M5170: Matematické programování — Sbírka příkladů (aktualizováno 22. prosince 2019)

1. „Opakování“ a úvod

Pro kontrolu výpočtů můžete využít Maplety — viz https://m5170.page.link/y6N7.

1.1) Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = \sqrt{3}x - y + 2 \quad \text{na množině} \quad M = \big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2x + y^2 = 0\big\}.$$

řešení: $P_{\max} = [-1 + \sqrt{3}/2, -1/2]$ a $P_{\min} = [-1 - \sqrt{3}/2, 1/2]$

1.2) Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = 2x - 3y \quad \text{na množině} \quad M = \big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 25\big\}.$$

řešení: $P_{\max} = [10/\sqrt{13}, -15/\sqrt{13}]$ a $P_{\min} = [-10/\sqrt{13}, 15/\sqrt{13}]$

1.3) Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 \quad \text{na množině} \quad M = \big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 + y^2 = 9\big\}.$$

řešení: $P_{\max} = [\pm\sqrt{3}/2, \pm 3\sqrt{3}/2]$ a $P_{\min} = [\pm 3/2, \mp 3/2]$

1.4) Pro $a, b > 0$ určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = \frac{ax^2}{2} + \frac{by^2}{2} \quad \text{na množině} \quad M = \big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^3 = 1\big\}.$$

řešení: $P_{\max} = [a/\sqrt[3]{a^3+b^3}, b/\sqrt[3]{a^3+b^3}]$ a $P_{\min} = [0,1]$, $P_{\min} = [1,0]$,

1.5) Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = \ln(1+x^2) - y \quad \text{na množině} \quad M = \big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid (1+x^2)^2 + y^2 = 4\big\}.$$

řešení: $P_{\max} = \left[\pm\sqrt{-1 + \sqrt{(\sqrt{17}-1)/2}}, (1-\sqrt{17})/2\right]$ a $P_{\min} = [0, \pm\sqrt{3}]$

1.6) Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y,z) = (x+y)^2 + (y+z)^2 \quad \text{na množině} \quad M = \big\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 1\big\}.$$

řešení: $P_{\min} = [1/2, -1/2, 1/2]$

1.7) Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y,z) = xyz \quad \text{na množině} \quad M = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \mid xy + yz + xz = 3\right\}.$$

Dokážete výsledek geometricky interpretovat?

řešení: $P_{\max} = [1,1,1]$ a $P_{\min} = [-1,-1,-1]$

1.8) Pro $a, b, c > 0$ určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y,z) = xyz \quad \text{na množině} \quad M = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1\right\}.$$

řešení: $P_{\max} = [a/3, b/3, c/3]$

1.9) Určete minimium funkce

$$f(x,y,z) = z - xy^2 \quad \text{na množině} \quad M = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}.$$

řešení: $P_{\min} = [0,0,-1]$

1.10) Určete minimium funkce

$$f(x,y,z) = -x^2y^2z^2 \quad \text{na množině} \quad M = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 3\right\}.$$

řešení: $P_{\min}$ v bodech $[\pm 1, \pm 1, \pm 1]$ s libovolnou kombinací znamének

1.11) Určete minimium funkce

$$f(x,y,z) = -xy^2z^3 \quad \text{na množině} \quad M = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 12\right\}.$$

řešení: $P_{\min} = [2,2,2]$

1.12) Pro $a > b > c > 0$ určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{na množině} \quad M = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}.$$

Dokážete výsledek geometricky interpretovat?

řešení: $P_{\max} = [\pm a, 0, 0]$ a $P_{\min} = [0, 0 \pm c]$

1.13) Metodou Lagrangeových multiplikátorů řešte následující úlohu: Do elipsoidu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

umístěte hranol s maximálním objemem. Tento maximální objem určete.

řešení: $V_{\max} = 8abc/(9\sqrt{3})$ s jedním vrcholem v bodě $P = [a/\sqrt{3}, b/\sqrt{3}, c/\sqrt{3}]$

1.14) Pomocí Lagrangeovy funkce odvoďte vzorec pro výpočet vzdálenosti bodu $x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*] \in \mathbb{R}^n$ od nadroviny $a_1x_1 + \dots a_nx_n = b$ neboli $\langle a, x \rangle = b$.

řešení: $d = |b - \langle a, x^* \rangle| / \|a\|$

1.15) Nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Pomocí Lagrangeovy funkce ukažte, že pro tzv. spektrální maticovou normu

$$\|A\|_\sigma := \max_{\|x\|=1} \|Ax\|,$$

která je indukovaná Euklidovskou vektorovou normou $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, platí

$$\|A\|_\sigma = \sqrt{\lambda_{\max}},$$

kde $\lambda_{\max}$ značí největší vlastní číslo matice $A^\top A$.

1.16) Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) \quad \text{na množině} \quad M = \big\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \mid x-y=0 \;\; \& \;\; x+y+z=1\big\}.$$

řešení: $P_{\min} = [1/3, 1/3, 1/3]$

1.17) Určete lokální extrémy funkce $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (x_1-1)^2 + (x_2-x_3)^2 + (x_4-x_5)^5$ na množině

$$M = \Big\{x = [x_1,\dots,x_5] \in \mathbb{R}^5 \;\Big|\; x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 5,\; x_3 - 2(x_4+x_5) + 3 = 0\Big\}.$$

řešení: $P_{\min} = [1,1,1,1,1]$

1.18) Pomocí vrstevnic funkce, jejíž extrémy hledáme, určete největší a nejmenší hodnotu funkce:

a) $f(x,y) = -x-2y$ na množině M vymezené nerovnostmi $x-4y \leqslant 4$, $-2x+y \leqslant 2$, $-3x+4y \leqslant 12$, $2x+y \leqslant 8$, $x \geqslant 0$ a $y \geqslant 0$;

řešení: $P_{\max} = [0,0]$ a $P_{\min} = [20/11, 48/11]$

b) $f(x,y) = -x-2y$ na množině M vymezené nerovnostmi $x-4y \leqslant 4$, $-2x+y \leqslant 2$, $-3x+4y \leqslant 12$ $x \geqslant 0$ a $y \geqslant 0$;

řešení: $P_{\max} = [0,0]$

c) $f(x,y) = x + y$ na množině M vymezené nerovnostmi $x + 2y \leqslant 4$, $4x + 2y \leqslant 12$, $-2x + y \leqslant 1$, $x \geqslant 0$ a $y \geqslant 0$;
řešení: $P_{\max} = [8/3, 2/3]$ a $P_{\min} = [0, 0]$

d) $f(x,y) = x - y$ na množině M vymezené nerovnostmi $x + y \leqslant 6$, $3x + y \leqslant 15$, $-x + y \leqslant 3$, $x \geqslant 0$ a $y \geqslant 0$;
řešení: $P_{\max} = [5, 0]$ a minimum na úsečce $y = 3 + x$ pro $x \in [0, 3/2]$

e) $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - 2y + 3$ na množině M vymezené nerovnostmi $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ a $x + y \leqslant 1$;
řešení: $P_{\max} = [0, 0]$ a $P_{\min} = [1/2, 1/2]$

f) $f(x,y) = xy$ na množině $M = \big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\big\}$;
řešení: $P_{\max} = [\pm\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/2]$ a $P_{\min} = [\pm\sqrt{2}/2, \mp\sqrt{2}/2]$

g) $f(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2$ na množině $M = \big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\big\}$;
řešení: $P_{\max} = [0, \pm 1]$ a $P_{\min} = [0, 0]$

h) $f(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2$ na množině $M = \big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\big\}$;
řešení: $P_{\max} = [0, \pm 1]$ a $P_{\min} = [\pm 1, 0]$

i) $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 + 4y + 1$ na množině $M = \big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1\big\}$;
řešení: $P_{\max} = [2 + \sqrt{10}/10, 1 + 3\sqrt{10}/10]$, $P_{\min} = [2 - \sqrt{10}/10, 1 - 3\sqrt{10}/10]$

j) $f(x,y) = 5x^2 + y^2 - 4y - 10x$ na množině $M = \big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid 5x^2 + y^2 = 25\big\}$;
řešení: $P_{\max} = [-5/3, -10/3]$, $P_{\min} = [5/3, 10/3]$

k) $f(x,y) = 5x^2 + y^2 - 4y - 10x$ na množině $M = \big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 + y^2 = 25\big\}$, nápověda: polynom $12x^4 - 60x^3 + 11x^2 + 500x - 625$ má pouze dva reálné kořeny $x_1 \approx 1,47$ a $x_2 \approx -2,74$;
řešení: $P_{\max} \approx [-2,74; 1,57]$, $P_{\min} \approx [1,47; 4,28]$

l) $f(x,y) = 2x^2 - 6xy + 5y^2 - 16x + 40y$ na množině M vymezené nerovnostmi $x + y \geqslant 3$, $2x - y \geqslant 2$, $x \geqslant 0$ a $y \geqslant 0$;
řešení: $P_{\min} = [4, 0]$

m) $f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2$ na množině $M = \big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 3\big\}$; *řešení*: $P_{\max} = [5/2, 1/2]$

n) $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ na množině $M = \big\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\big\}$.
řešení: $P_{\max} = [1/3, -2/3, 2/3]$, $P_{\min} = [-1/3, 2/3, -2/3]$

2. Konvexní množiny

2.1) Ukažte, že množina

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} \leqslant 1 \right\}, \qquad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

je konvexní.

2.2) *Dokažte:* Množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní právě tehdy, když její průnik s libovolnou přímkou je konvexní množina.

2.3) Rozhodněte, která z následujících množin X je konvexní (a polytop nebo polyedr):

a) *Fošna/traverza* $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha \leqslant \langle p, x \rangle \leqslant \beta\}$.

b) *Obdélník* (pro $n > 2$ též hyperobdélník) $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \leqslant x_i \leqslant \beta_i,\ i = 1, \ldots, n\}$.

c) *Klín* $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p_1, x \rangle \leqslant \beta_1,\ \langle p_2, x \rangle \leqslant \beta_2\}$.

d) Množina bodů, které jsou blíže k danému x_0 než množina $Y \subseteq \mathbb{R}^n$, tj.

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\|_2 \leqslant \|x - y\|_2 \text{ pro všechna } y \in Y\}.$$

e) Množina bodů, které jsou blíže k množině $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ než k množině $Z \subseteq \mathbb{R}^n$, tj.

$$X = \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x, Y) \leqslant \rho(x, Z)\big\},$$

kde $\rho(x, Y) \coloneqq \inf\{\|x - y\|_2,\ y \in Y\}$.

f) Množina $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x + X_1 \subseteq X_2\}$, kde $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ a X_2 je konvexní.

g) Množina bodů, jejichž vzdálenost k a nepřekročí pevně daný násobek vzdálenosti k b, tj.

$$X = \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\|_2 \leqslant \theta \|x - b\|_2\big\},$$

přičemž se můžeme omezit na situaci $a \neq b$ a $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

h) Množina $X = \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geqslant 0,\ \langle x, y \rangle \leqslant 1 \text{ pro všechna } y \text{ taková, že } \|y\|_2 = 1\big\}$.

i) Množina $X = \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geqslant 0,\ \langle x, y \rangle \leqslant 1 \text{ pro všechna } y \text{ taková, že } \sum_{i=1}^n |y_i| = 1\big\}$.

2.4) *Dokažte:* Množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní právě tehdy, když pro každé $\lambda, \mu \geqslant 0$ platí

$$\lambda X + \mu X = (\lambda + \mu) X,$$

kde množinové sčítání a násobení skalárem je definováno obvyklým způsobem, tj.

$$X + Y = \{x + y,\ x \in X,\ y \in Y\}, \quad \lambda\, X = \{\lambda x \mid x \in X\}.$$

2.5) *S využitím předchozího příkladu dokažte:* Jsou-li $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní množiny a $\alpha, \beta \geqslant 0$, pak je konvexní také množina

$$A = \bigcup_{\alpha,\beta \geqslant 0} \big(\alpha X + \beta Y\big).$$

2.6) *Dokažte následující vlastnosti kužele:*

a) Je-li $X_i \subseteq \mathbb{R}^n$ kužel pro každé $i \in I$, pak $\bigcap_{i\in I} X_i$ je také kužel.

b) Kartézský součin kuželů $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^n$, tj. $X_1 \times X_2$, je kužel.

c) Jsou-li $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ kužely, pak množina $X_1 + X_2$ je kužel.

d) Je-li $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kužel, pak $\overline{X}$ je kužel.

e) Je-li $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kužel a $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, pak množina $AX = \{z \in \mathbb{R}^m \mid z = Ax,\, x \in X\}$ je kužel.

2.7) *Dokažte:*

a) Pro libovolnou množinu vektorů $\{a_i \in \mathbb{R}^n,\, i \in I\}$ je množina $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^\top x \leqslant 0,\, i \in I\}$ uzavřený konvexní kužel.

b) Kužel $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní právě tehdy, když $X + X \subseteq X$.

c) Pro libovolné dva konvexní kužely $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ platí

$$X_1 + X_2 = \operatorname{conv}(X_1 \cup X_2), \qquad X_1 \cap X_2 = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \big[\lambda X_1 \cap (1-\lambda) X_2\big].$$

2.8) *Dokažte:* Je-li $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní kužel, $\lambda_1 \geqslant 0, \dots, \lambda_m \geqslant 0$, $x_1, \dots, x_m \in X$, pak nezáporná kombinace

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m \in X.$$

2.9) Pro dvě množiny $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ definujeme $X - Y = \{z \in \mathbb{R}^n \mid z = x - y,\, x \in X,\, y \in Y\}$. Určete $X - X$, je-li X konvexní kužel $X = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0,\, y \geqslant x\}$.

2.10) Jaký je vztah mezi konvexními a afinními množinami?

2.11) *Dokažte:* Pro $X \subseteq \mathbb{R}^n$ platí

$$\operatorname{cone} X = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \;\middle|\; \lambda_1, \dots, \lambda_m \geqslant 0,\, x_i \in X \right\}.$$

2.12) *Dokažte:* Je-li $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní množina, potom platí

$$\operatorname{cone} X = \bigcup_{x \in X} \{\gamma x,\ \gamma \geqslant 0\}.$$

2.13) *Dokažte:* Pro $X \subseteq \mathbb{R}^n$ platí

$$\operatorname{aff} X = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \;\middle|\; \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1,\ x_i \in X \right\}.$$

2.14) *Ilustrujte platnost Lemma 2.1.8:* Určete kónický obal množiny $X = \{[1,2],\ [5,1]\}$ a ukažte, že jeho libovolný bod lze vyjádřit pomocí dvou bodů z X.

2.15) Nechť $X_i \subseteq \mathbb{R}^n$ jsou konvexní množiny pro $i \in I$, kde I je libovolná indexová množina. Potom

$$\operatorname{conv}\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) = \bigcup_{\substack{\tilde{I} \subseteq I \\ \tilde{I} \text{ je konečná}}} \left\{ \sum_{i \in \tilde{I}} \lambda_i X_i \;\middle|\; \lambda_i \geqslant 0 \text{ pro všechna } i \in \tilde{I},\ \sum_{i \in \tilde{I}} \lambda_i = 1 \right\},$$

tj. konvexní obal sjednocení X_i je roven množině všech konvexních kombinací prvků z X_i.

2.16) *Dokažte:* Je-li $X \subseteq \mathbb{R}^n$, potom

a) $\operatorname{aff} X = \operatorname{aff}(\operatorname{conv} X)$,

b) $\operatorname{cone} X = \operatorname{cone}(\operatorname{conv} X)$,

c) $\operatorname{aff}(\operatorname{conv} X) \subseteq \operatorname{aff}(\operatorname{cone} X)$ a najděte příklad takové množiny X, že nastane ostrá inkluze,

d) je-li $0 \in \operatorname{conv} X$, potom $\operatorname{aff}(\operatorname{conv} X) = \operatorname{aff}(\operatorname{cone} X)$.

2.17) *Dokažte:* Je-li $X \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřená množina, potom množina $\operatorname{conv} X$ je také otevřená. Platí i opačné tvrzení (tj. je-li $X \subseteq \mathbb{R}^n$ uzavřená množina, potom množina $\operatorname{conv} X$ je uzavřená)?

2.18) *Dokažte:* Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina. Potom množina $\overline{X}$ je také konvexní.

2.19) *Dokažte:* Pro $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ platí $\operatorname{conv} X + \operatorname{conv} Y = \operatorname{conv}(X + Y)$.

2.20) Nechť

$$A = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 1 + x^2\right\} \cup \left\{[0,0]\right\}.$$

Určete $\operatorname{conv} A$ a $\operatorname{cone} A$.

řešení: $\operatorname{cone} A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 2|x|\}$ a
$\operatorname{conv} A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 2|x|, -1 \leqslant x \leqslant 1\} \cup \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 1 + x^2, |x| > 1\}$

2.21) Načrtněte kónický a konvexní obal (tj. cone A a conv A) množiny

$$A = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geqslant 2 + x_1^2\} \cup \{[0,1]\}.$$

Množinu conv A také popište analyticky. Je bod $[1,3]$ vnitřním, hraničním nebo vnějším bodem množiny conv A?

řešení: conv $A = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geqslant 2x_1 + 1, x_1 \in [0,1]\} \cup \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geqslant -2x_1 + 1, x_1 \in [-1,0]\} \cup$
$\cup \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geqslant 2 + x_1^2, x_1 \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]\}$, bod $[1,3]$ je hraničním bodem

2.22) Nechť

$$A = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant \mathrm{e}^{x_1}\} \cup \{[0,0]\}.$$

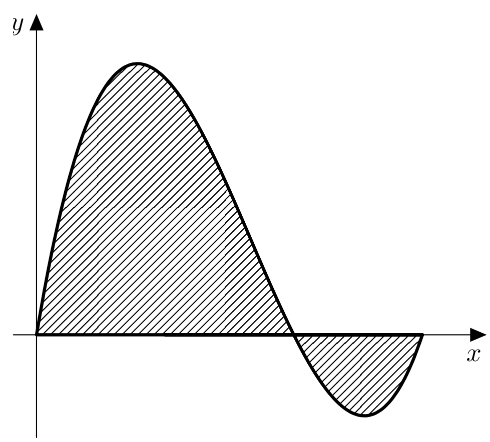
Určete conv A a cone A. Výsledné množiny také načrtněte.

