# Repetitorium obecné matematiky

Dominik Velan
Rastislav Rehák

Brno 2014

# Obsah

# Úvod

Tento text vznikl v rámci přípravy na bakalářské státnice z obecné matematiky na Masarykově univerzitě v semestru jaro 2014. Vychází ze stanoveného rozsahu otázek k ústní zkoušce a ke každé otázce uvádí nejdůležitější definice a věty, případně i důležité důkazy a příklady. Na konci textu je možné ke každé otázce najít seznam literatury, která danou otázku rozebírá detailněji.

Bakalářské státnice z matematiky na MU obvykle probíhají následujícím způsobem: nejprve proběhne obhajoba práce před porotou, vedoucím práce a oponentem, k níž se doporučuje mít připravenou prezentaci přibližně na 5 minut; po této prezentaci ještě proběhne uvedení posudků a diskuse; po obhajobách všech studentů následuje ústní zkouška před porotou, s písemnou přípravou na 10-20 minut; ke zkoušce se losují nebo přidělují dvě otázky ze seznamu a samotné zkoušení může mít 10-20 minut. Témata v tomto textu jsou vypracována tak, aby každé bylo minimálně na 10 minut. Samotný průběh státnic záleží na porotě a může být mírně odlišný od toho, co jsme uvedli. Někdy porota nechá vyprávět studenta dlouho a moc ho nepřerušuje, jindy ho usměrňuje v tom, co chce slyšet, a může se zeptat i mírně nad rámec vymezeného rozsahu otázek.

Tento text je tedy určen pro opakování na státnice a má sloužit jako podklad pro předmět Bakalářské repetitorium matematiky. Kvůli svému omezenému rozsahu nemůže zaručit, že po jeho přečtení státnice dopadnou na A. Má však sloužit jako výchozí reference pro opakování a má shrnout minimální poznatky absolventa obecné matematiky. Vzhledem k tomu, že některá témata mají ostatní obory stejné jako obecná matematika, tak z části je tento text použitelný i pro studenty statistiky, finanční matematiky a matematiky-ekonomie.

Pokud máte nějaké návrhy na zlepšení tohoto textu nebo v něm naleznete nějaké chyby či nepřesnosti (ať už faktické nebo typografické), budeme velmi rádi, když nám o nich dáte vědět na adrese 394214@mail.muni.cz.

# Kapitola 1

# Vektorové prostory a lineární zobrazení

## Vektorový prostor, vektorový podprostor, lineární obal množiny vektorů, lineární nezávislost

**Definice 1.1.** Nechť $(V, +)$ je komutativní grupa (jejíž prvky nazýváme *vektory*) a $(T, \boxplus, \star)$ těleso (jeho prvky nazýváme *skaláry*). Řekneme, že grupa $V$ spolu s operací $\cdot \colon T \times V \to V$ tvoří *vektorový prostor* $(V, +, \cdot)$ nad tělesem $T$, jestliže

- $t \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = t \cdot \mathbf{u} + t \cdot \mathbf{v}$,
- $(t \boxplus s) \cdot \mathbf{u} = t \cdot \mathbf{u} + s \cdot \mathbf{u}$,
- $(t \star s) \cdot \mathbf{u} = t \cdot (s \cdot \mathbf{u})$,
- $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$.

**Označení 1.2.** Neutrální prvek grupy $(V, +)$ se nazývá *nulový vektor* a označuje se symbolem $\mathbf{o}$. Inverzní prvek k vektoru $\mathbf{v}$ se nazvývá *opačný vektor* k vektoru $\mathbf{v}$ a označuje se symbolem $-\mathbf{v}$.

**Definice 1.3.** Nechť $V$ je vektorový prostor nad tělesem $T$. Neprázdná podmnožina $U$ množiny $V$ se nazývá *podprostor* vektorového prostoru $V$, jestliže platí

- $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$,
- $t \in T, \mathbf{u} \in U \Rightarrow t\mathbf{u} \in U$.

**Definice 1.4.** Buď $\emptyset \neq X \subseteq V$ množina vektorů. *Lineárním obalem* množiny $X$ (píšeme $[X]$) rozumíme množinu všech konečných lineárních kombinací vektorů z $X$, tj.

$$[X] = \{a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_n\mathbf{x}_n \mid n \in \mathbb{N}, a_1, a_2, \ldots, a_n \in T, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in X\}.$$

Pro $X = \emptyset$ definujeme $[X] = \{\mathbf{o}\}$.

**Věta 1.5.** *Nechť je dána množina $X \subseteq V$. $[X]$ je nejmenší vektorový podprostor vektorového prostoru $V$ obsahující $X$.*

**Definice 1.6.** Buď $V$ vektorový prostor. Vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ se nazývají *lineárně nezávislé*, jestliže $\forall a_1, a_2, \ldots, a_n \in T$ platí

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{o} \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0.$$

V opačném případě řekneme, že vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ jsou *lineárně závislé.*

## Steinitzova věta, báze, dimenze, souřadnice, matice přechodu, průnik a součet podprostorů

**Věta 1.7** (Steinitzova)**.** *Buď $V$ vektorový prostor. Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$. Jsou-li vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ lineárně nezávislé a všechny patří do lineárního obalu $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m]$, pak $n \leq m$.*

**Definice 1.8.** Libovolná lineárně nezávislá uspořádaná $n$-tice $\alpha = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ vektorů z $V$, která generuje celý prostor $V$ se nazývá *báze* vektorového prostoru $V$. Buď dále $\mathbf{v}$ libovolný vektor z $V$. Pak existuje právě jedna $n$-tice $(\mathbf{v})_\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ skalárů z $T$ tak, že

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_n\mathbf{u}_n.$$

$(\mathbf{v})_\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nazýváme *souřadnice vektoru* $\mathbf{v}$ v bázi $\alpha$.

**Označení 1.9.** V prostoru $\mathbb{R}^n$ značíme $\epsilon = \left((1,0,\ldots,0)^T, (0,1,\ldots,0)^T, \ldots, (0,0,\ldots,1)^T\right)$ tzv. *kanonickou bázi.*

*Poznámka* 1.10. Pokud existuje konečná množina vektorů z $V$, která generuje celý prostor $V$, pak $V$ nazveme *konečněrozměrný.* V konečněrozměrném prostoru existuje báze a každá jeho báze má stejný počet prvků. Proto můžeme definovat *dimenzi* vektorového prostoru $V$ jako počet prvků jeho libovolné báze, značíme $\dim V$.

**Definice 1.11.** Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$, $\beta = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ jsou dvě báze vektorového prostoru $V$. Pak $\forall j \in \mathbb{N}\colon 1 \leq j \leq n$ lze vektor $\mathbf{u}_j$ vyjádřit jako

$$\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{v}_i$$

pro vhodná $a_{ij}$. Matici $(id)_{\beta,\alpha} = (a_{ij})$ nazýváme *maticí přechodu* od báze $\alpha$ k bázi $\beta$.

**Věta 1.12.** *Buďte $\alpha, \beta, \gamma$ báze vektorového prostoru $V$, $\mathbf{v} \in V$ libovolný vektor. Pak platí*

- $(\mathbf{v})_\beta = (id)_{\beta,\alpha}(\mathbf{v})_\alpha$,
- $(id)_{\gamma,\beta}(id)_{\beta,\alpha} = (id)_{\gamma,\alpha}$.

**Definice 1.13.** Popis podprostoru $Q$ výčtem jeho bázových vektorů nazýváme *parametrický popis* podprostoru $Q$.
Podmnožina $P \subseteq V$ vektorů splňujících homogenní soustavu nerovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$, kde $A \in T^{n\times m}$, $\dim V = m$, tvoří vektorový podprostor. Naopak, pro libovolný vektorový podprostor lze takovou soustavu nalézt. Je-li vektorový podprostor zadán soustavou $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$, nazveme tento popis *analytický.*

*Poznámka* 1.14. Buďte $P, Q$ vektorové podprostory. Pak $P \cap Q$ tvoří vektorový podprostor, ale $P \cup Q$ již vektorový podprostor tvořit nemusí.

**Definice 1.15.** Průnikem vektorových podprostorů $P, Q$ rozumíme vektorový podprostor $P \cap Q$. Součtem vektorových podprostorů $P, Q$ rozumíme vektorový podprostor $P + Q = [P \cup Q]$.

