M3100F: Matematická analýza III **x.–xxx. termín: podzim 20xx**

UKÁZKOVÁ ZKOUŠKOVÁ PÍSEMNÁ PRÁCE

- **Jméno a příjmení (UČO):** ______________________________
- **Počet listů s řešením:** ________________

1_2	2_1	3_3	4_4	5_3	6_3	7_5	8_4	$_5$	Σ_{30}	

- **Všechny své výpočty a odpovědi řádně zdůvodněte.**
- Zadání **čtěte pozorně.**
- Čas na vypracování je **120 minut**.
- V písemné části lze dosáhnout nejvýše 25 bodů. Pro postoupení k ústní části je nutné získat **alespoň 13 bodů v součtu s body ze cvičení**. Ústní část začne **xx. xxx 20xx v xx hodin** v pracovně zkoušejícího (2. poschodí, kancelář 02021a).
- Předběžné rozdělení známek dle bodů z písemné části (může se změnit na základě ústní části):

$$[30,27] = \mathbf{A},\quad (27,24] = \mathbf{B},\quad (24,21] = \mathbf{C},\quad (21,18] = \mathbf{D},\quad (18,15] = \mathbf{E},\quad (15,0] = \mathbf{F}.$$

- **HODNĚ ŠTĚSTÍ!** (Pokud jej potřebujete.)

UKÁZKOVÁ ZKOUŠKOVÁ PÍSEMNÁ PRÁCE

ZADÁNÍ PÍSEMNÉ ČÁSTI

1. **(2 body)** Pomocí vhodných kritérií rozhodněte o konvergenci/divergenci číselných řad

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{n^n}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{arctg}\frac{1}{n}$.

2. **(1 bod)** Určete součet číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2+2n}.$$

3. **(3 body)** S využitím vhodné mocninné řady v $\mathbb{R}$ (přičemž nezapomeňte stanovit její poloměr a obor konvergence) určete součet číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+n+1)}{n\,2^n}.$$

(**Nápověda**: Při stanovování součtu se může hodit vyjádření $\frac{(n^2+n+1)}{n}=(n+1)+\frac{1}{n}$. Avšak při derivování/integrování si dejte pozor na meze!)

4. **(4 body)** Vypočtěte kosinovou Fourierovu řadu funkce $f(x)=x-x^2$ na intervalu $[0,1]$. Co bude součtem této řady pro libovolné $x\in\mathbb{R}$? Odpověď můžete doplnit i obrázkem.

S pomocí předchozího výsledku určete součet číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2}.$$

(**Nápověda**: Rozvíjejte sudé rozšíření dané funkce na intervalu $[-1,1]$.)

5. **(3 body)**

(a) Vypočtěte všechny hodnoty

$$(-\mathrm{i})^{1+\mathrm{i}}$$

a načrtněte jejich rozmístění v komplexní rovině.

(b) Nalezněte všechna čísla $z\in\mathbb{C}$ splňující

$$\sin z = 5.$$

(**Nápověda**: platí $\sin(x+\mathrm{i}\,y)=\sin x\cosh y+\mathrm{i}\cos x\sinh y$.)

UKÁZKOVÁ ZKOUŠKOVÁ PÍSEMNÁ PRÁCE

ZADÁNÍ PÍSEMNÉ ČÁSTI (pokrač.)

6. **(3 body)** Nalezněte všechny holomorfní funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ takové, že $f(z) = f(x + \mathrm{i}\, y) = u(x, y) + \mathrm{i}\, v(x, y)$ a současně

$$u(x, y) = -2x\,(1 + y).$$

Nezapomeňte ověřit splnění nutné podmínky existence takové funkce.

7. **(5 bodů)**

(a) Stanovte všechny Laurentovy rozvoje se středem v bodě $z_0 = 1$ pro funkci

$$f(z) = \frac{2}{(z-1)^2\,(z+\mathrm{i})} = \frac{1-\mathrm{i}}{(z-1)^2} + \frac{\mathrm{i}}{z-1} - \frac{\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}.$$

(b) Pomocí reziduí vypočtěte pro tutéž funkci $f(z)$ křivkový integrál

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z,$$

kde γ je kladně orientovaná kružnice se středem v $z_0 = 1$ a poloměrem $r = 1$.

8. **(4 body)** Uvažme Hilbertův prostor $H := L^2[0, H]$ funkcí integrovatelných s kvadrátem na intervalu $[0, H]$ pro $H > 0$ se skalárním součinem

$$\langle f, g\rangle := \int_0^H f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ukažte, že operátor $T(y) := y''$ definovaný na $D(T) = \left\{y \in L^2[0, H] \mid y(0) = 0 = y(H)\right\}$ (tzv. *Dirichletovy podmínky*) je symetrický, tj.

$$\langle T(y), z\rangle = \langle y, T(z)\rangle \qquad \text{pro všechna } y, z \in D(T).$$

Nalezněte také všechna jeho vlastní čísla a příslušné vlastní funkce.