nicméně obecně tato situace může nastat (např. $x \rightarrow \min$ & $x \leq 0$ & $P = \mathbb{R}_{++}$).

S využitím teorie duality můžeme získat nutné a postačující podmínky pro řešení regulární úlohy KP bez předpokladu diferencovatelnosti.

Věta 4.3.8

(Kuhnova–Tuckerova v nediferenciálním tvaru) Nechť úloha (4.1) & (4.2) je regulární úlohou konvexního programování (viz Věta 4.3.2). Pak $x^* \in X$ je řešením této úlohy právě tehdy, když platí (alespoň) jedna z podmínek:

- (i) existuje $y^* \in Q$ takové, že $f(x^*) = \varphi(y^*)$,
- (ii) existuje $y^* \in Q$ takové, že

$$L(x^*, y^*) = \min_{x \in P} L(x, y^*), \quad (4.3.2)$$

$$y_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i \in \{1, \dots, m\}. \quad (4.3.3)$$

Navíc množina takovýchto vektorů $y^* \in Q$ splývá s množinou řešení duální úlohy (4.3.1) (a podle Věty 4.3.6 tedy také s množinou K–T vektorů úlohy (4.1) & (4.2)).

Jsou-li navíc funkce f, g_1, \dots, g_m diferencovatelné v bodě x^* , pak podmínka (4.3.2) je ekvivalentní s (4.2.3) pro $y_0^* = 1$, zatímco (4.3.3) odpovídá (4.2.4). Tudíž Věta 4.3.8 je skutečně zobecněním KKT věty (Věty 4.2.3) pro případ nediferencovatelných funkcí. Koncept K–T vektoru je zobecněním Lagrangeových multiplikátorů (splývá za podmínek Věty 4.2.3).

DŮKAZ VĚTY 4.3.8

(i) „ \implies “ Necht x^* je řešením úlohy (4.1) & (4.2), tj. $f(x^*) = f^*$, a $y^* \in Q$ je K–T vektor (existuje díky regulárnosti úlohy). Pak podle druhé části Věty 4.3.6 je y^* řešením duální úlohy (4.3.1), tj. $\varphi(y^*) = \varphi^*$. Současně podle první části Věty 4.3.6 dostáváme $f(x^*) = f^* = \varphi^* = \varphi(y^*)$.

„ \impliedby “ Necht $f(x^*) = \varphi(y^*)$ pro nějaké $x^* \in X$ a $y^* \in Q$. Jelikož platí $f(x^*) \leq f(x^*) = \varphi(y^*) \leq \varphi(y^*)$, plyne z Věty 4.3.5 $f^* = f(x^*)$ a $y^* = \varphi(y^*)$, tj. x^* je řešením úlohy (4.1) & (4.2) a y^* je řešením duální úlohy (4.3.1).

DŮKAZ VĚTY 4.3.8 (POKR.)

(ii) „ \implies “ Necht x^* je řešením úlohy (4.1) & (4.2). Pak podle předchozí části existuje $y^* \in Q$ takové, že $f(x^*) = \varphi(y^*)$, tj.

$$f(x^*) = \varphi(y^*) \stackrel{D.4.3.3}{=} \inf_{x \in P} L(x, y^*) \leq f(x) + \underbrace{\sum_{i=1}^m y_i^* g_i(x)}_{=0} \quad \forall x \in P.$$

Odtud volbou $x = x^*$ dostaneme $\sum_{i=1}^m y_i^* g_i(x^*) \geq 0$. Jelikož ale $g_i(x^*) \leq 0$ a $y_i^* \geq 0$ pro $i = 1, \dots, k$, musí platit (4.3.3), z čehož dále vyplývá

$$L(x^*, y^*) = f(x^*) + \underbrace{\sum_{i=1}^m y_i^* g_i(x^*)}_{=0} = f(x^*) = \varphi(y^*) \leq L(x, y^*) \quad \forall x \in P$$

neboli

$$L(x^*, y^*) = \min_{x \in P} L(x, y^*)$$

„ \impliedby “ Necht pro nějaké $x^* \in X$ a $y^* \in Q$ platí (4.3.2) a (4.3.3). Potom

$$f(x^*) = f(x^*) + \underbrace{\sum_{i=1}^m y_i^* g_i(x^*)}_{=0 \text{ dle (4.3.3)}} = L(x^*, y^*) \stackrel{(4.3.2)}{=} \min_{x \in P} L(x, y^*) = \inf_{x \in P} L(x, y^*) = \varphi(y^*)$$