řešení: cone $A = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant \mathrm{e}\, x_1\}$,
conv $A = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x_1 \leqslant 1, x_2 \geqslant \mathrm{e}\, x_1\} \cup \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geqslant 1,\ x_2 \geqslant \mathrm{e}^{x_1}\}$

2.23) Nechť množina X je vymezena grafem funkce

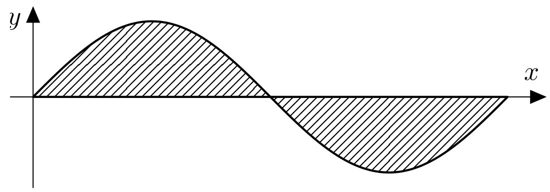
$$f(x) = x(x-2)(x-3) = x^3 - 5x^2 + 6x$$

pro $x \in [1,3]$ a osou x (viz obrázek níže). Načrtněte a exaktně určete kónický obal množiny X (tj. cone X) a konvexní obal množiny X (tj. conv X).

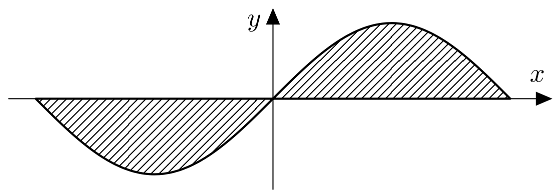


řešení: cone $X = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid -x/4 \leqslant y \leqslant 6x\}$ a
conv $X = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1],\ -x/4 \leqslant y \leqslant f(x)\} \cup$
$\cup \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1, 5/2],\ -x/4 \leqslant y \leqslant -x+3\} \cup \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [5/2, 3],\ f(x) \leqslant y \leqslant -x+3\}$

2.24) Nechť množina X je vymezena grafem funkce $f(x) = \sin x$ pro $x \in [0, 2\pi]$ a osou x (viz obrázek níže). Načrtněte a exaktně určete kónický obal množiny X (tj. cone X) a konvexní obal množiny X (tj. conv X).



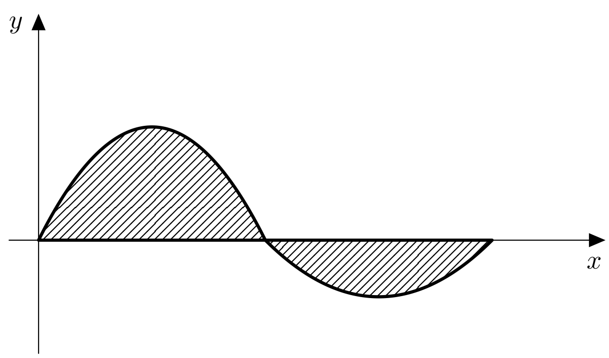
2.25) Nechť množina X je vymezena grafem funkce $f(x) = \sin x$ pro $x \in [-\pi, \pi]$ a osou x (viz obrázek níže). Načrtněte a exaktně určete kónický obal množiny X (tj. $\operatorname{cone} X$) a konvexní obal množiny X (tj. $\operatorname{conv} X$).



2.26) Nechť množina A je vymezena grafem funkce

$$f(x) = \begin{cases} -2\,(x-1)\,x, & x \in [0,1], \\ (x-1)\,(x-2), & x \in [1,2], \end{cases}$$

a osou x (viz obrázek níže). Určete $\operatorname{cone} A$ a $\operatorname{conv} A$.



řešení: $\operatorname{cone} A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid (2\sqrt{2}-3)x \leqslant y \leqslant 2x, x \geqslant 0\}$ a

$$\operatorname{conv} A = \Big(\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant (2\sqrt{2}-3)x, x \in [0,\sqrt{2}]\} \cup \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant (x-1)(x-2), x \in [\sqrt{2},2]\}\Big) \bigcap$$

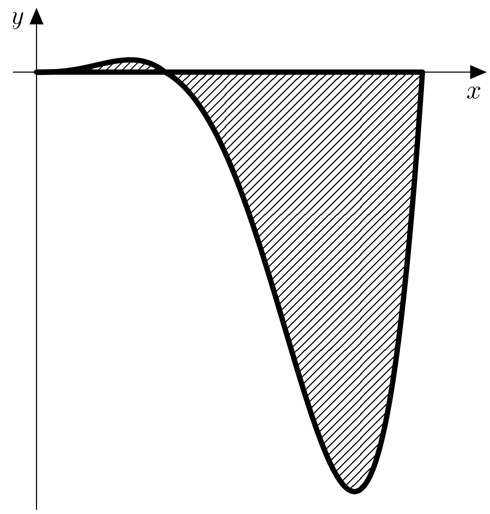
$$\bigcap \Big(\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant -2(x-1)x, x \in [0, 2-\sqrt{2}]\} \cup$$

$$\cup \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant (4\sqrt{2}-6)x + 12 - 8\sqrt{2}, x \in [2-\sqrt{2}, 2]\}\Big)$$

2.27) Nechť množina X je vymezena grafem funkce

$$f(x) = \tfrac{1}{3}x^3(x-1)(x-3) = \tfrac{1}{3}(x^5 - 4x^4 + 3x^3)$$

pro $x \in [0,3]$ a osou x (viz obrázek níže). Načrtněte a exaktně určete kónický obal množiny X (tj. $\operatorname{cone} X$) a konvexní obal množiny X (tj. $\operatorname{conv} X$).



2.28) Nechť

$$A = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant -x^2\right\} \cup \left\{[0,1]\right\}.$$

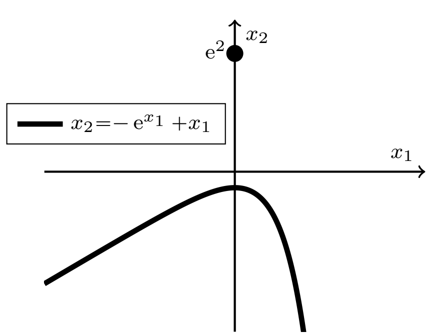
Určete $\operatorname{conv} A$ a $\operatorname{cone} A$.

řešení: $\operatorname{cone} A = \mathbb{R}^2$ a $\operatorname{conv} A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid y + 2x \leqslant 1, x \in [0,1]\} \cup$
$\cup \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid y - 2x \leqslant 1, x \in [-1,0]\} \cup$
$\cup \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant -x^2, x \in (\infty,-1]\} \cup$
$\cup \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant -x^2, x \in [1,\infty)\}$

2.29) Mějme množinu (viz obrázek níže)

$$X = \left\{[x_1,x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid -\mathrm{e}^{x_1} + x_1 \geqslant x_2,\ x_1 \geqslant 0\right\} \cup \left\{[0,\mathrm{e}^2]\right\}.$$

Načrtněte a exaktně určete kónický obal množiny X (tj. $\operatorname{cone} X$) a konvexní obal množiny X (tj. $\operatorname{conv} X$). Jak se změní řešení při vypuštění podmínky $x_1 \geqslant 0$?



řešení: $\operatorname{cone} X = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geqslant 0\}$ a
$\operatorname{conv} X = X \cup \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \leqslant x_1(1-\mathrm{e}^2) + \mathrm{e}^2,\ x_1 \in [0,2]\}$;
po vypuštění $x_1 \geqslant 0$ dostaneme $\operatorname{cone} X = \mathbb{R}^2$ a
$\operatorname{conv} X = X \cup \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \leqslant x_1(1-\mathrm{e}^2)+\mathrm{e}^2,\ x_1 \in [0,2]\} \cup \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \leqslant x_1+\mathrm{e}^2,\ x_1 \leqslant 0\}$

2.30) Nechť

$$A = \big\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + y^2 \leqslant 1\big\} \cup \big\{[0,0], [2,2]\big\}.$$

Určete $\operatorname{conv} A$ a $\operatorname{cone} A$.

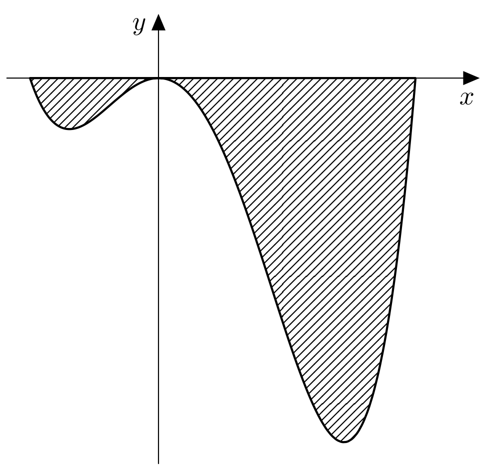
řešení: $\operatorname{cone} A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant x, x \geqslant 0, y \geqslant 0\} \cup \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid 3y + \sqrt{3}x \geqslant 0, x \geqslant 0, y \leqslant 0\}$ a

$$\operatorname{conv} A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant x, y \geqslant 0, x \in [0,2]\} \cup$$
$$\cup \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid y + \sqrt{3}x - 2 - 2\sqrt{3} \leqslant 0, y \geqslant 0, x \in [2, \sqrt{3}/2 + 2]\} \cup$$
$$\cup \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + y^2 \leqslant 1, y \geqslant 0, x \in [\sqrt{3}/2 + 2, 3]\} \cup$$
$$\cup \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid 3y + \sqrt{3}x \geqslant 0, y \leqslant 0, x \in [0, 3/2]\} \cup$$
$$\cup \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + y^2 \leqslant 1, y \leqslant 0, x \in [3/2, 3]\} \cup$$

2.31) Nechť množina X je vymezena grafem funkce

$$f(x) = x^2(x+1)(x-2) = (x^4 - x^3 - 2)$$

pro $x \in [-1, 2]$ a osou x (viz obrázek níže). Načrtněte a exaktně určete kónický obal množiny X (tj. $\operatorname{cone} X$) a konvexní obal množiny X (tj. $\operatorname{conv} X$).



2.32) Nechť $p > 1$ a

$$A = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \geqslant 1 + \frac{|x|^p}{p}\right\} \cup \big\{[0,0]\big\}.$$

Určete $\operatorname{conv} A$ a $\operatorname{cone} A$.

řešení: pro $q := p/(p-1)$ je cone $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant q^{1/q}|x|\}$ a
conv $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant q^{1/q}|x|, -q^{1/q} \leqslant x \leqslant q^{1/q}\} \cup \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 1 + |x|^p/p, |x| > q^{1/q}\}$

2.33) *Dokažte:* Pro $X \subseteq \mathbb{R}^n$ platí $\operatorname{aff} X = \operatorname{aff} \overline{X}$.

2.34) *Dokažte:* Pro $X \subseteq \mathbb{R}^n$ a $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ platí

a) $A\,\mathrm{ri}(X) = \mathrm{ri}(AX)$, kde $AX = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = Ax,\, x \in X\}$,

b) $A\overline{X} \subseteq \overline{AX}$. Je-li navíc množina X ohraničená, potom $A\overline{X} = \overline{AX}$. Uveďte příklad, kdy skutečně nastává ostrá inkluze.

2.35) *Dokažte:* Pro konvexní množiny $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ platí

a) $\overline{X \cap Y} \subseteq \overline{X} \cap \overline{Y}$ a $\mathrm{ri}\, X \cap \mathrm{ri}\, Y \subseteq \mathrm{ri}(X \cap Y)$. Je-li navíc $\mathrm{ri}\, X \cap \mathrm{ri}\, Y \neq \emptyset$, pak $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$ a $\mathrm{ri}\, X \cap \mathrm{ri}\, Y = \mathrm{ri}(X \cap Y)$. Uveďte příklad, kdy nastávají ostré inkluze.

b) $\mathrm{ri}(X+Y) = \mathrm{ri}\, X + \mathrm{ri}\, Y$ a $\overline{X} + \overline{Y} \subseteq \overline{X+Y}$. Je-li alespoň jedna z množin X nebo Y ohraničená, pak $\overline{X} + \overline{Y} = \overline{X+Y}$. Uveďte příklad, kdy nastává ostrá inkluze.

2.36) *Dokažte:* Je-li $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní množina a $\mathcal{V}$ zaměření afinního obalu aff X, potom

$$\mathrm{ri}\, X = \mathrm{int}(X + \mathcal{V}^\perp) \cap X.$$

2.37) *Dokažte:* Nechť $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ jsou konvexní množiny takové, že $X \subseteq Y$.

a) Množina $\mathrm{ri}\, X$ nemusí být podmnožinou $\mathrm{ri}\, Y$ (udejte příklad).

b) Pokud $\operatorname{aff} X = \operatorname{aff} Y$, pak $\mathrm{ri}\, X \subseteq \mathrm{ri}\, Y$.

c) Pokud $\mathrm{ri}\, X \cap \mathrm{ri}\, Y \neq \emptyset$, $\mathrm{ri}\, X \subseteq \mathrm{ri}\, Y$.

d) Pokud $X \cap \mathrm{ri}\, Y \neq \emptyset$, $\mathrm{ri}\, X \cap \mathrm{ri}\, Y \neq \emptyset$.

2.38) *Dokažte rozšíření Věty 2.1.12(iii):* Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina. Potom $x \in \mathrm{ri}\, X$ právě tehdy, když pro každé $\bar{x} \in \operatorname{aff} X$ existuje $\gamma > 1$ takové, že $x + (\gamma - 1)(x - \bar{x}) \in X$.

2.39) *Dokažte:*

a) Je-li $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní množina a $0 \in \mathrm{ri}\, X$, pak cone $X = \operatorname{aff} X$.

b) Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ a $0 \in \mathrm{ri}(\mathrm{conv}\, X)$, pak cone $X = \operatorname{aff} X$.

2.40) *Dokažte:* Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

a) Je-li $\operatorname{int} X \neq \emptyset$, pak $\mathrm{r}\partial X = \partial X$. Je-li navíc X konvexní množina, pak $\mathrm{r}\partial X = \partial X$ právě tehdy, když $\operatorname{int} X \neq \emptyset$.

b) Platí $\mathrm{r}\partial X = \emptyset$ právě tehdy, když X je afinní množina,

c) Je-li X konvexní množina, potom $\mathrm{r}\partial X = \mathrm{r}\partial \overline{X} = \mathrm{r}\partial(\operatorname{ri} X)$.

d) Je-li X konvexní a ohraničená množina, pak libovolná polopřímka vycházející z bodu $x \in \operatorname{ri} X$ a ležící v $\operatorname{aff} X$ protíná $\mathrm{r}\partial X$ právě v jednom bodě.

2.41) *Dokažte:* Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

a) Je-li X konvexní a kompaktní a $0 \notin \mathrm{r}\partial X$, pak $\operatorname{cone} X$ je uzavřená množina. Ukažte na příkladu, že toto tvrzení neplatí, pokud X je neohraničená nebo $0 \in \mathrm{r}\partial X$.

b) Je-li X kompaktní a $0 \notin \mathrm{r}\partial(\operatorname{conv} X)$, pak $\operatorname{cone} X$ je uzavřená množina.

2.42) *Dokažte:*

a) Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní kužel. Pak $\operatorname{ri} X$ je také konvexní kužel s možnou výjimkou počátku, tj. $\operatorname{cone}(\operatorname{ri} X) = \operatorname{ri} X \cup \{0\}$.

b) Nechť $X = \operatorname{cone}(\{x_1, \dots, x_m\}) \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak

$$\operatorname{ri} X = \Big\{ y \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; y = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i,\ \lambda_i > 0,\ i = 1, \dots, m \Big\}.$$

2.43) *Dokažte:* Nechť $X_i \subseteq \mathbb{R}^n$ jsou neprázdné množiny pro $i = 1, \dots, m$ a uvažme jejich kartézský součin $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m$. Potom

a) $\operatorname{conv} X = \operatorname{conv} X_1 \times \dots \operatorname{conv} X_m$, $\overline{X} = \overline{X_1} \times \cdots \times \overline{X_m}$ a $\operatorname{aff} X = \operatorname{aff} X_1 \times \cdots \times \operatorname{aff} X_m$,

b) pokud $0 \in X_1 \cap \cdots \cap X_m$, tj. všechny množiny obsahují počátek, pak $\operatorname{cone} X = \operatorname{cone} X_1 \times \cdots \times \operatorname{cone} X_m$,

c) jsou-li $X_1, \dots, X_m$ konvexní množiny, pak $\operatorname{ri} X = \operatorname{ri} X_1 \times \cdots \times \operatorname{ri} X_m$.

2.44) Určete rovnici oddělující nadroviny pro množiny

$$X = \big\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant x^2 + 1\big\}, \qquad Y = \big\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant \alpha y^2\big\},$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$. Pro které hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ jsou množiny vlastně/silně oddělitelné?

řešení: silně oddělitelné pro $\alpha > 3\sqrt{3}/16$, pro $\alpha = 3\sqrt{3}/16$ jsou vlastně oddělitelné a pro $\alpha < 3\sqrt{3}/16$) nejsou oddělitelné, oddělující nadrovina je přímka $y = x/(\sqrt[3]{2\alpha}) + 2^{-5/3}\alpha^{-2/3}$

2.45) Určete rovnici oddělující nadroviny pro množiny

$$X = \{[x_1, \dots, x_{n+1}] \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant 1\},$$
$$Y = \{[x_1, \dots, x_{n+1}] \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 + x_{n+1}^2 + 3 \leqslant 4x_n\}.$$

řešení: nadrovina $H_{p,\beta}$ s vektorem $p = (0, \dots, 0, 1, 0)^\top$ a $\beta = 1$

2.46) *Dokažte:* Nechť $\varnothing \neq X_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a $\varnothing \neq X_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní kužel.

a) Jsou-li množiny X_1, X_2 vlastně oddělitelné, pak jsou vlastně oddělitelné i pomocí nadroviny procházející počátkem.

b) Jsou-li množiny X_1, X_2 silně oddělitelné, pak existuje taková nadrovina procházející počátkem, že jeden z přidružených poloprostorů obsahuje kužel X_2 a má prázdný průnik s X_1.

