M0160 Teorie optimalizace: příklady (aktualizováno 27. března 2020)

1. Lineární programování

1.1 Kanonický tvar

1.1.1) Převeďte úlohu na kanonický tvar

$$\begin{gathered} x_1 - x_2 \to \min, \\ -2x_1 + x_2 \leqslant 2, \\ 3x_1 + x_2 \geqslant 5, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.1.2) Převeďte úlohu na kanonický tvar

$$\begin{gathered} 6x_1 + x_2 \to \min, \\ -5x_1 + 8x_2 \leqslant 80, \\ x_1 + 2x_2 \geqslant 4, \\ x_1 \leqslant 10, \\ x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.1.3) Převeďte úlohu na kanonický tvar

$$\begin{gathered} 3x_1 - 2x_2 \to \min, \\ 2x_1 - x_2 \leqslant 4, \\ x_1 + 3x_2 \geqslant 5, \\ x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.1.4) Převeďte úlohu na kanonický tvar

$$\begin{gathered} 4x_1 + x_2 \to \min, \\ -2x_1 + x_2 \geqslant 6, \\ x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 \geqslant -4, \\ x_2, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.1.5) Převeďte úlohu na kanonický tvar

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + x_3 \to \min, \\ 2x_1 + x_2 = 3, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 7, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.1.6) Převeďte úlohu na kanonický tvar

$$\begin{gathered} 3x_1 - 4x_2 + x_3 \to \min, \\ -x_1 + 5x_3 = 50, \\ 2x_1 - 3x_2 = 12, \\ x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.1.7) Převeďte úlohu na kanonický tvar

$$\begin{gathered} -x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \min, \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 18, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 \leqslant 100, \\ 0 \leqslant x_1 \leqslant 10, \\ -2 \leqslant x_2 \leqslant 5, \\ x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.1.8) Převeďte úlohu na kanonický tvar

$$\begin{gathered} x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \max, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 7, \\ x_1 - x_2 + x_3 \leqslant -2, \\ 3x_1 + 2x_3 = 5, \\ x_2 - x_3 \geqslant 1, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.1.9) Převeďte úlohu na kanonický tvar

$$\begin{gathered} x_1 - 2x_2 - 3x_3 \to \min, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 14, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geqslant 12, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_3 \leqslant -3. \end{gathered}$$

1.1.10) Převeďte úlohu na kanonický tvar

$$\begin{gathered} 6x_1 - 2x_2 + 9x_3 + 300 \to \min, \\ 2x_1 - 6x_2 - x_3 \leqslant 100, \\ x_1 + x_2 + 9x_3 \leqslant 200, \\ 0 \leqslant x_1 \leqslant 50, \\ x_2 \geqslant -50, \\ x_3 \geqslant 5. \end{gathered}$$

1.1.11) Převeďte úlohu na kanonický tvar

$$\begin{gathered} 6x_1 + 5x_2 - x_3 \to \min, \\ x_1 + 2x_2 - 7x_3 \leqslant 1, \\ |3x_1 - 5x_2 - 20| \leqslant 4, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.1.12) Převeďte úlohu na kanonický tvar

$$\begin{gathered} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \to \min, \\ x_1 + x_2 - x_3 \geqslant -5, \\ -6x_1 + 7x_2 - 9x_3 = 15, \\ |19x_1 - 7x_2 + 5x_3| \leqslant 15, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.1.13) Převeďte úlohu na kanonický tvar

$$\begin{gathered} x_1 - x_2 \to \max, \\ -x_1 + 2|x_2| \leqslant 0, \\ |3x_1 - x_2| \leqslant 3, \\ x_1 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.1.14) Převeďte úlohu na kanonický tvar

$$\begin{gathered} 3x_1 - 2x_2 + 4|x_3| \to \min, \\ x_1 - 2x_2 \geqslant 5, \\ 3x_2 - x_3 \geqslant 6, \\ 2x_1 + x_3 = 12, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.1.15) Převeďte úlohu na kanonický tvar

$$\begin{gathered} |x_1| + |x_2| + |x_3| \to \min, \\ x_1 + x_2 \leqslant 1, \\ 2x_1 + x_3 = 3. \end{gathered}$$

1.1.16) Převeďte úlohu na kanonický tvar

$$\begin{gathered} 3x_1 - x_2 \to \min, \\ -x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 \geqslant -3, \\ 7x_2 + x_4 = 5, \\ x_3 + x_4 \leqslant 2, \\ -1 \leqslant x_2, x_3 \leqslant 5, \\ -2 \leqslant x_4 \leqslant 2. \end{gathered}$$

1.1.17) Převeďte úlohu na kanonický tvar

$$\begin{gathered} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 7x_4 \to \max, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \geqslant -5, \\ x_1 \geqslant -2, \\ x_2 \leqslant 7, \\ x_3 \leqslant 0, \\ x_4 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.1.18) Převeďte úlohu na kanonický tvar

$$\begin{gathered} 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \to \max, \\ 4x_1 - x_2 + x_4 \leqslant 6, \\ -7x_1 + 8x_2 + x_3 \geqslant 7, \\ x_1 + x_2 + 4x_4 = 12, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.1.19) Převeďte úlohu na kanonický tvar

$$\begin{gathered} x_2 + x_3 + x_4 \to \max, \\ x_1 + x_2 \geqslant 6, \\ x_2 + x_3 - x_4 \leqslant 1, \\ 5x_1 - 6x_2 + 7x_3 - 8x_4 \geqslant 2, \\ x_1 \geqslant 0, \\ x_2 \leqslant 0. \end{gathered}$$

1.1.20) Převeďte úlohu na kanonický tvar

$$\begin{gathered} x_1 + x_3 - x_4 + 48 \to \min, \\ -3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -50, \\ x_1 - x_2 + x_4 \leqslant 100, \\ 2x_2 - x_3 - x_4 \geqslant 150, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.1.21) Převeďte úlohu na kanonický tvar

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \to \max, \\ |4x_1 + 3x_2 - 7x_3| \leqslant x_1 + x_2 + x_3, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.1.22) Převeďte úlohu na kanonický tvar

$$\begin{gathered} x_1 + 6x_2 + 12x_3 \to \max, \\ -x_1 - x_2 + x_4 \geqslant \max\{7x_1 + 2x_2, 5x_2 + x_3 + x_4\}, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.1.23) Převeďte úlohu na kanonický tvar

$$\begin{gathered} -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 \to \min, \\ x_1 + 7x_2 + 16x_3 \leqslant 4x_4 + x_5, \\ x_3 + 12x_4 \geqslant x_1 + 6x_2, \\ 9x_5 \leqslant x_2 + 3x_4, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.1.24) Ukažte, že problém

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 \to \min, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 20, \\ x_1 + 7x_2 - 6x_3 + 9x_4 = 30, \\ x_1 \geqslant 0 \end{gathered}$$

je ekvivalentní s úlohou

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 3x_5 \to \min, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 6x_4 + 3x_5 = 20, \\ x_1 + 7x_2 - 6x_3 + 9x_4 - 10x_5 = 30, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.2 Grafická metoda řešení

1.2.1) Grafickou metodou určete řešení problému

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 \to \min, \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 4, \\ 4x_1 + 2x_2 \leqslant 12, \\ -2x_1 + x_2 \leqslant 1, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[0, 0]$.

1.2.2) Grafickou metodou určete řešení problému

$$\begin{gathered} -x_1 - 2x_2 \to \min, \\ x_1 - 4x_2 \leqslant 4, \\ -2x_1 + x_2 \leqslant 2, \\ -3x_1 + 4x_2 \leqslant 12, \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 8, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[20/11, 48/11]$.

1.2.3) Grafickou metodou určete řešení problému

$$\begin{gathered} -x_1 - 2x_2 \to \min, \\ x_1 - 4x_2 \leqslant 4, \\ -2x_1 + x_2 \leqslant 2, \\ -3x_1 + 4x_2 \leqslant 12, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Nemá řešení.

1.2.4) Grafickou metodou určete řešení problému

$$\begin{gathered} -3x_1 + x_2 \to \min, \\ x_1 + x_2 \leqslant 10, \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 15, \\ -x_1 + x_2 \leqslant 3, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[5, 0]$.

1.2.5) Grafickou metodou určete řešení problému

$$\begin{gathered} x_1 - x_2 \to \min, \\ x_1 + x_2 \leqslant 6, \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 15, \\ -x_1 + x_2 \leqslant 3, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Nekonečně mnoho řešení na úsečce spojující body $[0, 3]$ *a* $[3/2, 9/2]$.

1.2.6) Grafickou metodou určete řešení problému

$$\begin{gathered} -2x_1 + x_2 \to \min, \\ 2x_1 + 3x_2 = 6, \\ x_1 - 2x_2 \leqslant 0, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[12/7, 6/7]$.

1.2.7) Grafickou metodou určete řešení problému

$$\begin{gathered} x_1 + 3x_2 \to \max, \\ x_1 - 2x_2 \leqslant 0, \\ -2x_1 + x_2 \leqslant 4, \\ 5x_1 + 3x_2 \leqslant 15, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[3/11, 50/11]$.

1.2.8) Grafickou metodou určete řešení problému

$$\begin{gathered} 2x_1 - x_2 \to \min, \\ x_1 - 3x_2 \geqslant -3, \\ 2x_1 + x_2 \geqslant -2, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 6, \\ 3x_1 - 2x_2 \leqslant 6, \end{gathered}$$

Řešení: $[-9/7, 4/7]$.

1.2.9) Grafickou metodou určete řešení problému

$$\begin{gathered} 6x_1 + 5x_2 \to \max, \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8, \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 15, \\ x_1 + x_2 \leqslant 5, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[5, 0]$.

1.2.10) Grafickou metodou určete řešení problému

$$\begin{gathered} 3x_1 + 2x_2 \to \max, \\ x_1 - x_2 \leqslant 0, \\ x_1 + x_2 \leqslant 10, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[5, 5]$.

1.2.11) Grafickou metodou určete řešení problému

$$\begin{gathered} 6x_1 + 3x_2 \to \min, \\ x_1 + x_2 \geqslant 1, \\ 2x_1 - x_2 \geqslant 1, \\ 3x_2 \leqslant 2, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[2/3, 1/3]$.

1.2.12) Grafickou metodou určete řešení problému

$$\begin{gathered} -2x_1 + 3x_2 \to \min, \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 10, \\ -2x_1 + 3x_2 \leqslant 9, \\ 2x_1 + 4x_2 \geqslant 8, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[5, 0]$.

1.2.13) Grafickou metodou určete řešení problému

$$\begin{gathered} 5x_1 + 4x_2 \to \min, \\ x_1 + x_2 \leqslant 6, \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 5, \\ 4x_1 + x_2 \geqslant 2, \\ x_1 + x_2 \geqslant 1, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[1/3, 2/3]$.

1.2.14) Grafickou metodou určete řešení problému

$$\begin{gathered} 3x_1 + 4x_2 \to \max, \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 9, \\ -2x_1 + x_2 \leqslant 4, \\ x_1 + 2x_2 \geqslant 2, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[1, 6]$.

1.2.15) Grafickou metodou určete řešení problému

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 \to \max, \\ x_1 - x_2 \geqslant 1, \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 4, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Nemá konečné řešení.

1.2.16) Grafickou metodou určete řešení problému

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 \to \min, \\ x_1 - x_2 \geqslant 1, \\ -x_1 + x_2 \geqslant 2, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Nemá přípustné řešení, tj. $X = \emptyset$.

1.2.17) Grafickou metodou určete řešení problému

$$\begin{gathered} 2x_1 + 4x_2 \to \max, \\ 2x_1 - x_2 \geqslant -2, \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Nekonečně mnoho řešení na úsečce spojující body $[8, 0]$ *a* $[4/5, 18/5]$.

1.2.18) Grafickou metodou určete řešení problému

$$\begin{gathered} 2x_1 - 6x_2 \to \max, \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 6, \\ x_1 - x_2 \geqslant -1, \\ -x_1 - 2x_2 \geqslant 1, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Nemá přípustné řešení, tj. $X = \emptyset$.

1.2.19) Grafickou metodou určete řešení problému

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 \to \min, \\ x_1 - 3x_2 \leqslant 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \geqslant 8, \\ x_1 - 3x_2 \leqslant -6, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[0, 2]$.

1.2.20) Grafickou metodou určete řešení problému

$$\begin{gathered} 3x_1 + 4x_2 \to \max, \\ x_1 + x_2 \geqslant 5, \\ 3x_1 + x_2 \geqslant 8, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Nemá konečné řešení.

1.2.21) Grafickou metodou určete řešení problému

$$\begin{gathered} 5x_1 + 4x_2 \to \min, \\ x_1 + x_2 \geqslant 2, \\ x_1 \leqslant 8, \\ x_2 \leqslant 9, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[0, 2]$.

1.2.22) Grafickou metodou určete řešení problému

$$\begin{gathered} 10x_1 + 6x_2 \to \max, \\ 5x_1 + 3x_2 \leqslant 30, \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 18, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Nekonečně mnoho řešení na úsečce spojující body $[6, 0]$ *a* $[6/7, 6/7]$.

1.2.23) Grafickou metodou určete řešení problému

$$\begin{gathered} 2x_1 + 3x_2 \to \min, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 30, \\ -x_1 + x_2 \leqslant 5, \\ x_1 + x_2 \geqslant 5, \\ x_1 \leqslant 10, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Nekonečně mnoho řešení na úsečce spojující body $[10, 10/3]$ *a* $[3, 8]$.

1.2.24) Grafickou metodou určete řešení problému

$$\begin{gathered} 3x_1 + 2x_2 \to \max, \\ x_1 - x_2 \geqslant 1, \\ x_1 + x_2 \geqslant 3, \\ 9x_1 + 6x_2 \geqslant 3, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Nemá konečné řešení.

1.2.25) Grafickou metodou určete řešení problému

$$\begin{gathered} 3x_1 - 2x_2 \to \max, \\ x_1 + x_2 \leqslant 1, \\ 2x_1 + 2x_2 \geqslant 4, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Nemá přípustné řešení, tj. $X = \emptyset$.

1.2.26) Grafickou metodou určete řešení problému

$$\begin{gathered} 5x_1 + 3x_2 \to \max, \\ x_1 + x_2 \leqslant 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \geqslant 3, \\ 0 \leqslant x_1, x_2 \leqslant 3. \end{gathered}$$

Řešení: $[3, 3]$.

1.2.27) Grafickou metodou určete řešení problému

$$\begin{gathered} 2x_1 - x_2 \to \max, \\ x_1 - x_2 \leqslant 1, \\ 2x_1 + x_2 \geqslant 6, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Nemá konečné řešení.

1.2.28) Grafickou metodou určete řešení problému

$$\begin{gathered} 3x_1 - 4x_2 \to \max, \\ x_1 + 2x_2 \geqslant 4, \\ x_1 - x_2 \leqslant 1, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[2, 1]$.

1.2.29) Grafickou metodou určete řešení problému

$$\begin{gathered} 4x_1 + 6x_2 \to \max, \\ -x_1 + x_2 \leqslant 11, \\ x_1 + x_2 \leqslant 27, \\ 2x_1 + 5x_2 \leqslant 90. \end{gathered}$$

Řešení: $[15, 12]$.

1.2.30) Grafickou metodou určete řešení problému

$$\begin{gathered} 5x_1 + 7x_2 \to \min, \\ 2x_1 + 3x_2 \geqslant 6, \\ 3x_1 - x_2 \leqslant 15, \\ -x_1 + x_2 \leqslant 4, \\ 2x_1 + 5x_2 \leqslant 27. \end{gathered}$$

Řešení: $[-6/5, 14/5]$.

1.2.31) Grafickou metodou určete řešení problému

$$\begin{gathered} 5x_1 + 7x_2 \to \min, \\ 2x_1 + 3x_2 \geqslant 6, \\ 3x_1 - x_2 \leqslant 15, \\ -x_1 + x_2 \leqslant 4, \\ 2x_1 + 5x_2 \leqslant 27, \\ x_1 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[0, 2]$.

1.2.32) Grafickou metodou určete řešení problému

$$\begin{gathered} 3x_1 - 5x_2 \to \max, \\ 4x_1 + 5x_2 \geqslant 3, \\ 6x_1 - 6x_2 = 7, \\ x_1 + 8x_2 \leqslant 20, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[88/27, 113/54]$.

1.2.33) Grafickou metodou určete řešení problému

$$\begin{gathered} 8x_1 - 4x_2 \to \max, \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 7, \\ 9x_1 + 5x_2 \leqslant -2, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Nemá konečné řešení.

1.2.34) Grafickou metodou určete řešení problému

$$\begin{gathered} 4x_1 + 2x_2 \to \max, \\ x_1 + 2x_2 \geqslant 4, \\ 3x_1 + x_2 \geqslant 7, \\ -x_1 + 2x_2 \leqslant 7. \end{gathered}$$

Nemá konečné řešení.

1.2.35) Uvažme problém

$$x_1 + x_2 \to \max,$$
$$ax_1 + bx_2 \leqslant 1,$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0.$$

Určete hodnoty $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby úloha (i) měla optimální řešení, (ii) neměla konečné řešení a (iii) neměla přípustné řešení.

1.2.36) Podnikatel by chtěl začít prodávat dva druhy stolních počítačů. Pořizovací cena typu A činí 5000,- a prodává se se ziskem 900,-, typ B stojí 8000,- a zisk činí 1000,-. Základní odhad měsíčního prodeje je nejvýše 250 kusů a počáteční kapitál je 1,4 milionu korun. Určete, kolik by mělo být na počátku zakoupeno počítačů, aby bylo dosaženo maximálního zisku.

Řešení: $[200, 50]$.

1.2.37) Jahodárna ve Slatině má k dispozici 150 arů plochy k pěstování dvou odrůd jahod (značme je jako J1 a J2). Údržba 1 aru odrůdy J1 zabere 1 pracovní den a pro J2 to jsou 2 pracovní dny. Celkem je k dispozici 240 pracovních dnů. Sběr jahod na jednom aru s odrůdou J1 zabere 3/10 dne a pro J2 to je pouze 1/10 dne, přičemž sběr probíhá po dobu 30 dnů. Zisk z 1 aru jahod odrůdy J1 činí 2800,- a pro odrůdu J2 to je 4700,-. Jak rozdělit celkovou plochu, aby bylo dosaženo maximálního zisku?

Řešení: $[60, 90]$.

1.2.38) Výrobce benzínu má na skladě zásoby benzínu s oktanovým číslem 80 a 92, přičemž náklady na 1 litr benzínu s o.č. 80 jsou 16,60,- a s o.č. 92 jsou 19,60,-. Z rozhodnutí vlády č. 231/2015 je možné prodávat benzín pouze s oktanovým číslem alespoň 90. Jak pomící smíchání dostupných zásob vyrobit prodejný benzín, aby bylo dosaženo minimálních nákladů?

Řešení: $[1/6, 5/6]$.

1.2.39) Spolek maldých přírodovědců pro PřF MU má roční členský poplatek ve výši 80,- pro studenty SŠ (příp. ZŠ a MŠ) a 200,- pro studenty VŠ a ostatní zájemce. Pro pokrytí ročních nákladů je nutné vybrat alespoň 7920,- Navíc zakladatelé byli značně skeptičtí, proto vyrobili pro první rok pouze 50 kusů členských karet. Současně však vedení fakulty vyžaduje, aby počet členů se sníženým ročním poplatkem byl mezi 1/4 a 1/3 počtu členů se členským poplatkem v plané výši. Jaký nejmenší možný počet členů splní tyto požadavky?

Řešení: $[9, 36]$.

1.2.40) Halina Pawlowská nabízí dva druhy „samohubnoucích“ nápojů. Jedna porce přípravku HP1 obsahuje 60 kalorií, 12 jednotek vitamínu A 10 jednotek vitamínu C. Přípravek HP2 dodá také 60 kalorií, ale 6 jednotek vitamínu A a 30 jednotek vitamínu C. Cena jedné porce HP1 je 2,40,- a HP2 jsou 3,-. Minimální denní příjem činí alespoň 300 kalorií, 36 jednotek vitamínu A a 90 jednotek vitamínu C. Kolik porcí jednotlivých nápojů je potřeba vypít během dne, aby byly splněny minimální požadavky při minimálních nákladech.

Řešení: $[3, 2]$.

1.3 Bazické přípustné body (BPB)

1.3.1) Uvažte úlohu

$$\begin{gathered} f(x) \to \min, \\ x_1 + x_2 \leqslant 6, \\ x_2 \leqslant 3, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Převeďte úlohu na kanonický tvar. Určete všechny BPB a znázorněte je v rovině x_1x_2. Je úloha degenerovaná?

1.3.2) Uvažte úlohu

$$\begin{gathered} f(x) \to \min, \\ x_1 + x_2 \leqslant 6, \\ x_2 \leqslant 3, \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 9, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Převeďte úlohu na kanonický tvar. Určete všechny BPB a znázorněte je v rovině x_1x_2. Je úloha degenerovaná? (Z obrázku je zřejmé, že třetí podmínka je nadbytečná. Ovšem nikoli pouze systémy s redundantními rovnicemi jsou degenerované. Zkuste načrtnout příklady takových množin X v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$.)