Pak z části (i) vyplývá, že x^* je řešením úlohy (4.1) & (4.2). ■

Příklad

Určeme duální úlohu pro

$$f(x) = e^{-x} \rightarrow \min, \quad x \leq 1,$$

a ověříme platnost vztahu duality $f^* = \varphi^*$.

?? Co je duální úloha k duální úloze ??

Tuto část zakončíme ještě jednou alternativou k původní KKT větě, s jejíž pomocí snadno získáme odpověď na otázku:

jak s pomocí řešení duální úlohy získáme řešení primární úlohy?

Definice 4.3.9

Bod $[x^*, y^*] \in P \times Q$ se nazývá *sedlovým bodem* Lagrangeovy funkce $L(x, y)$ úlohy (4.1) & (4.2) na $P \times Q$, jestliže

$$L(x^*, y) \leq L(x^*, y^*) \leq L(x, y^*) \quad \forall x \in P, y \in Q,$$

tj. platí

$$L(x^*, y^*) = \min_{x \in P} L(x, y^*) = \max_{y \in Q} L(x^*, y).$$

A jak to souvisí s úlohou (4.1) & (4.2)?

Věta 4.3.10

(Kuhnova–Tuckerova pro sedlový bod) Necht' úloha (4.1) & (4.2) je regulární úlohou konvexního programování (viz Věta 4.3.2). Pak bod $x^* \in P$ je řešením úlohy (4.1) & (4.2) právě tehdy, když existuje $y^* \in Q$ takové, že $[x^*, y^*]$ je sedlovým bodem Lagrangeovy funkce $L(x, y)$ úlohy (4.1) & (4.2) na $P \times Q$.

DŮKAZ VĚTY 4.3.10

Důkaz je založen na Větě 4.3.8(ii).

„ \implies “ Nechť $x^* \in P$ je řešením úlohy (4.1) & (4.2). Pak $x^* \in X$ a podle Věty 4.3.8(ii) existuje $y^* \in Q$ takový, že

$$L(x^*, y^*) = \min_{x \in P} L(x, y^*) \quad \& \quad y_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i \in \{1, \dots, k\},$$

tj. z první části máme $L(x^*, y^*) \leq L(x, y^*)$ pro každé $x \in P$. Současně s využitím druhé částí dostaneme

$$L(x^*, y^*) = f(x^*) + \underbrace{\sum_{i=1}^m y_i^* g_i(x^*)}_{=0} = f(x^*) \geq f(x^*) + \underbrace{\sum_{i=1}^m y_i g_i(x^*)}_{\leq 0} = L(x^*, y) \quad \forall y \in Q.$$

To dohromady s první částí ukazuje, že bod $[x^*, y^*]$ je sedlovým bodem.

DŮKAZ VĚTY 4.3.10 (POKR.)

„ \Leftarrow “ Necht' nyní $[x^*, y^*]$ je sedlovým bodem. Pak $L(x^*, y^*) = \min_{x \in P} L(x, y^*)$ a zároveň $L(x^*, y^*) \geq L(x^*, y)$ pro každé $y \in Q$, tj.

$$f(x^*) + \sum_{i=1}^m y_i^* g_i(x^*) \geq f(x^*) + \sum_{i=1}^m y_i g_i(x^*) \quad \forall y \in Q$$

neboli

$$\sum_{i=1}^m y_i^* g_i(x^*) \geq \sum_{i=1}^m y_i g_i(x^*) \quad \forall y \in Q.$$

