M5170: Matematické programování | **x–xxx. termín: podzim 201x**

UKÁZKOVÁ ZKOUŠKOVÁ PÍSEMNÁ PRÁCE

- **Jméno a příjmení (UČO):** ______________________________

- **Počet listů s řešením:** ________________

$\mathbf{1}_2$	$\mathbf{2}_1$	$\mathbf{3}_{1,5}$	$\mathbf{4}_{2,5}$	$\mathbf{5}_3$	Σ_{10}	$\leadsto$

- **Všechny své výpočty a odpovědi řádně zdůvodněte.**
- Čas na vypracování je **120 minut**.
- Z písemné část lze získat nejvýše 10 bodů. Pro postoupení k ústní části je nutné získat **alespoň 4 body**. Ústní část začne **xx. xxx 20xx v xx hodin** v pracovně zkoušejícího (2. poschodí, kancelář 02021a).
- Předběžné rozdělení známek dle bodů z písemné části (může se změnit na základě ústní části):

$$[10,9] = \mathbf{A} \quad (9,8] = \mathbf{B} \quad (8,7] = \mathbf{C} \quad (7,6] = \mathbf{D} \quad (6,5] = \mathbf{E} \quad (5,0] = \mathbf{F}$$

- **HODNĚ ŠTĚSTÍ!** (Pokud jej potřebujete.)

UKÁZKOVÁ ZKOUŠKOVÁ PÍSEMNÁ PRÁCE

ZADÁNÍ PÍSEMNÉ ČÁSTI v. 1

1. (2 body) Určete konjugovanou funkci k funkci

$$f(x) = \sqrt{1+x^2}.$$

Ověřte také platnost Fenchelovy rovnosti $f^{**}(x) = f(x)$.

2. (1 bod) Rozhodněte, pro které body $[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2$ je funkce

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{x_2} + \ln\left(e^{x_1} + e^{x_2}\right)$$

konvexní. Výslednou množinu také načrtněte a rozhodněte, zda bod $[1, 0]$ je vnitřním, hraničním nebo vnějším bodem této množiny.

3. (1,5 bodu) S využitím Fibonacciho metody určete přibližné řešení úlohy

$$f(x) = 9x^2 - 10x - 16 \to \min$$

na intervalu $I = [0, 1]$ s chybou nejvýše $\varepsilon = 1/10$ a pro $\delta = 1/40$.

4. (2,5 bodu) Při počáteční aproximaci $x^{[0]} = [1, -1, 0]$ vypočtěte následující dva členy v minimalizující posloupnosti $\{x^{[k]}\}$, tj. $x^{[1]}$ a $x^{[2]}$, získané metodou největšího spádu pro řešení úlohy

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + x_1x_3 + 2x_2x_3 - 4x_1 + 2x_2 \to \min.$$

5. (3 body) Pomocí Lagrangeova principu vyřešte úlohu matematického programování

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 8x_1 - 6x_2 - 4x_3 + 9 \to \min,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 4, \quad x_1 - 2x_2 - 2x_3 \geq 1, \quad x_3 \geq 0.$$

UKÁZKOVÁ ZKOUŠKOVÁ PÍSEMNÁ PRÁCE

ZADÁNÍ PÍSEMNÉ ČÁSTI v. 2

1. **(2 body)** Načrtněte a exaktně určete kónický a konvexní obal (tj. $\operatorname{cone} A$ a $\operatorname{conv} A$) množiny

$$A = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0,\ x_2 \geq \mathrm{e}^{x_1}\} \cup \{[0,0]\}.$$

2. **(1 bod)** Rozhodněte, zda funkce

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3 + 6x_1 - 3x_2 + x_3 + 7$$

je konvexní na $\mathbb{R}^3$. Je zde i ostře/silně konvexní?

3. **(1,5 bodu)** S využitím metody půlení intervalu určete přibližné řešení úlohy

$$f(x) = \mathrm{e}^{4x^2-3x+2} \to \min$$

na intervalu $I = [0,2]$ s chybou nejvýše $\varepsilon = 1/5$ a pro $\delta = 1/10$.

4. **(2,5 bodu)** Při počáteční aproximaci $x^{[0]} = [1,-1]$ vypočtěte následující dva členy v minimalizující posloupnosti $\{x^{[k]}\}$, tj. $x^{[1]}$ a $x^{[2]}$, získané metodou sdružených gradientů pro řešení úlohy

$$f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 - 3x_1 \to \min.$$

5. **(3 body)** Určete duální úlohu k úloze matematického programování

$$x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - 3x_1 + 2x_2 \to \min, \quad x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_1 \geq 0, \tag{1}$$

a ověřte platnost vztahu duality $f^* = \varphi^*$.

UKÁZKOVÁ ZKOUŠKOVÁ PÍSEMNÁ PRÁCE

ZADÁNÍ PÍSEMNÉ ČÁSTI v. 3

1. **(2 body)** Nechť
$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2}.$$
Určete subdiferenciál funkce f v bodě $[0,0]$. Rozhodněte, zda $z = 2(x_1 + x_2)$ je opěrnou nadrovinou k nadgrafu funkce f v bodě $[0,0]$.

2. **(1 bod)** Pouze s využitím definice ukažte, že funkce
$$f(x_1, x_2) = \mathrm{e}^{x_1 + x_2}$$
je konvexní na $\mathbb{R}^2$. Je zde také ostře a/nebo silně konvexní?

3. **(1,5 bodu)** S využitím metody zlatého řezu s $N = 5$ určete přibližné řešení úlohy
$$f(x) = \mathrm{tg}(x^2 - 3x + 1) \to \min, \quad x \in [1,3].$$
Bez znalosti přesného řešení také odhadněte maximální chybu, které se při této aproximaci dopustíte.

Nápověda: $\frac{1}{\tau} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \approx 0,618$.

4. **(2,5 bodu)** Při počáteční aproximaci $x^{[0]} = [1,1]$ vypočtěte následující člen v minimalizující posloupnosti $\{x^{[k]}\}$, tj. $x^{[1]}$, získaný Newtonovou metodou pro řešení úlohy
$$f(x_1, x_2) = \mathrm{e}^{1 + x_1^2 x_2^2} \to \min.$$

5. **(3 body)** V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování
$$3x_1^2 + x_2^2 + 4x_2 - 1 \to \min, \quad x_1^2 + 2x_2 \le b. \tag{2}$$
Určete dále duální úlohu k (2), vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.