1.3.3) Uvažte úlohu

$$\begin{gathered} f(x) \to \min, \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 2. \end{gathered}$$

Převeďte úlohu na kanonický tvar. Určete všechny BPB a znázorněte je v rovině x_1x_2. Je úloha degenerovaná? Určete řešení úlohy pro $f_1(x) = x_1 + x_2$ a $f_2(x) = -x_1 - 2x_2$.

Pro $f_1(x)$ neexistuje konečné řešení; pro $f_2(x)$ je řešením přímka spojující body $[2, 0]$ a $[0, 1]$.

1.3.4) Uvažte úlohu

$$\begin{gathered} 3x_1 + x_2 \to \min / \max, \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 4, \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 3, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Převeďte úlohu na kanonický tvar. Určete všechny BPB a znázorněte je v rovině x_1x_2. Je úloha degenerovaná? Je úloha řešitelná? Pokud ano, určete její řešení.

1.3.5) Uvažte úlohu

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 \to \min, \\ 2x_1 + x_2 \geqslant 4, \\ x_1 + 2x_2 \geqslant 4, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Převeďte úlohu na kanonický tvar. Určete všechny BPB a znázorněte je v rovině x_1x_2. Je úloha degenerovaná? Je úloha řešitelná? Pokud ano, určete její řešení.

1.3.6) Uvažte úlohu

$$\begin{gathered} -x_1 + 2x_2 \to \min, \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 4, \\ 4x_1 + 4x_2 \leqslant 12, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Převeďte úlohu na kanonický tvar. Určete všechny BPB a znázorněte je v rovině x_1x_2. Je úloha degenerovaná? Je úloha řešitelná? Pokud ano, určete její řešení.

1.3.7) Uvažte úlohu

$$\begin{gathered} 3x_1 - 2x_2 \to \min, \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 4, \\ 2x_1 + x_2 \geqslant 4, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Převeďte úlohu na kanonický tvar. Určete všechny BPB a znázorněte je v rovině x_1x_2. Je úloha degenerovaná? Je úloha řešitelná? Pokud ano, určete její řešení.

1.3.8) Uvažte úlohu

$$\begin{gathered} f(x) \to \min, \\ x_1 + x_2 - 8x_3 + 3x_4 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 2. \end{gathered}$$

(a) Určete nějaké nebazické přípustné řešení, pokud existuje.
(b) Určete BPB s bází $B = \{1, 4\}$, pokud existuje.
(c) Existuje BPB, který by odpovídal dvěma různým bázím? Pokud ano, určete jej. Je úloha degenerovaná?
(d) Určete všechny nedegenerované BPB.

1.3.9) Uvažte úlohu

$$\begin{gathered} 120x_1 + 100x_2 \to \min, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_4 = 15, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Určete všechny BPB. Je úloha řešitelná? Pokud ano, určete řešení. Interpretujte tuto úlohu geometricky.

1.3.10) Uvažte úlohu

$$\begin{gathered} f(x) \to \min, \\ 3x_1 + x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 = 3, \\ 4x_1 + 3x_3 + x_5 = 6, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0, \end{gathered}$$

a body $A = [0, 3, 0, 5, 6]$, $B = [0, 3, 5, 0, -9]$, $C = [3/2, 0, 0, 1/2, 0]$, $D = [1/2, 1, 1, 0, 2]$ a $E = [1, 1, 1/2, 3/2, 1/2]$. Který z těchto bodů je

(a) přípustným bodem,
(b) BPB,
(c) krajním bodem množiny X?

1.3.11) Uvažte úlohu

$$\begin{gathered} f(x) \to \min, \\ -x_1 + 2x_2 \leqslant 5, \\ 0 \leqslant x_1 \leqslant 4, \\ -1 \leqslant x_2 \leqslant 4. \end{gathered}$$

Určete vrcholy množiny X a BPB v odpovídající úloze v kanonickém tvaru. Je úloha degenerovaná?

1.3.12) Uvažte úlohu

$$\begin{gathered} f(x) \to \min, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 \leqslant 1, \\ -3x_1 - x_3 + 2x_4 \leqslant 1, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Určete všechny BPB v odpovídající úloze v kanonickém tvaru. Je úloha degenerovaná?

1.3.13) Uvažte úlohu

$$\begin{gathered} f(x) \to \min, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 8, \\ x_2 + 6x_3 \leqslant 12, \\ x_1 \leqslant 4, \\ x_2 \leqslant 6, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Určete všechny BPB v odpovídající úloze v kanonickém tvaru. Je úloha degenerovaná?

1.3.14) Uvažte úlohu

$$\begin{gathered} f(x) \to \min, \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 2, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Určete všechny BPB. Je úloha degenerovaná?

1.3.15) Uvažte úlohu

$$\begin{gathered} -2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 - x_5 \to \min, \\ 2x_1 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 20, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 = 10, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Určete všechny BPB. Je úloha degenerovaná?

1.3.16) Uvažte úlohu

$$\begin{gathered} 2x_1 + x_2 - x_3 \to \max, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \leqslant 6, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 \leqslant 4, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Určete všechny BPB. Je úloha degenerovaná? Je úloha řešitelná? Pokud ano, určete řešení.

1.3.17) Uvažte úlohu

$$\begin{gathered} 2x_1 + x_2 - x_3 \to \max, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 \leqslant 6, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 \leqslant 4, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Určete vrcholy všechny BPB. Je úloha degenerovaná? Je úloha řešitelná? Pokud ano, určete řešení.

1.3.18) Uvažte úlohu

$$\begin{gathered} 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 \to \min, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ -2x_1 + x_3 = 2, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. \end{gathered}$$

(a) Ukažte, že existují právě dva BPB (geometricky i početně).
(b) Určete tyto BPB.
(c) Ukažte, že účelová funkce je ohraničená zdola na X.
(d) Určete řešení úlohy.

1.4 Duální úloha

1.4.1) Určete duální úlohu pro

$$\begin{gathered} 3x_1 + 4x_2 \to \min, \\ x_1 + 4x_2 \geqslant 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \geqslant 12, \\ 2x_1 + x_2 \geqslant 6, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.4.2) Určete duální úlohu pro

$$\begin{gathered} 7x_1 + x_2 \to \min, \\ 4x_1 + 3x_2 \leqslant 3, \\ x_1 - 2x_2 \leqslant 4, \\ 5x_1 + 2x_2 \geqslant -3, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.4.3) Určete duální úlohu pro

$$\begin{gathered} 2x_1 + 5x_2 + x_3 \to \min, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 \geqslant 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geqslant 3, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.4.4) Určete duální úlohu pro

$$\begin{gathered} 13x_1 + 10x_2 + 6x_3 \to \min, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 8, \\ 3x_1 + x_2 = 3, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.4.5) Určete duální úlohu pro

$$\begin{gathered} 5x_1 + 2x_2 + 6x_3 \to \min, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 \geqslant 12, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leqslant 6, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.4.6) Určete duální úlohu pro

$$\begin{gathered} 4x_1 + 8x_2 + 6x_3 \to \min, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geqslant 3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \geqslant 2, \\ -x_1 + x_2 = 1, \\ x_1, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.4.7) Určete duální úlohu pro

$$\begin{gathered} 2x_1 - 3x_2 + x_4 \to \min, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 7, \\ x_1 + 4x_2 - x_4 = 5, \\ x_2 + x_3 + 5x_4 \geqslant 3, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.4.8) Určete duální úlohu pro

$$\begin{gathered} 6x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 9x_4 \to \min, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 3, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 9x_4 \geqslant 0, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.4.9) Pomocí duální úlohy ukažte, že problém

$$\begin{gathered} 6x_1 + x_2 \to \min, \\ 3x_1 + x_2 \geqslant 2, \\ 2x_1 + 2x_2 \leqslant -1, \\ x_1, x_2 \geqslant 0, \end{gathered}$$

nemá přípustné řešení.

1.4.10) Pomocí duální úlohy ukažte, že problém

$$\begin{gathered} -x_1 - x_2 \to \min, \\ -x_1 + x_2 \leqslant 1, \\ x_1 - x_2 \leqslant 1, \\ x_1, x_2 \geqslant 0, \end{gathered}$$

nemá přípustné řešení.

1.4.11) Ukažte, že primární i duální úloha jsou neřešitelné, je-li primární úloha

$$\begin{gathered} -x_1 - 4x_2 \to \min, \\ 2x_1 - 2x_2 \geqslant 3, \\ -2x_1 + 2x_2 \geqslant 2, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.4.12) Ukažte, že primární i duální úloha jsou neřešitelné, je-li primární úloha

$$\begin{gathered} x_1 - 2x_2 \to \min, \\ x_1 - x_2 \geqslant 1, \\ -x_1 + x_2 \geqslant 1, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.4.13) Určete řešení primární i duální úlohy, je-li primární úloha

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 \to \min, \\ x_1 \geqslant 2, \\ x_2 \geqslant 1, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Ověřte také platnost tvrzení Silné věty o dualitě.

1.4.14) Určete řešení primární i duální úlohy, je-li primární úloha

$$\begin{gathered} 8x_1 + 18x_2 \to \min, \\ x_1 + 3x_2 \geqslant 2, \\ 2x_1 + 4x_2 \geqslant 1, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Ověřte také platnost tvrzení Silné věty o dualitě.

1.4.15) Uvažte úlohu

$$\begin{gathered} 16x_1 + 32x_2 + 12x_3 \to \min, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 \geqslant 2, \\ 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Pomocí duální úlohy ukažte, že bod $[0, 5/14, 3/14]$ je řešením daného problému.

1.4.16) Uvažte úlohu

$$\begin{gathered} 3x_1 + 5x_2 + 9x_3 \to \max, \\ 4x_1 + 12x_2 + 15x_3 = 900, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 120, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Pomocí duální úlohy ukažte, že bod $[100/3, 0, 460/9]$ je řešením daného problému.

1.4.17) Uvažme problém

$$\begin{gathered} 20x_1 + 30x_2 + 24x_3 \to \min, \\ 2x_1 - 3x_2 \geqslant -5, \\ x_2 + 6x_3 \geqslant 18, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geqslant 6, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 \geqslant -1, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Pomocí duální úlohy, jejíž přípustný bod je $[10, 9, 0, 0]$, ověřte, že řešením primární úlohy je $[2, 0, 3]$.

1.4.18) Ověřte, že $[0, 17/3, 25/3, 1/3]$ je optimálním řešením úlohy

$$\begin{gathered} 7x_1 + 11x_2 - 3x_3 - x_4 \to \min, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 \geqslant 2, \\ -X_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 \geqslant 12, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 \geqslant 4, x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0, \end{gathered}$$

je-li $[7/2, 2, 3/2]$ optimálním řešením duální úlohy.

1.4.19) Uvažte problém

$$\begin{gathered} 26x_1 + 30x_2 + 10x_3 \to \min, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 \geqslant 4, \\ 2x_1 - 6x_2 - 8x_3 \leqslant -10, \\ -7x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 3, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 \geqslant 2, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

(a) Ukažte, že bod $[7/10, 19/10, 0]$ je přípustným bodem a určete hodnotu účelové funkce.

(b) Určete duální úlohu. Ukažte, že $[54/5, 16/5, 0, 0]$ je jejím přípustným bodem a určete příslušnou hodnotu účelové funkce duální úlohy.

(c) Co můžete na základě těchto informací říci o řešení původní úlohy?

1.4.20) Uvažte úlohu

$$\begin{gathered} 13x_1 + 15x_2 + 12x_3 + 8x_4 \to \min, \\ 4y_1 + 8y_2 - 5y_3 + 3y_4 = 32, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 - x_4 \geqslant 3, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. \end{gathered}$$

(a) Rozhodněte, který z bodů $[9, 0, 2, 2]$, $[4, 1, -1, 1]$ a $[5, 1, 1, 3]$ je přípustný. Vyčíslete účelovou funkci v přípustných bodech.

(b) Sestavte duální úlohu a určete, který z bodů $[-1, 1]$, $[0, 2]$ a $[1, 3]$ je přípustný.

(c) Dokážete s pomocí těchto informací najít řešení primární úlohy? Pokud ne, můžete na základě těchto informací něco říci o řešení primární úlohy?

1.4.21) Určete duální úlohu pro

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \geqslant 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 4, \\ 2x_1 + x_3 \geqslant 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 0, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Ověřte, že $[2/3, 0, 14/3]$ je optimálním řešením primární úlohy a současně $[0, 1/3, 2/3, 0]$ je optimálním řešením duální úlohy.

1.4.22) Uvažte úlohu

$$\begin{gathered} -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 \to \min, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leqslant 8, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leqslant 7, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Určete duální úlohu a vyřešte ji (grafickou metodou). Ověřte, že řešením původní úlohy je $[3, 0, 2, 0]$.

1.4.23) Ačkoli nejsem zrovna nutriční specialista, rozhodl jsem se zhubnout pomocí diety, která obsahuje pouze konzumaci vepřového masa a fazolí (sic!). Zároveň jsem si vědom, že je nutné dodržet alespoň minimální množství denního příjmu proteinů, vitamínu E a uhlovodanů. Detaily jsou v tabulce:

	maso	fazole	minimální denní dávka
proteiny [v porci]	5	2	300
vitamín E [v porci]	9	1	510
uhlovodany [v porci]	7	2	800
cena za porci	50	6	

(a) Kolik musím sníst každý den porcí masa a fazolí, abych splnil minimální požadavky při minimálních nákladech?

(b) Sestavte duální úlohu a ověřte, že jejím řešením je $[0, 58/11, 4/11]$.

(c) Poté, co se můj plán rozšířil po Brně, vycítilo vedení nedaleké lékárny možnost snadného zisku a nabídlo mi jednotlivé nutriční složky ve formě tablet. Jak by měla lékárna nastavit ceny, aby dosáhla maximálního zisku a pro mne by bylo ještě racionální jejich nabídku přijmout.

1.4.24) Firma prodávající mobilní telefony a různá příslušenství očekává novou dodávku zboží. Vzhledem k tomu je nutné vyprodat stávající zboží, které čítá 8 mobilních telefonů, 4 hands-free sady a 19 předplacených karet. Zboží bude prodáváno ve dvou balíčcích: A=telefon + 2 karty, B=telefon + hands-free + 3 karty, přičemž zisk z prodeje balíčku A je 210,- a z prodeje balíčku B je 270,-.

(a) Konkurence by chtěla jednotlivé výrobky odkoupit. Sestavte úlohu lineárního programování, jehož řešením budou ceny jednotlivých produktů takové, že celková hodnota obchodu bude minimální a současně obchodník dosáhne alespoň požadovaného zisku z jednotlivých balíčků.

(b) Sestavte duální úlohu, vyřešte ji a interpretujte výsledek.

(c) S využitím výsledku části (b) ověřte, že řešením úlohy z části (a) je $[90, 0, 60]$.

1.4.25) Rafinérie má k dispozici tři závody X/Y/Z pro výrobu benzínu v různé kvalitě Q1/Q2/Q3. Produkce [100 galonů za hodinu] společně s náklady na 1 hodinu provozu [ve stovkách Kč] je uvedena v tabulce:

	Q1	Q2	Q3	náklady
závod X	3	4	2	32
závod Y	6	6	8	80
závod Z	6	3	4	60

Každý den je nutné vyrobit 3600/2000/3000 galonů benzínu kvality Q1/Q2/Q3.

(a) Sestavte lineární program, jehož řešením bude stanovení provozní doby jednotlivých závodů tak, že při minimálních nákladech bude dosaženo alespoň požadované produkce.

(b) Ověřte, že řešením je $[0, 3/2, 9/2]$, je-li řešením duální úlohy $[20/3, 0, 5]$.

(c) Uvažte, že rafinérie má možnost přímého nákupu od malovýrobce. Určete optimální cenu, kterou by měl malovýrobce požadovat za jednotlivé typy benzínu, aby pro rafinérii ještě bylo výhodné od něj nakupovat zboží pro uspokojení vlastní poptávky.

(d) Vedení rafinérie by chtělo zvýšit aktuální zisk. Ovšem z rozhodnutí Evropské komise č. 2174/2015 je nutné ospravedlnit své ceny před *Výborem pro kontrolu cen pohonných hmot, rohlíků a papíru*. Zvýšení bude povoleno pouze v případě, že aktuální ceny odpovídají provozním nákladům, které musí být na maximu (ovšem víme, že výroba není ztrátová). Při jakých cenách benzínů Q1/Q2/Q3 bude povoleno jejich zvýšení, jsou-li ceny nastaveny tak, aby se maximalizoval aktuální zisk?

1.5 Simplexová metoda

Pro kontrolu výpočtů můžete využít např. http://goo.gl/RTAC2X. Základní manuál k tomuto programu je k dispozici na adrese http://goo.gl/Ju8i79.

1.5.1) Řešte s pomocí simplexové metody úlohu

$$\begin{gathered} -3x_1 + x_2 \to \min, \\ x_1 + x_2 \leqslant 10, \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 15, \\ -x_1 + x_2 \leqslant 13, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[5, 0]$.

1.5.2) Řešte s pomocí simplexové metody úlohu

$$\begin{gathered} x_1 - x_2 \to \min, \\ x_1 + x_2 \leqslant 6, \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 15, \\ -x_1 + x_2 \leqslant 3, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení je nekonečně mnoho, leží na úsečce spojující body $[0, 3]$ *a* $[3/2, 9/2]$.

1.5.3) Uvažte úlohu

$$\begin{gathered} -x_1 - 2x_2 \to \min, \\ x_1 - 4x_2 \leqslant 4, \\ -2x_1 + x_2 \leqslant 2, \\ -3x_1 + 4x_2 \leqslant 12, \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 8, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

(a) Určete všechny extrémní body množiny X. Je některý z nich degenerovaný?
(b) Řešte úlohu s pomocí simplexové metody.
(c) Ignorujte čtvrté omezení. Určete nyní extrémní body a řešení úlohy.

Řešení: (b) $[20/11, 48/11]$*, (c) nemá konečné řešení.*

1.5.4) Řešte s pomocí simplexové metody úlohu

$$\begin{gathered} x_1 + 3x_2 \to \max, \\ -2x_1 + x_2 \leqslant 4, \\ 5x_1 + 3x_2 \leqslant 15, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[3/11, 50/11]$.

1.5.5) Řešte s pomocí simplexové metody úlohu

$$\begin{gathered} 3x_1 + 2x_2 \to \max, \\ x_1 - x_2 \leqslant 0, \\ x_1 + x_2 \leqslant 10, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[5, 5]$.

1.5.6) Řešte s pomocí simplexové metody úlohu

$$\begin{gathered} 6x_1 + 5x_2 \to \max, \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8, \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 15, \\ x_1 + x_2 \leqslant 5, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[5, 0]$.

1.5.7) Řešte s pomocí simplexové metody úlohu

$$\begin{gathered} 2x_1 - x_2 \to \min, \\ x_1 - 3x_2 \geqslant -3, \\ 2x_1 + x_2 \geqslant -2, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 6, \\ 3x_1 - 2x_2 \leqslant 6. \end{gathered}$$

Řešení: $[-9/7, 4/7]$.

1.5.8) Řešte s pomocí simplexové metody úlohu (za výchozí bazický bod vezměte $[0, 2]$)

$$\begin{gathered} -2x_1 + x_2 \to \min, \\ 2x_1 + 3x_2 = 6, \\ x_1 - 2x_2 \leqslant 0, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[12/7, 6/7]$.

1.5.9) Řešte s pomocí simplexové metody úlohu

$$\begin{gathered} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leqslant 3, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 6, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[8, 7, 0]$.

1.5.10) Řešte s pomocí simplexové metody úlohu

$$\begin{gathered} 30x_1 + 23x_2 + 29x_3 \to \max, \\ 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leqslant 26, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leqslant 7, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.5.11) Řešte s pomocí simplexové metody úlohu

$$\begin{gathered} -2x_1 - x_2 + x_3 \to \min, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \leqslant 6, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 \leqslant 4, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Nekonečně mnoho řešení tvaru $x_3 = 0$ *a* $x_2 = 6 - 2x_1$ *pro* $x_1 \in [20/3, 3]$ *a* $x_2 \in [0, 2/7]$.

1.5.12) Řešte s pomocí simplexové metody úlohu

$$\begin{gathered} x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leqslant 12, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 6, \\ -x_1 + 3x_2 \leqslant 9, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[30/7, 0, 18/7]$.

1.5.13) Řešte s pomocí simplexové metody úlohu

$$\begin{gathered} 8x_1 + 9x_2 + 4x_3 \to \max, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leqslant 3, \\ 7x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leqslant 8, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[2/3, 5/9, 0]$.