Protože tato nerovnost platí pro všechna $y \in Q$, nutně také pro $y = 0 \in Q$, což dává $\sum_{i=1}^m y_i^* g_i(x^*) \geq 0$. Současně volba $y = y^* + e_i \in Q$ pro $i \in \{1, \dots, k\}$ dává $0 \geq g_i(x^*)$ a $y = y^* \pm e_i \in Q$ pro $i \in \{k+1, \dots, m\}$ dává dokonce $0 \geq g_i(x^*)$ & $0 \leq g_i(x^*)$, tj. $g_i(x^*) = 0$. Proto $x^* \in X$ a $y_i^* g_i(x^*) \leq 0$ podle definice množiny Q , z čehož plyne $y_i^* g_i(x^*) = 0$ pro všechna $i \in \{1, \dots, m\}$. Tedy jsou splněny podmínky Věty 4.3.8(ii), což znamená, že bod $x^* \in P$ je řešením úlohy (4.1) & (4.2). ■

Regularita
ve Větě
4.3.10

Implikace \Leftarrow ve Větě 4.3.10 platí i bez předpokladu regularity úlohy (4.1) & (4.2). Bez tohoto předpokladu dokonce platí i to, že sedlový bod splňuje (4.3.2) a (4.3.3).

Sedlový bod
a duální
úloha

Analogické tvrzení jako ve Větě 4.3.10 platí také pro duální úlohu:

Bod $y^* \in Y$ je řešením duální úlohy (4.3.1) právě tehdy, když existuje $x^* \in P$ takový, že $[x^*, y^*] \in P \times Q$ je sedlovým bodem Lagrangeovy funkce regulární úlohy (4.1) & (4.2).

V literatuře bývají Věty 4.3.8 a 4.3.10 uváděny společně.

Důsledek
4.3.11

Nechť úloha (4.1) & (4.2) je regulární úlohou konvexního programování (viz Věta 4.3.2).

- (i) Body $x^* \in X$ a $y^* \in Y$ řeší úlohy (4.1) & (4.2) a (4.3.1) právě tehdy, když platí (i) nebo (ii) z Věty 4.3.8.
- (ii) Body $x^* \in X$ a $y^* \in Y$ řeší úlohy (4.1) & (4.2) a (4.3.1) právě tehdy, když $[x^*, y^*]$ je sedlový bod Lagrangeovy funkce úlohy (4.1) & (4.2).

- 4.1 OBECNÁ OPTIMALIZAČNÍ ÚLOHA
- 4.2 NUTNÉ A POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKY OPTIMALITY V MP
- 4.3 TEORIE (LAGRANGEOVY) DUALITY
- 4.4 ANALÝZA CITLIVOSTI

Nyní se budeme věnovat závislosti řešení úloh MP na parametrech, tj. situaci kdy úloha (4.1) & (4.2) bude obsahovat i nějaké parametry \rightsquigarrow parametrické programování (viz QP). Parametry mohou vystupovat v účelové funkci a/nebo ve funkcionálních omezeních:

- (i) v účelové funkci \rightsquigarrow prodejní ceny, nákupní ceny, míru užitku, ...
- (ii) v omezeních \rightsquigarrow dostupnost skladových zásob, výrobní kapacita, maximální investice, přijatelná míra rizika, ...

Nebudeme se věnovat obecné úloze MP. Nejdříve uvážíme úlohu MP s omezeními pouze ve tvaru rovností ale s obecnou závislostí na parametrech. Poté se podíváme na úlohu s omezeními ve tvaru nerovností ale s parametry pouze v podobě absolutních členů ve funkcích zadávajících jednotlivá omezení.

Motivace: interpretace řešení duální úlohy v LP \rightsquigarrow K–T vektor \rightsquigarrow Lagrangeovy multiplikátory.

Začneme s jednoduchou úlohou pro 2 proměnné a 1 omezení ve tvaru rovnosti, tj.

$$f(x_1, x_2) \rightarrow \min, \quad g(x_1, x_2) = c, \quad (4.4.1)$$

kteřá je jednoznačně řešitelná pro každé $c \in \mathbb{R}$ (pro jednoduchost). Potom řešením (4.4.1) je dvojice $x_1^*(c)$ a $x_2^*(c)$ a předpokládejme, že $x_1^*(\cdot)$ a $x_2^*(\cdot)$ jsou diferencovatelné vzhledem k c . Hodnota úlohy (4.4.1) také závisí na c , tj.