## Lineární zobrazení, jádro, obraz, lineární izomorfismus, matice zobrazení

**Definice 1.16.** Buďte $U, V$ vektorové prostory nad tělesem $T$. Zobrazení $f\colon U \to V$ se nazývá *lineární zobrazení*, jestliže

- $f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ pro všechna $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$,
- $af(\mathbf{u}) = f(a\mathbf{u})$ pro všechna $a \in T, \mathbf{u} \in U$.

Injektivní lineární zobrazení nazýváme *vnoření*. Bijektivní lineární zobrazení nazýváme *izomorfismus*. Pokud mezi prostory $U$ a $V$ existuje alespoň jeden izomorfismus, řekneme, že $U$ a $V$ jsou izomorfní (píšeme $U \cong V$).

**Věta 1.17.** *Nechť $V$ je vektorový prostor nad tělesem $T$ a $\dim V = n$. Pak $V \cong T^n$.*

**Důsledek 1.18.** *Všechny vektorové prostory stejné dimenze nad pevně zvoleným tělesem jsou vzájemně izomorfní.*

**Definice 1.19.** Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení. *Jádrem* zobrazení $f$ rozumíme množinu

$$\ker f = \{\mathbf{u} \in U \mid f(\mathbf{u}) = \mathbf{o}\}.$$

*Obrazem* zobrazení $f$ rozumíme množinu

$$\operatorname{im} f = \{\mathbf{v} \in V \mid \exists \mathbf{u} \in U\colon f(\mathbf{u}) = \mathbf{v}\}.$$

**Věta 1.20.** *Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení. Pak $\ker f$ tvoří vektorový podprostor $U$ a $\operatorname{im} f$ tvoří vektorový podprostor $V$. Navíc platí $\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim U$.*

**Definice 1.21.** *Maticí lineárního zobrazení* $f\colon U \to V$ vzhledem k bázím $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n) \subseteq U$ a $\beta = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m) \subseteq V$ rozumíme matici

$$(f)_{\beta,\alpha} = \Big(f(\mathbf{u}_1)_\beta, \ldots, f(\mathbf{u}_n)_\beta\Big) \in T^{m \times n}.$$

**Věta 1.22.** *Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení vzhledem k bázím $\alpha, \beta$. Pak $\forall \mathbf{u} \in U$ platí*

$$(f(\mathbf{u}))_\beta = (f)_{\beta,\alpha} (\mathbf{u})_\alpha$$

*přičemž $(f)_{\beta,\alpha}$ je jediná matice s touto vlastností.*

# Kapitola 2

# Soustavy lineárních rovnic, matice a determinanty

## Gaussova eliminace, operace s maticemi

*Poznámka* 2.1. Matici rozměrů $m \times n$ nad tělesem $T$ můžeme pro jednoduchost chápat jako obdélníkové schéma o $m$ řádcích a $n$ sloupcích, kde na pozici $(i,j)$ je prvek $a_{ij} \in T$. Množinu všech matic rozměrů $m \times n$ nad tělesem $T$ značíme $T^{m\times n}$. $(T^{m\times n}, +)$ je komutativní grupa, $(T^{n\times n}, \cdot)$ je nekomutativní monoid. $T^{m\times n}$ tvoří vektorový prostor dimenze $mn$.

**Definice 2.2.** Lineární rovnicí o $n$ neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nad tělesem $T$ rozumíme formuli tvaru

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in T$.

**Definice 2.3.** Soustavou $m$ lineárních rovnic o $n$ neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nad číselným tělesem $T$ rozumíme konjunkci formulí tvaru

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}$$

kde $a_{ij},\ b_i \in T$.

**Definice 2.4.** Matici $A = (a_{ij}) \in T^{m\times n}$ nazýváme *maticí soustavy.*
Sloupcový vektor $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T \in T^m$ nazýváme její *pravou stranou.*
Soustava se nazývá *homogenní*, jestliže $\mathbf{b} = \mathbf{o}$. V opačném případě se nazývá *nehomogenní.*
*Rozšířenou maticí soustavy* rozumíme blokovou matici $(A \mid \mathbf{b}) \in T^{m\times(n+1)}$.

*Poznámka* 2.5. Uvedenou soustavu můžeme jednoduše zapsat v *maticovém tvaru*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Jedná-li se o homogenní soustavu, vypadá maticový tvar

$$A\mathbf{x} = \mathbf{o}.$$

**Definice 2.6.** Vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in T^n$ nazveme *řešením soustavy* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, jestliže jeho složky vyhovují každé z rovnic této soustavy, tj. platí $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

*Poznámka* 2.7. Vyřešit soustavu znamená nalézt všechna její řešení.

**Definice 2.8.** Dvě soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a $B\mathbf{x} = \mathbf{c}$, kde $A, B \in T^{m\times n}$, $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in T^m$, se nazývají *ekvivalentní*, jestliže mají stejnou množinu řešení.

**Definice 2.9.** Je-li soustava $B\mathbf{x} = \mathbf{c}$ ekvivalentní s původní soustavou $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a všechna její řešení můžeme přímo vyčíst z její rozšířené matice $(B \mid \mathbf{c})$, pak řekneme, že soustava $B\mathbf{x} = \mathbf{c}$ je *vyřešená.*

**Definice 2.10.** Řekneme, že matice $A = (a_{ij}) \in T^{m\times n}$ je v *redukovaném stupňovitém tvaru*, jestliže

- každý nenulový řádek matice $A$ leží nad každým jejím nulovým řádkem,
- vedoucí prvek vyššího řádku leží více vlevo než vedoucí prvek nižšího řádku,
- vedoucí prvek každého nenulového řádku je jedna,
- ve sloupci, ve kterém se nachází vedoucí prvek nějakého řádku jsou všechny ostatní prvky rovné nule.

Jestliže matice splňuje pouze první dvě podmínky, pak řekneme, že je ve *stupňovitém tvaru* (někdy též *schodovitém*).

**Definice 2.11.** *Elementární řádkovou operací* na matici $A$ rozumíme některou z následujících operací:

- výměnu dvou řádků matice $A$,
- vynásobení některého řádku matice $A$ nenulovým skalárem,
- přičtení skalárního násobku některého řádku matice $A$ k jejímu jinému řádku.

Matice $A, B$ se nazývají *řádkově ekvivalentní* ($A \sim B$), jestliže jednu z nich můžeme upravit na druhou konečným počtem elementárních řádkových operací.

**Věta 2.12.** *Jestliže matice* $(A \mid \mathbf{b})$ *a matice* $(B \mid \mathbf{c})$ *jsou řádkově ekvivalentní, pak jsou soustavy* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *a* $B\mathbf{x} = \mathbf{c}$ *ekvivalentní.*

*Poznámka* 2.13. V této chvíli můžeme popsat Gaussovu eliminační metodu.

## Hodnost matice, věty o struktuře řešení soustav lineárních rovnic, Frobeniova věta

**Definice 2.14.** *Řádkovou hodností* $h_r(A)$ matice $A$ rozumíme dimenzi lineárního podprostoru generovaného řádky matice $A$ (jedná se tedy o maximální počet lineárně nezávislých řádků). *Sloupcovou hodností* $h_s(A)$ matice $A$ rozumíme dimenzi lineárního podprostoru generovaného sloupci matice $A$ (jedná se tedy o maximální počet lineárně nezávislých sloupců).

$$h_r(A) = \dim\left[r_1(A), r_2(A), \ldots, r_m(A)\right],$$
$$h_s(A) = \dim\left[s_1(A), s_2(A), \ldots, s_n(A)\right].$$

**Věta 2.15.** *Pro každou matici* $A \in T^{m\times n}$ *platí* $h_r(A) = h_s(A)$.

**Definice 2.16.** Společnou hodnotu řádkové a sloupcové hodnosti nazýváme *hodnost matice* $A$ a značíme $h(A)$.

**Definice 2.17.** Nechť $A \in T^{n \times n}$. *Inverzní maticí* k matici $A$ rozumíme matici $B$ tak, že

$$AB = E_n = BA.$$

Tuto matici budeme dále značit $A^{-1}$.

**Definice 2.18.** Řekneme, že čtvercová matice $A$ je *regulární*, jestliže k ní existuje inverzní matice $A^{-1}$. V opačném případě hovoříme o *singulární* matici.