1.5.14) Řešte s pomocí simplexové metody úlohu

$$\begin{gathered} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leqslant 6, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leqslant 10, \\ 2x_1 + x_3 \leqslant 7, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.5.15) Řešte s pomocí simplexové metody úlohu

$$\begin{gathered} 2x_1 + x_2 + 6x_3 - 4x_4 \to \max, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \leqslant 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \leqslant 12, \\ x_1 + x_3 + x_4 \leqslant 2, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[0, 2/3, 0, 4/3]$.

1.5.16) Řešte s pomocí simplexové metody úlohu

$$\begin{gathered} -3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to \max, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 \leqslant 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 \leqslant 1, \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 \leqslant 8, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Nemá konečné řešení.

1.5.17) Řešte s pomocí simplexové metody úlohu

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 \leqslant 12, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leqslant 8, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 \leqslant 7, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.5.18) Řešte s pomocí simplexové metody úlohu

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \leqslant 18, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leqslant 24, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 12, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.5.19) Řešte s pomocí simplexové metody úlohu

$$\begin{gathered} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 \to \max, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 \leqslant 10, \\ x_1 + 4x_2 + x_4 + 2x_5 \leqslant 20, \\ 3x_1 + 4x_4 + 2x_5 \leqslant 15, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.5.20) Řešte s pomocí simplexové metody úlohu

$$\begin{gathered} 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 \to \max, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 8x_4 \leqslant 50, \\ 4x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 4x_4 \leqslant 40, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \leqslant 20, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.5.21) Řešte s pomocí simplexové metody úlohu

$$\begin{gathered} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \to \min, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \leqslant 10, \\ -5x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 \leqslant 20, \\ 3x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 \leqslant 30, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Nemá konečné řešení.

1.5.22) Řešte s pomocí simplexové metody úlohu

$$\begin{gathered} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_5 + 3x_6 \to \min, \\ 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 4x_6 \leqslant 60, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.5.23) Řešte s pomocí simplexové metody úlohu

$$\begin{gathered} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \to \max, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 4, \\ 2x_1 + x_3 \leqslant 5, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 7, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[5/2, 3/2, 0]$.

1.5.24) Řešte s pomocí simplexové metody úlohu

$$\begin{gathered} 5x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 8x_4 \to \max, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leqslant 5, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leqslant 3, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[1, 2, 0, 0]$.

1.5.25) Řešte s pomocí simplexové metody úlohu

$$\begin{gathered} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 6x_4 \to \max, \\ x_2 + 3x_3 - x_4 \geqslant 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_4 \leqslant 16, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 \geqslant -4, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Nemá konečné řešení.

1.5.26) *Kuhnův příklad zacyklení (nedatováno, zveřejněno v článku z roku 1969)*: pomocí simplexové metody (s klasickým Dantzigovým pravidlem) řešte úlohu

$$\begin{gathered} -2x_4 - 3x_5 + x_6 + 12x_7 \to \min, \\ x_1 - 2x_4 - 9x_5 + x_6 + 9x_7 = 0, \\ x_2 + x_4/3 + x_5 - x_6/3 - 2x_7 = 0, \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 - x_6 - 12x_7 = 2, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0. \end{gathered}$$

V případě možnosti výběru z více možností pro volbu klíčového sloupce (ale nezapomínejte na Dantzigovo pravidlo) nebo řádku se aplikuje tzv. *pravidlo první volby*, tj. za klíčový sloupec volíme ten, který je více vlevo (tj. odpovídá proměnné s nižším indexem), a za klíčový řádek volíme ten, který je v tabulce výše. Ověřte, že při těchto pravidlech vede simplexová metoda na cyklus délky 6. Řešením této úlohy je $x_1 = x_4 = x_6 = 2$ a $x_2 = x_3 = x_5 = x_7 = 0$. Simplexovým algoritmem dostaneme cyklus délky 6. V původním Tuckerově příkladu není třetí omezení a úloha je neohraničená – ověřte, že i v takovém případě nastává cyklus délky 6. Vyřešte úlohu také s pomocí některého z anti-cyklických pravidel.

1.5.27) *Marshallův–Suurbaleův příklad zacyklení (1969)*: pomocí simplexové metody (s klasickým Dantzigovým pravidlem) řešte úlohu

$$\begin{gathered} 2x_1 + 4x_4 + 4x_6 \to \min, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 - x_5 + 6x_6 = 0, \\ 2x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 + 2x_6 = 0, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geqslant 0. \end{gathered}$$

V případě rovnosti volte stejné pravidlo první volby popsané v Příkladě 1.5.26. Vyřešte úlohu také s pomocí některého z anti-cyklických pravidel.

Řešením je $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$ a nastává cyklus délky 6.

1.5.28) *Solowův příklad zacyklení (1984)*: pomocí simplexové metody (s klasickým Dantzigovým pravidlem) řešte úlohu

$$\begin{gathered} -2x_3 - 2x_4 + 8x_5 + 2x_6 \to \min, \\ x_1 - 7x_3 - 3x_4 + 7x_5 + 2x_6 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 - x_6 = 0, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geqslant 0. \end{gathered}$$

V případě rovnosti volte stejné pravidlo první volby popsané v Příkladě 1.5.26. Vyřešte úlohu také s pomocí některého z anti-cyklických pravidel.

Řešením je $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$ a nastává cyklus délky 6.

1.5.29) *Sierksmův příklad zacyklení (1996)*: pomocí simplexové metody (s klasickým Dantzigovým pravidlem) řešte úlohu

$$\begin{gathered}
3x_1 - 80x_2 + 2x_3 - 24x_4 \to \max, \\
x_1 - 32x_2 + 4x_3 + 36x_4 + x_5 = 0, \\
x_1 - 24x_2 - x_3 + 6x_4 + x_6 = 0, \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geqslant 0.
\end{gathered}$$

V případě rovnosti volte stejné pravidlo první volby popsané v Příkladě 1.5.26. Vyřešte úlohu také s pomocí některého z anti-cyklických pravidel.

Úloha je neohraničená a nastává cyklus délky 6.

1.5.30) *Chvátalův příklad zacyklení (1983)*: pomocí simplexové metody (s klasickým Dantzigovým pravidlem) řešte úlohu

$$\begin{gathered}
10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 \to \min, \\
-x_1/2 + 11x_2/2 + 5x_3/2 - 9x_4 + x_5 = 0, \\
-x_1/2 + 3x_2/2 + x_3/2 - x_4 + x_6 = 0, \\
x_1 + x_7 = 1, \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0.
\end{gathered}$$

V případě rovnosti volte stejné pravidlo první volby popsané v Příkladě 1.5.26. Vyřešte úlohu také s pomocí některého z anti-cyklických pravidel.

Řešením je $x_1 = x_3 = 1$, $x_5 = 2$, $x_2 = x_4 = x_6 = x_7 = 0$ a nastává cyklus délky 6.

1.5.31) *Yudinův–Gol'shteĭnův příklad zacyklení I. (1965)*: pomocí simplexové metody (s klasickým Dantzigovým pravidlem) řešte úlohu

$$\begin{gathered}
x_3 - x_4 + x_5 - x_6 \to \max, \\
x_1 + 2x_3 - 3x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 0, \\
x_2 + 6x_3 - 5x_4 - 3x_5 + 2x_6 = 0, \\
3x_3 + x_4 + 2x_5 + 4x_6 + x_7 = 1, \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0.
\end{gathered}$$

V případě rovnosti volte stejné pravidlo první volby popsané v Příkladě 1.5.26. Vyřešte úlohu také s pomocí některého z anti-cyklických pravidel.

Řešením je $x_1 = 5/2$, $x_2 = 3/2$, $x_5 = 1/2$, $x_3 = x_4 = x_6 = x_7 = 0$ a nastává cyklus délky 6.

1.5.32) *Yudinův–Gol'shteĭnův příklad zacyklení II. (1965)*: pomocí simplexové metody (s klasickým Dantzigovým pravidlem) řešte úlohu

$$\begin{gathered} x_3 - x_4 + x_5 - x_6 \to \max, \\ x_1 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 + 4x_6 = 0, \\ x_2 + 4x_3 - 3x_4 - 2x_5 + x_6 = 0, \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 1, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0. \end{gathered}$$

V případě rovnosti volte stejné pravidlo první volby popsané v Příkladě 1.5.26. Vyřešte úlohu také s pomocí některého z anti-cyklických pravidel.

Řešením je $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_5 = 1$, $x_3 = x_4 = x_6 = x_7 = 0$ a nastává cyklus délky 6.

1.5.33) *Neringův–Tuckerův příklad zacyklení (1993)*: pomocí simplexové metody (s klasickým Dantzigovým pravidlem) řešte úlohu

$$\begin{gathered} -3x_2 + x_3 - 6x_4 - 4x_6 \to \max, \\ x_1 + x_2 + x_5/3 + x_6/3 = 2, \\ 9x_2 + x_3 - 9x_4 - 2x_5 - x_6/3 + x_7 = 0, \\ x_2 + x_3/3 - 2x_4 - x_5/3 - x_6/3 + x_8 = 2, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geqslant 0. \end{gathered}$$

V případě rovnosti volte stejné pravidlo první volby popsané v Příkladě 1.5.26. Vyřešte úlohu také s pomocí některého z anti-cyklických pravidel.

Úloha je neohraničená a nastává cyklus délky 6.

1.6 Dvoufázová metoda

Pro kontrolu výpočtů můžete využít např. http://goo.gl/RTAC2X. Základní manuál k tomuto programu je k dispozici na adrese http://goo.gl/Ju8i79.

1.6.1) Pomocí dvoufázové metody řešte úlohu

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 \to \min, \\ x_1 - x_2 \geqslant 1, \\ -x_1 + x_2 \geqslant 2, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Nemá přípustné řešení, tj. $X = \emptyset$.

1.6.2) Pomocí dvoufázové metody řešte úlohu

$$\begin{gathered} 2x_1 - 6x_2 \to \max, \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 6, \\ x_1 - x_2 \geqslant -1, \\ -x_1 - 2x_2 \geqslant 1. \end{gathered}$$

Nemá přípustné řešení, tj. $X = \emptyset$.

1.6.3) Pomocí dvoufázové metody řešte úlohu

$$\begin{gathered} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geqslant 4, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Nemá přípustné řešení, tj. $X = \emptyset$.

1.6.4) Pomocí dvoufázové metody řešte úlohu

$$\begin{gathered} 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 \to \min, \\ 3x_1 - 6x_2 + x_3 \geqslant 5, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 \geqslant 4, \\ x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 0, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Nemá přípustné řešení, tj. $X = \emptyset$.

1.6.5) Pomocí dvoufázové metody řešte úlohu

$$\begin{gathered} 2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 \to \min, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 \leqslant 5, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 \geqslant 2, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Nemá přípustné řešení, tj. $X = \emptyset$.

1.6.6) Pomocí dvoufázové metody řešte úlohu

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 \to \max, \\ x_1 - x_2 \geqslant 1, \\ -x_1 + 2x_2 \geqslant 4, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Nemá konečné řešení.

1.6.7) Pomocí dvoufázové metody řešte úlohu

$$\begin{gathered} x_1 + 3x_2 - x_3 \to \min, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geqslant 3, \\ -x_1 + x_2 \geqslant 1, \\ -x_1 - 5x_2 + x_3 \leqslant 4, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Nemá konečné řešení.

1.6.8) Pomocí dvoufázové metody řešte úlohu

$$\begin{gathered} -2x_1 + x_2 - x_3 \to \min, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 \leqslant 8, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 \geqslant 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geqslant 4, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Nemá konečné řešení.

1.6.9) Pomocí dvoufázové metody řešte úlohu

$$\begin{gathered} -4x_1 - 5x_2 + 3x_3 \to \min, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 - x_2 \geqslant 6, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \leqslant 14, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[10, 0, 0]$.

1.6.10) Pomocí dvoufázové metody řešte úlohu

$$\begin{gathered} -5x_1 + 2x_2 - x_3 \to \min, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \leqslant 6, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geqslant 2, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[4, 0, -2]$.

1.6.11) Pomocí dvoufázové metody řešte úlohu

$$\begin{gathered} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geqslant 8, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[0, 2, 0]$.

1.6.12) Pomocí dvoufázové metody řešte úlohu

$$\begin{gathered} -2x_1 + 3x_2 \to \min, \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 10, \\ -2x_1 + 3x_2 \leqslant 9, \\ 2x_1 + 4x_2 \geqslant 8, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[5, 0]$.

1.6.13) Pomocí dvoufázové metody řešte úlohu

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + x_3 \to \min, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 2, \\ 4x_2 + 9x_3 = 5, \\ 3x_3 + x_4 = 1, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[1/2, 5/4, 0, 1]$.

1.6.14) Pomocí dvoufázové metody řešte úlohu

$$\begin{gathered} 8x_1 + 4x_2 - 2x_3 \to \min, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 \geqslant 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[0, 4/7, 1/7]$.

1.6.15) Pomocí dvoufázové metody řešte úlohu

$$\begin{gathered} 2x_1 + x_2 \to \max, \\ x_1 - 5x_2 - x_3 \leqslant -2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leqslant 7, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[29/13, 11/13, 0]$.

1.6.16) Pomocí dvoufázové metody řešte úlohu

$$\begin{gathered} 6x_1 + 3x_2 \to \min, \\ x_1 + x_2 \geqslant 1, \\ 2x_1 - x_2 \geqslant 1, \\ 3x_2 \leqslant 2, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[2/3, 1/3]$.

1.6.17) Pomocí dvoufázové metody řešte úlohu

$$\begin{gathered} 5x_1 + 4x_2 \to \min, \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 6, \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 5, \\ 4x_1 + x_2 \geqslant 2, \\ x_1 + x_2 \geqslant 1, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[1/3, 2/3]$.

1.6.18) Pomocí dvoufázové metody řešte úlohu

$$\begin{gathered} 3x_1 + 4x_2 \to \max, \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 9, \\ -2x_1 + x_2 \leqslant 4, \\ x_1 + 2x_2 \geqslant 2, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[1, 6]$.

1.6.19) Pomocí dvoufázové metody řešte úlohu

$$\begin{gathered} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \max, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leqslant 15, \\ 2x_2 - x_3 \geqslant 5, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 10, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[120/23, 65/23, 15/23]$.

1.6.20) Pomocí dvoufázové metody řešte úlohu

$$\begin{gathered} 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 \to \min, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 \geqslant 8, \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 \geqslant 9, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geqslant 4, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[0, 5/3, 2/3]$.

1.6.21) Pomocí dvoufázové metody řešte úlohu

$$\begin{gathered} 8x_1 + 6x_2 + 11x_3 \to \max, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 4, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 \geqslant 2, \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 \leqslant 5, \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 \geqslant 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.6.22) Pomocí dvoufázové metody řešte úlohu

$$\begin{gathered} 5x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \leqslant 5, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geqslant 2, \\ x_1, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.6.23) Pomocí dvoufázové metody řešte úlohu

$$\begin{gathered} 2x_1 + x_2 + 3x_4 \to \max, \\ 9x_1 + 14x_2 - 6x_3 - 6x_4 \leqslant 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \geqslant -1, \\ -20x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 13x_4 = 11, \\ 5x_1 + 10x_2 - 2x_3 + 14x_4 = 6, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.6.24) Pomocí dvoufázové metody řešte úlohu

$$\begin{gathered} -2x_1 + 3x_2 - x_3 \to \min, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 6, \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 = 9, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_4 = 20, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[0, 31/6, 7/6, 11/2]$.

1.6.25) Pomocí dvoufázové metody řešte úlohu

$$\begin{gathered} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4 \to \max, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_4 = 6, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.6.26) Pomocí dvoufázové metody řešte úlohu

$$\begin{gathered} x_1 \to \max, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 8, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \geqslant 4, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 6, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[22, 14, 0, 0]$.

1.6.27) Pomocí dvoufázové metody řešte úlohu

$$\begin{gathered} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 \to \min, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 \geqslant 8, \\ -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 5x_4 \leqslant 3, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.6.28) Pomocí dvoufázové metody řešte úlohu

$$\begin{gathered} 14x_1 + x_2 + 6x_3 + 5x_4 \to \min, \\ 2x_1 + x_3 \geqslant 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \geqslant 16, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 \geqslant 9. \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[0, 2, 4, 5]$.

1.6.29) Pomocí dvoufázové metody řešte úlohu

$$\begin{gathered} -2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \to \min, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leqslant 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 \geqslant 3, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geqslant 2, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.6.30) Pomocí dvoufázové metody řešte úlohu

$$\begin{gathered} 4x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \to \min, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \geqslant 12, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 \geqslant 16, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.6.31) Pomocí dvoufázové metody řešte úlohu

$$\begin{gathered} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leqslant 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \geqslant 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 \leqslant 10, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.6.32) Pomocí dvoufázové metody řešte úlohu

$$\begin{gathered} 8x_1 + 7x_2 + 17x_3 + 13x_4 \to \min, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 \geqslant 16, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 \geqslant 16, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \geqslant 9, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[5, 0, 0, 2]$.

1.6.33) Pomocí dvoufázové metody řešte úlohu

$$\begin{gathered} -x_1 + x_3 \to \min, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 40, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 10, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.6.34) Pomocí dvoufázové metody řešte úlohu

$$\begin{gathered} 4x_1 + 5x_2 + 7x_3 - x_4 \to \max, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \geqslant 1, \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 \leqslant -3, \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1, x_2, x_4 \geqslant 0. \end{gathered}$$

1.7 Aplikace

Pro kontrolu výpočtů můžete využít např. http://goo.gl/RTAC2X. Základní manuál k tomuto programu je k dispozici na adrese http://goo.gl/Ju8i79.

1.7.1) Brněnská zbrojovka dodává zbraně po celém světě. Uvažme tři z jejich výrobků. Výrobní proces má tři fáze: odlévání dílů, kompletace a balení. Potřebné informace jsou shrnuty v tabulce:

	výrobek A	výrobek B	výrobek C	dostupný čas [h]
odlévání [h]	1	2	3/2	12000
kompletace [h]	2/3	2/3	1	4600
balení [h]	1/2	1/3	1/2	2400
zisk [tisíc Kč]	11	16	15	

Jak rozdělit výrobu, aby byl zisk maximální?

Řešení: 600 ks výrobků A, 5100 ks výrobků B, 800 ks výrobků C.

1.7.2) (O 10 let později) Přírodovědecká fakulta MU se rozhodla zvýšit svoji propagační činnost tím, že vyrobí různé propagační předměty: trička, mikiny a čepice (vše samozřejmě s potiskem). Následující tabulka ukazuje potřebné informace (údaje jsou v desítkách kusů):

	trička	mikiny	čepice	dostupné množství
látka [m]	28	30	16	1550
niť [m]	36	40	24	2044
potisk [cm^2]	32	50	30	2438
obalový materiál [m]	15	20	10	975
zisk [Kč]	104	136	78	

Vaším úkolem (jakožto úspěšného absolventa ÚMS) je stanovení optimální výrobní strategie.

Řešení: $[90, 370, 100]$ *kusů.*

1.7.3) Při analýzách výsledků přímé volby prezidenta ČR v roce 2013 se ukázalo, že Ing. Miloš Zeman vyhrál pouze díky chybě Ing. Miroslava Kalouska. Ten jako vystudovaný chemik (ač bývalý ministr financí) pochopitelně neovládá základy lineárního programování. Proto nastavil špatnou propagační strategii před druhým kolem, což vedlo k prohře Karla Schwarzenberga. Úkolem bylo rozdělit reklamu mezi TV, rozhlas a noviny. Náklady a účinnost jednotlivých typů jsou uvedeny v tabulce:

	TV	noviny	rozhlas
cena za kus [tisíc Kč]	40	12	6
„zasažených“ voličů za den [v tisících]	100	40	18

Noviny však nepovolují více než 10 ks reklam/reklamních článků za týden. Navíc pro zachování rovnováhy nesmí být více než 1/2 z celkového počtu v rozhlase a nejméně 10 procent musí v TV. Týdenní rozpočet je 364 tisíc Kč. Jakým způsobem rozložit reklamu tak, aby se maximalizoval počet „zasažených“ voličů?

Řešení: 4 v TV, 10 v novinách a 14 v rozhlase.

1.7.4) Tentokrát vlastníte dvě malá knihkupectví – jedno v Brně a druhé na Slovensku. V Anglii se chystá již 27. díl dobrodružství Harryho Pottera. Protože se jedná o první vlnu máte k dispozici pouze omezené množství k objednání, konkrétně až 300 ks pro ČR a 200 ks pro SR (sic!). Knihy mohou být zaslány buď přímo z domu J. K. Rowlingové (JKR) nebo z amerického vydavatelství v USA. Náklady na dopravu jsou shrnuty v tabulce [v Kč za kus, přičemž nelze získat slevu při hromadné objednávce]:

	ČR	SR
JKR	500	600
USA	600	720

Z domu JKR může být zasláno maximálně 400 ks a z USA nejvýše 300 ks. Jak sestavit objednávku, aby náklady byly minimální (přičemž máte jistotu, že bez problému prodáte všechny objednané kusy)?

Řešení: 200 ks od JKR do ČR (a 100 z USA), 200 ks od JKR do SR (a 0 z USA).