$$f^*(c) = f(x_1^*(c), x_2^*(c)),$$

stejně jako odpovídající Lagrangeův multiplikátor $y^*(c)$. Je-li navíc $f^*(c)$ také diferencovatelná vzhledem k c , pak platí

$$\frac{d}{dc} f^*(c) = f_{x_1}(x_1^*(c), x_2^*(c)) \frac{dx_1^*(c)}{dc} + f_{x_2}(x_1^*(c), x_2^*(c)) \frac{dx_2^*(c)}{dc}. \quad (*)$$

Současně z Lagrangeova principu máme

$$\left. \begin{aligned} f_{x_1}(x_1^*(c), x_2^*(c)) + y^*(c) g_{x_1}(x_1^*(c), x_2^*(c)) &= 0, \\ f_{x_2}(x_1^*(c), x_2^*(c)) + y^*(c) g_{x_2}(x_1^*(c), x_2^*(c)) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\square)$$

Konečně derivováním rovnosti $g(x_1^*(c), x_2^*(c)) = c$ obdržíme

$$g_{x_1}(x_1^*(c), x_2^*(c)) \frac{dx_1^*(c)}{dc} + g_{x_2}(x_1^*(c), x_2^*(c)) \frac{dx_2^*(c)}{dc} = 1. \quad (\triangle)$$

Zkombinováním (*), (□) a (△) dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dc} f^*(c) &\stackrel{(*),(\square)}{=} -y^*(c) g_{x_1}(x_1^*(c), x_2^*(c)) \frac{dx_1^*(c)}{dc} - y^*(c) g_{x_2}(x_1^*(c), x_2^*(c)) \frac{dx_2^*(c)}{dc} = \\ &= -y^*(c) \left[g_{x_1}(x_1^*(c), x_2^*(c)) \frac{dx_1^*(c)}{dc} + g_{x_2}(x_1^*(c), x_2^*(c)) \frac{dx_2^*(c)}{dc} \right] = \\ &\stackrel{(\triangle)}{=} -y^*(c). \end{aligned}$$

(Tvzení zůstane v platnosti i pokud se omezíme pouze na nějaké okolí daného $c_0 \in \mathbb{R}$.)

Takže hodnota $-y^*(c)$ udává míru změny hodnoty $f^*(c)$, neboť platí

$$f^*(c + \Delta c) \approx f^*(c) - y^*(c) \Delta c.$$

V ekonomii mnohdy c vyjadřuje dostupné zásoby nějakého zdroje (vč. času, peněz apod.) a funkce f užitek nebo zisk. Potom hodnota $-y^*(c) \Delta c$ měří přibližnou míru změny užitku/zisku, pokud změníme zásoby o $\Delta c \rightsquigarrow$ stínová cena (tržní cena? čas, živiny apod.). Takže zejména při volbě $\Delta c = 1$ zjistíme, že $-y^*(c)$ určuje změnu optimálního zisku/užitku $f^*(c)$ při navýšení zásob o 1 jednotku.

Analogicky dostaneme při větším počtu omezení

$$f^*(c + \Delta c) \approx f^*(c) - y_1^*(c) \Delta c_1 - \dots - y_m^*(c) \Delta c_m.$$

Příklad

Produkční funkce firmy je $f(x_p, x_m) = 50x_p^{1/2}x_m^2$, kde x_p udává cenu práce a x_m cenu materiálu v tisících Kč. Firma má dostupný rozpočet 79 tisíc Kč. Jak se změní hodnota optimální produkce, pokud firma investuje 80 tisíc Kč?

Věta 4.4.1

(Věta o obálce) Mějme úlohu

$$f(x, r) \rightarrow \min, \quad g_1(x, r) = 0, \dots, g_m(x, r) = 0, \quad (*)$$

kde $x \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}^k$, $f, g_1, \dots, g_m \in C^1$. Pripusťme, že pro každou hodnotu parametru r má úloha (*) jediné řešení, které označíme $x^*(r)$. Potom hodnota úlohy (*) je

$$f^*(r) = f(x^*(r), r).$$

Je-li $x^*(r)$ diferencovatelná vzhledem k r a Jacobiho matice $D_x G(x^*(r), r) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má plnou hodnost m , pak platí

$$\frac{\partial}{\partial r_i} f^*(r) = \frac{\partial f}{\partial r_i}(x^*(r), r) + \sum_{j=1}^m y_j^*(r) \frac{\partial g_j}{\partial r_i}(x^*(r), r).$$

Proč „Věta o obálce“?  Obrázek.