**Označení 2.19.** Označme množiny řešení homogenní soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ a nehomogenní soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\mathcal{R}(A) = \{\mathbf{x} \in T^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{o}\},$$
$$\mathcal{R}(A \mid \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in T^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}.$$

**Lemma 2.20.** *Předpisem $\varphi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ je definované lineární zobrazení $\varphi \colon T^n \to T^m$, přičemž* $\ker \varphi = \mathcal{R}(A)$.

**Důsledek 2.21.** *Pro libovolnou matici $A \in T^{m \times n}$ je množina $\mathcal{R}(A)$ vektorový podprostor prostoru $T^n$.*

**Definice 2.22.** Každou bázi prostoru $\mathcal{R}(A)$ nazveme *fundamentální systém řešení* soustavy

$$A\mathbf{x} = \mathbf{o}.$$

**Věta 2.23.** *Pro libovolnou matici $A \in T^{m \times n}$ platí*

$$\dim \mathcal{R}(A) = n - h(A).$$

**Věta 2.24.** *Pokud je množina $\mathcal{R}(A \mid \mathbf{b})$ neprázdná, tvoří afinní podprostor a platí*

$$\operatorname{dir} \mathcal{R}(A \mid \mathbf{b}) = \mathcal{R}(A),$$
$$\dim \mathcal{R}(A \mid \mathbf{b}) = n - h(A).$$

**Věta 2.25** (Frobeniova)**.** *Nechť $A \in T^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in T^m$. Nehomogenní soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má řešení právě tehdy, když $h(A \mid \mathbf{b}) = h(A)$.*

## Permutace, definice a vlastnosti determinantu, Laplaceův rozvoj

**Definice 2.26.** *Permutací* na množině $X$ rozumíme libovolnou bijekci $X \to X$. Množinu všech permutací na množině $X$ značíme $\mathcal{S}(X)$. Pokud $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, pak místo $\mathcal{S}(X)$ píšeme $\mathcal{S}_n$.

**Definice 2.27.** Permutaci $\sigma \in \mathcal{S}(X)$ nazveme *transpozicí*, jestliže existují $x, y \in X$, $x \neq y$ takové, že $\sigma(x) = y$, $\sigma(y) = x$ a $\sigma(z) = z$ pro každé $z \in X \setminus \{x, y\}$.

**Definice 2.28.** *Délkou permutace* $\sigma$ konečné množiny $X$ nazveme nejmenší počet transpozic, na jejichž kompozici můžeme $\sigma$ rozložit. Značíme ji $|\sigma|$. *Paritu permutace* definujeme jako paritu její délky. *Znaménkem permutace* rozumíme výraz $\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^{|\sigma|}$.

**Definice 2.29.** *Determinantem* čtvercové matice $A = (a_{ij}) \in T^{n \times n}$ rozumíme výraz

$$|A| = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}.$$

Determinant matice $A$ značíme též $\det A$ nebo $\det(A)$.

**Věta 2.30.** *Platí*

- $|E_n| = 1$,
- $|A| = |A^T|$,
- $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$,
- $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

**Věta 2.31.** *Pokud matice $B$ vznikne z matice $A$*

- *záměrnou dvou řádků, pak $|A| = -|B|$,*
- *přičtením násobku jednoho řádku k jinému, pak $|A| = |B|$,*
- *vynásobením jednoho řádku skalárem $a$, pak $a|A| = |B|$.*

**Věta 2.32.** *Platí*

$$\left|\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\right| = |A| \cdot |C|.$$

**Důsledek 2.33.** *Nechť $A = (a_{ij}) \in T^{n\times n}$ je dolní (či horní) trojúhelníková matice (tj. hodnoty nad (či pod) diagonálou jsou nulové). Pak platí*

$$|A| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

**Věta 2.34.** *Čtvercová matice $A$ je regulární právě tehdy, když* $\det A \neq 0$.

**Věta 2.35** (Laplaceův rozvoj)**.** *Pro $A \in T^{n\times n}$ platí*

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}|A_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}|A_{ij}|,$$

*kde $|A_{ij}|$ je subdeterminant matice $A$ bez $i$-tého řádku a $j$-tého sloupce.*

## Výpočet inverzní matice, Cramerovo pravidlo

*Poznámka* 2.36. Nejjednodušší univerzální postup, jak vypočítat inverzní matici je následující:

$$(A \mid E) \overset{\text{ERO}}{\longrightarrow} \left(E \mid A^{-1}\right).$$

Pro výpočet inverzní matice lze využít i determinantů. Popis této metody bude předmětem několika následujících definic a tvrzení.

**Označení 2.37.** $\mathcal{S}_n(i,j) = \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid i = \sigma(j)\}$.

**Definice 2.38.** *Algebraickým doplňkem* prvku $a_{ij}$ v matici $A$ rozumíme prvek $\widetilde{a}_{ij}$ definovaný předpisem

$$\widetilde{a}_{ij} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n(i,j)} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(j-1)j-1}a_{\sigma(j+1)j+1}\cdots a_{\sigma(n)n}.$$

**Definice 2.39.** Matici $\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ij}) \in T^{n\times n}$ nazýváme *maticí algebraických doplňků* k matici $A$.

**Věta 2.40.** *Nechť $A$ je regulární matice. Potom*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}^T.$$

**Věta 2.41** (Cramerovo pravidlo)**.** *Nechť $A \in T^{n\times n}$ je regulární matice, $\mathbf{b} \in T^n$. Nechť pro $1 \leq j \leq n$ označuje $A_j^b$ matici, která vznikne z matice $A$ nahrazením jejího $j$-tého sloupce vektorem $\mathbf{b}$. Potom soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má jediné řešení*

$$\mathbf{x} = \left(\frac{|A_1^b|}{|A|}, \frac{|A_2^b|}{|A|}, \dots, \frac{|A_n^b|}{|A|}\right)^T.$$

## Symetrické, ortogonální a unitární matice

**Definice 2.42.** Řekneme, že matice $A$ je *symetrická*, jestliže $A = A^T$.

*Poznámka* 2.43. Reálné symetrické matice odpovídají maticím samoadjungovaných operátorů. Všechny kořeny jejich charakteristických polynomů jsou reálná čísla. V ortonormální bázi, která je tvořena vlastními vektory, mají diagonální tvar.

**Definice 2.44.** Reálnou matici $A$ tvaru $n \times n$ splňující $AA^T = E$ nazveme *ortogonální*. Komplexní matici $A$ tvaru $n \times n$ splňující $A\bar{A}^T = E$ nazveme *unitární*.

**Věta 2.45.** *Nechť $A$ je ortogonální (unitární) matice. Pak její řádky i sloupce tvoří ortonormální bázi v $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) se standardním skalárním součinem.*

**Věta 2.46.** *Buď $A$ unitární nebo ortogonální matice. Pak platí*

$$|\det(A)| = 1,$$

*tj. pro ortogonální matice platí* $\det(A) = \pm 1$, *pro unitární* $\det(A) = \cos\alpha + i\sin\alpha$.

**Věta 2.47.** *Buď $A$ unitární matice. Pak*

- *každé vlastní číslo má absolutní hodnotu jedna,*
- *vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé.*

*Existuje tedy ortonormální báze tvořena vlastními vektory, ve které má matice diagonální tvar.*

## Numerické metody řešení soustav lineárních rovnic

*Poznámka* 2.48. Nejznámější metodou pro řešení soustavy lineárních rovnic je Gaussova eliminační metoda (GEM). Ukazuje se, že při použití této metody může docházet k závažným chybám vinou zaokrouhlování (metoda není stabilní). Tento problém se dá vyřešit, pokud při každém kroku Gaussovy metody provádíme redukci tak, že vybereme vhodné číslo, pomocí kterého budeme upravovat ostatní řádky. Toto číslo se nazývá *pivot*. Rozlišujeme dva přístupy: GEM s částečným či úplným výběrem pivota. Pivotem je vždy největší číslo v příslušném sloupci či zbývající submatici (v závislosti na zvoleném přístupu).
Z GEM se odvozují i některé rozklady matice soustavy, pomocí kterých je možné jednoduše najít řešení pro libovolnou pravou stranu.