1.7.5) Nyní se vraťme do historie. Na počátku 90. let Bill Gates a Steve Jobs zvažovali spojení svých společností do jedné, ve které by se vyráběly počítače s jedním z operačních systémů dle přání zákazníka. Pracovní týden by nabízel 480 hodin a požadavky na pracovní dobu by byly následující:

	složení počítače [h]	instalace OS [h]
iOS	2.6	2.1
WIN	1.5	1.8

Počítače by také mohly být koupeny přímo od jiných výrobců bez OS za cenu 2200,- pro WIN a 4000,- pro iOS. Kompletní počítač s iOS by se prodával (v 90. letech) za 7000,-. Prvních 70 ks s WIN by se prodávalo za 5000,- a další za 4500,- (jeden z geniálních tahů Billa Gatese), přičemž poptávka bez problému pokraje výrobu.

Ovšem ani jeden z velikánů IT neovládal lineární programování tak jako Vy. Proto k fúzi nedošlo, neboť nebyli schopni se dohodnout na optimálním rozdělení práce. Nalezněte správné řešení, chcete-li maximalizovat zisk.

Řešení: 75.32 ks iOS a 70 ks WIN.

1.7.6) Po úspěšném ukončení studia Vás najala ropná společnost (zřejmě Shell nebo Moravské naftové doly), která spravuje mimo jiné dvě rafinérie. První rafinérie má denní náklady na provoz ve výši 400 tisíc Kč a dokáže produkovat až 400 barelů nafty nejvyšší kvality (Q1), 300 barelů nafty nadstandardní kvality (Q2) a 200 barelů nafty průměrné kvality (Q3). Druhá rafinérie je novější a moderněji vybavená. Její náklady jsou 500 tisíc Kč na den a vyrobí až 300/400/500

barelů nafty kvality Q1/Q2/Q3. Firma musí dodat celkem 25000/27000/30000 barelů nafty kvality Q1/Q2/Q3. Kolik dnů provozu každé rafinérie je potřeba, aby byla uspokojena poptávka za minimální náklady?

Řešení: 25 dnů rafinérie A, 50 dnů rafinérie B.

1.7.7) (O dalších 20 let později) Město Brno dokončilo rekonstrukci fotbalového stadionu Za Lužánkami (ZL). Správce fotbalového stadionu se tudíž musí starat o travnatou plochu na novém hřišti i na „starém“ stadiónu v Králově poli (KP). Každé hřiště vyžaduje travnatou směs s různým obsahem jílku vytrvalého (JV) a lipnice luční (LL). K tomuto účelu má správce k dispozici tři druhy směsí. Potřebné informace jsou opět v tabulce:

	JV [%]	LL [%]	cena [Kč/kg]	dostupné množství na trhu [kg]
Směs 1	60	10	80	neomezené
Směs 2	20	50	95	—
Směs 3	25	15	35	125
požadavek ZL	alespoň 30	alespoň 10	—	—
požadavek KP	alespoň 25	alespoň 45	—	—

Správce potřebuje právě 200 kg směsi pro ZL a 180 kg pro KP. Jaké množství jednotlivých směsí nakoupit, aby byly náklady minimální?

Řešení pro ZL: $[75, 0, 125]$, *pro KP:* $[22.5, 157.5, 0]$.

1.8 Celočíselné programování

Pro kontrolu výpočtů můžete využít např. http://goo.gl/RTAC2X. Základní manuál k tomuto programu je k dispozici na adrese http://goo.gl/Ju8i79.

1.8.1) Vhodnou metodou vyřešte problém

$$\begin{gathered} 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \to \min, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 \geqslant 3, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}. \end{gathered}$$

Řešení: $[0, 0, 1, 1]$ *a* $[1, 0, 0, 1]$.

1.8.2) Vhodnou metodou vyřešte problém

$$\begin{gathered} 70x_1 + 61x_2 + 54x_3 + 40x_4 + 31x_5 + 25x_6 \to \max, \\ 30x_1 + 27x_2 + 25x_3 + 20x_4 + 18x_5 + 15x_6 \leqslant 72, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0, 1\}. \end{gathered}$$

Řešení: $[1, 1, 0, 0, 0, 1]$.

1.8.3) Vhodnou metodou vyřešte problém

$$\begin{gathered} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 9x_4 + 10x_5 + 10x_6 \to \min, \\ -2x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 + x_5 - 2x_6 \geqslant 2, \\ -5x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 + x_6 \geqslant -2, \\ 5x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 2x_5 - x_6 \geqslant 3, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0, 1\}. \end{gathered}$$

Řešení: $[0, 1, 1, 0, 0, 0]$.

1.8.4) Vhodnou metodou vyřešte problém

$$\begin{gathered} -2x_1 + x_2 + x_3 - 10 \to \min, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leqslant 3, \\ x_2 + x_3 \geqslant 1, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 6, \\ x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}. \end{gathered}$$

Řešení: $[1, 0, 1]$.

1.8.5) Vhodnou metodou vyřešte problém

$$\begin{gathered} -2x_1 - x_2 - 5x_3 \to \min, \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leqslant 9, \\ x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}. \end{gathered}$$

Řešení: $[0, 1, 1]$.

1.8.6) Vhodnou metodou vyřešte problém

$$\begin{gathered} -10x_1 - 15x_2 - 16x_3 - x_4 \to \min, \\ 20x_1 + 15x_2 + 20x_3 + 5x_4 \leqslant 25, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}. \end{gathered}$$

Řešení: $[0, 0, 1, 1]$.

1.8.7) Vhodnou metodou vyřešte problém

$$\begin{gathered} x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 \to \min, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \leqslant 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 2, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}. \end{gathered}$$

Řešení: $[0, 1]$.

1.8.8) Vhodnou metodou vyřešte problém

$$\begin{gathered} 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 - x_6 \to \max, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 \geqslant 2, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0, 1\}. \end{gathered}$$

Řešení: $[0, 1, 0, 1, 0, 1]$.

1.8.9) Vyřešte „problém batohu“, jehož kapacita je 5 [jednotek]. Dostupné věci a jejich ceny [desítky Kč] jsou uvedeny v tabulce

věc č.	1	2	3	4
cena	3	4	5	6
váha	2	3	4	5

Řešení: 1 & 2.

1.8.10) Vyřešte „problém batohu“, jehož kapacita je 7 [jednotek]. Dostupné věci a jejich ceny [desítky Kč] jsou uvedeny v tabulce

věc č.	1	2	3	4
cena	10	7	25	24
váha	2	1	6	5

Řešení: 1 & 4.

1.8.11) Vyřešte „problém batohu“, jehož kapacita je 8 [jednotek]. Dostupné věci a jejich ceny [desítky Kč] jsou uvedeny v tabulce

věc č.	1	2	3	4
cena	15	10	9	5
váha	1	5	3	4

Řešení: 1 & 3 & 4.

1.8.12) Vyřešte „problém batohu“, jehož kapacita je 6 [jednotek]. Dostupné věci a jejich ceny [desítky Kč] jsou uvedeny v tabulce

věc č.	1	2	3	4	5
cena	25	20	15	40	50
váha	3	2	1	4	5

Řešení: 3 & 5.

1.8.13) Vyřešte „problém batohu“, jehož kapacita je 11 [jednotek]. Dostupné věci a jejich ceny [desítky Kč] jsou uvedeny v tabulce

věc č.	1	2	3	4	5
cena	1	6	18	22	28
váha	1	2	5	6	7

Řešení: 3 & 4.

1.8.14) Vyřešte „problém batohu“, jehož kapacita je 15 [jednotek]. Dostupné věci a jejich ceny [desítky Kč] jsou uvedeny v tabulce

věc č.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
cena	18	20	17	19	25	21	27	23	25	24
váha	1	3	7	4	8	9	6	10	2	5

Řešení: 1 & 2 & 4 & 9 & 10.

1.8.15) Vyřešte „problém batohu“, jehož kapacita je 10 [jednotek] a je-li dostupné libovolné množství každého druhu. Ceny [desítky Kč] jednotlivých druhů jsou uvedeny v tabulce

druh č.	1	2	3	4
cena	7	9	2	15
váha	3	4	1	7

Řešení: 1 & 1 & 2.

1.8.16) Vhodnou metodou vyřešte problém

$$\begin{gathered} -x_1 - 2x_2 \to \min, \\ -3x_1 + 4x_2 \leqslant 6, \\ 4x_1 + 3x_2 \leqslant 12, \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0. \end{gathered}$$

Řešení: $[1, 2]$.

1.8.17) Vhodnou metodou vyřešte problém

$$\begin{gathered} -x_1 - 2x_2 \to \min, \\ -4x_1 + x_2 \leqslant 0, \\ 7x_1 + 4x_2 \leqslant 14, \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0. \end{gathered}$$

Řešení: $[1, 1]$.

1.8.18) Vhodnou metodou vyřešte problém

$$\begin{gathered} -x_1 - 4x_2 \to \min, \\ 2x_1 + 4x_2 \leqslant 7, \\ 10x_1 + 3x_2 \leqslant 14, \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0. \end{gathered}$$

Řešení: $[1, 1]$.

1.8.19) Vhodnou metodou vyřešte problém

$$\begin{gathered} 20 - 3x_1 - 4x_2 \to \min, \\ 2x_1 + 5x_2 \leqslant 15, \\ 2x_1 - 2x_2 \leqslant 5, \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0. \end{gathered}$$

Řešení: $[2, 2]$.

1.8.20) Vhodnou metodou vyřešte problém

$$\begin{gathered} x_1 - 3x_2 \to \min, \\ x_1 + x_2 \leqslant 15, \\ 3x_1 - 2x_2 \geqslant -5, \\ x_1 - x_2 \leqslant 10, \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0. \end{gathered}$$

Řešení: $[5, 10]$.

1.8.21) Vhodnou metodou vyřešte problém

$$\begin{gathered} -x_1 - 5x_2 \to \min, \\ -4x_1 + 3x_2 \leqslant 6, \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 18, \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0. \end{gathered}$$

Řešení: $[3, 4]$.

1.8.22) Vhodnou metodou vyřešte problém

$$\begin{gathered} -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \min, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 \leqslant 10, \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}_0. \end{gathered}$$

Úloha je neohraničená.

1.8.23) Vhodnou metodou vyřešte problém

$$\begin{gathered} x_1 - 3x_2 + 4x_3 \to \min, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leqslant 10, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 \geqslant 5, \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}_0. \end{gathered}$$

Řešení: $[3, 3, 1]$.

1.8.24) Vhodnou metodou vyřešte problém

$$\begin{gathered} -2x_1 + x_2 + x_3 - 10 \to \min, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leqslant 9, \\ 2x_2 + x_3 \geqslant 4, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 6, \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}_0. \end{gathered}$$

Řešení: $[0, 2, 0]$.

1.8.25) Vhodnou metodou vyřešte problém

$$\begin{gathered} 5x_1 + x_2 + 2x_3 - 5 \to \min, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 7/2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 2, \\ x_1, x_2, x_4 \geqslant 0, \\ x_3, x_5 \in \mathbb{N}_0. \end{gathered}$$

Řešení: $[0, 0, 0, 7/2, 2]$.

1.8.26) Vhodnou metodou vyřešte problém

$$\begin{gathered} 5x_1 + x_2 + 2x_3 - 5 \to \min, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 7/2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 2, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0, \\ x_4, x_5 \in \mathbb{N}_0. \end{gathered}$$

Řešení: $[0, 3/4, 1/4, 3, 1]$.

1.8.27) Vhodnou metodou vyřešte problém

$$\begin{gathered} -6x_1 - 4x_2 - 4x_3 - x_4 - x_5 \to \min, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 7, \\ x_3, x_4, x_5 \geqslant 0, \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0. \end{gathered}$$

Řešení: $[3, 0, 1/3, 0, 0]$.

1.8.28) Vhodnou metodou vyřešte problém

$$\begin{gathered} 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 \to \min, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leqslant 8, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 5, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 \leqslant 0, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}_0. \end{gathered}$$

Řešení: $[2, 1, 1, 0]$.

1.8.29) Vhodnou metodou vyřešte problém

$$\begin{gathered} 3x_1 + 11x_2 + 5x_3 - x_4 \to \min, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 \leqslant 3, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \geqslant 3, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}_0. \end{gathered}$$

Řešení: $[0, 1, 2, 0]$.

1.8.30) Vhodnou metodou vyřešte problém

$$\begin{gathered} 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 \to \min, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \leqslant 11, \\ x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 17, \\ 3x_1 - x_3 - 3x_4 \geqslant 5, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}_0. \end{gathered}$$

Řešení: $[9, 9, 1, 7]$.

1.8.31) Vhodnou metodou vyřešte problém

$$\begin{gathered} 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_4 \to \max, \\ x_1 + 5x_3 \leqslant 10, \\ x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 1, \\ 6x_1 + 5x_2 \leqslant 0, \\ -x_1 + 2x_3 - 2x_4 \leqslant 3, \\ x_4 \geqslant 0, \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}_0. \end{gathered}$$

Řešení: $[0, 0, 2, 1/2]$.

1.8.32) Vyřešte „problém plnění kontejneru“, jehož kapacita je 11 [jednotek]. Dostupný náklad a jednotlivé ceny [100 Kč] jsou v následující tabulce.

typ č.	1	2	3	4
cena	18	25	30	20
váha	2	4	5	3
dostupné množství	5	2	2	3

Řešení: typ 1=4 ks, t2=0, t3=0, t4=1.

1.8.33) Láďa Hruška začal podnikat v rychlém občerstvení a se svým řetězcem s názvem „Kuřecí kůžičky a bramborové šlupky“ úspěšně konkuruje nadnárodním řetězcům typu McDonald's. Je proto načase, aby otevřel pobočku i v Brně. Jeho tým rozdělil Brno a okolí na 6 oblastí a stanovil průměrnou časovou náročnost jízdy mezi těmito oblastmi. Výsledek je shrnut v následující tabulce, kde prvek na pozici (řádek,sloupec)=(A,B) udává dobu jízdy z A do B (pozor, tabulka není symetrická).

oblast	A	B	C	D	E	F
A	0	10	20	30	30	12
B	17	0	25	35	23	10
C	20	25	0	15	30	20
D	30	40	9	0	15	25
E	20	20	30	15	0	14
F	10	10	20	25	16	0

Samozřejmě není nutné otevírat pobočku v každé oblasti. Ovšem Láďa Hruška ví, že pro úspěch svého podnikání potřebuje, aby doba doručení jeho delikates nepřekročila 15 minut. Zformulujte tuto úlohu jako problém celočíselného programování, jehož řešením bude optimální rozdělení poboček po Brně. *Řešení: otevření poboček v A & D.*

1.8.34) Šestice hráčů basketbalu se přihlásila na turnaj čtyřčlenných družstev. Pro určení základní sestavy se rozhodli maximalizovat průměrnou výšku jejich hráčů, která je daná následující tabulkou.

číslo	jméno	výška vzhledem ke 190 cm	pozice
1	David	+10	centr
2	Jan	+9	centr
3	Marek	+6	útok
4	Richard	+6	útok
5	Karel	+4	obrana
6	Jakub	-1	obrana

Současně je potřeba dodržet tato pravidla

- musí nastoupit alespoň jeden obránce,
- buď Jan nebo Karel musí zůstat na lavičce,
- pouze jeden centr může nastoupit,
- nastoupí-li Jan nebo Richard, tak Jakub zůstane na lavičce.

Zformulujte tento problém jako úlohu ($\mathbb{Z}$LP) a vyřešte ji.

1.8.35) Přírodovědecká fakulta MU otevřela v Botanické zahradě velkoobchodní květinářství. Za tímto účelem byly zakoupeny 4 dodávky. V tuto chvíli má 10 odběratelů s objednávkou d_j, $j = 1, \ldots, 10$. Kapacita dodávek je L_k s denními náklady c_k, $k = 1, \ldots, 4$. Dodávka nesmí obsloužit více než 5 zákazníků, přičemž z konkurenčních důvodů nelze současně zásobovat tyto dvojice $\{1, 7\}$, $\{2, 6\}$ a $\{2, 9\}$. Sestavte odpovídající úlohu ($\mathbb{Z}$LP) s minimalizací nákladů na doručení všem zákazníkům.

1.8.36) Reklamní agentura Nekecáme, s.r.o., zvažuje množnosti reklamní kampaně pro příští MS v piškvorkách konané v Brně. Na základě předchozích turnajů byly určeny vhodné nástroje a jejich účinek, viz následující tabulku.

	TV	sportovní časopisy	noviny	radio	společenské časopisy	propagační akce	dostupné zdroje
„zasažení odběratelé“	10^6	2×10^5	3×10^5	4×10^5	45×10^4	45×10^5	
náklady [Kč]	5×10^5	15×10^4	3×10^5	25×10^4	25×10^4	10^5	18×10^5
potřební designéři [pracovní hodiny]	700	250	200	200	300	400	1500
potřební obchodní zástupci [pracovní hodiny]	200	100	100	100	100	1000	1200

Cílem je maximalizovat počet „zasažených odběratelů“ jednotlivých nástrojů při dodržení dostupných zdrojů. Navíc je potřeba dodržet požadavky:

(a) má-li se uskutečnit propagační akce, je potřeba ji zviditelnit v rádiu nebo ve společenských časopisech,

(b) nelze využit současně sportovní a společenské časopisy.

Sestavte odpovídající úlohu ($\mathbb{Z}$LP) a vyřešte ji.

1.8.37) Jakub Kryštof Rad býval ředitelem dačické rafinérie a je považován za vynálezce kostkového cukru, který si v roce 1843 nechal patentovat. Aby rozšířil svůj odbyt, rozhodl se podniknout cestu do USA. Na tuto cestu si mohl vzít nejvýše 50 kg cukru s tím, že každý kilogram prodá za 40 zlatých. Náklady na cestu činí 450 zlatých plus 5 zlatých za každý kilogram váhy cukru nad 20 kg. Vyplatí se taková cesta? A kolik cukru by si s sebou měl vzít? Zformulujte tento problém jako úlohu ($\mathbb{Z}$LP) a vyřešte ji.

1.8.38) Spolek přátel PřF MU začal provozovat v knihovně kopírovací služby. Momentálně mají k dispozici jeden kopírovací stroj s kapacitou 1000 kopií za hodinu a náklady 2 Kč za 1.–4. kopii, 1 Kč za 5.–8. kopii a 0,5 Kč za 9. a každou další kopii. Na žádost ÚMS si vyhradili 1 hodinu na kopírování desetistránkového kompletního důkazu Velké Fermatovy věty. Všechny tyto kopie budou prodávány s cenou 10 Kč za kus. Kolik kopií by mělo být uděláno, aby se maximalizoval zisk? Zformulujte tento problém jako úlohu ($\mathbb{Z}$LP).

1.8.39) Uvažme následující hru se slovy (znáte ji?). Máte jistý počet kostiček, z nich každá obsahuje právě jedno z písmen a, …, z. Pro každé písmeno α máte $N_\alpha \in \mathbb{N}_0$ kostiček s písmenem α. Celkové můžete poskládat slova $w_1, \ldots, w_n$ (tento seznam obsahuje např. všechna slova ze Slovníku spisovné češtiny. Každé slovo můžete složit nejvýše jednou a libovolná kostička může být také použita nejvýše jednou. Dostanete $p_j \geqslant 0$ bodů za slovo w_j a navíc bonus $b_{ij} \geqslant 0$ za současné složení slov w_i a w_j $(i, j = 1, \ldots, n)$. Zformulujte problém pro určení vítězné strategie jako úlohu ($\mathbb{Z}$LP).

1.8.40) Firma Krach, a.s., dala do „aukce“ N předmětů. Zájemci odeslali své nabídky pro vybrané předměty z nabídky. Aukční dům tak obdržel n nabídek, konkrétně nabídku b_j pro výběr S_j,

$j = 1, \ldots, n$. Sestavte ($\mathbb{Z}$LP) tak, aby byly určeny vítězné nabídky maximalizující zisk, přičemž každý z N předmětů může být prodán nejvýše jednomu zájemci.

1.8.41) Brněnské flaškárny, a.s., mají 2 stroje na výrobu lahví. Na začátku každého roku je potřeba sestavit plán údržby. Údržba každého stroje trvá 2 měsíce. Navíc v červenci a srpnu je k dispozici pouze polovina zaměstnanců, takže lze využít pouze jeden stroj v tomto období. Měsíční poptávka po lahvích je d_j, $j = 1, \ldots, 12$. Stroj k, $k = 1, 2$, vyrobí nejvýše a_k lahví měsíčně, k čemuž potřebuje l_k pracovních dní. V j-tém měsíci je k dispozici L_j pracovních dní, $j = 1, \ldots, 12$. Zformulujte tento problém jako úlohu ($\mathbb{Z}$LP) tak, aby byla uspokojena daná poptávka a

(a) minimalizovaná celková suma změn použitých pracovních dní ve dvou po sobě jdoucích měsících,

(b) minimalizovaná největší změna použitých pracovních dní ve dvou po sobě jdoucích měsících.