Jenže předpoklady Věty 4.4.1 jsou celkem silné ($\forall r$ existuje jediné řešení). Zjednodušení úlohy \rightsquigarrow oslabení požadavků.

Věta 4.4.2

Nechť $f, g_1, \dots, g_m \in C^2$ a x^* je lokálním řešením úlohy

$$f(x) \rightarrow \min, \quad g_1(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0$$

s odpovídající Lagrangeovým multiplikátorem y^* . Nechť dále tato dvojice splňuje postačující podmínku druhého řádu (tj. $\nabla_x^2 L(x^*, y^*) > 0$ na $\text{Ker DG}(x^*)$), přičemž současně x^* je regulárním bodem, tj. $D_x G(x^*) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má plnou hodnost m . Uvažme úlohu parametrického programování

$$f(x) \rightarrow \min, \quad G(x) = u \quad (*)$$

pro parametr $u \in \mathbb{R}^m$. Pak existuje otevřená koule S se středem v počátku ($u = 0$) taková, že pro každé $u \in S$ existuje lokální řešení $x^*(u) \in \mathbb{R}^n$ úlohy $(*)$ a odpovídající $y^*(u) \in \mathbb{R}^m$. Navíc $x^*(\cdot)$ a $y^*(\cdot)$ jsou spojitě diferencovatelné funkce na S a platí $x^*(0) = x^*$, $y^*(0) = y^*$ a pro každé $u \in S$ máme

$$\text{grad } f^*(u) = -y^*(u),$$

kde $f^*(u)$ značí optimální hodnota úlohy $(*)$ vzhledem k u , tj. klademe $f^*(u) := f(x^*(u))$.

Nyní se zaměříme na úlohu s omezeními ve tvaru nerovností (to je z praktického pohledu přeci jen užitečnější; navíc 1 rovnost=2 nerovnosti), kde parametry budou vystupovat pouze ve formě absolutních členů (viz Věta 4.4.2).

Budeme mít úlohu závislou na m -tici parametrů $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)^\top \in \mathbb{R}^m$, tj.

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow \min, \quad \mathbf{x} \in X(\mathbf{b}) := \{ \mathbf{x} \in P \subseteq \mathbb{R}^n \mid g_i(\mathbf{x}) \leq b_i, \ i \in 1, \dots, m \}. \quad (4.4.2)$$

Ještě budeme potřebovat označení

$$G(\mathbf{x}) := (g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x}))^\top, \quad X(\mathbf{b}) := \{ \mathbf{x} \in P \mid G(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b} \},$$

$$B := \{ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \mid X(\mathbf{b}) \neq \emptyset \}, \quad F(\mathbf{b}) := \inf_{\mathbf{x} \in X(\mathbf{b})} f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{b} \in B,$$

$$Y(\mathbf{b}) := \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{y} \geq 0, F(\mathbf{b}) \leq f(\mathbf{x}) + \langle \mathbf{y}, G(\mathbf{x}) - \mathbf{b} \rangle \ \forall \mathbf{x} \in P \},$$

$$\partial F(\mathbf{b}) := \{ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^m \mid F(\mathbf{b}') - F(\mathbf{b}) \geq \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}' - \mathbf{b} \rangle \ \forall \mathbf{b}' \in B \}.$$

Souvislost s dřívějším značením: $X = X(0)$ a $f^* = F(0)$. Množina $Y(\mathbf{b})$ je množinou K–T vektorů úlohy (4.4.2). Množina $\partial F(\mathbf{b})$ je subdiferenciálem funkce $F(\mathbf{b})$.

A jak tedy závisí úloha (4.4.2) na parametru \mathbf{b} ?