2.47) *Dokažte:* Nechť $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ jsou konvexní množiny takové, že $\operatorname{int} X_1 \neq \varnothing$ a $X_2 \cap \operatorname{int} X_1 = \varnothing$. Pak existuje nadrovina $H \subseteq \mathbb{R}^n$ taková, že X_1 a X_2 leží v opačných uzavřených poloprostorech určených nadrovinou H, tj. existuje $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ a $\beta \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\langle p, x_1 \rangle \leqslant \beta \leqslant \langle p, x_2 \rangle \quad \text{pro všechna } x_1 \in X_1 \text{ a } x_2 \in X_2.$$

2.48) Určete rovnici opěrné nadroviny k množině

$$X = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant \mathrm{e}^x\}$$

v bodě $a = [0, 1]$.

řešení: nadrovina $H_{p,\beta}$ s vektorem $p = (-1, 1)^\top$ a $\beta = 1$

2.49) Určete rovnici opěrné nadroviny k množině

$$X = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid z \geqslant 1 + x^2 + y^2\}$$

v bodě $a = [1, 1, 3]$.

řešení: nadrovina $H_{p,\beta}$ s vektorem $p = (-2, -2, 1)^\top$ a $\beta = -1$

2.50) Rozhodněte, zda rovina $z = (x + y)/2$ je opěrnou nadrovinou nadgrafu funkce

$$f(x, y) = \sqrt{2x^2 + xy + y^2}$$

v bodě $[x^*, y^*] = [0, 0]$.

řešení: ano

2.51) Rozhodněte, zda rovina $z = x + y/\sqrt{2}$ je opěrnou nadrovinou nadgrafu funkce

$$f(x,y) = \sqrt{3x^2 + 2xy + y^2}$$

v bodě $[x^*, y^*] = [0, 0]$.

řešení: ano

2.52) Vyjádřete (je-li to možné) množinu

$$X = \big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geqslant 1,\ x > 0\big\}$$

jako průnik uzavřených poloprostorů.

řešení: $X = \bigcap_{x_0 \in (0,\infty)} \big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid y + x/x_0^2 \geqslant 2/x_0\big\}$

2.53) *Dokažte:* Je-li $X \subseteq \mathbb{R}^n$ uzavřená množina taková, že $\operatorname{int} X \neq \emptyset$ a v každém bodě ∂X má opěrnou nadrovinu, pak X je konvexní.

3. Konvexní funkce

3.1) Pomocí definice rozhodněte o konvexnosti funkcí

$$f(x) = \frac{1}{a-x}, \quad x \in (-\infty, a),$$
$$g(x) = \frac{x^2}{a-x}, \quad x \in (-\infty, a),$$
$$h(x) = \frac{x(x-1)}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3.2) Pomocí definice dokažte, že funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$ je konvexní na $\mathbb{R}$.

3.3) V závislosti na hodnotě $p \in \mathbb{R}$ rozhodněte pomocí definice o konvexnosti funkce

$$f(x) = x^p, \quad x \in (0, \infty).$$

řešení: konvexní pro $p \geqslant 1$ a $p \leqslant 0$, konkávní pro $p \in [0, 1]$

3.4) Pomocí definice rozhodněte o konvexnosti funkce

$$f(x) = x \ln x, \quad x \in (0, \infty).$$

řešení: je konvexní

3.5) Pomocí definice rozhodněte o konvexnosti funkce

$$f(x) = x^\top A x = \langle Ax, x \rangle,$$

kde $x \in \mathbb{R}^n$ a $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je symetrická matice. Je ostře/silně konvexní?

řešení: konvexní pro $A \geqslant 0$, ostře i silně konvexní pro $A > 0$ s konstantou $\vartheta = \lambda_{min}$

3.6) Pomocí definice rozhodněte o konvexnosti funkce

$$f(x) = \|x\|$$

kde $x \in \mathbb{R}^n$ a $\|\cdot\|$ je libovolná norma na $\mathbb{R}^n$. Je ostře/silně konvexní?

řešení: je konvexní, ale není ostře ani silně konvexní

3.7) Pomocí definice rozhodněte o konvexnosti funkce

$$f(x) = \|x\|^p,$$

kde $x \in \mathbb{R}^n$, $p > 1$ a $\|\cdot\|$ je libovolná norma na $\mathbb{R}^n$.

řešení: je konvexní

3.8) Pomocí definice rozhodněte o konvexnosti funkce

$$f(\beta) = \|X\beta - y\|^2 = (X\beta - y)^\top (X\beta - y),$$

kde $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\beta \in \mathbb{R}^m$ a $y \in \mathbb{R}^n$ (pro $m = 2$ viz metodu nejmenších čtverců).

3.9) Pomocí definice rozhodněte o konvexnosti funkce

$$f(x_1, x_2) = \mathrm{e}^{x_1+x_2}$$

na $\mathbb{R}^2$. Je zde také ostře a/nebo silně konvexní? V případě silné konvexnosti určete největší konstantu silné konvexnosti ϑ.

řešení: je pouze konvexní

3.10) *Dokažte:* Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a $f : X \to \mathbb{R}$ konvexní funkce. Potom kdykoli platí $\lambda x + (1-\lambda)y \in X$ pro nějaké $x, y \in X$ a $\lambda \in \mathbb{R}\setminus[0,1]$, pak

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

3.11) *Dokažte:* Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je konvexní i konkávní na $\mathbb{R}^n$ současně právě tehdy, když f je afinní funkce.

3.12) *Dokažte:* Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina, funkce $f : X \to \mathbb{R}$ konvexní a funkce $g : X \to \mathbb{R}$ silně konvexní s konstantou silné konvexnosti ϑ. Potom funkce $f + g : X \to \mathbb{R}$ je opět silně konvexní s konstantou ϑ.

3.13) *Dokažte:* Nechť $\alpha \geqslant 0$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a funkce $f : X \to \mathbb{R}$ silně konvexní s konstantou silné konvexnosti ϑ. Potom funkce $\alpha f : X \to \mathbb{R}$ je silně konvexní s konstantou $\alpha\vartheta$.

3.14) *Dokažte:* Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a $f : X \to \mathbb{R}$. Pak funkce f je silně konvexní s konstantou silné konvexnosti ϑ právě tehdy, když funkce $g(x) \coloneqq f(x) - \vartheta\|x\|^2$ je konvexní na X.

3.15) *Dokažte:* Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina, I je libovolná indexová množina, funkce $f_i : X \to \mathbb{R}$ jsou konvexní pro všechna $i \in I$ a pro každé $x \in X$ je množina $\{f_i(x) \mid i \in I\}$ shora ohraničená, tj. existuje funkce $M : X \to \mathbb{R}$ taková, že pro každé $i \in I$ platí $f(x) \leqslant M(x)$ pro každé $x \in X$. Potom funkce

$$f(x) \coloneqq \sup_{i\in I} \{f_i(x)\}$$

je konvexní na X.

3.16) *Dokažte:* Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina, funkce $g_1, \dots, g_m : X \to \mathbb{R}$ jsou konvexní a funkce $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je konvexní a neklesající (v tom smyslu, že jsou-li $x = (x_1, \dots, x_m)^\top$ a $y = (y_1, \dots, y_m)^\top$ taková, že $x_i \leqslant y_i$ pro všechna $i = 1, \dots, m$, potom $f(x) \leqslant f(y)$). Potom složená funkce

$$F(x) \coloneqq f(g_1(x), \dots, g_m(x))$$

je také konvexní na X.

3.17) Nechť X je konvexní množina. Pak funkce $f : X \to \mathbb{R}_{++} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ se nazývá *logaritmicky konvexní* (též *superkonvexní*) na X, jestliže funkce $\ln f(x)$ je konvexní na X.

Dokažte: Každá logaritmicky konvexní funkce je konvexní.

3.18) *Dokažte:* Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a funkce $f : X \to \mathbb{R}$ spojitá na X. Jestliže pro každé $x, y \in X$, $x \neq y$, existuje $\lambda \in (0, 1)$ takové, že

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y),$$

pak funkce f je konvexní na X.

3.19) Rozhodněte o konvexnosti množiny

$$X = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid (x^3 + \mathrm{e}^y) \ln(x^3 + \mathrm{e}^y) \leqslant 49,\ x \geqslant 2,\ y \in \mathbb{R}\}.$$

řešení: je konvexní

3.20) *Dokažte:* Nechť $f : X \to \mathbb{R}$ je konvexní funkce na konvexní množině $X \subseteq \mathbb{R}^n$ a nechť existují spojité praciální derivace až do druhého řádu včetně na nějaké otevřené množině $U \supseteq X$. Pak funkce f je konvexní na X právě tehdy, když $\langle \nabla^2 f(x)\, h, h \rangle \geqslant 0$ pro všechny $x \in X$ a $h \in \operatorname{Lin} X$.

3.21) *Dokažte:* Nechť $p \in \mathbb{R}^n$ a $q \in \mathbb{R}$. Afinní funkce $f(x) = p^\top x + q$ nabývá svého minima/maxima na konvexní množině $X \subseteq \mathbb{R}^n$ v bodě $x^* \in \operatorname{ri} X$ právě tehdy, když f je konstantní funkce (tj. $p = 0$).

3.22) *Dokažte:* Nechť $f : X \to \mathbb{R}$ je konvexní funkce na konvexní množině $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Označme jako X^* množinu bodů z X, ve kterých nabývá funkce f maxima na množině X, tj.

$$X^* = \{x^* \in X \mid f(x^*) = \sup_{x \in X} f(x)\}.$$

Pokud X^* obsahuje bod z $\operatorname{ri} X$, pak f je nutně konstantní na X, tj. $X^* = X$.

3.23) Nechť $X = \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ je polytop a $f : X \to \mathbb{R}$ je konvexní funkce.

a) Dokažte *Základní větu konvexního programování*: maximum funkce f na množině X je dosaženo v jednom z bodů $x_1, \dots, x_m$. (Obecněji platí: Maximum konvexní funkce na kompaktní a konvexní množině je dosaženo v tzv. *extrémním* bodě, tj. v bodě, který nelze vyjádřit jako netriviální konvexní kombinaci bodů z dané množiny).

b) S využitím předchozí části dokažte tzv. *Základní větu lineárního programování*: minimum lineární funkce na množině X je dosaženo v některém z bodů $x_1, \dots, x_m$.

3.24) Nechť funkce $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ je integrovatelná a funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je konvexní. Dokažte Jensenovu nerovnost v integrálním tvaru

$$f\left(\frac{\int_a^b g(t)\,dt}{b-a}\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(g(t))\,dt.$$

3.25) *Dokažte:* Pro $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geqslant 0$ splňující $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ a $x_1, \dots, x_n > 0$ platí

$$1 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{x_i}\right).$$

3.26) *Dokažte:* Pro $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geqslant 0$ splňující $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ a $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ platí

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \leqslant \ln\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\, \mathrm{e}^{x_i}\right).$$

3.27) Pomocí Jensenovy nerovnosti dokažte nerovnost mezi průměry různých řádů

$$\left(\frac{x_1^p + \cdots + x_m^p}{m}\right)^{1/p} \geqslant \left(\frac{x_1^q + \cdots + x_m^q}{m}\right)^{1/q},$$

kde $x_1, \dots, x_m > 0$ a $p > q$.

3.28) Pomocí Jensenovy nerovnosti dokažte Hölderovu nerovnost

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{1/q}$$

kde $p, q > 1$ jsou konjugovaná čísla, tj. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

3.29) Dokažte Minkowského nerovnost

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p\right)^{1/p},$$

kde $p \geqslant 1$ a $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$.

3.30) Pomocí Jensenovy nerovnosti dokažte

$$\left(1 + \sqrt[5]{a}\right)^5 + \left(1 + \sqrt[5]{b}\right)^5 \leqslant 2^6,$$

kde $a, b \geqslant 0$ a $a + b = 2$.

3.31) Pomocí Jensenovy nerovnosti dokažte

$$a^a\, b^b\, c^c \geqslant \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c},$$

kde $a, b, c > 0$.

3.32) Pomocí Jensenovy nerovnosti dokažte

$$\sqrt[n]{\sin x_1 \cdots \sin x_n} \leqslant \sin \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},$$

kde $n \in \mathbb{N}$ a $x_1, \dots, x_n \in [0, \pi/2]$.

3.33) Pomocí Jensenovy nerovnosti dokažte

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sin\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)} \leqslant \sqrt[n]{\frac{x_1 \cdots x_n}{\sin x_1 \cdots \sin x_n}},$$

kde $x_1, \dots, x_n \in (0, \pi/2)$.

3.34) Pomocí Jensenovy nerovnosti dokažte

$$\frac{a}{a+3b+3c} + \frac{b}{3a+b+3c} + \frac{c}{3a+3b+c} \geqslant \frac{3}{7},$$

kde $a, b, c > 0$.

3.35) Pomocí Jensenovy nerovnosti dokažte

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i} \geqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}},$$

kde $a_1, \dots, a_n \geqslant 1$.

3.36) Pomocí Jensenovy nerovnosti dokažte

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geqslant \sqrt{\frac{n}{n-1}},$$

kde $x_1, \dots, x_n > 0$ a $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

3.37) Pomocí Jensenovy nerovnosti dokažte

$$\sqrt{1^2+1} + \sqrt{2^2+1} + \sqrt{3^2+1} + \cdots + \sqrt{n^2+1} \geqslant \frac{n}{2}\sqrt{n^2+2n+5}.$$

3.38) Pomocí Jensenovy nerovnosti dokažte, že pro úhly α, β, γ v trojúhelníku platí

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2},$$
$$\sqrt{\sin\alpha} + \sqrt{\sin\beta} + \sqrt{\sin\gamma} \leqslant 3\sqrt[4]{\frac{3}{4}},$$
$$\sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8},$$
$$\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma \leqslant \frac{1}{8}.$$

3.39) Pomocí AG-nerovnosti dokažte

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3,$$

kde $abc = 1$ a $a, b, c > 0$.

3.40) Pomocí drátu bychom chtěli „vymodelovat“ kvádr (tj. jeho 12 hran) tak, aby model měl objem V a spotřeba drátu byla minimální. Určete rozměry optimálního modelu.

3.41) Pomocí Hessovy matice rozhodněte o (ostré, silné) konvexnosti funkce $f(x) = \|x\|^4$ na $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

řešení: vždy konvexní, ostře konvexní pokud $0 \notin X$, silně konvexní pokud $0 \notin \bar{X}$

3.42) Pomocí Hessovy matice rozhodněte o (ostré, silné) konvexnosti funkce $f(x) = \|x\|$ na $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

řešení: konvexní vždy, není ostře ani silně konvexní

3.43) Rozhodněte, zda funkce

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 + x_1 - x_2 + 4$$

je konvexní na $\mathbb{R}^2$. Je zde i ostře nebo silně konvexní? V případě kladné odpovědi určete také největší konstantu silné konvexnosti.

řešení: je silně konvexní s konstantou $\vartheta = (3 - \sqrt{2})/2$

3.44) Pomocí Hessovy matice rozhodněte o (ostré, silné) konvexnosti funkce $f(x) = \sqrt{1 + \|x\|^2}$ na $X \subseteq \mathbb{R}^n$, kde $X = \mathbb{R}^n$ a $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$.

řešení: je vždy ostře konvexní, není silně konvexní na $\mathbb{R}^n$, v případě $\|x\| \leqslant 1$ je silně konvexní

3.45) Rozhodněte, pro která $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ je funkce

$$f(x, y) = 1 - \mathrm{e}^{-x^2 - y^2}$$

(ostře) konvexní.

řešení: konvexní na kruhu $x^2 + y^2 \leqslant 1/2$, ostře konvexní uvnitř tohoto kruhu

3.46) Rozhodněte, pro která $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ je funkce

$$f(x, y) = -\frac{1}{1 + x^2 + y^2}$$

(ostře) konvexní.

řešení: konvexní na kruhu se středem v počátku a poloměrem $1/\sqrt{3}$, ostře konvexní uvnitř kruhu

3.47) Rozhodněte, pro která $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ je funkce

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2).$$

(ostře) konvexní.

řešení: konvexní na kruhu se středem v počátku a poloměrem 1, ostře konvexní uvnitř kruhu

3.48) Rozhodněte, zda funkce

$$f(x, y) = \frac{x^2}{y}$$

je konvexní na množině $\big\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\big\}$.

řešení: je konvexní

3.49) Rozhodněte, zda funkce

$$f(x, y) = \frac{1}{xy}$$

je konvexní na množině $\mathbb{R}^2_{++} = \big\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\big\}$. Je zde silně konvexní?

řešení: je pouze ostře konvexní na $\mathbb{R}^2_{++}$

3.50) Nechť

$$f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}.$$

Rozhodněte, zda je

a) konvexní na $\mathbb{R}^2$;

b) silně konvexní na $\mathbb{R}^2$;

c) silně konvexní na množině $X = \big\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\big\}$.

řešení: a) ano; b) ne; c) ano

3.51) Rozhodněte, pro které body $[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2$ je funkce

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 \ln x_1 - x_1 \ln x_2 - x_1^2$$

konvexní. Výslednou množinu také načrtněte.

řešení: $x_1 \in (0, 1/2]$ & $x_2 > 0$

3.52) Rozhodněte, pro které body $[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2$ je funkce

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{x_2} + \ln\left(\mathrm{e}^{x_1} + \mathrm{e}^{x_2}\right)$$

konvexní. Výslednou množinu také načrtněte a rozhodněte, zda bod $[1, 0]$ je vnitřním, hraničním nebo vnějším bodem této množiny.

řešení: konvexní na množině $\{[x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 > 0]\}$, bod $[1, 0]$ je hraničním bodem

3.53) Určete maximální množinu (vzhledem k množinové inkluzi) v $\mathbb{R}^2$, na které je splněna postačující podmínka 2. řádu pro ostrou konvexnost funkce

$$f(x_1, x_2) = -\ln(2x_1 - x_2^2 - 2) - \frac{x_2^2}{2}.$$

řešení: $\{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - x_2^2 - 1 > 0 \ \&\ 2x_1 - x_2^2 - 4 < 0\}$

3.54) Rozhodněte, zda je funkce

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy.$$

(ostře, silně) konvexní na $\mathbb{R}^3$. V případě silné konvexnosti určete (největší) konstantu silné konvexnosti ϑ.