1.8.42) Firma Bazmek, s.r.o., vyrábí 2 produkty. K tomu má jednu továrnu, dvě distribuční centra a 5 hlavních zákazníků, jejichž poptávka po k-tém výrobku je d_{jk}, $j = 1, \ldots, 5$, $k = 1, 2$. Ovšem distribuční centrum je schopno pracovat pouze s jedním druhem výrobku. Jak je přiřadit, mají-li být dosaženy minimální náklady, které zahrnují

(a) pevné náklady f_{ik}, je-li k-tý výrobek přiřazen i-tému centru,

(b) pevné náklady f_{ijk}, je-li poptávka j-tého zákazníka po k-tém výrobku uspokojena i-tým centrem,

(c) jednotkové doručovací náklady c_{ijk} pro zaslání k-tého výrobku k j-tému zákazníkovi z i-tého centra.

Sestavte odpovídající úlohu ($\mathbb{Z}$LP). Jak se úloha změní, pokud bude možné, aby obě centra zajišťovala doručení obou produktů?

1.8.43) Rozdělme rok na n období. Firma Udělátko, v.o.s., vyrábí jediný výrobek s poptávkou d_k v k-tém období. Firma však nemá vlastní výrobní stroj. Jestliže se firma rozhodne spustit výrobu v k-tém období, musí zaplatit inicializační poplatek f_k, jehož výše nezávisí na vyrobeném množství, a jednotkové náklady p_k. V každém období může být vyrobeno libovolné množství výrobku a odběr zboží probíhá vždy na konci měsíce. V případě nadbytku zboží z období k do období $k + 1$ musíme zaplatit jednotkový skladovací poplatek s_k. Počáteční stav skladu je s_0. Sestavte odpovídající (smíšený) problém ($\mathbb{Z}$LP) s plánem výroby minimalizujícím celkové náklady.

1.8.44) Pro MS v piškvorkách z Příkladu 1.8.36 bychom také potřebovali vyrobit ukázkovou sadu medailí, tj. tři různé kusy. K této výrobě se používají 3 různé stroje (odlívání, broušení a leštění). Každá medaile musí projít nejdříve prvním strojem, pak druhým a konečně třetím strojem. Pořadí medailí na strojích se ale může lišit. Čas potřebný pro práci i-tého stroje na j-té medaili je t_{ij} a je celočíselný. Cílem je minimalizovat čas potřebný na výrobu celé sady. Zformulujte tento problém jako úlohu ($\mathbb{Z}$LP). A co kdybychom chtěli, aby pořadí na jednotlivých strojích bylo stejné?

(Nápověda: označte x_{ij} jako čas začátku práce j-tého stroje na i-té medaili. Musíte zamezit tomu, aby se dvě medale sešly u téhož stroje ve stejnou chvíli. Současně není možné, aby stroj $(j + 1)$ pracoval na medaili před dokončením práce j-tého stroje na medaili.)

1.8.45) Metelesku & Blesku je dopravní společnost. Má kamionový vozový park, s nímž přepravuje zboží z depa ($i = 0$) do n distribučních center ($i = 1, \ldots, n$). Označme

- Q_k ... nákladní kapacita k-tého vozidla ve vozovém parku ($k = 1, \dots, m$),
- d_i ... počet položek k doručení do i-tého distribučního centra ($i = 1, \dots, n$),
- t_i^k ... čas potřebný pro vyložení zásilky do i-tého distribučního centra z k-tého vozidla ($i = 1, \dots, n$; $k = 1, \dots, m$),
- t_{ij}^k ... čas pro cestu k-tého vozidla z i-tého do j-tého distribučního centra ($i, j = 0, \dots, n$; $k = 1, \dots, m$),
- c_{ij}^k ... náklady na cestu k-tého vozidla z i-tého do j-tého distribučního centra ($i, j = 0, \dots, n$; $k = 1, \dots, m$).

Navštíví-li vozidlo i-té distribuční centrum, pak sem doručí kompletní zásilku d_i ($i = 1, \dots, n$). Navíc každé distribuční centrum může navštívit pouze jedno vozidlo, a to pouze jednou. Rozpis cest také musí splňovat kritéria kvality, podle kterých trasa k-tého vozidla trvá nejvýše T_k jednotek času.

Zaveďme proměnné

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{má-li } k\text{-té vozidlo jet z } i\text{-tého do } j\text{-tého distribučního centra,} \\ 0, & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

Zformulujte odpovídající ($\mathbb{Z}$LP) pro minimalizaci celkových nákladů, přičemž musí být splněny požadavky na maximální přepravní čas a vozidla nesmí být přetěžována. Kolik proměnných a omezení by bylo potřeba v případě 400 distribučních center a 20 vozidel.

(Toto je ukázková úloha problému m-tice obchodních cestujících.)

2. Kvadratické programování

Různými postupy (graficky, Hildrethovou–d'Esopovou metodou s možností různého pořadí výpočtu jednotlivých složek, Wolfeho metodou v krátkém či dlouhém tvaru) vyřešte následující úlohy kvadratického programování:

2.1)

$$\begin{gathered} x_1^2 + 2x_2^2 - 8x_1 - 10x_2 \to \min, \\ x_1 + x_2 \leqslant 5, \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[3, 2]$.

2.2)

$$\begin{gathered} x_1^2 + x_2^2 - 1000x_1 - 1000x_2 \to \min, \\ 3x_1 + x_2 \geqslant 3, \\ x_1 + 4x_2 \geqslant 4, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

2.3)

$$\begin{gathered} 2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 - 4x_2 \to \min, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 6, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[1, 1]$.

2.4)

$$\begin{gathered} 3x_1^2 + 3x_2^2 - 10x_1 - 24x_2 \to \min, \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 4, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

2.5)

$$\begin{gathered} x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 10x_2 \to \min, \\ x_1 + x_2 \leqslant 5, \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[2, 3]$.

2.6)

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1 + 8x_2 \to \min,$$
$$10x_1 + 16x_2 \geqslant 72,$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0.$$

Řešení: $[4, 2]$.

2.7)

$$x_1^2 + 4x_2^2 - 8x_1 - 16x_2 \to \min,$$
$$x_1 + x_2 \leqslant 5,$$
$$x_1 \leqslant 3,$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0.$$

2.8)

$$x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 3x_2 \to \min,$$
$$x_1 + x_2 \leqslant 2,$$
$$x_1 - x_2 \leqslant -1,$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0.$$

Řešení: $[1/2, 3/2]$.

2.9)

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 5/2)^2 \to \min,$$
$$x_1 - x_2 \geqslant -2,$$
$$x_1 + 2x_2 \leqslant 6,$$
$$x_1 - 2x_2 \leqslant 2,$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0.$$

2.10)

$$2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_1 \to \min,$$
$$x_1 + x_2 \leqslant 2,$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0.$$

Řešení: $[3/2, 1/2]$.

2.11)

$$2x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 - 16x_1 + 40x_2 \to \min,$$
$$x_1 + x_2 \geqslant 3,$$
$$2x_1 - x_2 \geqslant 2,$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0.$$

Řešení: $[4, 0]$.

2.12)

$$\begin{gathered} x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 + x_1 - 3x_2 \to \min, \\ -2x_1 + 4x_2 \leqslant -4, \\ x_1 - 2x_2 \leqslant -3, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Úloha nemá přípustné řešení, tj. $X = \emptyset$.

2.13)

$$\begin{gathered} 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 - x_2 \to \min, \\ 2x_1 - x_2 \leqslant 4, \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 6, \\ 3x_1 - 2x_2 \leqslant 2, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[1/2, 1/2]$.

2.14)

$$\begin{gathered} x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 + 3x_1 - 5x_2 \to \min, \\ x_1 - 3x_2 \leqslant -2, \\ 2x_1 + x_2 \geqslant 3, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[4/7, 13/7]$.

2.15)

$$\begin{gathered} 2x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 - 16x_1 + 40x_2 \to \min, \\ x_1 + x_2 \geqslant 3, \\ 2x_1 - x_2 \geqslant 2, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[4, 0]$.

2.16)

$$\begin{gathered} x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 - 3x_1 - 14x_2 \to \min, \\ 3x_1 - 2x_2 \leqslant 5, \\ x_1 + 4x_2 \leqslant 6, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[2, 1]$.

2.17)

$$\begin{gathered} x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 \to \min, \\ x_1 + x_2 \leqslant 2, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

2.18)

$$\begin{gathered} x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 \to \min, \\ x_1 + x_2 \leqslant 4, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

2.19)

$$\begin{gathered} x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 - 28x_2 \to \min, \\ -x_1 + x_2 \leqslant 2, \\ 3x_1 - x_2 \leqslant 0, \\ -x_1 - x_2 \leqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[1, 3]$.

2.20)

$$\begin{gathered} x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 + 7x_1 - 9x_2 \to \min, \\ 5x_1 - x_2 \geqslant 2, \\ x_1 + x_2 \geqslant 3, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[1, 2]$.

2.21)

$$\begin{gathered} x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 - 6x_2 \to \min, \\ x_1 + x_2 \leqslant 2, \\ -x_1 + x_2 \leqslant 2, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

2.22)

$$\begin{gathered} 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 6x_1 - 2x_2 \to \min, \\ x_1 + x_2 \leqslant 2, \\ 2x_1 - x_2 \leqslant 2, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

2.23)

$$\begin{gathered} 4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 - x_2 \to \min, \\ x_1 - x_2 \leqslant 1, \\ -3x_1 + x_2 \leqslant 2, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Nemá konečné řešení.

2.24)

$$\begin{gathered} 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 \to \max, \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 2, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[1/3, 5/6]$.

2.25)

$$\begin{gathered} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 6x_2 - 2x_3 \to \min, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 1, \\ x_3 - x_2 \geqslant -1, \end{gathered}$$

Řešení: $[-1, 3/2, 1/2]$.

2.26)

$$\begin{gathered} x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_2x_3 - 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 \to \min, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leqslant 12, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 9, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[1, 5/2, 3/2]$.

2.27)

$$\begin{gathered} 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 8x_1 - 6x_2 - 4x_3 \to \min, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 3, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

2.28)

$$\begin{gathered} x_1^2 + 3x_2^2/2 + x_3^2/2 + x_1x_2 + x_2x_3 - x_1 + 5x_2 - 2x_3 \to \min, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leqslant 5, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[2, 1/2, 0]$.

2.29)

$$\begin{gathered} 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_3 + 2x_2x_3 \to \min, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \leqslant 6, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geqslant 3, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[4/7, 1/7, 4/7]$.

2.30)

$$\begin{gathered} 3x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3 + 3x_1 - 4x_3 + x_2 \to \min, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \geqslant 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geqslant 1, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 \geqslant 2, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[2, 1/2, 0]$.

2.31)

$$\begin{gathered} x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2/3 + 2x_1x_2 - x_1x_3/2 - 4x_1 + x_2 - x_3 \to \min, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \leqslant 4, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $[38/13, 0, 48/13]$.

2.32) Pro hodnoty $\alpha = 1, 16, 32, 50$ určete řešení

$$\begin{gathered} 5x_1^2 - 6x_2 + 2x_2^2 + \alpha(-x_1 + x_2) \to \min, \\ 3x_1 - x_2 \geqslant 3, \\ x_1 + x_2 \geqslant 4, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $\alpha = 1: \ [7/4, 9/4]$,
$\alpha = 16: \ [3, 1]$,
$\alpha = 32: \ [4, 0]$,
$\alpha = 50: \ [5, 0]$.

2.33) Pro hodnoty $\alpha = -10, -5, 1$ určete řešení

$$\begin{gathered} 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2 + x_1 + 4x_2^2 + \alpha(x_1 - 2x_2) \to \min, \\ x_1 + x_2 \geqslant 1, \\ 3x_1 - x_2 \geqslant 5, \\ -x_1 + 2x_2 \leqslant 1, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Řešení: $\alpha = -10: \ [5/3, 0]$,

$\alpha = -5: \ [1, 0],$
$\alpha = 1: \ [1/3, 2/3].$

2.34) Pro hodnoty $\alpha = -1, 6, 10$ určete řešení

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + \alpha(-x_1 - 4x_2) \to \min,$$
$$x_1 + x_2 \leqslant 8,$$
$$5x_1 - 2x_2 \leqslant 9,$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0.$$

Řešení: $\alpha = -1: \ [0, 0],$
$\alpha = 6: \ [3, 5],$
$\alpha = 10: \ [9/5, 31/5].$

2.35) Pro hodnoty $\alpha = -20, -5, 0, 5$ určete řešení

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + \alpha(2x_1 - x_2) \to \min,$$
$$x_1 + x_2 \geqslant 2,$$
$$x_1 - x_2 \leqslant 3,$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0.$$

Řešení: $\alpha = -20: \ [28/9, 1/9],$
$\alpha = -5: \ [3, 0],$
$\alpha = 0: \ [2, 0],$
$\alpha = 5: \ [0, 2].$

2.36) Pro hodnoty $\alpha = -1, 0, 7, 10$ určete řešení

$$4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + \alpha(x_1 + x_2) \to \min,$$
$$x_1 - x_2 \leqslant 6,$$
$$x_1 + 3x_2 \geqslant 4,$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0.$$

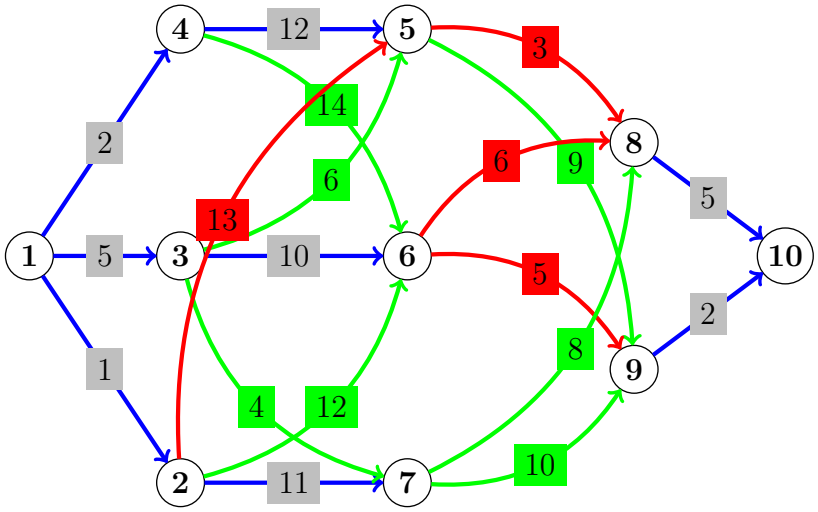
Řešení: pro $\alpha = -1$ je úloha neohraničená,,
pro $\alpha = 0$ má úloha nekonečně mnoho řešení tvaru $x_2 = 2x_1$, $x_1 \geqslant 4/7$,
$\alpha = 7: \ [1/7, 9/7],$
$\alpha = 10: \ [0, 4/3].$

2.37) Určete vzdálenost mezi trojúhelníkem s vrcholy v bodech $[0, 0]$, $[2, 0]$, $[0, 1]$ a trojúhelníkem s vrcholy $[0, 3]$, $[1, 2]$ a $[2, 2]$.

Řešení: $3\sqrt{5}/5$.

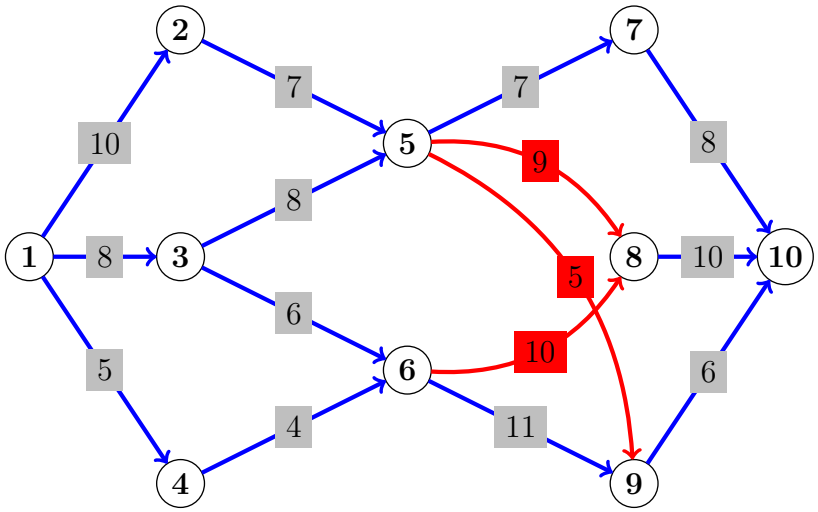
3. Dynamické programování

3.1) Určete nejkratší cestu spojující uzly 1 a 10 v grafu (ocenění hran=vzdálenost).



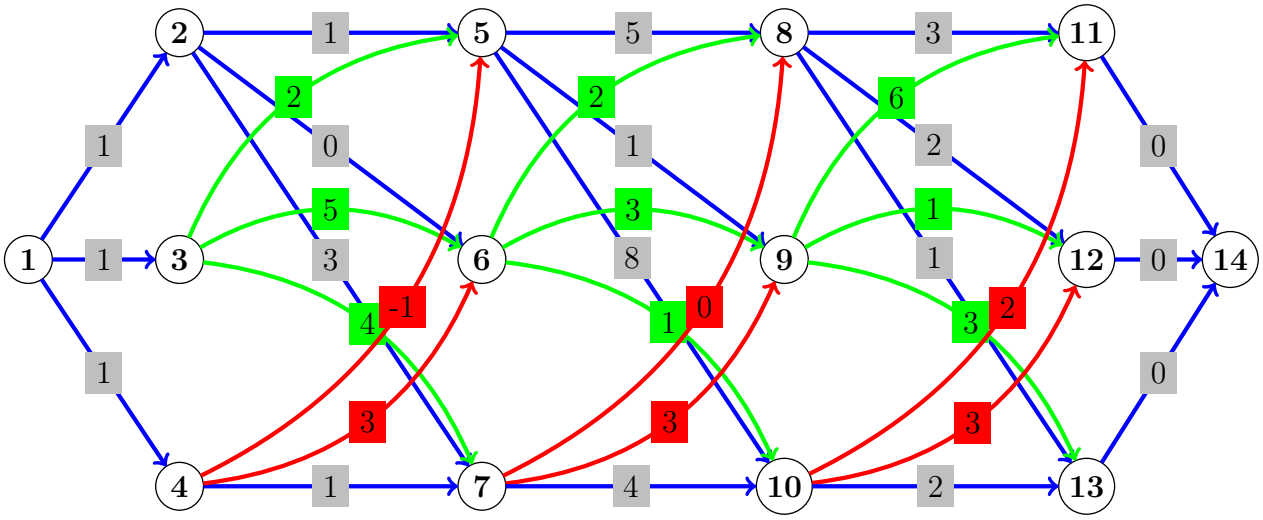
Řešení: 1 ⇝ 3 ⇝ 5 ⇝ 8 ⇝ 10 *s hodnotou* 19.

3.2) Určete nejkratší cestu spojující uzly 1 a 10 v grafu (ocenění hran=vzdálenost)



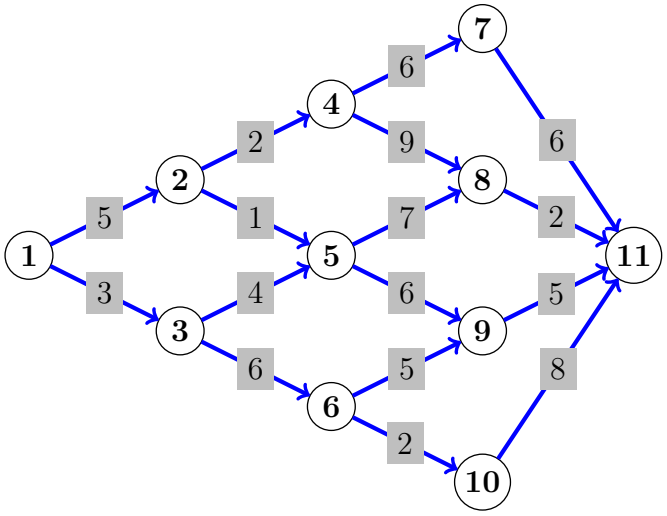
Řešení: 1 ⇝ 4 ⇝ 6 ⇝ 9 ⇝ 10 *s hodnotou* 26.

3.3) Určete nejkratší cestu spojující uzly 1 a 14 v grafu (ocenění hran=vzdálenost)



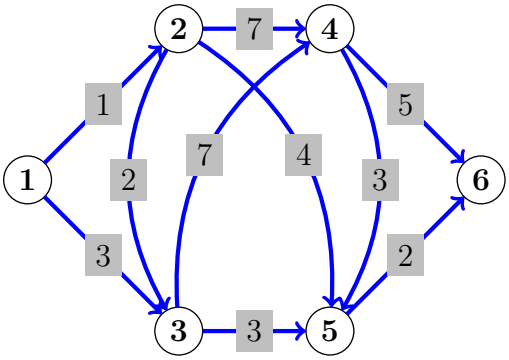
Řešení: 1 ⇝ 4 ⇝ 5 ⇝ 9 ⇝ 12 ⇝ 14 *s hodnotou* 2.