Věta 4.4.3

Nechť množina $P \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní, funkce f, g_1, \dots, g_m jsou konvexní na P a platí $0 \in B$, $F(0) > -\infty$ a $Y(0) \neq \emptyset$. Potom

- (i) množina B je konvexní,
- (ii) funkce $F(b)$ je konečná, konvexní a nerostoucí na B ,
- (iii) platí $\partial F(b) = -Y(b)$ pro všechna $b \in B$.

Poznámky
k Větě 4.4.3

- (i) Předpoklady Věty 4.4.3 říkají, že
 - $0 \in B \iff X(0) \neq \emptyset$: úloha (4.4.2) s $b = 0$ je přípustná,
 - $F(0) > -\infty$: úloha (4.4.2) s $b = 0$ má konečné řešení,
 - $Y(0) \neq \emptyset$: množina K -T vektorů úlohy (4.4.2) s $b = 0$ je neprázdná (pozor – toto není splněno automaticky, viz Věta 4.3.2).
- (ii) Je-li F dokonce diferencovatelná v b , pak $\partial F(b)$ je jednoprvková, obsahuje pouze $\text{grad}^T F(b)$ a tento vektor je roven $(-1) \times K$ -T vektoru, což je analogie Věty o obálce (Věta 4.4.2).
- (iii) Ve Větě 4.3.6 jsme charakterizovali K -T vektory úlohy (4.1) & (4.2) pomocí řešení duální úlohy (4.3.1). Část (iii) předchozí věty jim dává ještě jinou charakteristiku — pomocí subgradientu hodnoty úlohy parametrického programování (4.4.2): v případě regulární úlohy KP dostáváme zkombinováním těchto dvou výsledků $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy (viz Věta 4.3.6 a LP).

DŮKAZ VĚTY 4.4.3(I)

Je-li množina B jednoprvková ($B \neq \emptyset$ neboť $0 \in B$), pak je tvrzení zřejmé. Nechť tedy $\tilde{b}, \widehat{b} \in B$ a $\lambda \in [0, 1]$ a jsou libovolná, tj. existují $\tilde{x} \in X(\tilde{b})$ a $\widehat{x} \in X(\widehat{b})$. Položme $x := \lambda\tilde{x} + (1 - \lambda)\widehat{x}$. Potom

$$G(x) = G(\lambda\tilde{x} + (1 - \lambda)\widehat{x}) \stackrel{G..konvx}{\leq} \lambda G(\tilde{x}) + (1 - \lambda) G(\widehat{x}) \leq \lambda\tilde{b} + (1 - \lambda)\widehat{b}. \quad (*)$$

Tedy $x \in X(\lambda\tilde{b} + (1 - \lambda)\widehat{b})$, tj. $X(\lambda\tilde{b} + (1 - \lambda)\widehat{b}) \neq \emptyset$, tj. $\lambda\tilde{b} + (1 - \lambda)\widehat{b} \in B$.

DŮKAZ VĚTY 4.4.3(II)

Nechť $y^* \in Y(0)$. Pak $y^* \geq 0$ a $F(0) \leq f(x) + \langle y^*, G(x) \rangle$ pro $\forall x \in P$. Protože $y^* \geq 0$, platí $F(0) \leq f(x) + \langle y^*, b \rangle$ pro libovolné $b \in B$ a $x \in X(b)$, tudíž také

$$F(0) \leq F(b) + \langle y^*, b \rangle.$$

Protože $F(0) > -\infty$, je zřejmé, že také $F(b) > -\infty$, a tedy funkce $F(b)$ je konečná ($F(b) = \infty$ pouze pro $f \equiv \infty$ ζ).

Nechť nyní $\tilde{b}, \hat{b} \in B$ a $\lambda \in [0, 1]$ jsou libovolná. Položme $b := \lambda\tilde{b} + (1 - \lambda)\hat{b}$. Pak pro libovolná $\tilde{x} \in X(\tilde{b})$ a $\hat{x} \in X(\hat{b})$ označme $x := \lambda\tilde{x} + (1 - \lambda)\hat{x}$. Podle části (i) je $x \in X(b)$, viz (*), tedy

$$F(b) \leq f(x) \leq \lambda f(\tilde{x}) + (1 - \lambda)f(\hat{x}).$$

Protože \tilde{x}, \hat{x} byla zvolena libovolně, plyne odtud

$$F(b) \leq \lambda F(\tilde{b}) + (1 - \lambda)F(\hat{b}),$$

tedy funkce F je konvexní.