*Poznámka* 2.49 (Přímé metody). Řešíme soustavu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Předpokládejme, že existuje rozklad $A = L \cdot U$, kde $L$, resp. $U$ je dolní, resp. horní trojúhelníková matice. Uvažme substituci

$$A\mathbf{x} = L \cdot \underbrace{U\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} = \mathbf{b}.$$

Následně vyřešíme soustavy

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b} \quad U\mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

- Choleského metoda:
  Matice $A$ je symetrická. Hledáme rozklad matice $A$ ve tvaru $A = T^T \cdot T$. Pro tento rozklad existují poměrně komplikované vzorce, které zde neuvádíme.

- Croutova metoda:
  Matice $A$ je 3-diagonální (nenulové prvky se mohou nacházet pouze na diagonále a hned nad či pod ní). Hledáme rozklad matice $A$ ve tvaru $A = L \cdot U$, kde matice $L$ může mít nenulové prvky pouze na diagonále a hned pod ní, matice $U$ má na diagonále jedničky a ostatní nenulové prvky může mít pouze hned nad diagonálou.

*Poznámka* 2.50 (Iterační metody). Řešíme soustavu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Uvažme rozklad $A = D - L - U$, kde $D$ je diagonální matice, $L$, resp. $U$ je dolní, resp. horní trojúhelníková matice mající nuly na diagonále.

- Jacobiho metoda:
$$\mathbf{x}_{k+1} = D^{-1}\left(L + U\right)\mathbf{x}_k + D^{-1}\mathbf{b}.$$

- Gaussova-Seidelova metoda:
$$\mathbf{x}_{k+1} = \left(D - L\right)^{-1} U\mathbf{x}_k + \left(D - L\right)^{-1}\mathbf{b}.$$

Postačující podmínka konvergence obou metod pro libovolnou počáteční aproximaci: matice $A$ je řádkově či sloupcově diagonálně dominantní.

# Kapitola 3

# Prostory se skalárním součinem a lineární operátory na nich

## Skalární součin, ortonormální báze, ortogonální doplněk, kolmá projekce

**Definice 3.1.** Buď $V$ komplexní nebo reálný vektorový prostor. *Skalárním součinem* na $V$ rozumíme zobrazení $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ splňující

- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle \in \mathbb{R}$, přičemž pro $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ je $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle > 0$,
- $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je lineární v první složce: $\langle a\mathbf{u} + b\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = a\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle + b\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$,
- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle}$.

*Poznámka* 3.2. Skalární součin na reálném vektorovém prostoru je symetrická bilineární forma, jejíž příslušná kvadratická forma je pozitivně definitní.

**Definice 3.3.** *Euklidovským prostorem* rozumíme reálný vektorový prostor spolu se skalárním součinem.
*Unitárním prostorem* rozumíme komplexní vektorový prostor spolu se skalárním součinem.

**Definice 3.4.** Nechť $V$ je prostor se skalárním součinem, $\mathbf{v} \in V$. *Velikostí (normou) vektoru* $\mathbf{v}$ nazveme číslo $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}$.

**Věta 3.5** (Cauchyho-Schwarzova nerovnost)**.** *Buď $V$ euklidovský prostor, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ libovolné. Pak platí*

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|,$$

*přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou lineárně závislé.*

**Definice 3.6.** Nechť $V$ je prostor se skalárním součinem. Řekneme, že vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ svírají *úhel* $\alpha \in [0, \pi]$, jestliže

$$\cos\alpha = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}.$$

Řekneme, že vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ jsou *kolmé* (značíme $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$), jestliže $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$.

**Definice 3.7.** *Systémem ortogonálních vektorů* rozumíme množinu vektorů $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ takových, že $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\rangle = 0$ pro $i \neq j$.

**Věta 3.8.** *Nechť vektory* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *jsou nenulové a tvoří ortogonální systém. Pak jsou lineárně nezávislé.*

**Definice 3.9.** Buď $V$ vektorový prostor dimenze $n$ se skalárním součinem. Bázi $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ nazveme *ortogonální*, jestliže její vektory tvoří ortogonální systém. Řekneme, že tato báze je *ortonormální*, jestliže navíc $\|\mathbf{v}_i\| = 1$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$.

**Definice 3.10.** *Ortogonálním doplňkem* podprostoru $U \subseteq V$ rozumíme množinu

$$U^{\perp} = \{\mathbf{v} \in V \mid \forall \mathbf{u} \in U \text{ platí } \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0\}.$$

**Věta 3.11.** *Ortogonální doplněk je vektorový podprostor a platí* $V = U \oplus U^{\perp}$.

**Definice 3.12.** Buď $V$ vektorový prostor se skalárním součinem, $U$ jeho podprostor. *Kolmou projekcí* do podprostoru $U$ rozumíme zobrazení $P_U \colon V \to U$ takové, že $\forall \mathbf{v} \in V$ platí

$$\mathbf{v} - P_U(\mathbf{v}) \in U^{\perp},$$

tj. $\forall \mathbf{u} \in U$ platí $\langle \mathbf{v} - P_U(\mathbf{v}), \mathbf{u} \rangle = 0$.

**Věta 3.13.** $P_U \colon V \to U$ *je lineární zobrazení.*

**Věta 3.14.** *Buď* $V$ *vektorový prostor se skalárním součinem,* $U$ *jeho podprostor,* $P_U \colon V \to U$ *kolmá projekce do* $U$, $\mathbf{v} \in V$. *Pak platí:*

- $P_U(\mathbf{v})$ *je jediný vektor z* $U$ *s vlastností* $\|\mathbf{v} - P_U(\mathbf{v})\| = \min_{\mathbf{u} \in U} \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$.
- $P_U(\mathbf{v})$ *je až na nenulový násobek jediný vektor z* $U$ *s vlastností* $\frac{\|P_U(\mathbf{v})\|}{\|\mathbf{v}\|} = \max_{\mathbf{u} \in U} \frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$.

*Poznámka* 3.15 (Počítání kolmé projekce). Mějme vektorový prostor $V$ a jeho podprostor $U$ zadaný pomocí báze $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m)$.

- Je-li $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m)$ ortonormální báze podprostoru $U$, pak

$$P_U(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_2 \rangle \mathbf{u}_2 + \cdots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_m \rangle \mathbf{u}_m.$$

- V obecném případě hledáme $a_1, a_2, \ldots, a_m \in T$ takové, že

$$P_U(\mathbf{v}) = a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + a_m \mathbf{u}_m.$$

  Víme, že $\mathbf{v} - P_U(\mathbf{v}) \perp \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$, tedy $\langle \mathbf{v} - P_U(\mathbf{v}), \mathbf{u}_i \rangle = 0$, což spolu s vyjádřením $P_U(\mathbf{v}) = a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + a_m \mathbf{u}_m$ přepíšeme jako

$$\langle a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + a_m \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_i \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle.$$

  Pro každé $i = 1, 2, \ldots, m$ dostáváme rovnici o $m$ neznámých. Celkem máme $m$ rovnic o $m$ neznámých. Z nich vyjádříme neznámé $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

**Věta 3.16.** *Nechť* $V$ *je vektorový prostor se skalárním součinem,* $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k)$ *báze jeho podprostoru* $U \subseteq V$. *Pak existuje ortogonální báze* $(\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \ldots, \mathbf{u}_k^*)$ *taková, že* $\mathbf{u}_j^* \in [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_j]$ *pro každé* $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq k$.

*Důkaz.* (Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces).
Důkaz povedeme indukcí vzhledem k dimenzi podprostoru $U$.

1. $\mathbf{u}_1^* = \mathbf{u}_1$.