3.4) Určete nejkratší cestu spojující uzly 1 a 11 v grafu (ocenění hran=vzdálenost)



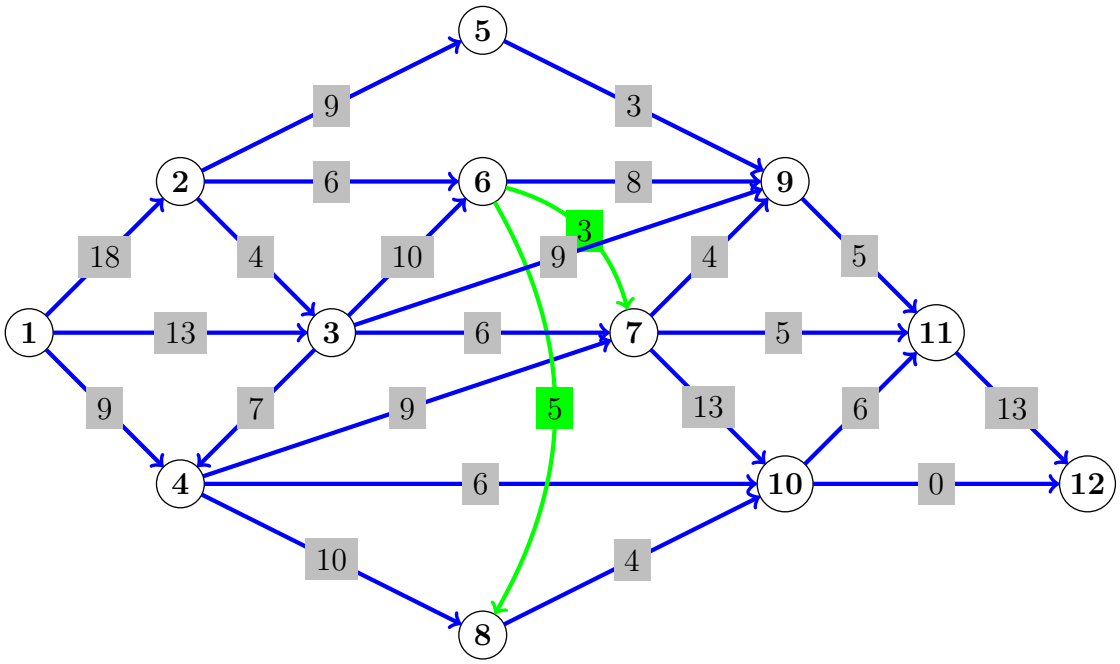
Řešení: 1 ⇝ 2 ⇝ 5 ⇝ 8 ⇝ 11 *s hodnotou* 15.

3.5) Určete nejkratší cestu spojující uzly 1 a 6 v grafu (ocenění hran=vzdálenost)

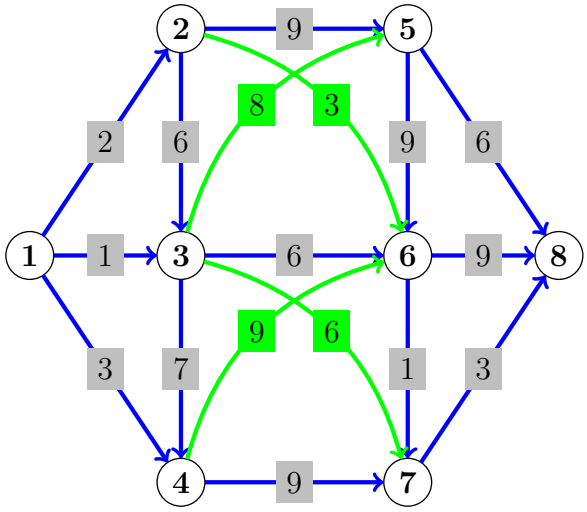


Řešení: $1 \rightsquigarrow 2 \rightsquigarrow 5 \rightsquigarrow 6$ *s hodnotou* 7.

3.6) Určete nejdelší cestu spojující uzly 1 a 12 v grafu (ocenění hran=zisk)

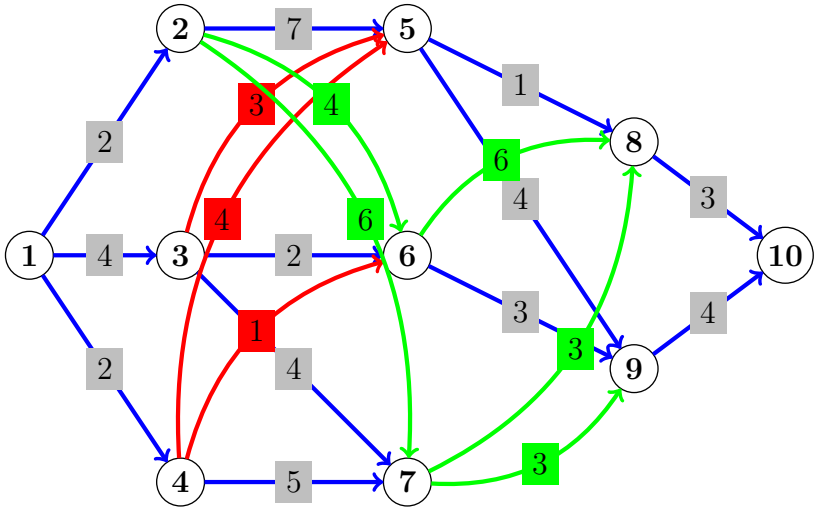


3.7) Určete nejkratší cestu spojující uzly 1 a 8 v grafu (ocenění hran=vzdálenost)



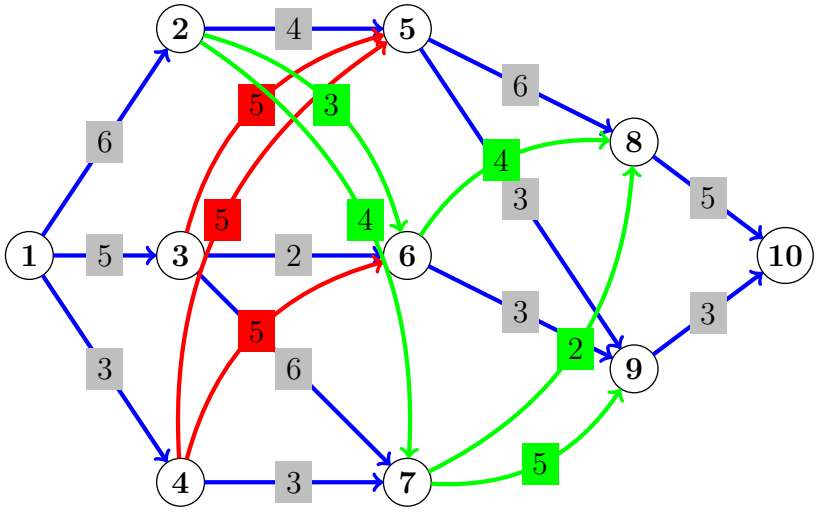
Řešení: $1 \rightsquigarrow 2 \rightsquigarrow 6 \rightsquigarrow 7 \rightsquigarrow 8$ *s hodnotou* 9.

3.8) Určete nejkratší cestu spojující uzly 1 a 10 v grafu (ocenění hran=vzdálenost).



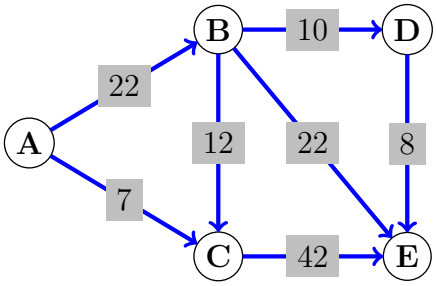
Řešení: $1 \rightsquigarrow 4 \rightsquigarrow 5 \rightsquigarrow 8 \rightsquigarrow 10$ *nebo* $1 \rightsquigarrow 4 \rightsquigarrow 6 \rightsquigarrow 9 \rightsquigarrow 10$ *s hodnotou* 10.

3.9) Určete nejkratší cestu spojující uzly 1 a 10 v grafu (ocenění hran=vzdálenost).

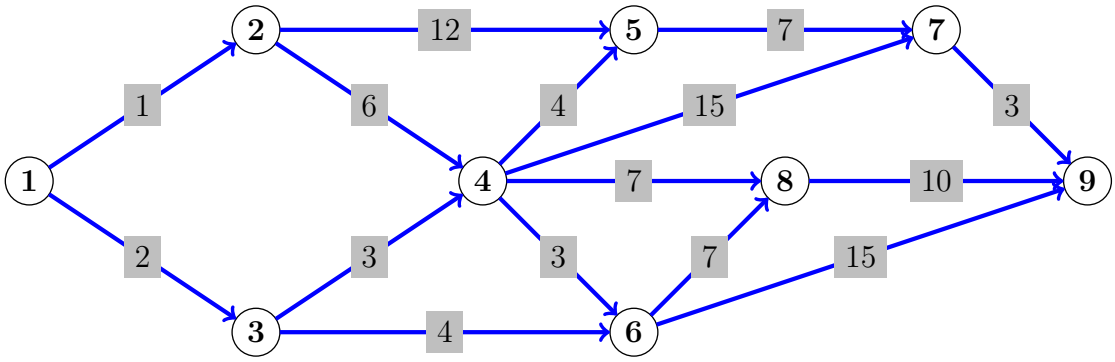


Řešení: 1 ⇝ 3 ⇝ 6 ⇝ 9 ⇝ 10 *nebo* 1 ⇝ 4 ⇝ 7 ⇝ 8 ⇝ 10 *s hodnotou* 13.

3.10) Určete nejkratší cestu spojující uzly A a E v grafu (ocenění hran=vzdálenost).

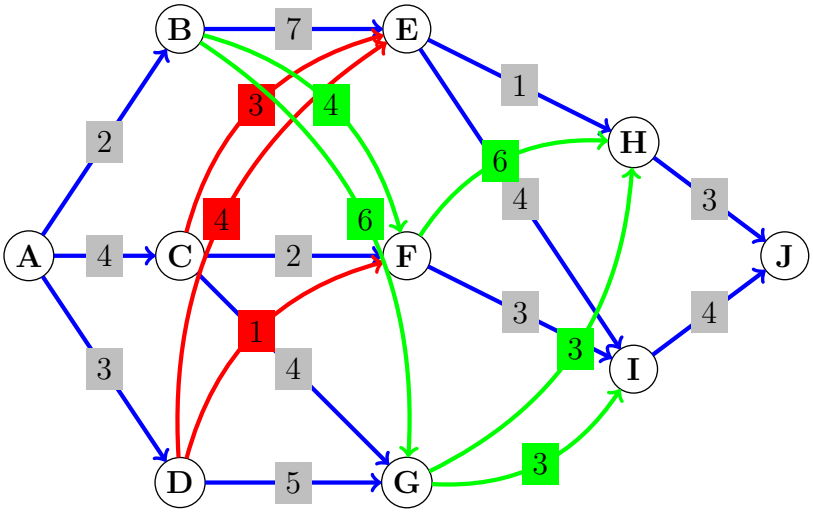


3.11) Určete nejkratší cestu spojující uzly 1 a 9 v grafu (ocenění hran=vzdálenost).



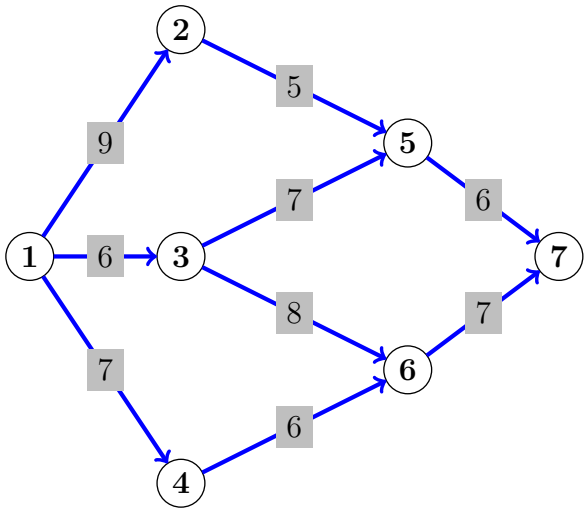
Řešení: 1 ⇝ 3 ⇝ 4 ⇝ 5 ⇝ 7 ⇝ 9 *s hodnotou* 19.

3.12) Určete nejkratší cestu spojující uzly A a J v grafu (ocenění hran=vzdálenost).



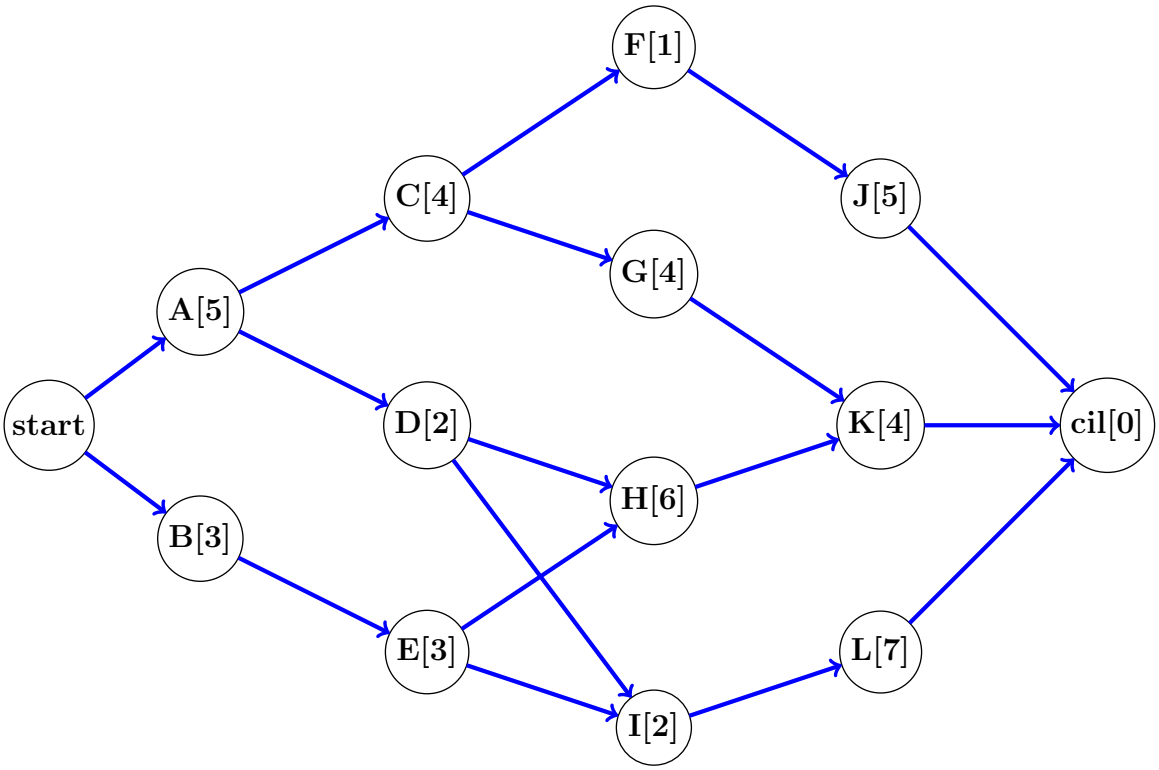
Řešení: $A \rightsquigarrow D \rightsquigarrow E \rightsquigarrow H \rightsquigarrow J$ *nebo* $A \rightsquigarrow D \rightsquigarrow F \rightsquigarrow I \rightsquigarrow J$ *nebo* $A \rightsquigarrow C \rightsquigarrow E \rightsquigarrow H \rightsquigarrow J$ *s hodnotou* 11.

3.13) Určete nejkratší cestu spojující uzly 1 a 7 v grafu (ocenění hran=vzdálenost)



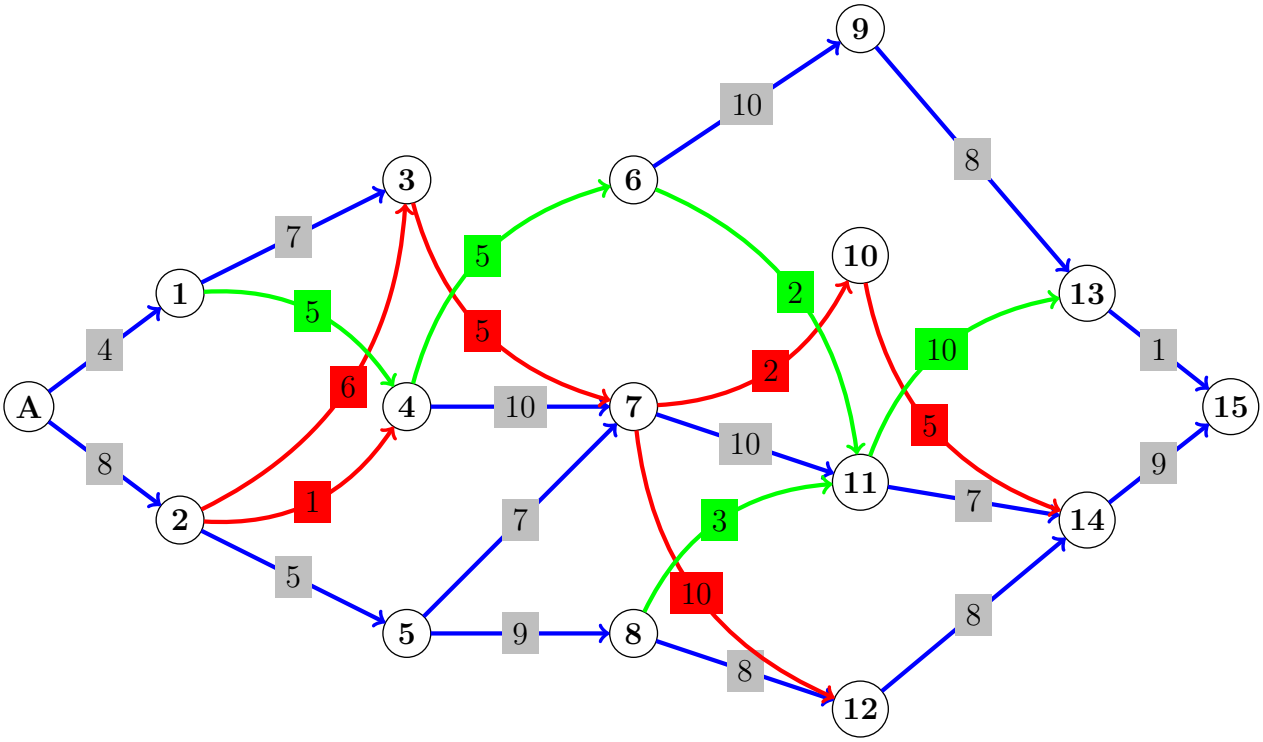
Řešení: $1 \rightsquigarrow 3 \rightsquigarrow 5 \rightsquigarrow 7$ *s hodnotou* 19.

3.14) Určete nejdelší cestu spojující uzly „start“ a „cil“ v grafu (číso v závorkách značí čas potřebný pro danou aktivitu)



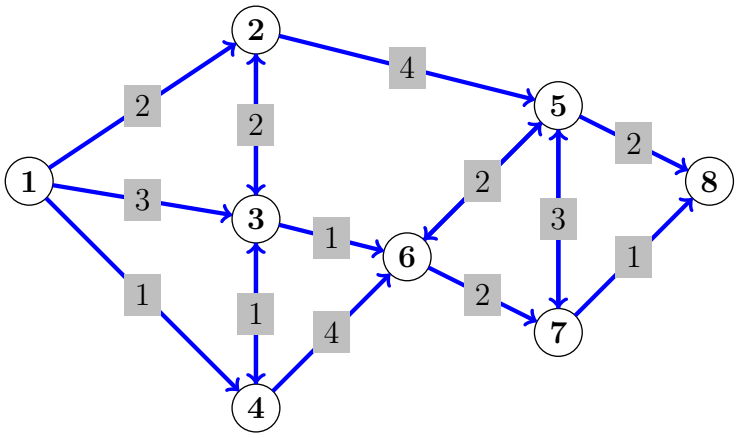
Řešení: *start*$\rightsquigarrow A \rightsquigarrow C \rightsquigarrow G \rightsquigarrow K \rightsquigarrow$*cil*
nebo start$\rightsquigarrow A \rightsquigarrow D \rightsquigarrow H \rightsquigarrow K \rightsquigarrow$*cil*
s hodnotou 17.

3.15) Určete nejkratší cestu spojující uzly 1 a 15 v grafu (ocenění hran=vzdálenost).