řešení: je silně konvexní s $\vartheta = 1$

3.55) Rozhodněte, zda je funkce

$$f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2 + xy - yz.$$

(ostře, silně) konvexní na $\mathbb{R}^3$. V případě silné konvexnosti určete (největší) konstantu silné konvexnosti ϑ.

řešení: je silně konvexní s $\vartheta = 2 - \sqrt{6}/2$

3.56) Rozhodněte, zda je funkce

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 2\sqrt{2}xz.$$

(ostře, silně) konvexní na $\mathbb{R}^3$. V případě silné konvexnosti určete (největší) konstantu silné konvexnosti ϑ.

řešení: je silně konvexní s $\vartheta = 1$

3.57) Rozhodněte, zda je funkce

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 8x_1 - 6x_2 - 4x_3 + 9.$$

(ostře, silně) konvexní na $\mathbb{R}^3$. V případě silné konvexnosti určete (největší) konstantu silné konvexnosti ϑ.

řešení: je konvexní, není ostře ani silně konvexní

3.58) Rozhodněte, zda funkce

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2\sqrt{2}\,x_1x_2 - 4x_1x_3 - 7x_1 + 8x_2 - x_3 + 6$$

je konvexní na $\mathbb{R}^3$. Je zde i ostře nebo silně konvexní?

řešení: je konvexní, není ostře ani silně konvexní

3.59) Rozhodněte, zda funkce

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 11x_1 + 2x_2 - x_3 + 6$$

je konvexní na $\mathbb{R}^3$. Je zde i ostře nebo silně konvexní?

řešení: je konvexní, není ostře ani silně konvexní

3.60) Rozhodněte, zda funkce

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3 + 6x_1 - 3x_2 + x_3 + 7$$

je konvexní na $\mathbb{R}^3$. Je zde i ostře nebo silně konvexní?

řešení: je konvexní, není ostře ani silně konvexní

3.61) Rozhodněte, zda funkce

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3 + x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 9$$

je konvexní na $\mathbb{R}^3$. Je zde i ostře nebo silně konvexní? V případě silné konvexnosti také určete největší konstantu silné konvexnosti ϑ.

řešení: je konvexní, není ostře ani silně konvexní

3.62) Rozhodněte, zda funkce

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 6x_1 - 7x_2 + 7$$

je konvexní na $\mathbb{R}^3$. Je zde i ostře nebo silně konvexní? V případě silné konvexnosti také určete největší konstantu silné konvexnosti ϑ.

řešení: je silně konvexní s $\vartheta = 3 - \sqrt{6}$

3.63) Rozhodněte, zda funkce

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 4$$

je konvexní na $\mathbb{R}^3$. Je zde i ostře nebo silně konvexní? V případě silné konvexnosti také určete největší konstantu silné konvexnosti ϑ.

řešení: funkce není konvexní

3.64) Rozhodněte, zda funkce

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 2x_2x_3 + 6x_1 - 11x_2 + 4$$

je konvexní na $\mathbb{R}^3$. Je zde i ostře nebo silně konvexní? V případě silné konvexnosti také určete největší konstantu silné konvexnosti ϑ.

řešení: funkce není konvexní

3.65) Rozhodněte, zda funkce n proměnných

$$f(x) = \frac{1}{\langle a, x\rangle}, \quad a \in \mathbb{R}^n_{++},$$

je konvexní pro $x \in \mathbb{R}^n_{++} := \{x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$.

řešení: je konvexní

3.66) Rozhodněte, zda funkce n proměnných

$$f(x) = \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{x_i}\right),$$

je konvexní na $\mathbb{R}^n$.

řešení: je konvexní

3.67) Rozhodněte, zda funkce n proměnných

$$f(x) = \mathrm{e}^{a\langle Ax, x\rangle}$$

je konvexní na $\mathbb{R}^n$, kde $a \in \mathbb{R}$ je kladné číslo a $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická a pozitivně semidefinitní matice.

řešení: je konvexní

3.68) Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní a uzavřená množina. Dokažte, že funkce určující vzdálenost bodu x od množiny A, tj. $f(x) = \rho(x, A) := \inf_{a\in A} \|x - a\|$, je konvexní.

3.69) Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je omezená konvexní množina, pro níž $0 \in \operatorname{int} X$. Rozhodněte, zda funkce definovaná předpisem

$$f(x) := \inf\left\{\alpha > 0 : \ x \in \alpha X\right\}$$

je konvexní.

řešení: je konvexní

4. Subdiferenciál

4.1) *Dokažte:* Nechť $f : X \to \mathbb{R}$ je konvexní funkce na konvexní množině $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak pro každé $x^* \in \operatorname{ri} X$ platí

a) $f'_{\lambda h}(x^*) = \lambda f'_h(x^*)$ pro každé $\lambda \geqslant 0$ a $h \in \operatorname{Lin} X$;

b) funkce $f'_\cdot(x^*)$ je konvexní na $\operatorname{Lin} X$.

4.2) *Dokažte:* Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ a $f : X \to \mathbb{R}$. Pak pro $x^* \in X$ platí

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x)$$

právě tehdy, když $0 \in \partial f(x^*)$.

4.3) *Dokažte:* Pro konvexní funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ platí

$$\partial f(x) = [f'_-(x), f'_+(x)].$$

4.4) *Dokažte:* Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina, $\operatorname{int} X \neq \varnothing$ a $f : X \to \mathbb{R}$.

a) Je-li f konvexní a $x^* \in \operatorname{int} X$, pak $\partial f(x^*)$ je neprázdná, uzavřená, ohraničená a konvexní množina.

b) Je-li $\partial f(x)$ neprázdná pro každé $x \in X$, pak f je konvexní na X.

4.5) *Dokažte:* Nechť $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jsou konvexní funkce pro $i = 1, \dots, m$. Pak pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\partial f(x) = \partial f_1(x) + \cdots + \partial f_m(x).$$

4.6) *Dokažte:* Nechť $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je konvexní funkce a $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Položme $F(x) \coloneqq f(Ax)$. Potom platí

$$\partial F(x) = A^\top \partial f(Ax) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid z = A^\top a,\ a \in \partial f(Ax)\}.$$

4.7) Pro funkci $f(x) = \max\left\{0, \frac{x^2-1}{2}\right\}$, určete $\partial f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.
řešení: $\partial f(x) = x$ pro $|x| > 1$, $\partial f(1) = [0, 1]$, $\partial f(-1) = [-1, 0]$ a $\partial f(x) = 0$ pro $x \in (-1, 1)$

4.8) Ukažte, že funkce f definovaná na intervalu $[0, \infty)$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases}$$

není subdiferencovatelná v bodě $x^* = 0$. Jak vypadá opěrná nadrovina v bodě $[0, 1]$ pro množinu $\operatorname{epi} f$?

4.9) Ukažte, že funkce $f = -\sqrt{x}$ definovaná na intervalu $[0, \infty)$ není subdiferencovatelná v bodě $x^* = 0$. Jak vypadá opěrná nadrovina v bodě $[0, 0]$ pro množinu epi f?

4.10) Nechť

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + 2y^2}.$$

Určete subdiferenciál $\partial f(0, 0)$ a tuto množinu znázorněte v rovině.

řešení: $\partial f(0,0) = \left\{(a, b)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2/2 \leqslant 1\right\}$

4.11) Nechť

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + 2xy + 2y^2}.$$

Určete subdiferenciál $\partial f(0, 0)$ a tuto množinu znázorněte v rovině.

řešení: $\partial f(0,0) = \left\{(a, b)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid 2a^2 - 2ab + b^2 \leqslant 1\right\}$

4.12) Nechť

$$f(x, y) = \sqrt{2x^2 + 2xy + 3y^2}.$$

Určete subdiferenciál $\partial f(0, 0)$, tuto množinu znázorněte v rovině a rozhodněte, zda bod $[1, 1]$ je vnitřním, hraničním nebo vnějším bodem množiny $\partial f(0, 0)$.

řešení: $\partial f(0,0) = \left\{(a, b)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid 3a^2 - 2ab + 2b^2 \leqslant 5\right\}$

4.13) Nechť

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2}.$$

Určete subdiferenciál funkce f v bodě $[0, 0]$. Rozhodněte, zda $z = 2\,(x_1 + x_2)$ je opěrnou nadrovinou k nadgrafu funkce f v bodě $[0, 0]$.

řešení: $\partial f(0,0) = \{[\alpha, \beta] \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \in [-1, 1],\ \alpha = -\beta\}$ & není opěrnou nadrovinou

4.14) Nechť

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2}.$$

Určete subdiferenciál funkce f v bodě $[0, 0]$. Rozhodněte, zda $z = x_1 + x_2$ je opěrnou nadrovinou k nadgrafu funkce f v bodě $[0, 0]$.

řešení: $\partial f(0,0) = \{[\alpha, \beta] \in \mathbb{R}^2 \mid 3\alpha^2 + 3\beta^2 + 2\alpha\beta \leqslant 8\}$ & je opěrnou nadrovinou

4.15) Nechť

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2}.$$

Určete subdiferenciál funkce f v bodě $[0, 0]$. Rozhodněte, zda $z = x_1 - x_2$ je opěrnou nadrovinou k nadgrafu funkce f v bodě $[0, 0]$.

řešení: $\partial f(0,0) = \{[\alpha, \beta] \in \mathbb{R}^2 \mid 2\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \leqslant 1\}$ & je opěrnou nadrovinou

4.16) Nechť

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 1}.$$

Určete subdiferenciál funkce f v bodě $[0,0]$. Rozhodněte, zda $z = x_1 + x_2$ je opěrnou nadrovinou k nadgrafu funkce f v bodě $[0,0]$.

4.17) Nechť

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1}.$$

Určete subdiferenciál funkce f v bodě $[0,0]$. Rozhodněte, zda $z = x_1 + x_2$ je opěrnou nadrovinou k nadgrafu funkce f v bodě $[0,0]$.

4.18) Nechť $f(x) = \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Určete subdiferenciál $\partial f(0)$.

řešení: $\partial f(0) = \big\{a \in \mathbb{R}^n \mid \|a\| \leqslant 1\big\}$

4.19) Určete subdiferenciál $\partial f(0,0)$ pro funkci $f(x,y) = |x| + |y|$.

řešení: $\partial f(0,0) = \big\{(a,b)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|a|, |b|\} \leqslant 1\big\}$

4.20) Určete subdiferenciály $\partial f(0,0)$, $\partial f(0,1)$ $\partial f(1,1)$ pro funkci $f(x,y) = \max\{|x|\,, |y|\}$.

řešení: $\partial f(0,0) = \big\{(a,b)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid |a| + |b| \leqslant 1\big\}$, $\partial f(0,1) = \{(0,1)^\top\}$ a
$\partial f(1,1) = \big\{(a,b)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid a + b = 1, a \geqslant 0, b \geqslant 0\big\}$

4.21) Nechť $A = \big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant -|x|\big\}$ a uvažme funkci $f(x,y) = \rho([x,y], A)$. Určete subdiferenciál $\partial f(x,y)$ pro $[x,y] \in \mathbb{R}^2$.

řešení: $\partial f(x,y) = \operatorname{grad} f(x,y)$ pro $[x,y] \neq [0,0]$ a
$\partial f(0,0) = \big\{(a, 1/\sqrt{2})^\top \in \mathbb{R}^2 \mid a \in [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]\big\}$

5. Fenchelova transformace

5.1) Určete konjugovanou funkci pro funkci $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, a ověřte platnost Fenchelovy rovnosti $f^{**} = f$.

řešení: $f^*(y) = 0$ pro $y \in [-1, 1]$, $f^*(y) = \infty$ pro $|y| > 1$

5.2) Určete konjugovanou funkci pro funkci $f(x) = \frac{cx^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, $c > 0$, a ověřte platnost Fenchelovy rovnosti $f^{**} = f$.

řešení: $f^*(y) = y^2/(2c)$

5.3) Určete konjugovanou funkci pro

$$f(x) = \begin{cases} 3x^3, & x \geqslant 0, \\ x^2, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Ověřte také platnost Fenchelovy rovnosti $f^{**} = f$.

řešení: $f^*(y) = 2y^{3/2}/9$ pro $y \geqslant 0$ a $f^*(y) = y^2/4$ pro $y \leqslant 0$

5.4) Určete konjugovanou funkci pro funkci $f(x) = \mathrm{e}^{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, a ověřte platnost Fenchelovy rovnosti $f^{**} = f$.

řešení: $f^*(y) = |y| \ln |y| - |y|$ pro $|y| > 1$, $f^*(y) = -1$ pro $y \in [-1, 1]$

5.5) Určete konjugovanou funkci pro funkci $f(x) = x(\ln x - 1)$, $x > 0$, a ověřte platnost Fenchelovy rovnosti $f^{**} = f$.

řešení: $f^*(y) = \mathrm{e}^y$

5.6) Určete konjugovanou funkci pro funkci $f(x) = -\ln(\cos x)$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, a ověřte platnost Fenchelovy rovnosti $f^{**} = f$.

řešení: $f^*(y) = y \operatorname{arctg} y - \frac{1}{2} \ln(1 + y^2)$

5.7) Určete konjugovanou funkci pro funkci $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, a ověřte platnost Fenchelovy rovnosti $f^{**} = f$.

řešení: $f^*(y) = -\sqrt{1 - y^2}$ pro $y \in [-1, 1]$, $f^*(y) = \infty$ pro $|y| > 1$

5.8) Nechť $f^*(y)$ je konjugovaná funkce k funkci $f(x)$. Najděte konjugovanou funkci k $f(x-a)$. Pomocí tohoto výsledku a předchozího příkladu určete konjugovanou funkci k funkci $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$.

řešení: $f^*(y) = -\sqrt{1 - y^2} + y$ pro $y \in [-1, 1]$, $f^*(y) = \infty$ pro $|y| > 1$

5.9) Určete konjugovanou funkci pro funkci $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$ a ověřte platnost Fenchelovy rovnosti $f^{**} = f$.

řešení: $f^*(y) = y \ln y/(y + 1)$ pro $y > 0$, $f^*(y) = 0$ pro $y = 0$ a $f^*(y) = \infty$ pro $y < 0$

5.10) Určete konjugovanou funkci pro funkci $f(x) = \sqrt{1+\mathrm{e}^x}$, $x \in \mathbb{R}$ a ověřte platnost Fenchelovy rovnosti $f^{**} = f$.

řešení: $f^*(y) = y\ln(2y^2 + 2y\sqrt{y^2+1}) - \sqrt{1 + 2y^2 + 2y\sqrt{y^2+1}}$ pro $y > 0$, $f^*(y) = -1$ pro $y = 0$ a $f^*(y) = \infty$ pro $y < 0$

5.11) Určete konjugovanou funkci pro funkci $f(x) = \ln(1+\mathrm{e}^x)$, $x \in \mathbb{R}$, a ověřte platnost Fenchelovy rovnosti $f^{**} = f$.

řešení: $f^*(y) = y\ln(y/(1-y)) + \ln(1-y)$ pro $y \in (0,1)$, $f^*(0) = 0$, $f^*(y) = \infty$ pro $y \in \mathbb{R}\setminus[0,1)$

5.12) Určete konjugovanou funkci pro funkci $f(x) = -\ln(1-\mathrm{e}^x)$, $x < 0$, a ověřte platnost Fenchelovy rovnosti $f^{**} = f$.

řešení: $f^*(y) = y\ln(y/(y+1)) - \ln(y+1)$ pro $y > 0$, $f^*(0) = 0$, $f^*(y) = \infty$ pro $y < 0$

5.13) Určete konjugovanou funkci pro funkci $f(x) = x + \ln(1+\mathrm{e}^x)$, $x \in \mathbb{R}$, a ověřte platnost Fenchelovy rovnosti $f^{**} = f$.

řešení: $f^*(y) = (y-1)\ln(y-1) + (2-y)\ln(2-y)$ pro $y \in (1,2)$, $f^*(y) = 0$ pro $y \in \{1,2\}$, $f^*(y) = \infty$ pro $y \in \mathbb{R}\setminus[1,2]$

5.14) Určete konjugovanou funkci pro funkci $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, a ověřte platnost Fenchelovy rovnosti $f^{**} = f$.

řešení: $f^*(0) = 1$, $f^*(y) = \infty$ pro $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f^{**}(x) \equiv -1$

5.15) Určete konjugovanou funkci pro funkci $f(x) = \sin x$, $x \in [-\pi, 0]$, a ověřte platnost Fenchelovy rovnosti $f^{**} = f$.

5.16) Určete konjugovanou funkci pro funkci $f(x) = -\ln x$, $x > 0$, a ověřte platnost Fenchelovy rovnosti $f^{**} = f$.

řešení: $f^*(y) = -1 - \ln(-y)$ pro $y < 0$, $f^*(y) = \infty$ pro $y \geqslant 0$

5.17) Určete konjugovanou funkci pro funkci $f(x) = \ln(-x)$, $x < 0$, a ověřte platnost Fenchelovy rovnosti $f^{**} = f$.

řešení: $f^*(y) = \infty$

5.18) Určete konjugovanou funkci pro funkci $f(x) = (x^2-1)^2$, $x \in \mathbb{R}$, a ověřte platnost Fenchelovy rovnosti $f^{**} = f$.

5.19) Určete konjugovanou funkci pro funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

a ověřte platnost Fenchelovy rovnosti $f^{**} = f$.

řešení: $f^*(0) = 1$, $f^*(y) = \infty$ pro $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

5.20) Určete konjugovanou funkci pro funkci $f(x) = \max\{0, 1 - x\}$, $x \in \mathbb{R}$, a ověřte platnost Fenchelovy rovnosti $f^{**} = f$.

řešení: $f^*(y) = y$ pro $y \in [-1, 0]$, $f^*(y) = \infty$ pro $y \in \mathbb{R} \setminus [-1, 0]$

5.21) Určete konjugovanou funkci pro funkci $f(x) = x^3 - 5x$, $x \in \mathbb{R}$, a ověřte platnost Fenchelovy rovnosti $f^{**} = f$.

5.22) Určete konjugovanou funkci pro funkci $f(x) = \sqrt{1-x}$, $x \leqslant 1$, a ověřte platnost Fenchelovy rovnosti $f^{**} = f$.

5.23) Určete konjugovanou funkci pro funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

a ověřte platnost Fenchelovy rovnosti $f^{**} = f$.