2. Nechť $k > 1$ a předpokládejme, že tvrzení platí pro $k-1$. Existuje tedy ortogonální báze $\left(\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \dots, \mathbf{u}_{k-1}^*\right)$ taková, že $\mathbf{u}_j^* \in [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_j]$ pro každé $1 \leq j \leq k-1$.
   Položme
   $$(\star) \qquad \mathbf{u}_k^* = \mathbf{u}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \mu_{kj} \mathbf{u}_j^*.$$
   Zřejmě $\mathbf{u}_k^* \in [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k]$ nezávisle na volbě koeficientů $\mu_{kj}$. Postupně skalárně vynásobíme obě strany rovnosti ($\star$) vektory $\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \dots, \mathbf{u}_{k-1}^*$. Dostáváme $k-1$ rovnic: pro libovolné $j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ máme
   $$\left\langle \mathbf{u}_k^*, \mathbf{u}_j^* \right\rangle = \left\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_j^* \right\rangle - \mu_{kj} \left\langle \mathbf{u}_j^*, \mathbf{u}_j^* \right\rangle.$$
   Všechny ostatní členy jsou díky indukčnímu předpokladu nulové. Protože chceme, aby na sebe byly $\mathbf{u}_k^*$ a $\mathbf{u}_j^*$ kolmé (tedy $\langle \mathbf{u}_k^*, \mathbf{u}_j^* \rangle = 0$), můžeme dopočítat koeficient $\mu_{kj}$ takto:
   $$\mu_{kj} = \frac{\left\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_j^* \right\rangle}{\left\langle \mathbf{u}_j^*, \mathbf{u}_j^* \right\rangle} \quad \text{pro } 1 \leq j \leq k-1.$$
   Tím dostáváme ortogonální bázi $(\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \dots, \mathbf{u}_k^*)$, čímž je důkaz hotov.

*Poznámka* 3.17. Snadno ověříme, že dále platí:

- pro $1 \leq j \leq k$ je vektor $\mathbf{u}_j^*$ projekcí $\mathbf{u}_j$ do ortogonálního doplňku podprostoru $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{j-1}]$,
- $\|\mathbf{u}_j^*\| \leq \|\mathbf{u}_j\|$ pro $1 \leq j \leq k$,
- $\left\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j^* \right\rangle = \left\langle \mathbf{u}_j^*, \mathbf{u}_j^* \right\rangle$.

## Vlastní čísla a vlastní vektory

**Definice 3.18.** Vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ se nazývá *vlastní vektor* lineárního operátoru $\varphi$, jestliže existuje $\lambda \in T$ takové, že $\varphi(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$. Číslo $\lambda$ se nazývá *vlastní číslo*.

**Definice 3.19.** *Charakteristickým polynomem* lineárního operátoru $\varphi \colon V \to V$ rozumíme polynom $\det\left((\varphi)_{\alpha\alpha} - \lambda E\right)$, kde $\alpha$ je libovolná báze $V$ (tento polynom na volbě báze nezávisí).

**Definice 3.20.** *Algebraickou násobností* vlastního čísla $\lambda$ operátoru $\varphi$ rozumíme násobnost $\lambda$ jakožto kořene charakteristického polynomu.
*Geometrickou násobností* vlastního čísla $\lambda$ operátoru $\varphi$ rozumíme dimenzi $\ker(\varphi - \lambda id)$.
Podprostor $\ker(\varphi - \lambda id)$ pro vlastní číslo $\lambda$ se nazývá *vlastní podprostor* příslušný vlastnímu číslu $\lambda$.

## Ortogonální a unitární operátory, jejich vlastní čísla a vektory

**Definice 3.21.** Buď $V$ vektorový prostor se standardním skalárním součinem nad $\mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$.

- Nad $\mathbb{C}$: operátor $\varphi\colon V \to V$ se nazývá *unitární*, jestliže $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V\colon \langle \varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.
- Nad $\mathbb{R}$: operátor $\varphi\colon V \to V$ se nazývá *ortogonální*, jestliže $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V\colon \langle \varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

**Věta 3.22.** *Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- *$\varphi\colon V \to V$ je unitární (ortogonální),*
- *$\varphi$ převádí libovolnou ortogonální bázi na ortogonální bázi,*
- *je-li $\alpha$ ortonormální báze, pak matice $A = \varphi_{\alpha\alpha}$ má vlastnost $A^{-1} = \bar{A}^T$.*

**Věta 3.23.** *Matice $n \times n$ je matice unitárního (ortogonálního) zobrazení, jestliže platí některá z následujících podmínek:*

- *řádky matice $A$ tvoří ortonormální bázi,*
- *sloupce matice $A$ tvoří ortonormální bázi,*
- *$A\bar{A}^T = E_n$.*

**Definice 3.24.** Reálnou matici $A$ tvaru $n \times n$ splňující $AA^T = E$ nazveme *ortogonální*. Komplexní matici $A$ tvaru $n \times n$ splňující $A\bar{A}^T$ nazveme *unitární*.

**Věta 3.25.** *Buď $A$ unitární nebo ortogonální matice. Pak platí*

$$|\det(A)| = 1,$$

*tj. pro ortogonální matice platí* $\det(A) = \pm 1$, *pro unitární* $\det(A) = \cos\alpha + i\sin\alpha$.

**Věta 3.26.** *Buď $A$ unitární matice. Pak*

- *každé vlastní číslo má absolutní hodnotu jedna,*
- *vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé.*

**Věta 3.27.** *Buď $\varphi\colon V \to V$ ortogonální zobrazení. Pak $V$ je direktní součet navzájem kolmých podprostorů dimenze 1 a 2, které jsou navíc invariantní. V podprostorech dimenze 1 je $\varphi$ násobení číslem $\pm 1$, v podprostorech dimenze 2 je $\varphi$ otáčení o úhel $\alpha$.*

**Důsledek 3.28.** *Každá ortogonální matice $3 \times 3$ reprezentuje jako zobrazení $\varphi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ otáčení kolem osy složené případně se symetrií podle roviny kolmé k této ose. Ve vhodné (ortonormální) bázi $\beta$ je*

$$\varphi_{\beta\beta} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

## Samoadjungované operátory a jejich vlastní čísla a vektory, souvislost se symetrickými bilineárními formami

**Definice 3.29.** Nechť $U, V$ jsou prostory se standardním skalárním součinem nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$, $\varphi\colon U \to V$ lineární zobrazení. Řekneme, že $\varphi^*\colon V \to U$ je *adjungované zobrazení* k lineárnímu zobrazení $\varphi$, jestliže $\forall \mathbf{u} \in U$, $\mathbf{v} \in V$ platí

$$\langle \varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_V = \langle \mathbf{u}, \varphi^*(\mathbf{v}) \rangle_U .$$

**Věta 3.30.** *Nechť $\alpha$ je ortonormální báze v $U$, $\beta$ ortonormální báze ve $V$ a nechť $A = \varphi_{\beta\alpha}$. Pak $\varphi^*_{\alpha\beta} = \bar{A}^T$.*

**Definice 3.31.** Buď $V$ vektorový prostor se standardním skalárním součinem nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$, $\varphi\colon V \to V$ lineární zobrazení. Zobrazení $\varphi$ nazveme *samoadjungované*, jestliže $\varphi = \varphi^*$, tj. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí

$$\langle \varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \varphi(\mathbf{v}) \rangle .$$

**Věta 3.32.** *Lineární operátor $\varphi\colon V \to V$ je samoadjungovaný právě tehdy, když $\varphi_{\alpha\alpha} = \overline{\varphi_{\alpha\alpha}}^T$, kde $\alpha$ je nějaká báze vektorového prostoru $V$.*

**Definice 3.33.** Čtvercová komplexní matice $A$ splňující $A = \bar{A}^T$ se nazývá *Hermitovská*. Čtvercová reálná matice $A$ splňující $A = A^T$ se nazývá *symetrická*.

**Věta 3.34.** *Buď $V$ vektorový prostor se standardním skalárním součinem (nad $\mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$), $\varphi$ samoadjungovaný operátor. Pak platí:*

- *všechny kořeny charakteristického polynomu jsou reálné (i když jsme nad $\mathbb{C}$),*
- *jsou-li $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ vlastní vektory k různým vlastním číslům, jsou kolmé,*
- *ve $V$ existuje ortonormální báze tvořená vlastními vektory.*

*Poznámka* 3.35. Protože vlastní vektory tvoří ortonormální bázi $\alpha$, platí

$$\varphi_{\alpha\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

**Důsledek 3.36.** *Pro každou reálnou symetrickou matici $A$ existuje ortogonální matice $P$ tak, že matice $P^T A P = P^{-1} A P$ je diagonální.*

**Důsledek 3.37** (pro kvadratické formy)**.** *Pro každou kvadratickou formu $g\colon V \to \mathbb{R}$, kde $V$ je euklidovský prostor, existuje ve $V$ ortonormální báze $\alpha$ taková, že v jejich souřadnicích je*

$$g(\mathbf{u}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2,$$

*kde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice kvadratické formy (každé tolikrát, kolik je jeho násobnost).*

**Věta 3.38.** *Kolmá projekce na podprostor je samoadjungovaný operátor.*

# Kapitola 4

# Vlastní čísla a vektory, Jordanův kanonický tvar

## Vlastní čísla, vlastní vektory, charakteristický polynom, algebraická a geometrická násobnost, vlastní podprostor, podobnost matic

**Definice 4.1.** Dvě čtvercové matice $A$, $B$ nazveme *podobné*, jestliže existuje regulární matice $P$ taková, že $B = P^{-1}AP$.