Řešení: $A \rightsquigarrow 1 \rightsquigarrow 4 \rightsquigarrow 6 \rightsquigarrow 11 \rightsquigarrow 13 \rightsquigarrow 15$ *nebo*
$A \rightsquigarrow 2 \rightsquigarrow 4 \rightsquigarrow 6 \rightsquigarrow 11 \rightsquigarrow 13 \rightsquigarrow 15$
s hodnotou 27.

3.16) Určete nejkratší cestu spojující uzly 1 a 8 v grafu (ocenění hran=vzdálenost).



Řešení: $1 \rightsquigarrow 4 \rightsquigarrow 3 \rightsquigarrow 6 \rightsquigarrow 7 \rightsquigarrow 8$ *s hodnotou* 6.

3.17) Nadnárodní technologická společnost má detailně propracovaný program vstupního školení, které musí absolvovat každý nový zaměstnanec. Toto školení se skládá ze 4 fází, z nichž každá obsahuje různé moduly. Fáze a jednotlivé moduly s časem [ve dnech] nutným pro jejich ukončení jsou shrnuty v tabulce

Fáze I	Fáze II	Fáze III	Fáze IV
A→13	E→3	H→12	L→10
B→10	F→6	I→6	M→5
C→20	G→5	J→7	N→13
D→17		K→10	

Moduly dokončené v odpovídající fázi mohou být následovány pouze některými moduly z následující fáze dle soupisu v tabulce

modul	možný následující modul
A	F,G
B	F
C	G
D	E,G
E	H,I,J,K
F	H,K
G	J,K

modul	možný následující modul
H	L,M
I	L,M
J	M,N
K	N
L	konec
M	konec
N	konec

např. po modulu A dokončeném ve fázi I může následovat pouze modul F nebo G ve fázi II.

(a) Určete posloupnost modulů, která zabere minimální čas pro dokončení.

(b) Pokud jste právě dokončili modul F, jak pokračovat dále, aby bylo potřeba minimum času?

Řešení: (a) $A \rightsquigarrow G \rightsquigarrow J \rightsquigarrow M$*; (b)* $F \rightsquigarrow H$*.*

3.18) Vyřešte „problém batohu“, jehož kapacita je 5 [jednotek]. Dostupné věci a jejich ceny [desítky Kč] jsou uvedeny v tabulce

věc č.	1	2	3	4
cena	3	4	5	6
váha	2	3	4	5

Řešení: 1 & 2.

3.19) Vyřešte „problém batohu“, jehož kapacita je 6 [jednotek]. Dostupné věci a jejich ceny [desítky Kč] jsou uvedeny v tabulce

věc č.	1	2	3	4
cena	6	3	5	1
váha	2	4	2	3

Řešení: 1 & 3.

3.20) Vyřešte „problém batohu“, jehož kapacita je 7 [jednotek]. Dostupné věci a jejich ceny [desítky Kč] jsou uvedeny v tabulce

věc č.	1	2	3	4
cena	10	7	25	24
váha	2	1	6	5

Řešení: 1 & 4.

3.21) Vyřešte „problém batohu“, jehož kapacita je 8 [jednotek]. Dostupné věci a jejich ceny [desítky Kč] jsou uvedeny v tabulce

věc č.	1	2	3	4
cena	15	10	9	5
váha	1	5	3	4

Řešení: 1 & 3 & 4.

3.22) Vyřešte „problém batohu“, jehož kapacita je 10 [jednotek]. Dostupné věci a jejich ceny [desítky Kč] jsou uvedeny v tabulce

věc č.	1	2	3	4
cena	10	40	30	50
váha	5	4	6	3

Řešení: 2 & 4.

3.23) Vyřešte „problém batohu“, jehož kapacita je 6 [jednotek]. Dostupné věci a jejich ceny [desítky Kč] jsou uvedeny v tabulce

věc č.	1	2	3	4	5
cena	25	20	15	40	50
váha	3	2	1	4	5

Řešení: 3 & 5.

3.24) Vyřešte „problém batohu“, jehož kapacita je 11 [jednotek]. Dostupné věci a jejich ceny [desítky Kč] jsou uvedeny v tabulce

věc č.	1	2	3	4	5
cena	1	6	18	22	28
váha	1	2	5	6	7

Řešení: 3 & 4.

3.25) Vyřešte „problém batohu“, jehož kapacita je 12 [jednotek]. Dostupné věci a jejich ceny [desítky Kč] jsou uvedeny v tabulce

věc č.	1	2	3	4	5	6
cena	1	6	5	15	8	10
váha	3	7	1	6	8	4

Řešení: 3 & 4 & 6.

3.26) Vyřešte „problém batohu“, jehož kapacita je 15 [jednotek]. Dostupné věci a jejich ceny [desítky Kč] jsou uvedeny v tabulce

věc č.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
cena	18	20	17	19	25	21	27	23	25	24
váha	1	3	7	4	8	9	6	10	2	5

Řešení: 1 & 2 & 4 & 9 & 10.

3.27) Vyřešte „problém batohu“, jehož kapacita je 10 [jednotek] a je-li dostupné libovolné množství každého druhu. Ceny [desítky Kč] jednotlivých druhů jsou uvedeny v tabulce

druh č.	1	2	3	4
cena	7	9	2	15
váha	3	4	1	7

Řešení: 1 & 1 & 2.

3.28) Vyřešte „problém plnění kontejneru“, jehož kapacita je 11 [jednotek]. Dostupný náklad a jednotlivé ceny [100 Kč] jsou v tabulce

typ č.	1	2	3	4
cena	18	25	30	20
váha	2	4	5	3
dostupné množství	5	2	2	3

Řešení: typ 1=4 ks, t2=0, t3=0, t4=1.

3.29) Jeden z Vašich kolegů se rozhodl, že dne 1. května (ačkoli/protože je Svátek práce) se začne chystat k státní závěrečné zkoušce a vypracuje si některé otázky. Na výběr má různé počty otázek z různých oblastí a přípravou by chtěl strávit maximálně 8 hodin. Otázky si ohodnotil následujícím způsobem (ohodnocení=užitek z vypracování jedné otázky)

	počet dostupných otázek	počet hodin nutných k přípravě jedné otázky	ohodnocení
MA	5	1	3
LA	3	2	4
PaS	2	3	10

Určete skladbu vypracovaných otázek, které přinesou největší užitek.

Řešení: 2×MA & 0×LA & 2×PaS.

3.30) Při odbavování pravidelného létu ČSA Praha–Brno se zjistilo, že je v letadle ještě volná kapacita 2000 kg. ČSA proto nabídly dopravním společnostem v bleskové aukci tuto kapacitu pro transport jejich zásilek. ČSA si mohou vybrat z následující nabídky zásilek

typ zásilky	dostupné množství	váha jednoho kusu zásilky [100 kg]	zisk [1000 Kč]
1	2	8	22
2	2	5	12
3	4	3	7
4	3	2	3

(a) Určete jaké zásilky a v jakém množství by měly ČSA přepravit, aby maximalizovaly svůj zisk.

(b) Těsně před ukončením odbavování prodaly ČSA ještě 2 letenky (zisk z těchto letenek je mnohem vyšší než z přepravy nákladu), čímž se snížila volná kapacita v letadle na 1800 kg. Jak se změní optimální řešení?

Řešení: (a) 2 ks zásilky typu 1 a 1 ks zásilky typu 3; (b) 2 ks zásilky typu 1 a 1 ks zásilky typu 4.

3.31) „Jahodárna“ v Brně – Slatině právě najala 8 nových zaměstnanců. Tito zaměstnanci mohou provádět 4 různé činnosti. Následující tabulka ukazuje zisk [1000 Kč] za 1 hodinu práce dle jednotlivých činností a počtu přidělených zaměstnanců

počet zaměstnanců \ činnost	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	22	30	37	44	49	54	58	60	61
2	30	40	48	55	59	62	64	66	67
3	46	52	56	59	62	65	67	68	69
4	5	22	36	48	52	55	58	60	61

(a) Určete optimální rozdělení zaměstnanců k jednotlivým činnostem.
(b) A co kdyby firma najala pouze 6 zaměstnanců?

Řešení: (a) činnost 1 = 3 zaměstanci, č2=2, č3=0, č4=3 nebo č1=2, č2=3, č3=0, č4=3; (b) č1=1, č2=2, č3=0, č4=3.

3.32) Společnost Dřep, a.s., (=dřevařský podnik) má momentálně na skladě pouze 2000 kusů kulatiny o délce 2 metrů. Tyto kulatiny jsou ve zpracovatelském závodě rozřezány na kratší díly a dále prodávány jednotlivým výrobcům. V tuto chvíli má firma objednávky na kusy o délce 30, 70, 110 a 160 cm, přičemž počet objednávek jednotlivých délek zcela překračuje dostupné množství. Prodej různých délek přináší různý zisk dle následující tabulky

délka [dm]	3	7	11	16
zisk [100 Kč]	1	3	5	8

Určete množství jednotlivých délek kulatiny, které by měly být vyrobeny, aby se maximalizoval zisk.

3.33) Investor má k dispozici kapitál 5 miliónů Kč, které by chtěl investovat do portfolia složeného ze 4 různých aktivit. Zisk z investování do jednotlivých typů aktivit je uveden v následující tabulce, přičemž investor požaduje, aby objem investic do jednotlivých aktivit byl celočíselný násobcích miliónů Kč

investice \ aktivita	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	7	5	3	3
2	9	7	4	5
3	9	8	5	8
4	9	8	5	9
5	9	8	5	9

Jak rozdělit jednotlivé investice, aby bylo dosaženo maximálního zisku?

Řešení: aktivita 1 = s investicí 1 mil. Kč, A2=1, A3=1, A4=1 nebo A1=1, A2=2, A3=1, A4=1 nebo A1=2, A2=1, A3=1, A4=1 se ziskem 20 mil. Kč.

3.34) Obchodní společnost zaměřená na výrobu jistého výrobku by ráda rozšířila svoji produkci o (a) 100 ks/den, (b) 150 ks/den. Toho lze docílit rozšířením současné výrobní kapacity ve 3 výrobních závodech. Následující tabulka udává míru navýšení zisku [1000 Kč] z rozšíření současné produkce v jednotlivých závodech, přičemž z technologických důvodů lze v každém závodě rozšířit produkci pouze o násobky 10 ks/den

(a)

závod \ rozšíření produkce	0	10	20	30	40	50	60	70
A	0	6	10	14	19	22	–	–
B	0	8	12	15	18	20	25	31
C	0	3	8	13	20	–	–	–

(b)

závod \ rozšíření produkce	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
A	0	12	24	35	58	77	93	104	–	–
B	0	5	15	40	80	105	120	125	132	135
C	0	30	48	59	68	73	79	86	–	–

Jak rozšířit stávající výrobu, aby bylo dosaženo maximálního zisku?

Řešení: (b) rozšíření závodu A o 70 ks/den, B=60, C=20 nebo A=60, B=60, C=30 se ziskem 20 tisíc Kč.

3.35) Firma vyrábějící komponenty pro automobily plánuje velikost výroby kvartálně, tj. na následující 3 měsíce. Na počátku je stav zásob 10 ks. Potřebná data jsou shrnuta v tabulce s cenami ve tisících Kč

měsíc	poptávka	kapacita		náklady	
		výrobní	skladovací	výrobní	skladovací
1	20	30	40	20	3
2	30	20	30	15	3
3	30	30	20	20	2

Určete optimální výrobní program minimalizující náklady.

Řešení: měsíc 1 = výroba 20 ks, M2=20, M3=30 s náklady 133 tisíc Kč.

3.36) Obchodní společnost má možnost vybudování 6 nových prodejních míst ve 3 oblastech A, B, C. V tabulce je uveden zisk [1000 Kč] v závislosti na počtu prodejních míst v jednotlivých oblastech (zisk z nulového počtu nových prodejních míst je způsoben tím, že v jednotlivých oblastech již nějaká prodejní místa jsou)

oblast \ počet prodejních míst	0	1	2	3	4	5	6
A	38	41	48	58	66	72	83
B	40	42	50	60	66	75	82
C	60	64	68	78	90	102	109

Jak rozmístit obchody do jednotlivých oblasti, aby se maximalizoval zisk?

3.37) Přírodovědecké fakultě MU se podařilo velmi výhodně (asi za polovinu cenu) nakoupit 500 ks velmi moderních kalkulaček. Vedení fakulty rozhodlo, že tyto kalkulačky budou nabídnuty studentům matematických, fyzikální a chemických oborů prostřednictvím příslušných sekretariátů. Celá zásilka přišla na fakultu v pěti balících po 100 kusech a pro jednoduchost budou na jednotlivé sekretariáty předány pouze celé balíky. Byl proveden kvalifikovaný odhad zisku [10 kč] z prodeje v závislosti na počtu kusů dostupných na jednotlivých sekretariátech (odlišnost cen a jejich nelineární růst jsou důsledkem různé finanční podpory ze strany ústavů)

obor \ počet dostupných kusů	100	200	300	400	500
M	60	110	155	170	180
F	50	120	170	200	210
Ch	55	110	150	185	195

Jak by měly být jednotlivé balíky rozděleny ústavům, aby bylo dosaženo maximálního zisku?

3.38) Uvažme obchodníka, který prodává pouze zboží jednoho typu. Sklad jeho prodejny má kapacitu 500 ks. Během každého měsíce je schopen prodat libovolné množství, které si zvolí až po množství ve skladu na začátku měsíce. Na začátku měsíce si může objednat libovolné množství, které mu bude doručeno na konci měsíce, přičemž nesmí přesáhnout volnou kapacitu skladu. Pro následující 4 měsíce má následující předpověď jednotkových cen [Kč] (změny jsou způsobeny kolísáním kurzu CZK vs. EUR a sezónním výkyvům)

měsíc	1	2	3	4
prodejní cena	27	24	26	28
nákupní cena	28	25	25	27

Na počátku má ve skladu 200 ks. Určete nákupní a prodejní strategii, která maximalizuje zisk pro období následujících 4 měsíců.

3.39) Nákupní oddělení podniku má zajistit, aby na začátku každého druhého měsíce bylo k dispozici předem dané množství jedné suroviny nutné pro výrobní program dle následující tabulky s údaji pro celý rok

měsíc	1	2	3	4	5	6
spotřeba [ks]	8	5	3	2	7	4
nákupní cena [1000 Kč]	11	18	13	17	20	10

Počáteční stav zásob jsou 2 ks a na konci má být roven 0. Jaké množství je potřeba nakoupit na začátku každého období, aby se minimalizovaly náklady, je-li kapacita skladu omezena na (a) 9 ks, (b) 20 ks, přičemž skladování je zdarma.

Řešení: (a) období 1 = nákup 7 kusů, O2=4, O3=9, O4=3, O5=0, O6=4 s náklady 357 tisíc Kč, (b) O1=18, O2=0, O3=5, O4=0, O5=0, O6=4 s náklady 303 tisíce Kč.

3.40) V průběhu nedávné epidemie eboly v Africe bylo rozhodnuto o rozmístění několika lékařských týmů v různých oblastech. V průběhu jednání se dospělo k dvěma možným variantám: buď budou 4 týmy pro 4 možné oblasti nebo 5 týmů pro 3 oblasti s těmito počty ošetřených pacientů [100 pacientů za měsíc]

počet týmů v oblasti \ oblast	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	45	41	25	33
2	78	65	50	48
3	102	80	73	56
4	123	88	90	60

počet týmů v oblasti \ oblast	A	B	C
0	0	0	0
1	45	20	50
2	70	45	70
3	90	75	80
4	105	110	100
5	120	150	130

Jak rozdělit lékařské týmy, aby bylo dosaženo maximálního počtu ošetřených pacientů?

Řešení: oblast A = 1 tým, B=3, C=1 se 17000 ošetřenými pacienty (první varianta dává maximálně pouze 15200 pacientů při volbě oblast 1 = 2 týmy, O2=1, O3=0, O4=1).

3.41) NASA momentálně řeší jistý technologický problém související s lety lidské posádky na Mars. Na řešení pracují 3 týmy využívající různé postupy. Za stávajících okolností byly odhadnuty šance (=pravděpodobnost), že jednotlivé týmy neuspějí: 0,4 pro první tým, 0,6 pro druhý tým a 0,8 pro třetí tým. Vedení NASA se rozhodl zvýšit šance na úspěch tím, že najme ještě 2 další vědce a začlení je do týmů. Opět byly odhadnuty šance neúspěchu rozšířených týmů

počet nových členů \ tým	A	B	C
0	0,4	0,6	0,8
1	0,2	0,4	0,5
2	0,15	0,2	0,3

Kam přidělit nové členy, aby byla minimalizována šance na neúspěch?

Řešení: tým A = 1 nový člen, B=0, C=1 s pravděpodobností neúspěchu 0,06.

3.42) „Meruňkárna“ v Dobšicích prodává svoji sklizeň na různých místech. Tentokrát jí zbylo 5 beden s meruňkami a potřebuje určit vhodná místa k prodeji. Jelikož je potřeba rozvést bedny rychle, byla vytipována 3 nejbližší místa. Zisk [100 Kč] z prodeje v závislosti na počtu dovezených beden je uveden v tabulce (různé ceny jsou způsobeny různými charaktery jednotlivých prodejních míst)

počet dodaných beden \ oblast	A	B	C
0	0	0	0
1	5	6	4
2	9	11	9
3	14	15	13
4	17	19	18
5	21	22	20

Kolik beden bylo mělo být rozvezeno na jednotlivá místa, aby se maximalizoval zisk?

Řešení: místo A = 1 bedna, B=2, C=2 se ziskem 2500 Kč.

3.43) V nadcházejícím zkouškovém období Vás čeká zkouška z toho kurzu. Předpokládejme, že jste si na zkoušku vyhradili 7 dní a předmět rozdělili do 4 bloků. Každému bloku se chcete věnovat alespoň 1 den a nejvýše 4 dny. „Užitek“ z přípravy věnované jednotlivým blokům můžeme v závislosti na počtu dnů odhadnout následujícím způsobem

počet dnů \ blok	LP	QP	DP	VP
1	1	5	4	4
2	3	6	6	4
3	6	8	7	5
4	8	8	9	8

Určete optimální strategii přípravy vedoucí k maximálnímu užitku.

Řešení: oblast LP = 3 dny, QP=1, DP=2, VP=1 s hodnotou užitku 21.

3.44) V závěru jistých voleb se jeden z jejich účastníků rozhodl zvýšit své šance na vítězství reklamou v 4 celostátních denících. Rozpočet na tuto reklamní kampaň je dostatečný na zveřejnění reklamy ve všech 5 dnech, které zbývají do voleb, přičemž v každém dni bude reklama pouze v jednom deníku. Zisk nových voličů [ve stovkách] z této kampaně v závislosti na deníku a počtu reklamních dní je v tabulce

počet reklamních dnů \ deník	A	B	C	D
0	0	0	0	0
1	4	6	5	3
2	7	8	9	7
3	9	10	11	12
4	12	11	10	14
5	15	12	9	16

Jakým způsobem by měla být reklama rozdělena, aby bylo dosaženo maximální zisku nových voličů?

Řešení: deník A = 0 dnů, B=1, C=1, D=3 se ziskem 2300 nových voličů.

3.45) Vzhledem k rostoucí konkurenci mezi vysokými školami/univerzitami při přijímání nových studentů bakalářských oborů se rozhodlo vedení MU investovat 800 tisíc Kč do reklamní kampaně zahrnující noviny, časopisy, rozhlas a televizi. V závislosti na množství investovaných peněz byl učiněn odhad „zasažených“ potenciálních uchazečů o studium [ve stovkách], přičemž pro jednoduchost bylo rozhodnuto, že na jednotlivé typy reklamy bude uvolněna částka v celočíselných násobcích stovek tisíc Kč

medium \ investice	1	2	3	4	5	6	7	8
noviny	24	37	46	59	72	80	82	82
časopisy	15	55	70	75	90	95	95	95
rozhlas	20	30	45	55	60	62	63	63
televize	20	40	55	65	70	70	70	70

(a) Určete optimální rozdělení rozpočtu maximalizující počet „zasažených“ uchazečů.
(b) Jak se toto optimální rozdělení změní, bude-li dostupný rozpočet zkrácen o 200 tisíc?
(c) Jak se smění předchozí dvě řešení, nebude-li povolena reklama v televizi?

Řešení: (a) noviny = 100 tisíc Kč, Č=3, R=1, TV=3 se 16900 „zasaženými“ uchazeči; (b) N=1, Č=2, R=1, TV=2 se 13900 „zasaženými“ uchazeči; (c) v prvním případě N=2, Č=3, R=3 se 15200 „zasaženými“ uchazeči, ve druhém případě N=2, Č=3, R=1 se 12700 „zasaženými“ uchazeči.