řešení: $f^*(y) = 0$ pro $y \in [-2, 2]$, $f^*(y) = y^2/4 - 1$ pro $|y| \geqslant 2$, $f^{**} = 2\,|x|$ pro $|x| \leqslant 1$ a $f^{**} = 1 + x^2$ pro $|x| \geqslant 1$

5.24) Určete konjugovanou funkci pro funkci

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & |x| \geqslant 1, \\ 0, & |x| < 1, \end{cases}$$

a ověřte platnost Fenchelovy rovnosti $f^{**} = f$.

řešení: $f^*(y) = |y|$ pro $y \in [-2, 2]$, $f^*(y) = y^2/4 + 1$ pro $|y| \geqslant 2$

5.25) Určete konjugovanou funkci pro funkci $f(x) = \max\{2x, 3x\}$, $x \in [-1, 1]$, a ověřte platnost Fenchelovy rovnosti $f^{**} = f$.

řešení: $f^*(y) = y - 3$ pro $y > 3$, $f^*(y) = 0$ pro $y \in [2, 3]$, $f^*(y) = -y + 2$ pro $y < 2$

5.26) Určete konjugovanou funkci pro funkci

$$f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)^2, & |x| \geqslant 1, \\ 0, & |x| < 1, \end{cases}$$

a ověřte platnost Fenchelovy rovnosti $f^{**} = f$.

5.27) Určete konjugovanou funkci pro funkci

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geqslant 0, \\ x^2/2, & x < 0, \end{cases}$$

a ověřte platnost Fenchelovy rovnosti $f^{**} = f$.

řešení: $f^*(y) = y^2/4$ pro $y \geqslant 0$, $f^*(y) = y^2/2$ pro $y < 0$

5.28) Určete konjugovanou funkci pro funkci $f(x) = \langle a, x\rangle + \beta$, $x \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}$, a ověřte platnost Fenchelovy rovnosti $f^{**} = f$.

řešení: $f^*(a) = -b$, $f^*(y) = \infty$ pro $y \neq a$

5.29) Určete konjugovanou funkci pro funkci $f(x, y) = 1 + 2x^2 + 2xy + y^2$, $[x, y] \in \mathbb{R}^2$, a ověřte platnost Fenchelovy rovnosti $f^{**} = f$.

řešení: $f^*(a_1, a_2) = ((a_1 - a_2)^2 + a_2^2 - 4)/4$

5.30) Určete konjugovanou funkci pro funkci $f(x, y) = -\sqrt{x} - \sqrt{y}$, $[x, y] \in \mathbb{R}^2_+$, a ověřte platnost Fenchelovy rovnosti $f^{**} = f$.

řešení: $f^*(a_1, a_2) = -1/(4a_1) - 1/(4a_2)$ pro $a_1, a_2 < 0$, $f^*(a_1, a_2) = \infty$ ve zbývajících případech

5.31) Určete konjugovanou funkci pro funkci $f(x) = \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^n |x_i|^\alpha$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha > 1$, a ověřte platnost Fenchelovy rovnosti $f^{**} = f$.

řešení: $f^*(y) = \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^n |y_i|^\beta$ pro $\beta \coloneqq \alpha/(\alpha - 1)$

5.32) Určete konjugovanou funkci pro funkci $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$, $x \in \mathbb{R}^n$, a ověřte platnost Fenchelovy rovnosti $f^{**} = f$. Ukažte také, že $f \equiv f^*$ právě tehdy, když $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$.

řešení: $f^*(y) = \frac{1}{2}\|y\|^2$

5.33) Určete konjugovanou funkci pro funkci $f(x) = \|x\|$, $x \in \mathbb{R}^n$, a ověřte platnost Fenchelovy rovnosti $f^{**} = f$.

řešení: $f^*(y) = 0$ pro $\|y\|_* \leqslant 1$ a $f^*(y) = \infty$ pro $\|y\|_* > 1$, kde $\|y\|_* \coloneqq \sup_{\|x\| \leqslant 1} x^\top y$

5.34) Určete konjugovanou funkci pro funkci $f(x) = \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^n x_i \ln(x_i)$, $x \in \mathbb{R}^n_{++}$, $\alpha > 0$, a ověřte platnost Fenchelovy rovnosti $f^{**} = f$.

řešení: $f^*(y) = \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^n \mathrm{e}^{\alpha y_i - 1}$

5.35) Určete konjugovanou funkci pro funkci $f(x) = -\sum_{i=1}^n \ln(x_i)$, $x \in \mathbb{R}^n_{++}$, $\alpha > 0$, a ověřte platnost Fenchelovy rovnosti $f^{**} = f$.

řešení: $f^*(y) = -n - \sum_{i=1}^n \ln(-y_i)$ pro $y \in \mathbb{R}^n_{--}$, $f^*(y) = \infty$ v ostatních případech

5.36) Určete co $f(x)$ pro funkci

$$f(x, y) = x + \sin x\, \cos x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

5.37) Určete co $f(x)$ pro funkci

$$f(x, y) = x + \sin^3 x\, \cos x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

5.38) Určete co $f(x, y)$ pro funkci

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 + x^2 + y^2, & [x,y] \neq [0,0], \\ 0, & [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$

řešení: co $f(x, y) = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ pro $x^2 + y^2 \leqslant 1$ a co $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ v ostatních případech

5.39) Určete co $f(x, y)$ pro funkci

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, & [x,y] \neq [0,0], \\ 0, & [x,y] = [0,0], \end{cases}$$

kde $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

řešení: co $f(x, y) = 2\sqrt{x^2/a^2 + y^2/b^2}$ pro $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leqslant 1$ a co $f(x, y) = 1 + x^2/a^2 + y^2/b^2$ v ostatních případech

5.40) *Dokažte:* Nechť $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je sudá funkce. Definujeme-li $f(x) \coloneqq g(\|x\|)$, pak platí

$$f^*(y) = g^*(\|y\|_*),$$

kde $\|y\|_* \coloneqq \sup\{\langle x, y\rangle,\ x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| = 1\}$.

6. Numerické metody nepodmíněné optimalizace v $\mathbb{R}$

Pro kontrolu výpočtů můžete využít Maplety — viz https://m5170.page.link/y6N7.

6.1) S využitím metody půlení intervalu určete přibližné řešení úlohy

$$f(x) = \mathrm{e}^{x^2-5\ln(x+1)} \to \min$$

na intervalu $I = [0, 2]$ s chybou nejvýše $\varepsilon = 0,25$ a pro $\delta = 0,1$.

řešení: $\bar{x} = 1,1125$

6.2) S využitím metody půlení intervalu určete přibližné řešení úlohy

$$f(x) = \mathrm{e}^{4x^2-3x+2} \to \min$$

na intervalu $I = [0, 2]$ s chybou nejvýše $\varepsilon = 1/5$ a pro $\delta = 1/10$.

řešení: $\bar{x} = 0,38125$

6.3) S využitím metody půlení intervalu určete přibližné řešení úlohy

$$f(x) = sqrt\mathrm{e}^{x} - 5\ln x + 1 \to \min$$

na intervalu $I = [1/2, 2]$ s chybou nejvýše $\varepsilon = 1/5$ a pro $\delta = 1/10$.

řešení: $\bar{x} = 1,33125$

6.4) S využitím metody zlatého řezu s $N = 5$ určete přibližné řešení úlohy

$$f(x) = 9x^2 - 10x + 16 \to \min, \quad x \in [0, 1].$$

Při výpočtu pracujte s hodnotou $\frac{1}{\tau} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = 0,618$. Bez znalosti přesného řešení také odhadněte maximální chybu, které se při této aproximaci dopustíte (odhad vyjádřete pomocí čísla $1/\tau$).

řešení: $\bar{x} = 0,545$ s maximální chybou $0,0729$

6.5) S využitím metody zlatého řezu s $N = 5$ určete přibližné řešení úlohy

$$f(x) = 7x^2 - 11x + 2 \to \min, \quad x \in [0, 1].$$

Při výpočtu pracujte s hodnotou $\frac{1}{\tau} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = 0,618$. Bez znalosti přesného řešení také odhadněte maximální chybu, které se při této aproximaci dopustíte (odhad vyjádřete pomocí čísla $1/\tau$).

řešení: $\bar{x} = 0,781$ s maximální chybou $\frac{1}{2\tau^4}$

6.6) S využitím metody zlatého řezu určete přibližné řešení úlohy

$$f(x) = x\,\sin(2x - 1) \to \min, \quad x \in [0, 1],$$

s chybou nejvýše $\varepsilon = 1/10$. Při výpočtu pracujte s hodnotou $\frac{1}{\tau} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = 0,618$.

řešení: $\bar{x} = 0,218$

6.7) S využitím metody zlatého řezu určete přibližné řešení úlohy

$$f(x) = \sin(\sqrt{x} + \ln x + 1), \quad x \in [3,6],$$

s chybou nejvýše $\varepsilon = 1/4$. Při výpočtu pracujte s hodnotou $\frac{1}{\tau} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = 0,618$.

řešení: $\bar{x} = 4,6352$

6.8) S využitím metody zlatého řezu určete přibližné řešení úlohy

$$f(x) = \mathrm{tg}(x^2 - 3x + 1), \quad x \in [1,3],$$

s chybou nejvýše $\varepsilon = 1/4$. Při výpočtu pracujte s hodnotou $\frac{1}{\tau} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = 0,618$.

řešení: $\bar{x} = 1,5277$

6.9) S využitím Fibonacciho metody určete přibližné řešení úlohy

$$f(x) = 9x^2 - 10x - 16 \to \min$$

na intervalu $I = [0,1]$ s chybou nejvýše $\varepsilon = 1/10$ a pro $\delta = 1/40$.

řešení: $\bar{x} = 9/16$

6.10) S využitím Fibonacciho metody určete přibližné řešení úlohy

$$f(x) = 7x^2 - 11x + 2 \to \min$$

na intervalu $I = [0,1]$ s chybou nejvýše $\varepsilon = 3/20$ a pro $\delta = 1/10$.

řešení: $\bar{x} = 3/4$

6.11) S využitím Fibonacciho metody určete přibližné řešení úlohy

$$f(x) = -\ln(5\sin x - x^2 + 1) \to \min$$

na intervalu $I = [0,2]$ s chybou nejvýše $\varepsilon = 1/5$ a pro $\delta = 1/10$.

řešení: $\bar{x} = 9/8$

6.12) S využitím Fibonacciho metody určete přibližné řešení úlohy

$$f(x) = \sin(2x^2 - 6x + 1) \to \min$$

na intervalu $I = [0,1]$ s chybou nejvýše $\varepsilon = 7/100$ a pro $\delta = 1/20$.

řešení: $\bar{x} = 273/520$

6.13) S využitím Fibonacciho metody určete přibližné řešení úlohy

$$f(x) = \mathrm{e}^{x^2-\sin x} \to \min$$

na intervalu $I = [-1, 1]$ s chybou nejvýše $\varepsilon = 1/5$ a pro $\delta = 1/20$.

řešení: $\bar{x} = 2/5$

6.14) Pomocí různých numerických metod zejména pro $N = 3, 4, 5, 6$ (s vhodným δ, např. $\delta = \pm 1/50$, $\pm 1/20$, $\pm 1/10$) nalezněte přibližené minumum funkce $f(x)$ na intervalu I, kde (hodnota x^* udává přesné řešení)

a) $f(x) = 5x^2 - 7x + 6$, $I = [0, 1]$, $(x^* = \frac{7}{10})$,

b) $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$, $I = [0, 1]$, $(x^* = \frac{2}{3})$,

c) $f(x) = x^2 - 4x + 1$, $I = [1, 4]$, $(x^* = 2)$,

d) $f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x + 5$, $I = [0, 3]$, $(x^* = 2)$,

e) $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x + 50$, $I = [2, 6]$, $(x^* = 5)$,

f) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$, $I = [0, 1]$, $(x^* = \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$,

g) $f(x) = x^2 + \sqrt{x} - 15$, $I = [0, 4]$, $(x^* = 0)$,

h) $f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$, $I = [-1, 1]$, $(x^* = 0)$,

i) $f(x) = 1 - x\,\mathrm{e}^{-x^2}$, $I = [0, 1]$, $(x^* = \frac{1}{\sqrt{2}})$,

j) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, $I = [2, 3]$, $(x^* = \mathrm{e})$,

k) $f(x) = -4\sin x\,(1 + \cos x)$, $I = [0, \pi/2]$, $(x^* = \pi/3)$,

l) $f(x) = \frac{x^3-54}{x}$, $I = [-4, -2]$, $(x^* = -3)$,

m) $f(x) = \arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$, $I = [0, 2]$, $(x^* = 1)$,

n) $f(x) = x - 2\sin x$, $I = [0, 2\pi]$, $(x^* = \frac{\pi}{3})$,

o) $f(x) = |2 - x| + |5 - 4x| + |8 - 9 * x|$, $I = [0, 3]$, $(x^* = \frac{8}{9})$,

p) $f(x) = \mathrm{e}^{-x} - 1 - \frac{1}{1+x}$, $I = [0, 10]$, $(x^* \approx 2,51286)$,

q) $f(x) = \frac{x^2}{\ln(x+1)}$, $I = [-1, 0]$, $(x^* \approx -0,71533)$,

r) $f(x) = -\sin^6 x\,\mathrm{tg}(1 - x)\,\mathrm{e}^{30x}$, $I = [0, 1]$, $(x^* \approx 0,97066)$,

s) $f(x) = \frac{13}{60}(3 - x \operatorname{arctg} \frac{3}{x}) - \frac{27}{36+4x^2}$, $I = [1,2]$, ($x^* \approx 1,44259$),

t)
$$f(x) = \begin{cases} -x/2, & x \leqslant 2, \\ x - 3, & x > 2, \end{cases} \qquad I = [0,3], \qquad (x^* = 2),$$

u)
$$f(x) = \begin{cases} -x/3, & x \leqslant 2, \\ x - 4, & x > 2, \end{cases} \qquad I = [0,3], \qquad (x^* = 2),$$

v)
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant -2, \\ x^4 - 3, & x > -2, \end{cases} \qquad I = [-1,2], \qquad (x^* = 0).$$

Určete také maximální chybu, které se touto aproximací dopustíte.

6.15) Pomocí různých metod aproximujte minimum funkce f na intervalu I s nejvýše $\varepsilon = 7\%$ chybou vzhledem k délce intervalu I, přičemž funkce f a interval I jsou dány v Příkladu 6.14. Uvažte také jiné hodnoty ε.

6.16) Pomocí různých metod aproximujte minimum funkce f na intervalu I s chybou nejvýše $\varepsilon = 1/15$, přičemž funkce f a interval I jsou dány v Příkladu 6.14. Uvažte také jiné hodnoty ε.

7. Numerické metody nepodmíněné optimalizace v $\mathbb{R}^n$

Pro kontrolu výpočtů využijte Maplety — viz https://m5170.page.link/y6N7.

7.1) Při dané počáteční aproximaci $x^{[0]}$ vypočtěte alespoň dva následující členy v minimalizující posloupnosti $\{x^{[k]}\}$, tj. $x^{[1]}$ a $x^{[2]}$, získané metodou největšího spádu při řešení úlohy

$$f(x) \to \min, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

jestliže

a) $x^{[0]} = [0, 3]$ &$f(x) = f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_1 - 8x_2$; ($x^* = [1/2, 1]$)

b) $x^{[0]} = [2, 3]$ & $f(x) = f(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2$; ($x^* = [0, 0]$)

c) $x^{[0]} = [1, 0]$ & $f(x) = f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$; ($x^* = [1, 0]$)

d) $x^{[0]} = [1, -1]$ & $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1$; ($x^* = [-2, 1]$)

e) $x^{[0]} = [1, -1]$ & $f(x) = f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 3x_1$; ($x^* = [3/4, -3/4]$)

f) $x^{[0]} = [0, 0]$ & $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1 - x_2 + 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$; ($x^* = [-1, 3/2]$)

g) $x^{[0]} = [0, -1]$ & $f(x) = f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2 - 2)^2 + x_1x_2 + 3x_1$; ($x^* = [-2/7, -17/7]$)

h) $x^{[0]} = [0, 0]$ & $f(x) = f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2 + 1)^2 + x_1x_2$; ($x^* = [-2/7, 4/7]$)

i) $x^{[0]} = [0, 0]$ & $f(x) = f(x_1, x_2) = (3x_1 - x_2 + 2)^2 + 2x_1x_2$; ($x^* = [-2/5, 6/5]$)

j) $x^{[0]} = [2, 1]$ & $f(x) = f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2 - 1)^2 + x_1x_2 - x_1$; ($x^* = [4/3, -1/3]$)

k) $x^{[0]} = [1, 0]$ & $f(x) = f(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2 - 1)^2 + x_1x_2 + 2x_2$; ($x^* = [-2/7, -6/7]$)

l) $x^{[0]} = [4, 3]$ & $f(x) = f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2 - 2)^2 + x_1x_2 + x_1$; ($x^* = [2/3, -5/3]$)

m) $x^{[0]} = [1, -2]$ & $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2$; (nekonečně mnoho řešení tvaru $x_1 = -3x_2$)

n) $x^{[0]} = [0, 0]$ & $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2 + 2x_1 - x_2$; (úloha nemá řešení)

o) $x^{[0]} = [1, -1]$ & $f(x) = f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 - x_1 + x_2$; (nekonečně mnoho řešení tvaru $x_1 = x_2 + 1/2$)

p) $x^{[0]} = [1, -1]$ & $f(x) = f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 + x_1 + x_2$; (úloha nemá řešení)

q) $x^{[0]} = [1, -1]$ & $f(x) = f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2 + 1)^2 - 4x_1 + 2x_2$; (nekonečně mnoho řešení tvaru $x_2 = 2x_1$)

r) $x^{[0]} = [1, -1]$ & $f(x) = f(x_1, x_2) = (x_1 - 3x_2 + 1)^2 + 2x_1 - x_2$; (úloha nemá řešení)

s) $x^{[0]} = [1, -1, 0]$ & $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2$; ($x^* = [0, 0, 0]$)

t) $x^{[0]} = [0, -1, 1]$ & $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 - 1)^2 + (x_3 - x_2 - 2)^2 + 3x_2x_3$; ($x^* = [-3/2, -4, 4]$)

u) $x^{[0]} = [0, 0, 0]$ & $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = (x_1+x_2+1)^2/2+(1-x_3)^2+(x_1-x_3-1)^2$; ($x^* = [2, -3, 1]$)

v) $x^{[0]} = [0, 0, 0]$ & $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = (x_3 - 2x_2 + 2)^2/2 + (1 - x_3)^2 + (x_2 - 3x_1)^2/4$; ($x^* = [1/2, 3/2, 1]$)

w) $x^{[0]} = [1, 0, 0]$ & $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3 + 1)^2 + (x_1 - x_2 - 1)^2 + x_2x_3$; (úloha nemá řešení)

7.2) S využitím dané výchozí počáteční aproximace $x^{[0]}$ nalezněte pomocí metody sdružených gradientů přesné řešení úloh z Příkladu 7.1 (Pozor: v některých příkladech mohou vycházet “komplikovanější” zlomky, např. 7.1c).