**Definice 4.2.** Vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ se nazývá *vlastní vektor* lineárního operátoru $\varphi$, jestliže existuje $\lambda \in T$ takové, že $\varphi(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. Číslo $\lambda$ se nazývá *vlastní číslo*.

*Poznámka* 4.3. Uvažme matici $A = \varphi_{\alpha\alpha}$. Pak pro vlastní vektor $\mathbf{v}$ příslušný vlastnímu číslu $\lambda$ platí

$$\begin{aligned} A\,(\mathbf{v})_\alpha &= \lambda\,(\mathbf{v})_\alpha\,, \\ A\,(\mathbf{v})_\alpha &= \lambda E\,(\mathbf{v})_\alpha\,, \\ (A - \lambda E)\,(\mathbf{v})_\alpha &= \mathbf{o}, \\ \det(A - \lambda E) &= 0. \end{aligned}$$

Stačí nám tedy vypočítat hodnoty $\lambda$, které nulují determinant matice $A - \lambda E$.

**Definice 4.4.** *Charakteristickým polynomem* lineárního operátoru $\varphi\colon V \to V$ rozumíme polynom $\det\left((\varphi)_{\alpha\alpha} - \lambda E\right)$ v proměnné $\lambda$, kde $\alpha$ je libovolná báze $V$.

**Věta 4.5.** *Charakteristické polynomy podobných matic jsou stejné.*

**Věta 4.6.** *$\lambda$ je vlastní číslo operátoru $\varphi \Leftrightarrow \lambda$ je kořenem charakteristického polynomu v $T$.*

**Definice 4.7.** *Algebraickou násobností* vlastního čísla $\lambda$ operátoru $\varphi$ rozumíme násobnost $\lambda$ jakožto kořene charakteristického polynomu.
*Geometrickou násobností* vlastního čísla $\lambda$ operátoru $\varphi$ rozumíme dimenzi $\ker(\varphi - \lambda id)$.

**Definice 4.8.** Podprostor $\ker(\varphi - \lambda id)$ pro vlastní číslo $\lambda$ se nazývá *vlastní podprostor* příslušný vlastnímu číslu $\lambda$.

**Definice 4.9.** Nechť $\varphi\colon V \to V$ je lineární operátor, $U \subseteq V$ podprostor. Řekneme, že podprostor $U$ je *invariantní* vzhledem k $\varphi$, jestliže $\varphi(U) \subseteq U$.

**Věta 4.10.** *Každý vlastní podprostor je invariantní.*

**Věta 4.11.** *Nechť $\varphi\colon V \to V$, $U \subseteq V$ je jeho invariantní podprostor. Nechť $\alpha$ je báze $V$, která vznikla doplněním báze podprostoru $U$. Potom*

$$\varphi_{\alpha\alpha} = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right),$$

*kde $A$ má rozměry dimenze podprostoru $U$.*

**Věta 4.12.** *Nechť $\varphi\colon V \to V$ je lineární operátor a $V = U \oplus W$ jeho invariantní podprostory. Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je báze $V$ taková, že $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ je báze $U$, $\mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n$ je báze $W$. Pak*

$$\varphi_{\alpha\alpha} = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right),$$

*kde $A$ je matice $k \times k$, $C$ je matice $(n-k) \times (n-k)$.*

## Jordanův kanonický tvar

*Poznámka* 4.13. Pro unitární a samoadjungované operátory existuje ortonormální báze tvořená vlastními vektory, ve které má matice diagonální tvar. Naším cílem bude nalézt nějakou bázi $\alpha$ tak, aby matice $\varphi_{\alpha\alpha}$ byla co nejjednodušší. Tvar matice $\varphi_{\alpha\alpha}$ budeme nazývat Jordanův kanonický tvar.

**Definice 4.14.** Řekneme, že matice $A$ je v *Jordanově kanonickém tvaru*, jestliže je blokově diagonální

$$A = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & J_3(\lambda_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J_m(\lambda_m) \end{pmatrix},$$

kde $J_i(\lambda_i)$ jsou tzv. *Jordanovy buňky*, které mají tvar

$$J_i(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

**Věta 4.15** (O Jordanově kanonickém tvaru)**.** *Buď $V$ vektorový prostor nad tělesem $T$. Nechť $\varphi\colon V \to V$ je lineární operátor,* $\dim V = n$. *Nechť $\varphi$ má v $T$ $n$ vlastních čísel včetně algebraických násobností. Pak ve $V$ existuje báze $\alpha$ taková, že $\varphi_{\alpha\alpha} = J$ je matice v Jordanově kanonickém tvaru. Tato matice je určena jednoznačně až na pořadí buněk.*

**Věta 4.16** (O Jordanově kanonickém tvaru nad $\mathbb{C}$)**.** *Je-li $V$ komplexní vektorový prostor a $\varphi\colon V \to V$ lineární operátor, pak existuje báze $\alpha$ ve $V$ taková, že $\varphi_{\alpha\alpha}$ je matice v Jordanově kanonickém tvaru.*

**Věta 4.17** (Pravidla pro počítání Jordanova kanonického tvaru)**.**

- *Na úhlopříčce jsou vlastní čísla operátoru, každé tolikrát, kolik je jeho algebraická násobnost.*
- *Počet buněk příslušných vlastnímu číslu $\lambda$ je roven jeho geometrické násobnosti.*
- *Velikost největší buňky s vlastním číslem $\lambda$ je nejmenší číslo $k$ takové, že $h\left(A-\lambda E\right)^k =$ $= n-$algebraická násobnost $\lambda$.*

*Poznámka* 4.18. Na tomto místě si odvodíme, jak spočítat počet a velikost buněk v JKT příslušný libovolnému vlastnímu číslu $\lambda$. Předpokládejme, že $A$ je matice $n \times n$, $J$ je matice téhož zobrazení v JKT. Nejprve si uvědomme, že pro libovolnou regulární matici $P$ platí

$$\left(P^{-1}AP-\lambda E\right)^n = \left(P^{-1}AP-\lambda P^{-1}EP\right)^n = \left[P^{-1}\left(A-\lambda E\right)P\right]^n = P^{-1}\left(A-\lambda E\right)^n P.$$

Pro naše potřeby bude podstatné, že se rovnají příslušné hodnosti matic, zejména když uvážíme matici $J = P^{-1}AP$ v Jordanově kanonickém tvaru.

- Označme hodnost matice $J-\lambda E = n-k_1 = n_1$. Počet buněk velikosti alespoň jedna příslušných vlastnímu číslu $\lambda$ je $k_1$. Pro Jordanovu buňku velikosti 4 vypadá situace takto:

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix} \xrightarrow{J-\lambda E} \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

  Hodnost každého takového bloku klesne právě o jedna.

- Označme hodnost matice $\left(J-\lambda E\right)^2 = n_1-k_2 = n_2$. Počet buněk velikosti alespoň dva příslušných vlastnímu číslu $\lambda$ je $k_2$. Pro Jordanovu buňku velikosti 4 vypadá situace takto:

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix} \xrightarrow{J-\lambda E} \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{J-\lambda E} \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

- Tímto způsobem můžeme pokračovat (tj. výsledek vždy násobit maticí $J-\lambda E$), dokud se hodnost výsledné matice bude zmenšovat. Snadno pak odvodíme počty a velikosti jednotlivých buněk pro vlastní číslo $\lambda$.
- Buňky příslušné jinému vlastnímu číslu $\widetilde{\lambda}$ budou mít na diagonále čísla $\widetilde{\lambda}-\lambda \neq 0$. Zejména budou mít plnou hodnost a ta se při umocňování nezmění.