Je-li $\tilde{b}, \hat{b} \in B$ a $\tilde{b} \leq \hat{b}$ (po složkách), pak zřejmě $X(\tilde{b}) \subseteq X(\hat{b})$. Proto $F(\tilde{b}) \geq F(\hat{b})$, a tedy funkce F je nerostoucí.

DŮKAZ VĚTY 4.4.3(III)

Nechť $b \in B$ splňující $\partial F(b) \neq \emptyset$ je libovolné a nechť $y^* \in \partial F(b)$, tj.

$$F(b') - F(b) \geq \langle y^*, b' - b \rangle \quad \forall b' \in B. \quad (4.4.3)$$

Jelikož F je nerostoucí dle (ii), plyne odtud $y^* \leq 0$. Nechť dále $x \in P$ je libovolné a položíme $b' := G(x)$. Pak $b' \in B$, $x \in X(b')$, a tudíž $F(b') \leq f(x)$ dle definice $F(b)$. Proto z (4.4.3) máme

$$F(b) \leq F(b') - \langle y^*, b' - b \rangle \leq f(x) + \langle -y^*, b' - b \rangle = f(x) + \langle -y^*, G(x) - b \rangle. \quad (*)$$

Jelikož $x \in P$ bylo zvoleno libovolně, platí nerovnost (*) pro každé $x \in P$, a tudíž $-y^* \in Y(b)$ (dle definice $Y(b)$ a z faktu $-y^* \geq 0$).

Naopak, nechť $b \in B$ splňující $Y(b) \neq \emptyset$ je libovolné a nechť $-y^* \in Y(b)$, tj. $-y^* \geq 0$ a $F(b) \leq f(x) + \langle -y^*, G(x) - b \rangle$ pro každé $x \in P$. Potom pro každé $b' \in B$ a $x \in X(b')$ dostáváme

$$F(b) \leq f(x) + \langle -y^*, G(x) - b \rangle \leq f(x) + \langle -y^*, b' - b \rangle \implies F(b) \leq F(b') + \langle -y^*, b' - b \rangle.$$

Vzhledem k libovolnosti $b' \in B$, platí tato nerovnost pro každé $b' \in B$, a tudíž $y^* \in \partial F(b)$.

Jelikož z těchto dvou „implikací“ také vyplývá, že množiny $\partial F(b)$ a $Y(b)$ musí být současně prázdné/neprázdné (jistě $\partial F(b) \neq \emptyset$ pro každé $b \in \text{ri } B$, ale jinak? – je možné $Y(b) = \emptyset$, neboť explicitně nepožadujeme regulární úlohu KP), platí $\partial F(b) = -Y(b)$.

S pomocí Věty 4.4.3 můžeme získat několik důležitých vlastností původní úlohy MP, tj. úlohy (4.4.2) s $b = 0$.

Důsledek 4.4.4

Nechť množina $P \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní, funkce f, g_1, \dots, g_m jsou konvexní na P , platí $F(0) > -\infty$ a existuje $\bar{x} \in P$ takové, že $G(\bar{x}) < 0$ (viz Slaterovu podmínku ve Větě 4.3.2). Potom $0 \in \text{int } B$ a

- (i) funkce $F(\cdot)$ je spojitá v bodě $b = 0$,
- (ii) pro libovolné $h \in \mathbb{R}^m$ existuje jednostranná směrová derivace

$$F'_h(0) = \max_{y^* \in Y(0)} \langle -y^*, h \rangle,$$

- (iii) funkce F je diferencovatelná v bodě $b = 0$ právě tehdy, když $Y(0)$ je jednoprvková, tj. $Y(0) = \{y^*\}$. Navíc platí $\text{grad}^\top F(0) = -y^*$.

Z části (iii) ihned vyplývá, že pro úlohu (4.4.2) s $b = 0$ (při splnění uvedených předpokladů) existuje více K–T vektorů \iff funkce F není v bodě $b = 0$ diferencovatelná.