7.3) S využitím dané výchozí počáteční aproximace $x^{[0]}$ nalezněte pomocí Newtonovy metody přesné řešení úloh z Příkladu 7.1c+o+s+w.

7.4) Při dané počáteční aproximaci $x^{[0]}$ vypočtěte alespoň alespoň dva následující členy v minimalizující posloupnosti $\{x^{[k]}\}$, tj. $x^{[1]}$ a $x^{[2]}$, získané Newtonovou metodou při řešení úlohy

$$f(x) \to \min, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

jestliže

a) $x^{[0]} = [4, 2, -1]$ & $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 4)^4 + x_2^2 + \frac{(x_3+5)^2}{4} - 3$; ($x^* = [4, 0, -5]$)

b) $x^{[0]} = [0, 0]$ & $f(x) = f(x_1, x_2) = 10(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$; ($x^* = [1, 1]$)

c) $x^{[0]} = [1, 1]$ & $f(x) = f(x_1, x_2) = \mathrm{e}^{x_1^2+x_2^2}$; ($x^* = [0, 0]$)

d) $x^{[0]} = [1/2, 0]$ a $x^{[0]} = [1/2, 1/4]$ & $f(x) = f(x_1, x_2) = \ln(1 + x_1^2 + x_2^2)$; ($x^* = [0, 0]$)

e) $x^{[0]} = [1, 1]$ & $f(x) = f(x_1, x_2) = \mathrm{e}^{1+x_1^2x_2^2}$; ($x^* = [0, 0]$)

f) $x^{[0]} = [1/4, 1/4]$ & $f(x) = f(x_1, x_2) = -\ln(1 - x_1 - x_2) - \ln x_1 - \ln x_2$; (lokální řešení $x^* = [1/3, 1/3]$)

g) $x^{[0]} = [1, 1]$ & $f(x) = f(x_1, x_2) = -\mathrm{e}^{2-x_1^2-x_2^2+x_1x_2}$; ($x^* = [0, 0]$)

h) $x^{[0]} = [0, 0]$ & $f(x) = f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2 - 1)^4 + \ln(x_1^2 + 2x_2^2 + 1)$; (lokální řešení $x^* \approx [0, 32125, -0, 160625]$)

i) $x^{[0]} = [0,1]$ & $f(x) = f(x_1,x_2) = (3x_1 - x_1x_2 + x_2)^4 + \mathrm{e}^{\frac{2x_1^2}{x_2^2+1}}$ $(x^* = [0,0])$

7.5) S využitím dané výchozí počáteční aproximace $x^{[0]}$ vypočtěte alespoň alespoň dva následující členy v minimalizující posloupnosti $\{x^{[k]}\}$, tj. $x^{[1]}$ a $x^{[2]}$, získané metodou největšího spádu při řešení úloh z Příkladu 7.4.

7.6) S využitím dané výchozí počáteční aproximace $x^{[0]}$ vypočtěte alespoň alespoň dva následující členy v minimalizující posloupnosti $\{x^{[k]}\}$, tj. $x^{[1]}$ a $x^{[2]}$, získané metodou sdružených gradientů při řešení úloh z Příkladu 7.4.

7.7) Zvolte si (libovolně – zkusit můžete i různé volby) počáteční aproximaci $x^{[0]}$ a určete alespoň dva následující členy v minimalizující posloupnosti $\{x^{[k]}\}$, tj. $x^{[1]}$ a $x^{[2]}$, získané metodou největšího spádu a metodou sdružených gradientů při řešení úlohy

$$f(x) \to \min, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

jestliže (x^* značí přesné řešení)

a) libovolná funkce ze zadání Příkladu 7.1

b) Matyasova funkce $f(x) = f(x_1,x_2) = \frac{13}{50}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{12}{25}x_1x_2$, $(x^* = [0,0])$,

c) $f(x) = f(x_1,x_2) = 1000x_1^2 + 40x_1x_2 + x_2^2$, $(x^* = [0,0])$,

d) $f(x) = f(x_1,x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 - 8x_2$, $(x^* = [1/2,1])$,

e) $f(x) = f(x_1,x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 + 10x_2^2 - 11x_1 - 13x_2$, $(x^* = [3/4,1/2])$,

f) Boothova funkce $f(x) = f(x_1,x_2) = (x_1 + 7x_2 - 7)^2 + (2x_1 + x_2 - 5)^2$, $(x^* = [1,3])$,

g) $f(x) = f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 + 2x_1 + 3x_2 - 4x_3$, $(x^* = [-13/2,-12,8])$,

h) $f(x) = f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_1x_3 + 3x_2^2 + x_2x_3 + 2x_1x_2 + 2x_3^2 + x_1 - 3x_2 - x_3$, $(x^* = [-13/2,-12,8])$,

i) Powellova funkce $f(x) = f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + 10(x_1 - x_4)^2$, $(x^* = [0,0,0,0])$,

j) $f(x) = f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 3x_1^2 + x_1x_2 + 4x_2^2 + x_2x_3 + 3x_2x_4 + 10x_3^2 + 3x_4^2 + 6x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4$, $(x^* = [28/39,-27/26,3/13,1/26])$,

7.8) Zvolte si (libovolně – zkusit můžete i různé volby) počáteční aproximaci $x^{[0]}$ a spočtěte alespoň dva následující členy v minimalizující posloupnosti $\{x^{[k]}\}$, tj. $x^{[1]}$ a $x^{[2]}$, získané metodou největšího spádu nebo metodou sdružených gradientů nebo Newtonovou metodou při řešení úlohy

$$f(x) \to \min, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

jestliže (x^* značí přesné řešení)

a) $f(x) = f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)^{3/2}$, ($x^* = [0, 0]$),

b) $f(x) = f(x_1, x_2) = 100x_1^4 + \frac{x_2^4}{100}$, ($x^* = [0, 0]$),

c) $f(x) = f(x_1, x_2) = \frac{x_1^4}{4} + \frac{x_2^2}{2} - x_1 x_2 + x_1 - x_2$, ($x^* = [-1, 0]$ a $x^* = [1, 2]$),

d) $f(x) = f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}$, ($x^* = [0, 0]$),

e) $f(x) = f(x_1, x_2) = -\ln(1 - x_1 - x_2) - \ln x_1 - \ln x_2$, ($x^* = [1/3, 1/3]$),

f) $f(x) = f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2)^2 x_2^2 + (x_2 + 1)^2$, ($x^* = [1, 0]$),

g) Rosenbrockova funkce $f(x) = f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$, ($x^* = [1, 1]$),

h) Baelova funkce ($x^* = [3, 1/2]$)

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \left(\frac{3}{2} - x_1 + x_1 x_2\right)^2 + \left(\frac{9}{4} - x_1 + x_1 x_2^2\right)^2 + \left(\frac{453}{200} - x_1 + x_1 x_2^3\right)^2,$$

i) Goldsteinova–Priceho funkce ($x^* = [0, -1]$)

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_1, x_2) = &\Big(1 + \big(x_1 + x_2 + 1\big)^2 \big(19 - 14x_1 + 3x_1^2 - 14x_2 + 6x_1 x_2 + 3x_2^2\big)\Big) \times \\ &\times \Big(30 + \big(2x_1 - 3x_2\big)^2 \big(18 - 32x_1 + 12x_1^2 + 48x_2 - 36x_1 x_2 + 27x_2^2\big)\Big), \end{aligned}$$

j) „trojhrbá funkce“ $f(x) = f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - \frac{21x_1^4}{20} + \frac{x_1^6}{6} + x_1 x_2 + x_2^2$, ($x^* = [0, 0]$),

k) Easomova funkce $f(x_1, x_2) = -\cos x_1 \cos x_2 \exp\big[-(x_1 - \pi)^2 - (x_2 - \pi)^2\big]$, ($x^* = [\pi, \pi]$),

l) nelineární funkce

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{1 + (x_1 - x_2)^2} + \sin(\pi\, x_2 x_3/2) + \exp\left[-\left(\frac{x_1 + x_3}{x_2} - 2\right)^2\right],$$

($x^* = [1, 1, 1]$), kde $\exp[z] = \mathrm{e}^z$,

m) $f(x) = f(x_1, x_2) = 10(x_2 - \sin x_1)^2 + \frac{x_1^2}{10}$, ($x^* = [0, 0]$),

n) $f(x) = f(x_1, x_2) = 10(x_2 - \cos x_1)^2 + \frac{x_1^2}{10}$, ($x^* = [0, 1]$),

o) McCormickova funkce $f(x) = f(x_1, x_2) = \sin(x_1 + x_2) + (x_1 - x_2)^2 - \frac{3x_1}{2} + \frac{5y}{2} + 1$, ($x^* \approx [-0.547198, -1.5472]$),

p) Levyho funkce ($x^* = [1, 1]$)

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \sin^2(3\pi\, x_1) + (x_1 - 1)^2\,[1 + \sin^2(3\pi\, x_2)] + (x_2 - 1)^2\,[1 + \sin^2(2\pi\, x_2)],$$

q) Rosenbrockova funkce#2 ($x^* = [1, 1, 1]$)

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 + 100(x_3 - x_2^2)^2 + (1 - x_2)^2,$$

r) Fletcherova/Powellova funkce

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = 100\left\{[x_3 - 10\,\varphi(x_1, x_2)]^2 + \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1\right)^2\right\} + x_3^2,$$

($x^* = [1, 0, 0]$), kde

$$2\pi\,\varphi(x_1, x_2) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}, & x_1 > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}, & x_1 < 0, \end{cases}$$

s) Rosenbrockova funkce#3 ($x^* = [1, 1, 1, 1]$ a v bodě $[-1, 1, 1, 1]$ je lokální minimum)

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i=1}^{3} 100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (1 - x_i)^2.$$

V případě, že není možné explicitně určit přesné řešení jednorozměrných minimalizačních úloh pro stanovení délky kroku α, aproximujte hodnotu α pomocí některé z metod jednorozměrné minimalizace.

Pojmenované funkce se různě používají jako tzv. testovací funkce pro optimalizační algoritmy, viz např. https://m5170.page.link/jQrT nebo https://m5170.page.link/cWUb.

8. Řešení úloh matematického programování

- *Pro kontrolu výpočtů můžete využít Maplety — viz https://m5170.page.link/y6N7.*
- Pro zadání lze také využít libovolnou úlohu z Kapitoly 9 nebo z Kapitoly 10 s konkrétní volbou hodnoty parametru b.

8.-1) Pomocí Lagrangeova principu vyřešte úlohu matematického programování

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & f(x) = \sqrt{1+x^2} \to \min, \quad x \leqslant 1. \\ \text{(b)} & f(x) = \sqrt{1+x^2} \to \min, \quad x+1 \leqslant 0. \end{array}$$

řešení: 0, -1

8.0) Pomocí Lagrangeova principu vyřešte úlohu matematického programování

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & f(x) = |x| \to \min, \quad x \leqslant 1. \\ \text{(b)} & f(x) = |x| \to \min, \quad x+1 \leqslant 0. \end{array}$$

řešení: 0, -1

8.1) Pomocí Lagrangeova principu vyřešte úlohu matematického programování

$$f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 14x_1 - 6x_2 \to \min, \quad x_1 + x_2 \leqslant 2, \quad x_1 + 2x_2 \leqslant 3.$$

řešení: $[3,-1]$

8.2) Pomocí Lagrangeova principu vyřešte úlohu matematického programování

$$f(x_1,x_2) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 20x_1 - 14x_2 \to \min, \quad x_1 + 3x_2 \leqslant 5, \quad 2x_1 - x_2 \leqslant 4.$$

řešení: $[17/7, 6/7]$

8.3) Pomocí Lagrangeova principu vyřešte úlohu matematického programování

$$f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2 \to \min, \quad x_1^2 + x_2^2 \leqslant 9, \quad x_1 + x_2 \leqslant 1.$$

řešení: $[0,-3]$

8.4) Pomocí Lagrangeova principu vyřešte úlohu

$$f(x_1,x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 + 1 \to \min, \quad x_1 + x_2 \leqslant 1, \quad x_1^2 + x_2^2 \leqslant 4.$$

řešení: $[4/3, -1/3]$

8.5) Pomocí Lagrangeova principu vyřešte úlohu matematického programování

$$f(x_1, x_2) = 9x_1^2 + 12x_2^2 + 18x_1x_2 + 3x_1 - 3x_2 + 1 \to \min,$$
$$x_1 + x_2 = 3, \quad x_1 - x_2 \geqslant 1, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

řešení: $[2, 1]$

8.6) Pomocí Lagrangeova principu vyřešte úlohu matematického programování

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + x_1 + x_2 + 2 \to \min,$$
$$2x_1 + x_2 = 1, \quad x_1 - 3x_2 \geqslant -1, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

řešení: $[1/3, 1/3]$

8.7) Pomocí Lagrangeova principu vyřešte úlohu matematického programování

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + 3x_2^2 - 3x_1 + x_2 + 2 \to \min,$$
$$x_1 + 2x_2 = 1, \quad 2x_1 - x_2 \geqslant 1, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

řešení: $[1, 0]$

8.8) Pomocí Lagrangeova principu vyřešte úlohu matematického programování

$$f(x_1, x_2) = x_1^2/2 - x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + x_2 \to \min,$$
$$x_1 + x_2 \leqslant 3, \quad 2x_1 - x_2 \leqslant 4, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

řešení: $[7/3, 2/3]$

8.9) Pomocí Lagrangeova principu vyřešte úlohu lineárního programování

$$f(x) = \langle c, x \rangle \to \min$$

na množině
$$X = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid Bx \leqslant b,\ x \geqslant 0\right\},$$

je-li $c = (2, 2)^\top$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a $b = (6, -3, 3)^\top$.

řešení: $[1, 0]$

8.10) Pomocí Lagrangeova principu vyřešte úlohu matematického programování

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2 \to \min, \quad x_1^2 + x_2^2 \leqslant 9, \quad x_1 + x_2 \leqslant 1, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

řešení: $[0, 0]$

8.11) Pomocí Lagrangeova principu vyřešte úlohu matematického programování

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 + 1 \to \min, \quad x_1 + x_2 \leqslant 1, \quad x_1^2 + x_2^2 \leqslant 4, \quad x_1 \geqslant 0.$$

řešení: $[4/3, -1/3]$

8.12) Pomocí Lagrangeova principu vyřešte úlohu matematického programování

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2, \quad x_1^2 + x_2 \leqslant 1, \quad x_1 + x_2 \leqslant 1, \quad x_1 \geqslant 0.$$

(**Nápověda:** polynom $4z^3 - 3z^2 + 4z - 3$ má jediný reálný kořen $z = 3/4$.)

řešení: $[3/4, 1/4]$

8.13) Pomocí Lagrangeova principu vyřešte úlohu matematického programování

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 2x_1 x_2 + 2x_2^2 - 9x_2 \to \min,$$
$$4x_1^2 - x_2 \leqslant 2, \quad 4x_1 + 3x_2 \leqslant 10, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

řešení: $[28/37, 86/37]$

8.14) Pomocí Lagrangeova principu vyřešte úlohu matematického programování

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \min, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3, \quad 2x_1 - x_2 + x_3 \leqslant 5.$$

řešení: $[1, 1, 1]$

8.15) Pomocí Lagrangeova principu vyřešte úlohu matematického programování

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 4x_1 x_2 + 3x_2^2 - 4x_2 x_3 + 2x_3^2 + x_1 + 4x_2 - 2x_3 \to \min,$$
$$x_1 - x_2 + 2 = 0, \quad x_1 + 2x_2 - x_3 \leqslant 1, \quad x_1 \geqslant 0.$$

řešení: $[0, 2, 3]$

8.16) Pomocí Lagrangeova principu vyřešte úlohu matematického programování

$$f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 8x_1 - 6x_2 - 4x_3 + 9,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 4, \quad x_1 - 2x_2 - 2x_3 \geqslant 1, \quad x_3 \geqslant 0.$$

řešení: $[3,1,0]$

8.17) Pomocí Lagrangeova principu vyřešte úlohu matematického programování

$$f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 \to \min,$$
$$x_1 + 2x_3 = 1, \quad x_1 - 2x_2 - x_3 \leqslant 2, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0.$$

řešení: $[0,1/2,1/2]$

8.18) Pomocí Lagrangeova principu vyřešte úlohu matematického programování

$$f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 \to \min,$$
$$x_1 + 2x_3 = 2, \quad x_1^2 - 2x_2 - x_3 \leqslant 2, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0.$$

(**Nápověda:** polynom $-32z^3 + 156z^2 - 241z + 92$ má jediný reálný kořen $z \approx 0,56356$.)

řešení: $[0,1,1]$

8.19) Pomocí Lagrangeova principu vyřešte úlohu matematického programování

$$f(x_1,x_2,x_3) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_2x_3 + 2x_3^2 + x_1 + 4x_2 - 2x_3 \to \min,$$
$$x_1 - x_2 + 2 \leqslant 0, \quad 2x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 2, \quad x_1 \geqslant 0.$$

řešení: $[0,2,5/2]$

8.20) Pomocí Lagrangeova principu vyřešte úlohu matematického programování

$$f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 - \langle c,x\rangle \to \min$$

na množině $\mathbb{R}^n_+$, kde $c \in \mathbb{R}^n$.