Hodnost se nijak nezmění, když místo neznámé matice $J$ uvážíme zadanou matici $A$. Položme $n = n_0$. Pak platí:

- Buď $r \in \mathbb{N}$. Je-li hodnost matice $\left(A-\lambda E\right)^r = n_{r-1}-k_r = n_r$, pak počet buněk velikosti alespoň $r$ příslušných vlastnímu číslu $\lambda$ je právě $k_r$.
- Počet buněk velikosti právě $r$ je $k_r - k_{r+1}$.

*Poznámka* 4.19. Omezme se na jednu Jordanovu buňku dimenze $k$:

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Uvažme bázi $\alpha = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k)$ příslušnou tomuto podprostoru. Pak musí platit:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{u}_1) &= \lambda \mathbf{u}_1, & (\varphi - \lambda id)\,\mathbf{u}_1 &= \mathbf{o}, \\ \varphi(\mathbf{u}_2) &= \mathbf{u}_1 + \lambda \mathbf{u}_2, & (\varphi - \lambda id)\,\mathbf{u}_2 &= \mathbf{u}_1, \\ \varphi(\mathbf{u}_3) &= \mathbf{u}_2 + \lambda \mathbf{u}_3, & (\varphi - \lambda id)\,\mathbf{u}_3 &= \mathbf{u}_2, \\ &\vdots & &\vdots \\ \varphi(\mathbf{u}_k) &= \mathbf{u}_{k-1} + \lambda \mathbf{u}_k, & (\varphi - \lambda id)\,\mathbf{u}_k &= \mathbf{u}_{k-1}. \end{aligned}$$

**Definice 4.20.** Řekneme, že $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ tvoří *řetězec* pro vlastní číslo $\lambda$ operátoru $\varphi$, jestliže platí

$$\mathbf{u}_k \xrightarrow{\varphi - \lambda id} \mathbf{u}_{k-1} \xrightarrow{\varphi - \lambda id} \cdots \xrightarrow{\varphi - \lambda id} \mathbf{u}_2 \xrightarrow{\varphi - \lambda id} \mathbf{u}_1 \xrightarrow{\varphi - \lambda id} \mathbf{o}.$$

*Poznámka* 4.21. Hledání těchto řetězců je podstatné, chceme-li nalézt bázi, ve které má matice lineárního operátoru $\varphi$ Jordanův kanonický tvar. Řetězce pak odpovídají jednotlivým Jordanovým buňkám, jejich délka je přesně velikost příslušné buňky.

# Kapitola 5

# Bilineární a kvadratické formy

## Bilineární a kvadratické formy, matice bilineární formy, diagonalizace symetrické bilineární formy

**Definice 5.1.** Buď $V$ vektorový prostor nad tělesem $T$. Zobrazení $f\colon V \times V \to T$ nazveme *bilineární formou*, jestliže pro libovolné tři vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ a libovolné $a \in T$ platí

- $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + f(\mathbf{v}, \mathbf{w})$,
- $f(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + f(\mathbf{u}, \mathbf{w})$,
- $f(a\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}, a\mathbf{v}) = af(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

**Definice 5.2.** Nechť $V$ je vektorový prostor, $\alpha$ jeho báze. Řekneme, že $A$ je *matice bilineární formy* $f\colon V \times V \to T$ v bázi $\alpha = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$, jestliže $a_{ij} = f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$.

*Poznámka* 5.3. Uvažme vektory $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i$, $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{v}_j$ ($\mathbf{x}, \mathbf{y}$ jsou souřadnice vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ v bázi $\alpha$). Pak

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i, \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{v}_j\right) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j f(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j a_{ij} = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}.$$

**Věta 5.4.** *Buďte $\alpha, \beta$ dvě báze vektorového prostoru $V$, $P = (id)_{\alpha\beta}$ matice přechodu. Buď $A$ matice bilineární formy $f\colon V \times V \to T$ v bázi $\alpha$. Pak $B = P^T A P$ je matice téže bilineární formy v bázi $\beta$.*

**Definice 5.5.** Dvě čtvercové matice $A, B$ se nazývají *kongruentní*, jestliže existuje regulární matice $P$ taková, že $A = P^T A P$.

**Definice 5.6.** Řekneme, že bilineární forma $f$ na $V$ je *symetrická*, jestliže pro každé $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}, \mathbf{u})$.

**Věta 5.7.** *Každá symetrická bilineární forma má ve vhodné bázi diagonální matici.*

*Poznámka* 5.8. Diagonalizace probíhá stejně jako v případě Gaussovy eliminace, jen musíme po každé řádkové operaci provést tutéž sloupcovou. Navíc platí

$$\left(\begin{array}{c|c} A & E \\ \hline E & \end{array}\right) \overset{ERO+ESO}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{c|c} P^T A P & P^T \\ \hline P & \end{array}\right),$$

kde $P^T A P$ je diagonální matice.

**Definice 5.9.** *Kvadratickou formou* rozumíme zobrazení $g\colon V \to T$ takové, že existuje symetrická bilineární forma $f\colon V \times V \to T$ taková, že pro libovolné $\mathbf{u} \in V$ platí $g(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{u})$. Řekneme, že *bilineární forma* $f$ *určuje kvadratickou formu* $g$.

**Důsledek 5.10.** *Každá kvadratická forma má ve vhodné bázi diagonální matici.*

**Definice 5.11.** Bázi, ve které má kvadratická forma diagonální matici, budeme nazývat *polární bazí.*

*Poznámka* 5.12. Tato báze není určena jednoznačně.

**Definice 5.13.** *Hodností kvadratické formy* rozumíme hodnost její matice v nějaké bázi.

## Sylvestrova věta o setrvačnosti pro reálné kvadratické formy, signatura, pozitivně definitní, negativně definitní a indefinitní kvadratické formy

*Poznámka* 5.14. Dále se budeme zabývat pouze reálnými kvadratickými formami.

**Věta 5.15** (Sylvestrův zákon setrvačnosti)**.** *Nechť* $g\colon V \to \mathbb{R}$ *je kvadratická forma. Pak existuje báze* $\beta$ *v jejíž souřadnicích má* $g$ *vyjádření*

$$g(\mathbf{v}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2,$$

*přičemž* $a_{ii} = -1, 0, 1$ *a počet koeficientů* $-1, 0, 1$ *je nezávislý na výběru báze* $\beta$*.*

**Definice 5.16.** *Signaturou* kvadratické formy nazveme uspořádanou trojici $(s_+, s_-, s_0)$, kde $s_+$ udává počet 1, $s_-$ počet $-1$ a $s_0$ počet 0 v bázi $\beta$ z minulé věty.

**Důsledek 5.17** (Kritérium kongruence symetrických matic)**.** *Dvě symetrické matice* $A, B$ *jsou kongruentní* $\Leftrightarrow$ *příslušné kvadratické formy mají stejnou signaturu.*

**Definice 5.18** (Typy kvadratických forem)**.** Kvadratickou formu $g\colon V \to \mathbb{R}$ nazveme

| | | | |
|---|---|---|---|
| *pozitivně definitní,* | jestliže | $\forall \mathbf{v} \in V,\ \mathbf{o} \neq \mathbf{v}\colon g(\mathbf{v}) > 0,$ | sign: $(n, 0, 0)$, |
| *negativně definitní,* | jestliže | $\forall \mathbf{v} \in V,\ \mathbf{o} \neq \mathbf{v}\colon g(\mathbf{v}) < 0,$ | sign: $(0, n, 0)$, |
| *pozitivně semidefinitní,* | jestliže | $\forall \mathbf{v} \in V\colon g(\mathbf{v}) \geq 0,$ | sign: $s_- = 0$, |
| *negativně semidefinitní,* | jestliže | $\forall \mathbf{v} \in V\colon g(\mathbf{v}) \leq 0,$ | sign: $s_+ = 0$, |
| *indefinitní,* | jestliže | $\exists \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V\colon g(\mathbf{u}) > 0,\ g(\mathbf{v}) < 0,$ | sign: $s_+ > 0$, $s_- > 0$. |

**Věta 5.19** (Sylvestrovo kritérium)**.** *Kvadratická forma je*

- *pozitivně definitní, právě když všechny hlavní minory její matice v libovolné bázi jsou kladné,*
- *negativně definitní, právě když pro hlavní minory* $|A_i|$ *její matice platí* $(-1)^i \cdot \det A_i > 0$*.*

**Definice 5.20.** *Skalárním součinem* nad reálným vektorovým prostorem $V$ rozumíme symetrickou bilineární formu na $V$, jejíž příslušná kvadratická forma je pozitivně definitní.