3.46) Uvažme elektronický systém, který se skládá ze 4 komponent zapojených sériově, tj. pro funkčnost celého systému jsou potřeba všechny komponenty. Spolehlivost systému může být zvýšena paralelním zapojením až tří jednotek jedné či více komponent. Pravděpodobnost funkčnosti a její zvýšení v závislosti na počtu paralelních komponent je shrnuta v tabulce

komponenta / počet paralelních jednotek	A	B	C	D
1	0,5	0,6	0,7	0,5
2	0,6	0,7	0,8	0,7
3	0,8	0,8	0,9	0,9

Současně však zapojení těchto paralelních jednotek přináší náklady [1000 Kč] dle tabulky

komponenta / počet paralelních jednotek	A	B	C	D
1	1	2	1	2
2	2	4	3	3
3	3	5	4	4

Určete počty paralelně zapojených jednotek jednotlivých komponent maximalizující spolehlivost systému, je-li rozpočet limitován částkou 10 tisíc Kč.

Řešení: komponenta A = 3 paralelní jednotky, B=1, C=1, D=3 s pravděpodobností 0,3024.

3.47) Firma na základě stávajících objednávek má spočítáno, že na následující 3 období bude potřebovat počty zaměstnanců uvedené v tabulce

období	1	2	3
počet zaměstnanců	45	40	50

Ovšem propouštění a najímání zaměstnanců má své náklady stejně jako přezaměstnanost (podzaměstnanost není povolena). Uvažme, že každý „nadbytečný“ zaměstnanec znamená ztrátu 30 tisíc Kč za příslušné období a změna počtu zaměstnanců znamená ztrátu 2000·(míra změny)^2. Jelikož nejsou povoleny částečné úvazky, je možné mít pouze celočíselný počet zaměstnanců. Určete optimální počty zaměstnanců v jednotlivých období, aby bylo dosaženo minimální ztráty v průběhu roku, má-li firma na počátku 50 zaměstnanců.

Řešení: období 1 = 45 zaměstnanců, O2=44, O3=50 s náklady 2440 tisíc Kč.

3.48) Míra (ne-)zaměstnanosti v zemědělství nebo stavebnictví je závislá na ročním období. Uvažme zaměstnavatele, který v průběhu roku potřebuje následující počty zaměstnanců

období	jaro	léto	podzim	zima	jaro
počet zaměstnanců	255	220	240	200	255

Ovšem propouštění a najímání zaměstnanců má své náklady stejně jako přezaměstnanost (podzaměstnanost není povolena). Uvažme, že každý „nadbytečný“ zaměstnanec znamená ztrátu 20 tisíc Kč za příslušné období a změna počtu zaměstnanců znamená ztrátu 2000·(míra změny)^2. Jelikož jsou povoleny také částečné úvazky, je možné mít neceločíselný počet zaměstnanců. Určete optimální počty zaměstnanců v jednotlivých období, aby bylo dosaženo minimální ztráty v průběhu roku.

Řešení: jaro = 255 zaměstnanců, léto=247,5, podzim=245, zima=247,5, jaro=255 s náklady 1850 tisíc Kč.

3.49) Uvažte předchozí příklad s tím, že změna zaměstnanosti znamená pouze poloviční ztrátu.

Řešení: jaro = 255 zaměstnanců, léto=242,5, podzim=245, zima=242,5, jaro=255.

3.50) Uvažme dva hráče jisté přátelské hry (vrhcáby, dáma, šachy), ve které není povolena remíza. Pro zvýšení napětí je možné v každé hře provést libovolnou sázku v rozmezí od 0 po aktuálně dostupné žetony („all-in“). Pravděpodobnost výhry je $\frac{1}{2}$. Při počátečním obnosu 75 žetonů je cílem mít po třech hrách 100 žetonů (žeton=Kč, přátelské hra=není potřebat získat více). Určete optimální strategii sázek.

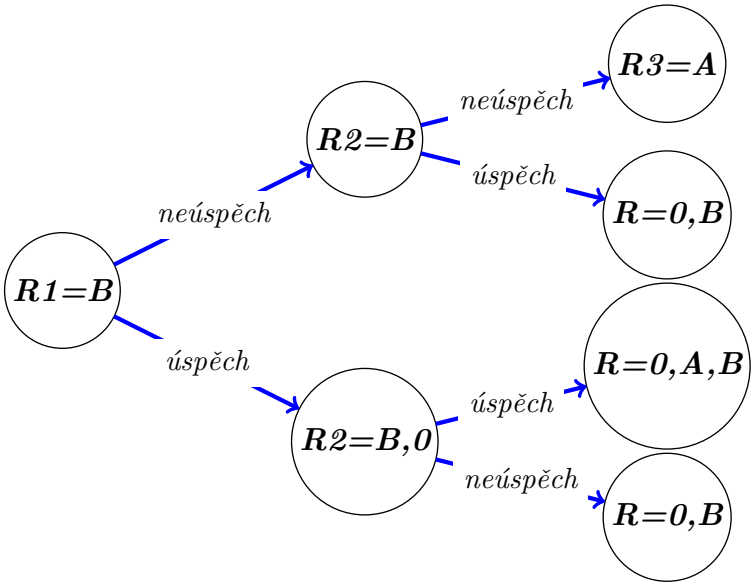
Řešení: sázka v 1. hře = 0 žetonů, S2=25, v případě výhry S3=0, v případě prohry S3=50 nebo S1=25, v případě výhry S2=0=S3, v případě prohry S2=50, v případě prohry S2=50 s pravděpodobností $\frac{3}{4}$.

3.51) V rámci filozofie „špetka praxe vydá za tunu teorie“ jste získali 10 tisíc Kč s úkolem stanovení optimální investiční strategie na následující 3 roky. Na začátku každého roku je potřeba rozhodnout, zda budeme investovat do produktu A nebo B nebo nikam. V každém roce je možné provést pouze jednu investici ve výši 10 tisíc Kč (nebo neinvestovat). Výnos [1000 Kč] z jednotlivých investic je v tabulce

investice	obnos na konci roku	pravděpodobnost
A	0	0.25
	20	0,25
B	10	0.9
	20	0,1

(a) Jak investovat, aby bylo dosaženo maximálního výnosu po 3 letech?
(b) Jak investovat, aby byla maximální pravděpodobnost, že po 3 letech budete mít nejméně 20 tisíc Kč?

Řešení: (a) je-li to možné, vždy investovat do A s očekávaným výnosem 22,5 tisíc Kč; (b) maximální pravděpodobnost je 0,7975 při strategii



3.52) Určete optimální pro sázení v Las Vegas, máte-li na počátku 3 žetony a chcete-li mít po 2 hrách alespoň 4 žetonů (pravděpodobnost výhry je 0,66).

Optimální strategie má pravděpodobnost 0,88.

3.53) Určete optimální pro sázení v Las Vegas, máte-li na počátku 2 žetony a chcete-li mít po 5 hrách alespoň 5 žetonů (pravděpodobnost výhry je $\frac{1}{2}$).

Optimální strategie má pravděpodobnost $\frac{160}{243}$.

3.54) Společnost Pokus & Omyl, s.r.o., vyrábí velmi sofistikovaný produkt jednoho druhu. Společnost sice obdržela zakázku na dodání 1 ks tohoto výrobku, ovšem zadavatel zakázky má velmi striktní požadavky na výslednou kvalitu. To vede k tomu, že může být nutné vyrobit víe kusů tohoto výrobku než bude dosaženo požadované kvality. Počet nadbytečných výrobků nevyhovující kvality můžeme označit jako „povolenou zmetkovost“, což bývá běžnou praxí ve výrobním procesu.

Vedení společnosti odhaduje, že je 50 procentní pravděpodobnost vyrobení vyhovujícího kusu a 50 procentní pravděpodobnost vyrobení nevyhovujícího kusu. Proto počet vyhovujících kusů mezi L vyrobenými kusy má binomické rozdělení pravděpodobnosti, tj. pravděpodobnost, že nebude vyroben žádný vyhovující kus je $\left(\frac{1}{2}\right)^L$.

Náklady na výrobu 1 ks (ať již vyhovujícího či nevyhovujícího) je 1000 Kč a nevyhovující výrobky jsou bezcenné. Navíc spuštění výrobního procesu stojí 3000 Kč a tyto náklady stojí každé další spuštění výrobního procesu, pokud se ukáže že mezi vyrobenými kusy v předchozím běhu není žádný vyhovující výrobek. Společnost se rozhodla spustit nejvýše 3 po sobě jdoucí výrobní procesy pro výrobu požadovaného produktu. Pokud ani na konci třetího běhu nebude získán vyhovující kus bude celková ztráta ve výši 16 tisíc Kč včetně pokuty zaplacené zákazníkovi. Vaším úkolem je stanovení optimální velikosti výrobního procesu, tj. kolik se má být v každém běhu výrobního procesu vyrobeno kusů (1+ povolená zmetkovost), aby byly minimalizovány náklady.

Řešení: v 1. běhu = 2 ks, B2=2 nebo 3 kusy, B3=3 nebo 4 kusy s očekávanými náklady 6750 Kč.

3.55) Pomocí dynamického programování řešte

$$5x_1 + 2x_2^2 + x_3^3/3 + x^4/4 \to \max,$$
$$\sum_{i=1}^{4} x_i \leqslant 6, \quad x_i \in \{1, 2\}.$$

3.56) Pomocí dynamického programování řešte

$$18x_1 - x_1^2 + 20x_2 + 10x_3 \to \max,$$
$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leqslant 11, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}, \quad x_1, x_2, x_3 \geqslant 0.$$

3.57) Pomocí dynamického programování řešte

$$32x_1 - 2x_2^2 + 30x_2 + 20x_3 \to \max,$$
$$3x_1 + 7x_2 + 5x_3 \leqslant 20, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}, \quad x_1, x_2, x_3 \geqslant 0.$$

Řešení: $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

3.58) Pomocí dynamického programování řešte

$$36x_1 + 9x_1^2 - 6x_1^3 + 36x_2 - 3x_2^3 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 \leqslant 3, \quad x_1, x_2 \geqslant 0.$$

Řešení: $x_1 = -2 + \sqrt{13}$, $x_2 = 5 - \sqrt{13}$.

3.59) Pomocí dynamického programování řešte

$$2x_1^2 + 2x_2 + 4x_3 - x_3^2 \to \max,$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 4, \quad x_1, x_2, x_3 \geqslant 0.$$

Řešení: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$.

3.60) Pomocí dynamického programování řešte

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \min,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 15, \quad x_1, x_2, x_3 \geqslant 0.$$

3.61) Pomocí dynamického programování řešte

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3 \to \max,$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geqslant 8, \quad x_1, x_2, x_3 \geqslant 0.$$

3.62) Pomocí dynamického programování řešte

$$\sum_{k=1}^{n} r(x_k) \to \min,$$
$$x_1 + \cdots + x_n \geqslant \alpha, \quad x_1, \ldots, x_n \geqslant 0,$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$ a r je konvexní, rostoucí a diferencovatelná funkce.

Řešení: $x_1 = \cdots = x_n = \frac{\alpha}{n}$.

3.63) Pomocí dynamického programování řešte

$$\min_{x_1,\ldots,x_n} \{\max\left[r(x_n), \ldots, r(x_1)\right]\},$$
$$x_1 + \cdots + x_n \geqslant \alpha, \quad x_1, \ldots, x_n \geqslant 0,$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$ a r je konvexní, rostoucí a diferencovatelná funkce.

Řešení: $x_1 = \cdots = x_n = \frac{\alpha}{n}$.

3.64) Pomocí dynamického programování řešte

$$\sum_{k=1}^{n} r(x_k) \to \min,$$
$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \geqslant \alpha, \quad x_1, \ldots, x_n \geqslant 0,$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$ a r je konvexní, rostoucí a diferencovatelná funkce.

Řešení: $x_1 = \cdots = x_n = \alpha^{1/n}$.

3.65) Pomocí dynamického programování řešte

$$\Pi_{k=1}^{n} x_k = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \to \max,$$
$$x_1 + \cdots + x_n \leqslant \alpha, \quad x_1, \ldots, x_n \geqslant 0,$$

kde $n \in \mathbb{N}$ a $\alpha > 0$.

Řešení: $x_1 = \cdots = x_n = \frac{\alpha}{n}$.

3.66) Pomocí dynamického programování řešte (tzv. Huygensova úloha)

$$\frac{x_1 \cdots x_n}{(a + x_1)(x_1 + x_2) \cdots (x_{n-1} + x_n)(x_n + b)} \to \max,$$
$$a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant b,$$

kde $a, b > 0$.

Řešení: $x_i = \sqrt[i+1]{a x_{i+1}^{i}}$ *pro* $i = 1, \ldots, n-1$, $x_n = a^{1/(n+1)}\, b^{n/(n+1)}$.

3.67) Pomocí dynamického programování řešte

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \leqslant \alpha, \quad x_1, x_2, x_3 \geqslant 0, \quad \alpha \geqslant 0.$$

3.68) Pomocí dynamického programování řešte

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \to \max,$$
$$x_1 + \cdots + x_n \leqslant \alpha, \quad x_1, \ldots, x_n \geqslant 0,$$

kde $n \in \mathbb{N}$ a $\alpha > 0$.

3.69) Pomocí dynamického programování řešte

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^p \to \max,$$
$$x_1 + \cdots + x_n \leqslant \alpha, \quad x_1, \ldots, x_n \geqslant 0,$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$ a $p \geqslant 1$.

3.70) Pomocí dynamického programování řešte

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^p \to \min,$$
$$x_1 + \cdots + x_n \geqslant \alpha, \quad x_1, \ldots, x_n \geqslant 0,$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$ a $p \geqslant 1$.

3.71) Pomocí dynamického programování řešte

$$\sum_{k=1}^{n} r(x_k) \to \max,$$
$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \leqslant \alpha, \quad x_1, \ldots, x_n \geqslant 0,$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$ a r je konvexní, rostoucí a diferencovatelná funkce.

3.72) Pomocí dynamického programování řešte

$$\Pi_{k=1}^{n} x_k = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \to \max,$$
$$x_1 + \cdots + x_n = \alpha, \quad x_1, \ldots, x_n \geqslant 0,$$

kde $n \in \mathbb{N}$ a $\alpha > 0$.

3.73) Pomocí dynamického programování řešte

$$15x_1 + 10x_2 \to \max,$$
$$x_1 + 2x_2 \leqslant 6, \quad 3x_1 + x_2 \leqslant 8, \quad x_1, x_2 \geqslant 0.$$

3.74) Pomocí dynamického programování řešte

$$3x_1 + 4x_2 \to \max,$$
$$x_1 + 6x_2 \leqslant 6, \quad 2x_1 + x_2 \leqslant 4, \quad x_1, x_2 \geqslant 0.$$

3.75) Pomocí dynamického programování řešte

$$4x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$3x_1 + x_2 \leqslant 42, \quad x_1 + x_2 \leqslant 21, \quad 3x_1 + 2x_2 \leqslant 48, \quad x_1, x_2 \geqslant 0.$$

3.76) Pomocí dynamického programování řešte

$$\sum_{k=1}^{n} r(x_k) \to \min,$$
$$x_1 + \cdots + x_n \geqslant \alpha, \quad x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \geqslant \beta, \quad x_1, \ldots, x_n \geqslant 0,$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta > 0$ a r je konvexní, rostoucí a diferencovatelná funkce.

Řešení: $x_1 = \cdots = x_n = \frac{\alpha}{n}$ *v případě* $\alpha \geqslant n\,\beta^{1/n}$ *a* $x_1 = \cdots = x_n = \beta^{1/n}$ *v případě* $\alpha \leqslant n\,\beta^{1/n}$.

4. Variační počet

V prostoru funkcí $\mathrm{C}^1[a,b]$ společně s uvedenými okrajovými podmínkami nalezněte extremály funkcionálů, pomocí Legendreovy podmínky určete potenciální charakter nalezené extremály a případně ověřte i platnost postačujících podmínek pro (slabý) extrém:

4.1)

$$J[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [y'^2(x) - y^2(x)]\,\mathrm{d}x, \quad y(0) = 0,\ y(\pi/2) = 1.$$

Řešení: $y(x) = \sin x$ *je minimum.*

4.2)

$$J[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [y'^2(x) - y^2(x)]\,\mathrm{d}x, \quad y(0) = 0,\ y(\pi) = 0.$$

4.3)

$$J[y] = \int_0^1 [1 + y'^2(x)]\,\mathrm{d}x, \quad y(0) = 1,\ y(1) = 0.$$

Řešení: $y(x) = -x + 1$.

4.4)

$$J[y] = \int_1^2 \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{x}\,\mathrm{d}x, \quad y(1) = 0,\ y(2) = 1.$$

Řešení: $(y-2)^2 + x^2 = 5$.

4.5)

$$J[y] = \int_0^1 y'^3(x)\,\mathrm{d}x, \quad y(0) = 0 = y(1).$$

4.6)

$$J[y] = \int_0^b y(x)\sqrt{1 + y'^2(x)}\,\mathrm{d}x, \quad y(0) = 1,\ y(b) = \cosh b.$$

4.7)

$$J[y] = \int_0^1 [y'(x) - 1]^2\,\mathrm{d}x, \quad y(0) = 0 = y(1).$$

4.8) (Problém nejkratší cesty) Mezi grafy všech funkcí spojujících body $A = [x_1, y_1]$ a $B = [x_2, y_2]$, $x_1 \neq x_2$ najděte ten, který má nejkratší délku.

Řešení: $y(x) = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}x + \frac{y_2 x_1 - y_1 x_2}{x_1 - x_2}$.

4.9) (Problém minimální rotační plochy) Mezi grafy všech funkcí spojujících body $A = [x_1, y_1]$ a $B = [x_2, y_2]$, $x_1 \neq x_2$, $y_1, y_2 > 0$ najděte ten, který po rotaci kolem osy x vytváří těleso s minimální plochou.

Řešení: $y(x) = c_1 \cosh \frac{x - c_2}{c_1}$.

4.10)

$$J[y] = \int_0^L y(x)\, y'^{\,3}(x)\, \mathrm{d}x, \quad y(0) = 0,\ y(L) = R.$$

Řešení: $y(x) = R\left(\frac{x}{L}\right)^{3/4}$.

4.11)

$$J[y] = \int_a^b [y^2(x) - y'^{\,2}(x) - 2y(x)\, \cosh x]\, \mathrm{d}x, \quad y(a) = A,\ y(b) = B.$$

Řešení: $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} \cosh x$.

4.12)

$$J[y] = \int_a^b \frac{1 + y^2(x)}{y'^{\,2}(x)}\, \mathrm{d}x, \quad y(a) = A,\ y(b) = B.$$

Řešení: $y(x) = \sinh(c_1 x + x_2)$.

4.13)

$$J[y] = \int_0^1 [xy(x) + y^2(x) - 2y^2(x)\, y'(x)]\, \mathrm{d}x, \quad y(0) = 1,\ y(1) = 2.$$

Řešení: neexistuje.

4.14)

$$J[y] = \int_a^b [y^2(x) + y'^{\,2}(x) - 2y(x)\, \sin x]\, \mathrm{d}x, \quad y(a) = A,\ y(b) = B.$$

Řešení: $y(x) = c_1\, \mathrm{e}^x + c_2\, \mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2} \sin x$.

4.15)

$$J[y] = \int_0^1 [y'^{\,12}(x) + 12xy(x)]\, \mathrm{d}x, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 1.$$

Řešení: $y(x) = x^3$.

4.16)

$$J[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [y'^{\,2}(x) - y^2(x) + 2xy(x)]\, \mathrm{d}x, \quad y(0) = 0,\ y(\pi/2) = 0.$$

Řešení: $y(x) = x - \frac{\pi}{2} \sin x$.

4.17)

$$J[y] = \int_1^2 \frac{x^3}{y'^{\,2}(x)}\, \mathrm{d}x, \quad y(1) = 1,\ y(2) = 4.$$

Řešení: $y(x) = x^2$.

4.18)

$$J[y] = \int_a^b [y^2(x) + y'^2(x) - 2y(x)\ \mathrm{e}^x]\,\mathrm{d}x, \quad y(a) = A,\ y(b) = B.$$

Řešení: $y(x) = c_1\,\mathrm{e}^x + c_2\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}x\,\mathrm{e}^x$.

4.19)

$$J[y] = \int_0^1 [x + y'^2(x)]\,\mathrm{d}x, \quad y(0) = 1,\ y(1) = 2.$$

4.20)

$$J[y] = \int_0^1 [y^2(x) - y'^2(x) - y(x)]\ \mathrm{e}^{2x}\ \mathrm{d}x, \quad y(0) = 0,\ y(1) = \mathrm{e}^{-1}.$$

4.21)

$$J[y] = \int_a^b [y'^2(x) + 2y(x)]\,\mathrm{d}x, \quad y(a) = A,\ y(b) = B.$$

Řešení: $y(x) = \frac{1}{2}(x^2 + c_1)$.

4.22)

$$J[y] = \int_0^1 x\,y(x)\,y'(x)\,\mathrm{d}x, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 1.$$

Řešení: neexistuje.

4.23)

$$J[y] = \int_0^1 [x\,y'(x) + y'^2]\,\mathrm{d}x, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 2.$$

Řešení: $y(x) = -x^2/4 + 9x/4$.

4.24) Viz také http://goo.gl/3kDyuo.