řešení: $[\max\{0,c_1\},\max\{0,c_2\},\dots,\max\{0,c_n\}]$

8.21) Pomocí Lagrangeova principu vyřešte úlohu matematického programování

$$f(x) = \|x\| - \langle c,x\rangle \to \min$$

na množině $\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$, kde $c \in \mathbb{R}^n$.

8.22) Pomocí Lagrangeova principu vyřešte úlohu matematického programování

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2 + 1 \to \min, \quad x_1^3 - x_2^3 \leqslant 1, \quad x_1 \geqslant 0.$$

řešení: $[0, 0]$

8.23) Pomocí Lagrangeova principu vyřešte úlohu matematického programování

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 - 3x_1 x_2 + x_2^3 \to \min, \quad x_2 - 2x_1^2 \leqslant 0, \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant 3, \quad x_2 \geqslant 0.$$

řešení: $[1, 1]$

8.24) Pomocí Lagrangeova principu vyřešte úlohu matematického programování

$$\begin{gathered} f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1 x_2 - 4x_1 - 2x_2 \to \min, \\ x_1^2 - 2x_2 \leqslant 0, \quad 2x_1 + x_2 \leqslant 6, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

řešení: $[0, 6]$

8.25) Pomocí Lagrangeova principu vyřešte úlohu matematického programování

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \to \min, \quad x_1^2 + 4x_2^2 \leqslant 4, \quad 2x_1^2 + x_2 \geqslant 2, \quad x_1 \geqslant 2x_2.$$

řešení: $[\sqrt{65}/8 - 1/8, \sqrt{65}/16 - 1/16]$

8.26) Uvažte úlohu matematického programování

$$\left. \begin{gathered} f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^3 + x_2^3 - 2x_1 x_3^2 \to \min, \\ 2x_1 + x_2^2 + x_3 = 5, \quad 5x_1^2 - x_2^2 - x_3 \geqslant 2, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0. \end{gathered} \right\} \tag{8.1}$$

a) Pomocí Lagrangeova principu určete nutné podmínky pro stacionární body úlohy (8.1).

b) Pomocí podmínek druhého řádu ukažte, že bod $[1, 0, 3]$ je bodem lokálního vázaného minima úlohy (8.1).

8.27) Pomocí Lagrangeova principu vyřešte úlohu matematického programování

$$\begin{gathered} f(x_1, x_2) = 4x_1 + 2x_2 - 2x_1 x_2 - x_1^2 \to \min, \\ x_1^2 - 2x_2 \leqslant 0, \quad 2x_1 + x_2 \leqslant 6, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

řešení: $[0,0]$ a $[2,2]$

8.28) Pomocí Lagrangeova principu vyřešte úlohu matematického programování

$$f(x_1,x_2) = 4x_1 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - x_1^2 \to \min,$$
$$x_1^2 - 2x_2 \leqslant 0, \quad 2x_1 + x_2 \leqslant 6, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

řešení: $[0,0]$

8.29) Nechť $\rho \in \mathbb{R}$ a uvažte úlohu matematického programování

$$f(x_1,x_2) = (x_1-1)^2 + x_2^2 \to \min, \quad x_1 - \rho\, x_2^2 \leqslant 0. \tag{8.2}$$

Pro jaké hodnoty ρ je bod $x^* = [0,0]$ řešením úlohy (8.2)?

řešení: $\rho \leqslant 1/2$

8.30) Firma vyrábějící letadla je může provozovat ve dvou zemích. Její náklady v zemi A závisí na počtu provozovaných letadel $x_1 \geqslant 0$ a jsou dány předpisem $C_A(x_1) = \ln(1 + 3x_1/100)$. Pro zemi B jsou $C_B(x_2) = \ln(1 + 3x_1/100)$. Firma chce rozdělit své kapacity mezi počty x_1 a x_2 tak, aby minimalizovala své celkové náklady při celkovém provozování alespoň $q > 0$ kusů.

a) Ukažte, že optimální volba x_1 a x_2 musí být řešením jistého optimalizačního problému s omezením na znaménko.

b) Ukažte, že v závislosti na hodnotě q existují jeden, dva nebo tři kandidáti na řešení.

c) Ukažte, že v optimálním případě provozuje firma letadla pouze v zemi A, je-li q pod kritickou hodnotou q^*, a pouze v zemi B, je-li $q > q^*$.

d) Určete optimální náklady v závislosti na q a ukažte, že tato funkce není diferencovatelná v bodě q^*. Je v tomto bodě subdiferencovatelná? Pokud ano, určete příslušný subdiferenciál.

řešení: a) $\ln(1 + 3x_1/100) + 2\ln(1 + x_2/100) \to \min$ při omezení $x_1 + x_2 \geqslant q$, $x_1, x_2 \geqslant 0$

b) pro $q \in (0, 50/3)$ je jediný kandidát $[0,q]$, pro $q = 50/3$ jsou dva kandidáti $[0,q]$ a $[q,0]$,

pro $q > 50/3$ jsou tři kandidáti $[0,q]$, $[q,0]$ a $[q/3 + 100/9, 2q/3 - 100/9]$

c) pro $q \leqslant 100$ je řešením $[0,q]$, pro $q \geqslant 100$ je řešením $[q,0]$, tj. $q^* = 100$

d) $\partial C^*(q^*) = \varnothing$

8.31) *Dokažte:* Nechť
$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geqslant 0,\, i \in I\},$$
kde $I \subseteq \{1,\dots,n\}$ je indexová množina, a nechť $f: X \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná na (nějaké otevřené množině obsahující) X. Je-li $x^* \in X$ lokálním minimem funkce f na X, potom platí
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) \geqslant 0 \quad \& \quad x_i^* \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0 \quad \text{pro všechna } i \in I \tag{8.3}$$
a současně
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0 \quad \text{pro všechna } i \in \{1,\dots,n\} \setminus I \tag{8.4}$$
Je-li funkce navíc f konvexní na X, pak bod $x^* \in X$ splňující dvojici podmínek (8.3) a (8.4) je dokonce globálním minimem funkce f na X.

8.32) *Dokažte:* Nechť
$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 \leqslant x_i \leqslant \beta_i,\, i = 1,\dots,n\},$$
kde $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ jsou daná čísla, a nechť $f: X \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná na (nějaké otevřené množině obsahující) X. Je-li $x^* \in X$ lokálním minimem funkce f na X, potom platí
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) \begin{cases} \geqslant 0, & \text{pokud } x_i^* = \alpha_i, \\ \leqslant 0 & \text{pokud } x_i^* = \beta_i, \\ = 0 & \text{pokud } \alpha_i < x_i^* < \beta_i. \end{cases} \tag{8.5}$$
Je-li funkce f navíc konvexní na X, pak bod $x^* \in X$ splňující podmínku (8.5) je dokonce globálním minimem funkce f na X.

8.33) Pomocí Lagrangeova principu vyřešte úlohu matematického programování
$$f(x_1,x_2) = 4x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 \to \min$$
na obdélníku
$$X = \{[x_1,x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid 4 \leqslant x_1 \leqslant 8,\, -1 \leqslant x_2 \leqslant 2\}.$$

řešení: $[4,1]$

8.34) Pomocí Lagrangeova principu vyřešte úlohu matematického programování
$$f(x_1,x_2) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 \to \min$$
na „obdélníku“
$$X = \{[x_1,x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant x_1 \leqslant 1,\, x_2 \geqslant 2\}.$$

řešení: $[-1/2, 2]$

8.35) Pomocí Lagrangeova principu vyřešte úlohu matematického programování

$$f(x_1, x_2) = \mathrm{e}^{a^2 x_1} + \mathrm{e}^{a^2 x_2} + 2ax_1 - x_2 \to \min$$

na čtverci

$$X = \big\{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x_1 \leqslant 1,\ -1 \leqslant x_2 \leqslant 0\big\}.$$

8.36) *Dokažte:* Nechť

$$X = \left\{x \in \mathbb{R}^n_+ \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = r\right\},$$

kde $r \in \mathbb{R}$ je dané číslo, a nechť $f : X \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná na (nějaké otřevené množině obsahující) X. Je-li $x^* \in X$ lokálním minimem funkce f na X, potom platí implikace

$$x_i^* > 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) \leqslant \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) \quad \text{pro všechna } j \in \{1, \dots, n\}. \tag{8.6}$$

Je-li funkce f navíc konvexní na X, pak bod $x^* \in X$ splňující podmínku (8.6) je dokonce globálním minimem funkce f na X.

8.37) Nechť $a_1, \dots, a_n > 0$ jsou daná čísla. Pomocí Lagrangeova principu vyřešte úlohu matematického programování

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \to \max$$

na množině (jednotkovém simplexu)

$$X = \left\{x \in \mathbb{R}^n_+ \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\right\}.$$

8.38) Vyřešte *Tartagliovu úlohu*:

Rozdělte číslo 8 na dvě části tak, aby součin těchto čísel vynásobený jejich rozdílem byl maximální.

řešení: $4 \pm 4/\sqrt{3}$

8.39) Ukažte, že mezi všemi pyramidami, které mají tutéž trojúhelníkovou základnu a stejnou výšku, ta s minimálním povrchem (tj. součtem obsahů bočních trojúhelníků) má následující vlastnost:

projekcí vrcholu pyramidy ležícího mimo základnu do trojúhelníku tvořícího základny je bod, jenž má stejnou vzdálenost od všech stran trojúhelníku.

8.40) Vyřešte *Steinerův problém*:

V rovinném trojúhelníku najděte takový bod, že součet jeho vzdáleností od vrcholů trojúhelníku je minimální.

řešení: Fermatův(–Torricelliho) bod

9. Dualita v matematickém programování

- *Pro kontrolu výpočtů můžete využít Maplety — viz https://m5170.page.link/y6N7.*
- Pro zadání lze také využít libovolnou úlohu z Kapitoly 8 nebo z Kapitoly 10 s konkrétní volbou hodnoty parametru b.

9.0) Určete duální úlohu k úloze matematického programování

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & f(x) = x^2 + 2x + 2 \to \min, \quad x \leqslant 1, \\ \text{(b)} & f(x) = x^2 + 2x + 2 \to \min, \quad x + 2 \leqslant 0, \end{array}$$

a ověřte platnost vztahu duality $f^* = \varphi^*$.

řešení: (a) $\varphi(y) = -y^2/4 - 2y + 1$ a $y^* = 0$,
(b) $\varphi(y) = -y^2/4 + y + 1$ a $y^* = 2$

9.1) Určete duální úlohu k úloze matematického programování

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & f(x) = \sqrt{1 + x^2} \to \min, \quad x \leqslant 1, \\ \text{(b)} & f(x) = \sqrt{1 + x^2} \to \min, \quad x + 1 \leqslant 0, \end{array}$$

a ověřte platnost vztahu duality $f^* = \varphi^*$.

řešení: (a) $\varphi(y) = \sqrt{1 - y^2} - y$ pro $y \in [0, 1)$, $\varphi(y) = -\infty$ pro $y \geqslant 1$, $y^* = 0$,
(b) $\varphi(y) = \sqrt{1 - y^2} + y$ pro $y \in [0, 1)$, $\varphi(y) = -\infty$ pro $y \geqslant 1$, $y^* = 1/\sqrt{2}$

9.2) Určete duální úlohu k úloze matematického programování

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & f(x) = |x| \to \min, \quad x \leqslant 1, \\ \text{(b)} & f(x) = |x| \to \min, \quad x + 1 \leqslant 0 \\ \text{(c)} & f(x) = |x| \to \min, \quad x \leqslant 0. \end{array}$$

a ověřte platnost vztahu duality $f^* = \varphi^*$.

řešení: (a) $\varphi(y) = -y$ pro $y \in [0, 1]$, $\varphi(y) = -\infty$ pro $y > 1$, $y^* = 0$,
(b) $\varphi(y) = y$ pro $y \in [0, 1]$, $\varphi(y) = -\infty$ pro $y > 1$, $y^* = 1$,
(c) $\varphi(y) = 0$ pro $y \in [0, 1]$, $\varphi(y) = -\infty$ pro $y > 1$, y^* je libovolný bod z $[0, 1]$

9.3) Určete duální úlohu k úloze matematického programování

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \to \min, \quad x_2 \leqslant x_1,$$

a ověřte platnost vztahu duality $f^* = \varphi^*$.

řešení: $\varphi(y) = -y^2/2 - y - 1$ pro $y \geqslant 0$ a $y^* = 0$

9.4) Určete duální úlohu k úloze matematického programování

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 \to \min, \quad x_2 + 1 \leqslant x_1,$$

a ověřte platnost vztahu duality $f^* = \varphi^*$.

řešení: $\varphi(y) = -y^2/2 + 2y - 1$ pro $y \geqslant 0$ a $y^* = 2$

9.5) Určete duální úlohu k úloze

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 \to \min, \quad x_1 + x_2 \geqslant 1,$$

a ověřte platnost vztahu duality $f^* = \varphi^*$.

řešení: $\varphi(y) = -y^2 + y$ pro $y \geqslant 0$ a $y^* = 1/2$

9.6) Určete duální úlohu k úloze

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 - 2x_1 + x_2 \to \min, \quad x_1 + 2x_2 + 2 \leqslant 0,$$

a ověřte platnost vztahu duality $f^* = \varphi^*$.

řešení: $\varphi(y) = -9y^2/8 + y/4 - 11/8$ pro $y \geqslant 0$ a $y^* = 1/9$

9.7) Určete duální úlohu k úloze

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^2 + 4x_2 - 1 \to \min, \quad x_1^2 + 2x_2 \leqslant 1,$$

a ověřte platnost vztahu duality $f^* = \varphi^*$.

řešení: $\varphi(y) = -y^2 - 5y - 5$ pro $y \geqslant 0$ a $y^* = 0$

9.8) Určete duální úlohu k úloze matematického programování

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 x_2 + 2x_2^2 - 3x_1 + 2x_2 \to \min, \quad x_1 + x_2 \leqslant 1, \quad x_1 \geqslant 0,$$

a ověřte platnost vztahu duality $f^* = \varphi^*$.

řešení: $\varphi(y) = (-28y^2 + 14y - 112)/49$ pro $y \in [0, 2]$,
$\varphi(y) = -(y^2 + 12y + 4)/8$ pro $y \in [2, \infty)$ a $y^* = 1/4$

9.9) Určete duální úlohu k úloze matematického programování

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 6x_2^2 + 2x_1 - 8x_2 \to \min, \quad 2x_2 - x_1 \leqslant 1, \quad x_2 \geqslant 0,$$

a ověřte platnost vztahu duality $f^* = \varphi^*$.

řešení: $\varphi(y) = -y^2/4 - 1$ pro $y \in [0, 4]$,
$\varphi(y) = -5y^2/12 + 4y/3 - 11/3$ pro $y \in [4, \infty)$ a $y^* = 8/5$

9.10) Určete duální úlohu k úloze matematického programování

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 6x_2^2 + 2x_1 - 8x_2 \to \min, \quad 2x_2 - x_1 + 2 \leqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0,$$

a ověřte platnost vztahu duality $f^* = \varphi^*$.

řešení: $\varphi(y) = -y^2/4 + 3y - 1$ pro $y \in [0,4]$,
$\varphi(y) = -5y^2/12 + 13y/3 - 11/3$ pro $y \in [4,\infty)$ a $y^* = 6$

9.11) Určete duální úlohu k úloze matematického programování

$$f(x_1,x_2) = 4x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 \to \min, \quad 2x_1 - 3x_2 - 5 \leqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0,$$

a ověřte platnost vztahu duality $f^* = \varphi^*$.

řešení: $\varphi(y) = (-58y^2 - 141y - 134)/7$ pro $y \geqslant 0$ a $y^* = 0$

9.11.A) Určete duální úlohu k úloze matematického programování

$$f(x_1,x_2) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + 3x_2 \to \min, \quad x_1 - 3x_2 \leqslant 4, \quad x_1 \geqslant 0,$$

a ověřte platnost vztahu duality $f^* = \varphi^*$.

řešení: $\varphi(y) = -9y^2/4 + y/2 - 9/4$ pro $y \geqslant 8/7$, $\varphi(y) = -\infty$ pro $y \in [0, 8/7)$
$y^* = 8/7$

9.12) Určete duální úlohu k úloze

$$f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 \to \min, \quad x_1 + x_2 \geqslant 4, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0,$$

a ověřte platnost vztahu duality $f^* = \varphi^*$.

řešení: $\varphi(y) = -y^2/2 + 4y$ pro $y \geqslant 0$ a $y^* = 4$

9.13) Určete duální úlohu k úloze matematického programování

$$f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_1 \to \min, \quad x_2^2 - x_1 + x_2 \leqslant 1, \quad x_1 \geqslant 0,$$

a ověřte platnost vztahu duality $f^* = \varphi^*$.

Nápověda: polynom $2z^3 + 3z^2 - 2$ má jediný reálný kořen $z \approx 0,67765$.

řešení: $\varphi(y) = -(5y^2 + 4y)/(4 + 4y)$ pro $y \in [0,3]$,
$\varphi(y) = -(y^3 + 7y + 9)/(4 + 4y)$ pro $y \geqslant 3$ a $y^* = 0$

9.14) Určete duální úlohu k úloze matematického programování

$$f(x_1,x_2) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - x_2 \to \min, \quad x_1^2 - 2x_2 + x_1 \leqslant 2, \quad x_1 \geqslant 0,$$

a ověřte platnost vztahu duality $f^* = \varphi^*$.

řešení: $\varphi(y) = -y^2 - 3y - 1/4$ pro $y \geqslant 0$ a $y^* = 0$

9.14.A) Určete duální úlohu k úloze matematického programování

$$f(x_1,x_2) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_2 \to \min, \quad x_1^2 - 2x_2 + x_1 \leqslant 2, \quad x_1 \geqslant 0,$$

a ověřte platnost vztahu duality $f^* = \varphi^*$.

(**Nápověda:** platí $16z^4 + 53z^3 + 17z^2 - 48z + 14 = (7+4z)(4z^3 + 7z^2 - 8z + 2)$ a polynom $16z^3 + 72z^2 + 105z + 17$ má jediný reálný kořen $z \approx -0,18422$.)