Důkaz. Protože existuje $\bar{x} \in P$ takové, že $G(\bar{x}) < 0 = b$, je zřejmé, že $b = 0 \in \text{int } B$ (neboť $G(\bar{x}) \leq b$ pro všechna dostatečně malá b). Tvrzení pak plyne z Věty 4.4.3 a (i) Věty 2.4.1, (ii) Věty 2.5.6 a (iii) Věty 2.5.7. ■

Příklad

V závislosti na parametru b určíme hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy

$$f(x) = x^2 + 2x + 2 \rightarrow \min, \quad x \leq b.$$

Určíme dále duální úlohu k této úloze, vyřešíme ji (bez použití předchozí části) a ověříme platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

Ukážeme si (alespoň) jeden ekonomicky motivovaný příklad založený na předchozích výsledcích. K tomu bude potřeba ještě následující důsledek.

Důsledek
4.4.5

- (i) Necht' jsou splněny předpoklady Věty 4.4.3 a $y_i^* = 0$ pro všechna $y^* \in Y(0)$ a dané $i \in \{1, \dots, m\}$. Potom $F(\alpha e_i) = F(0)$ pro každé $\alpha \geq 0$.
- (ii) Necht' jsou splněny předpoklady Důsledku 4.4.4 a $y_i^* > 0$ pro všechna $y^* \in Y(0)$ a dané $i \in \{1, \dots, m\}$. Potom $F(\alpha e_i) < F(0)$ pro každé $\alpha > 0$.

Příklad

Ekonomická interpretace K–T vektoru (viz Lagrangeovy multiplikátory \rightsquigarrow stínová cena).

FENCHEL VS. K–T

Celý výklad byl založen na K–T vektoru. Nyní si ukážeme, jak lze odvodit např. vztah duality $f^* = \varphi^*$ pomocí Fenchelovy transformace. Uvažme úlohu

$$f(x) \rightarrow \min, \quad g_i(x) + b_i \leq 0, \quad i \in \{1, \dots, m\} \quad x \in P \subseteq \mathbb{R}^n$$

a nechť $F(b)$ je hodnota této úlohy. Pak pro konjugovanou funkci platí

$$\begin{aligned} F^*(y) &= \sup_{b \in B} \{ \langle y, b \rangle - F(b) \} = \sup_{b \in \mathbb{R}^m} \{ \langle y, b \rangle - \inf_{\substack{x \in P \\ G(x) + b \leq 0}} f(x) \} = \\ &= \sup_{b \in \mathbb{R}^m} \left\{ - \inf_{\substack{x \in P \\ G(x) \leq -b}} (f(x) - \langle y, b \rangle) \right\} = \sup_{b \in \mathbb{R}^m} \sup_{\substack{x \in P \\ G(x) \leq -b}} \{ \langle y, b \rangle - f(x) \} = \\ &= \sup_{x \in P} \sup_{b \leq -G(x)} \{ \langle y, b \rangle - f(x) \} = \\ &= \begin{cases} \sup_{x \in P} \{ - \langle y, G(x) \rangle - f(x) \} = - \inf_{x \in P} \{ f(x) + \langle y, G(x) \rangle \}, & y \geq 0, \\ \infty, & y < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

FENCHEL VS. K–T (POKR.)

Tedy $F^*(y) = -\varphi(y)$ a duální úlohu (4.3.1) lze psát jako

$$-F^*(y) \rightarrow \max, \quad y \geq 0.$$

Navíc platí

$$F^{**}(0) = \sup_{y \geq 0} \{ \langle 0, y \rangle - F^*(y) \} = \sup_{y \geq 0} \{ -F^*(y) \} = \sup_{y \geq 0} \{ \varphi(y) \} = \varphi^*.$$

Pokud je funkce F spojitá v 0 , platí podle Věty 2.6.6 rovnost $F(0) = F^{**}(0)$, tedy platí vztah duality $f^* = \varphi^*$. To znamená, že každá podmínka, která zajistí spojitost funkce F v 0 je zároveň postačující podmínkou pro platnost vztahu duality, např. Slaterova podmínka a požadavek $F(0) > -\infty$ implikují $0 \in \text{int } B$, a tedy F je spojitá podle Vět 2.4.1 a 4.4.3(ii).

Konec.