řešení: $\varphi(y) = (-4y^3 - 15y^2 - 6y - 2)/(7+4y)$ pro $y \in [0, 1/4]$,
$\varphi(y) = -y^2 - y - 1/4$ pro $y \geqslant 1/4$ a $y^* = 0$

9.15) Určete duální úlohu k úloze

$$f(x_1,x_2) = 8x_1 + 18x_2 \to \min, \quad x_1 + 3x_2 \geqslant 2, \quad 2x_1 + 4x_2 \geqslant 1, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0,$$

a ověřte platnost vztahu duality $f^* = \varphi^*$.

řešení: $\varphi(y_1,y_2) = 2y_1 + y_2$ pro $8 - y_1 - 2y_2 \geqslant 0$, $18 - 3y_1 - 4y_2 \geqslant 0$ a $y_1, y_2 \geqslant 0$
$[y_1^*, y_2^*] = [6, 0]$

9.16) Určete duální úlohu k úloze

$$f(x_1,x_2) = x_1 + x_2 \to \min, \quad x_1 + 2x_2 \geqslant 3, \quad 2x_1 + x_2 \geqslant 3, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0,$$

a ověřte platnost vztahu duality $f^* = \varphi^*$.

řešení: $[y_1^*, y_2^*] = [1, 1]$

9.17) Určete duální úlohu k úloze

$$f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 \to \min, \quad x_1 + x_2 \leqslant 1, \quad x_1 - x_2 + 2 \leqslant 0,$$

a ověřte platnost vztahu duality $f^* = \varphi^*$.

řešení: $\varphi(y_1,y_2) = -(y_1+1)^2/2 - (y_2-2)^2/2 + 5/2$ pro $[y_1, y_2] \in \mathbb{R}_+^2$
$[y_1^*, y_2^*] = [0, 2]$

9.18) Určete duální úlohu k úloze

$$f(x_1,x_2,x_3) = 4x_3^2 + 2x_2 - 6x_1 \to \min, \quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 0, \quad -2x_1 + 4x_2 + x_3^2 = 0, \quad x_2 \geqslant 0,$$

a ověřte platnost vztahu duality $f^* = \varphi^*$.

řešení: $\varphi(y_1,y_2) = -y_1^2/(16+4y_2)$ pro $y_1 \geqslant 0$, $y_1 - y_2 = 3$ a $2 + 2y_1 + 4y_2 \geqslant 0$
$[y_1^*, y_2^*] = [5/3, -4/3]$

9.19) Určete duální úlohu k úloze

$$f(x_1,x_2) = \sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2} \to \min, \quad x_1 + x_2 \leqslant 1,$$

a ověřte platnost vztahu duality $f^* = \varphi^*$.

řešení: $\varphi(y) = \sqrt{1-2y^2} - y$ pro $y \in [0, 1/\sqrt{2}]$ a $y^* = 0$

9.20) Určete duální úlohu k úloze

$$f(x_1, x_2) = x_1 + \mathrm{e}^{x_2} \to \min, \quad 3x_1 - 2\,\mathrm{e}^{x_2} \geqslant 10, \quad x_2 \geqslant 0,$$

a ověřte platnost vztahu duality $f^* = \varphi^*$.

řešení: $\varphi(y_1, y_2) = y_2 - y_2 \ln[y_2/(1+2y_1)] + 10y_1$ pro $y_1 = 1/3$ a $y_2 \geqslant 0$
$[y_1^*, y_2^*] = [1/3, 5/3]$

9.21) Určete duální úlohu k úloze

$$f(x_1, x_2) = -\sqrt{x_1} - \sqrt{3x_2} \to \min, \quad x_1 + x_2 \leqslant 4, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0,$$

a ověřte platnost vztahu duality $f^* = \varphi^*$.

řešení: $\varphi(y) = -1/y - 4y$ pro $y > 0$ a $\varphi(y) = -\infty$ pro $y = 0$
$y^* = 1/2$

9.22) Určete duální úlohu k úloze

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 4x_2 + x_3^4 \to \min, \quad x_1 + x_2 + x_3^2 \leqslant 2, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0,$$

a ověřte platnost vztahu duality $f^* = \varphi^*$.

řešení: $\varphi(y) = -2y$ pro $y \geqslant 4$ a $\varphi(y) = -\infty$ pro $y < 4$
$y^* = 4$

9.23) Určete duální úlohu k úloze

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \to \min, \quad x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 2, \quad x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad x_3 > 0,$$

a ověřte platnost vztahu duality $f^* = \varphi^*$.

řešení: $\varphi(y) = -2y + 6\sqrt{y}$ pro $y \geqslant 0$ a $y^* = 9/4$

9.24) Určete duální úlohu k úloze

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + \sum_{i=1}^{4} x_i \ln x_i \to \min,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \quad x_4 \geqslant 0,$$

a ověřte platnost vztahu duality $f^* = \varphi^*$. (Pro jednoduchost užíváme konvenci $0 \ln 0 = 0$.)

řešení: $\varphi(y) = -\mathrm{e}^{-2-y} - \mathrm{e}^{-3-y} - \mathrm{e}^{-4-y} - \mathrm{e}^{-5-y} - y$ pro $y \in \mathbb{R}$ a $y^* = \ln(\mathrm{e}^3 + \mathrm{e}^2 + \mathrm{e} + 1) - 5$

9.25) Určete duální úlohu k úloze

$$f(x) = \langle x, x\rangle \to \min, \quad Ax = b,$$

kde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $b \in \mathbb{R}^m$.

řešení: $\varphi(y) = -\frac{1}{4}\, y^\top AA^\top y - y^\top b$ pro $y \in \mathbb{R}^m$

9.26) Určete duální úlohu k úloze kvadratického programování

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\langle Qx, x\rangle + \langle c, x\rangle \to \min, \quad Ax \leqslant b,$$

kde $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická a pozitivně definitní matice, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$.

řešení: $\varphi(y) = -\frac{1}{2}\, y^\top AQ^{-1}A^\top y - y^\top(AQ^{-1}c + b) - c^\top Q^{-1}c/2$ pro $y \geqslant 0$

9.27) Určete duální úlohu k úloze kvadratického programování

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\langle Qx, x\rangle + \langle c, x\rangle \to \min, \quad Ax = b, \quad x \geqslant 0,$$

kde $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická a pozitivně definitní matice, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$.

řešení: $\varphi(y) = -\frac{1}{2}\langle Qx, x\rangle - \langle y, b\rangle$ pro $Qx + A^\top y \geqslant -d$

9.28) Určete duální úlohu k úloze kvadratického programování

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\langle Qx, x\rangle + \langle c, x\rangle \to \min, \quad Ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0,$$

kde $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická a pozitivně definitní matice, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$.

řešení: $\varphi(y) = -\frac{1}{2}\langle Qx, x\rangle - \langle y, b\rangle \to \max$ pro $Qx + A^\top y \geqslant -d$ a $y \geqslant 0$

9.29) Určete duální úlohu k úloze kvadratického programování

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\langle Qx, x\rangle + \tfrac{1}{2}\langle Pz, z\rangle + \langle c, x\rangle \to \min, \quad Ax + Pz \geqslant -b, \quad x \geqslant 0$$

kde $P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou symetrické a pozitivně definitní matice, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$.

řešení: $\varphi(y) = -\frac{1}{2}\langle Qx, x\rangle - \frac{1}{2}\langle Py, y\rangle - \langle y, b\rangle$ pro $Qx - A^\top y \geqslant -d$ a $y \geqslant 0$

10. Analýza citlivosti (závislost úloh matematického programování na parametrech)

Pro kontrolu výpočtů můžete (částečně) využít Maplety — viz https://m5170.page.link/y6N7.

10.1) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$\sqrt{1+x^2} \to \min, \quad x \leqslant b.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

řešení: $F(b) = 1$ pro $b \geqslant 0$ a $F(b) = \sqrt{1+b^2}$ pro $b \leqslant 0$

10.2) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$x \ln x \to \min, \quad 0 < x \leqslant b.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

řešení: $F(b) = -1/\mathrm{e}$ pro $b \geqslant 1/\mathrm{e}$ a $F(b) = b \ln b$ pro $b \in (0, 1/\mathrm{e}]$

10.3) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$|x| \to \min, \quad x \leqslant b.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

řešení: $F(b) = 0$ pro $b \geqslant 0$ a $F(b) = -b$ pro $b < 0$

10.4) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$\mathrm{e}^{|x|} \to \min, \quad x \leqslant b.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

řešení: $F(b) = 1$ pro $b \geqslant 1$ a $F(b) = \mathrm{e}^{-b}$ pro $b \leqslant 0$

10.5) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$\cosh(x) \coloneqq \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \to \min, \quad x \leqslant b.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

řešení: $F(b) = \cosh(b)$ pro $b \leqslant 0$ a $F(b) = 1$ pro $b \geqslant 0$

10.6) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$x_1^2 + 4x_2^2 \to \min, \quad x_1 + 2x_2 \leqslant b.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

řešení: $F(b) = 0$ pro $b \geqslant 0$ a $F(b) = b^2/2$ pro $b \leqslant 0$

10.7) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$x_1^2 + x_2^2 \to \min, \quad x_1 - x_2 - 1 \leqslant b.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

řešení: $F(b) = 0$ pro $b \geqslant -1$ a $F(b) = (b+1)^2/2$ pro $b \leqslant -1$

10.8) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 \to \min, \quad -x_1 + x_2 \leqslant b.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

řešení: $F(b) = -1$ pro $b \geqslant 1$ a $F(b) = (b-1)^2/2 - 1$ pro $b \leqslant -1$

10.9) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 + 1 \to \min, \quad x_1 + x_2 \leqslant b.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

řešení: $F(b) = 0$ pro $b \geqslant 1$ a $F(b) = 2(b-1)/3$ pro $b \leqslant 1$

10.10) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 \to \min, \quad x_2 - x_1 \leqslant b.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

řešení: $F(b) = -1$ pro $b \geqslant -1$ a $F(b) = (b+1)^2/4 - 1$ pro $b \leqslant -1$

10.11) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 \to \min, \quad x_1 + x_2 + 1 \leqslant b.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

řešení: $F(b) = -1$ pro $b \geqslant 0$ a $F(b) = b^2/2 - 1$ pro $b \leqslant 0$

10.12) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 \to \min, \quad x_1 - x_2 \leqslant b.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

řešení: $F(b) = 0$ pro $b \geqslant 0$ a $F(b) = b^2/5$ pro $b \leqslant 0$

10.13) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + x_2 \to \min, \quad x_1 + 2x_2 \leqslant b.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

řešení: $F(b) = -11/8$ pro $b \geqslant -7/4$ a $F(b) = 2b^2/9 + 7b/9 - 25/36$ pro $b \leqslant -7/4$

10.14) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2} \to \min, \quad x_1 + x_2 \leqslant b.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

řešení: $F(b) = 1$ pro $b \geqslant 0$ a $F(b) = \sqrt{1 + b^2/2}$ pro $b \leqslant 0$

10.15) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$\sqrt{1 + 4x_1^2 + 4x_2^2} \to \min, \quad x_2 - x_1 \leqslant b.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

řešení: $F(b) = 1$ pro $b \geqslant 0$ a $F(b) = \sqrt{1 + 2b^2}$ pro $b \leqslant 0$

10.16) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$x_1 + x_2 \to \min, \quad x_1^2 + x_2^2 \leqslant b.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

řešení: $F(b) = -\sqrt{2b}$ pro $b \geqslant 0$

10.17) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$3x_1^2 + x_2^2 + 4x_2 - 1 \to \min, \quad x_1^2 + 2x_2 \leqslant b.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

řešení: $F(b) = -5$ pro $b \geqslant -4$ a $F(b) = b^2/4 + 2b - 1$ pro $b \leqslant -4$

10.18) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$4x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 \to \min, \quad x_1^2 + 5x_2^2 \leqslant b + 1.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

řešení: $F(b) = -1$ pro $b \geqslant 4$ a $F(b) = (b+1)/5 - 2\sqrt{(b+1)/5}$ pro $b \in [-1, 4]$

10.19) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \to \min, \quad x_1 + x_2 \leqslant b, \quad x_1 \geqslant 0.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

řešení: $F(b) = 0$ pro $b \geqslant 0$ a $F(b) = b^2$ pro $b \leqslant 0$

10.20) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$x_1^2 + 6x_2^2 + 2x_1 - 8x_2 \to \min, \quad 2x_2 - x_1 \leqslant b, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

řešení: $F(b) = b^2 - 2b$ pro $b \leqslant -1$, $F(b) = (3b^2 - 14b - 2)/5$ pro $b \in [-1, 7/3]$ a $F(b) = -11/3$ pro $b \geqslant 7/3$

10.21) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$x_1^2 + 6x_2^2 + 2x_1 - 8x_2 \to \min, \quad x_1 - 2x_2 \leqslant b, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

10.22) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$x_1^2 + 6x_2^2 - 2x_1 + 8x_2 \to \min, \quad x_1 - 2x_2 \leqslant b, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

10.23) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 - x_2 \to \min, \quad 2x_2 - x_1 \leqslant b, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

10.24) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 + x_2 \to \min, \quad x_1 + 2x_2 \leqslant b, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

10.25) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 + x_2 \to \min, \quad 3x_1 + 2x_2 \leqslant b, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

řešení: $F(b) = b^2/9 - 2b/3$ pro $b \leqslant 21/10$, $F(b) = b^2/34 - 11b/34 - 49/136$ pro $b \in [21/10, 11/2]$ a $F(b) = -5/4$ pro $b \geqslant 11/2$

10.26) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_2 \to \min, \quad 3x_1^2 - x_2 \leqslant b, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

řešení: $F(b) = 0$ pro $b \geqslant 0$ a $F(b) = 4b^2 - 2b$ pro $b \leqslant 0$

10.27) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \to \min, \quad x_1 + x_2 \leqslant b, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

10.28) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$-\sqrt{x_1} - \sqrt{3x_2} \to \min, \quad x_1 + x_2 \leqslant b, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

řešení: $F(b) = -2\sqrt{b}$ pro $b \geqslant 0$

10.29) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \to \min, \quad x_1 + x_2 \leqslant b, \quad x_1 > 0, \quad x_2 > 0.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

řešení: $F(b) = 4/b$ pro $b > 0$

10.30) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$\frac{1}{x_1 + x_2} \to \min, \quad x_1^2 + x_2^2 \leqslant b, \quad x_1 > 0, \quad x_2 > 0.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

řešení: $F(b) = 1/\sqrt{2b}$ pro $b > 0$

10.31) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$\frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}} \to \min, \quad x_1 + x_2 \leqslant b, \quad x_1 > 0, \quad x_2 > 0.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

řešení: $F(b) = 2/b$ pro $b > 0$

10.32) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} \to \min, \quad x_1 + x_2 \leqslant b, \quad x_1 > 0, \quad x_2 > 0.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

řešení: $F(b) = 2\sqrt{2/b}$ pro $b > 0$

10.33) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \min, \quad x_1 + x_2 + x_3 \leqslant b.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

řešení: $F(b) = 0$ pro $b \geqslant 0$ a $F(b) = b^2/3$ pro $b \leqslant 0$

10.34) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\to\min,\quad x_1+x_2+x_3\leqslant b,\quad x_1>0,\quad x_2>0,\quad x_3>0.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b)=-Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

řešení: $F(b)=9/b$ pro $b>0$

10.35) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$\frac{1}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\to\min,\quad x_1+x_2+x_3\leqslant b,\quad x_1>0,\quad x_2>0,\quad x_3>0.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b)=-Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

řešení: $F(b)=3/b^2$ pro $b>0$

10.36) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$\frac{1}{x_1x_2x_3}\to\min,\quad x_1+x_2+x_3\leqslant b,\quad x_1>0,\quad x_2>0,\quad x_3>0.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b)=-Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

řešení: $F(b)=27/b^3$ pro $b>0$

10.37) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$x_1^2+x_2^2\to\min,\quad x_1\leqslant b_1,\quad x_2\leqslant b_2.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b)=-Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

řešení: $F(b)=0$ pro $b_1,b_2\geqslant 0$,
$F(b)=b_2^2$ pro $b_1\geqslant 0$ & $b_2\leqslant 0$,
$F(b)=b_1^2$ pro $b_1\leqslant 0$ & $b_2\geqslant 0$,
$F(b)=b_1^2+b_2^2$ pro $b_1\leqslant 0$ & $b_2\leqslant 0$

10.38) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$x_1^2+x_2^2\to\min,\quad x_1+x_2\leqslant b_1,\quad x_1-x_2\leqslant b_2.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b)=-Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

řešení: $F(b) = 0$ pro $b_1, b_2 \geqslant 0$,
$F(b) = b_2^2/2$ pro $b_1 \geqslant 0$ & $b_2 \leqslant 0$,
$F(b) = b_1^2/2$ pro $b_1 \leqslant 0$ & $b_2 \geqslant 0$,
$F(b) = b_1^2/2 + b_2^2/2$ pro $b_1 \leqslant 0$ & $b_2 \leqslant 0$

10.39) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$\mathrm{e}^{x_1+x_2} \to \min, \quad x_2 - 2x_1 \leqslant b_1, \quad x_1 - 2x_2 \leqslant b_2.$$

Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

řešení: $F(b) = \mathrm{e}^{-b_1-b_2}$

10.40) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{x_i} \to \min, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant b, \quad x_1 > 0, \quad \dots \quad , x_n > 0,$$

kde $\alpha_i > 0$ jsou reálné konstanty. Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

řešení: $F(b) = \alpha^2/b$ pro $\alpha := \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\alpha_i}$

10.41) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sqrt{x_i} \to \min, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant b, \quad x_1 \geqslant 0, \quad \dots \quad , x_n \geqslant 0,$$

kde $\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0$ jsou reálné konstanty. Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.

10.42) V závislosti na parametru b určete hodnotu $F(b)$ parametrické úlohy matematického programování

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle c, x\rangle \to \min, \quad \langle a, x\rangle \leqslant b,$$

kde $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická a pozitivně definitní matice, $x, c, a \in \mathbb{R}^n$. Určete dále duální úlohu k této úloze, vyřešte ji (bez využití předchozí části) a ověřte platnost vztahu $\partial F(b) = -Y^*(b)$, kde $Y^*(b)$ je množina řešení duální úlohy.