## Souvislost s hledáním extrémů funkcí více proměnných

*Poznámka* 5.21. Mějme funkci $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, pro kterou existují spojité parciální derivace druhého řádu, a bod $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Uvažme Hessovu matici (matici druhých parciálních derivací) v bodě $\mathbf{x}_0$

$$f''(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Podle Schwarzovy věty je tato matice symetrická. Platí

- $f''(\mathbf{x}_0)$ je pozitivně definitní $\Leftrightarrow$ $f$ je v bodě $\mathbf{x}_0$ konvexní,
- $f''(\mathbf{x}_0)$ je negativně definitní $\Leftrightarrow$ $f$ je v bodě $\mathbf{x}_0$ konkávní.

Nechť je navíc v bodě $\mathbf{x}_0$ stacionární bod, tj. gradient (vektor parciálních derivací) je zde nulový. Pak platí

- $f''(\mathbf{x}_0)$ je pozitivně definitní $\Rightarrow$ $f$ má v bodě $\mathbf{x}_0$ ostré lokální minimum,
- $f''(\mathbf{x}_0)$ je negativně definitní $\Rightarrow$ $f$ má v bodě $\mathbf{x}_0$ ostré lokální maximum,
- $f''(\mathbf{x}_0)$ je indefinitní $\Rightarrow$ $f$ má v bodě $\mathbf{x}_0$ sedlový bod.

# Kapitola 6

# Afinní a euklidovská geometrie

## Definice afinního prostoru a podprostoru, parametrický popis afinních podprostorů, afinní podprostory a soustavy rovnic

**Definice 6.1.** *Afinním prostorem* $\mathcal{A}$ se *zaměřením* $V$ rozumíme neprázdnou množinu $\mathcal{A}$ s vektorovým prostorem $V$, které jsou spolu svázány operací $\overrightarrow{\cdot\,\cdot}\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$ s vlastnostmi

- $\forall A \in \mathcal{A}, \mathbf{v} \in V\ \exists! B \in \mathcal{A}\colon \overrightarrow{AB} = \mathbf{v}$,
- $\forall A, B, C \in \mathcal{A}\colon \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

**Definice 6.2.** Buď $U$ vektorový prostor. *Afinním podprostorem* $\mathcal{M} \subseteq U$ rozumíme neprázdnou podmnožinu tvaru

$$\mathcal{M} = P + V = \{P + \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in V\},$$

kde $P \in U$ je bod, $V \subseteq U$ je vektorový podprostor. Množinu $V$ nazveme *zaměřením* afinního podprostoru $\mathcal{M}$. Značíme $\operatorname{dir} \mathcal{M}$ nebo též $Z(\mathcal{M})$.

*Poznámka* 6.3. Zaměření $V \subseteq U$ podprostoru $\mathcal{M}$ je určeno jednoznačně (tj. $P_1 + V_1 = P_2 + V_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow V_1 = V_2$).

**Definice 6.4.** *Dimenzí* afinního (pod)prostoru rozumíme dimenzi jeho zaměření.

*Poznámka* 6.5. Každý konečnědimenzionální afinní prostor dokážeme vsadit do vektorového prostoru o dimenzi výš, ve kterém bude afinním podprostorem. Naopak, na každém afinním podprostoru je přirozeně definovaná operace $\overrightarrow{\cdot\,\cdot}\colon \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to V$, která ho svazuje se svým zaměřením.

**Definice 6.6.** *Afinní kombinací* bodů $A_0, A_1 \dots, A_k \in \mathcal{M}$ rozumíme bod

$$\sum_{i=0}^{k} t_i A_i, \quad \text{kde } \sum_{i=0}^{k} t_i = 1.$$

**Věta 6.7.** *Neprázdná množina $\mathcal{M}$ je afinní podprostor, právě když s každými $(k+1)$ body $A_0, A_1, \dots, A_k \in \mathcal{M}$ leží v $\mathcal{M}$ i jejich libovolná afinní kombinace.*

**Definice 6.8.** Buď $\mathcal{M}$ afinní podprostor vektorového prostoru $U$. Nechť $\mathcal{M} = A + V$. Nechť $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ je báze vektorového podprostoru $V$. Potom každý vektor $\mathbf{v} \in V$ lze psát jednoznačně ve tvaru $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_k\mathbf{v}_k$. Proto každý bod $X \in \mathcal{M}$ lze psát jednoznačně ve tvaru:

$$X = A + \mathbf{v} = A + a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_k\mathbf{v}_k. \tag{$\star$}$$

$k$-tici $(a_1, a_2, \ldots, a_k)^T$ nazýváme *souřadnice* bodu $X$ v *afinní bázi* $(A, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ afinního podprostoru $\mathcal{M}$. Popis bodů afinního podprostoru ve tvaru ($\star$) se nazývá *parametrický popis*. Bod $A$ se nazývá *počátek souřadnic*.

**Definice 6.9.** Buď $U$ vektorový prostor, $\alpha = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ jeho báze. Buď $A$ matice $k \times n$. Množinu bodů $X \in U$ jejichž souřadnice splňují soustavu lineárních rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ značíme $\mathcal{R}(A \mid \mathbf{b})$. Je-li tato množina neprázdná, tvoří afinní podprostor v $U$. Popis afinního podprostoru pomocí soustavy rovnic se nazývá *implicitní popis*.

**Věta 6.10.** *Každý afinní podprostor $\mathcal{M}$ v $U$ lze zadat parametricky i implicitně.*

*Poznámka* 6.11. Přechod od implicitního k parametrickému popisu znamená vyřešit soustavu rovnic.
Přechod od parametrického k implicitnímu popisu lze provádět následujícím způsobem:

- Uvažme parametrický popis: máme bod $P$ a vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$. Z nich utvoříme matici $\alpha = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$.
- Provedeme úpravu
$$\left(\begin{array}{c|c|c} E & \alpha & P \end{array}\right) \xrightarrow{\text{ERO}} \left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & \alpha_1 & \mathbf{b}_1 \\ \hline A & 0 & \mathbf{b} \end{array}\right),$$
přičemž matici $\alpha$ upravujeme do schodovitého tvaru.

Pak soustava
$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
nám dává implicitní popis stejného afinního prostoru.
Další možnost, jak přejít od parametrického popisu k implicitnímu je uvážit standardní skalární součin a spočítat $V^\perp$. Koeficienty vektorů generujících $V^\perp$ jsou pak koeficienty $a_{ij}$, hodnota vektoru $\mathbf{b}$ se dopočítá dosazením bodu $P$.

**Příklad 6.12.** Nechť je v $\mathbb{R}^3$ dána rovina $\rho = \{(3 + 2t + s, t + 2s, 4 + 3t + 5s) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$. Nalezněte její implicitní popis a proveďte zkoušku.

*Řešení 1.*
$$P = [3, 0, 4], \quad \mathbf{v}_1 = (2, 1, 3)\,, \; \mathbf{v}_2 = (1, 2, 5)\,.$$
Upravujeme matici
$$\left(\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ \hline 1 & 7 & -3 & 0 & 0 & -9 \end{array}\right).$$
Rovina $\rho$ je dána rovnicí
$$x_1 + 7x_2 - 3x_3 = -9.$$
Dosazením původního parametrického vyjádření do této rovnice dostaneme rovnost $-9 = -9$, takže libovolný bod roviny $\rho$ skutečně splňuje tuto rovnici.

*Řešení 2.*
$$P = [3, 0, 4], \quad \mathbf{v}_1 = (2, 1, 3)\,, \; \mathbf{v}_2 = (1, 2, 5)\,.$$
Hledáme vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ takový, že $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{x} \perp \mathbf{v}_2$, tj. $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{x} \rangle = 0 = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{x} \rangle$. Odtud
$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = 0, \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = 0. \end{array}$$

Dostáváme

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = 0, \\ & & 3x_2 & + & 7x_3 & = 0. \end{array}$$

Zavedením parametru $x_3 = -3t$ dostáváme

$$\mathbf{x} = (1, 7, -3)\,.$$

To nám dá rovnici tvaru

$$x_1 + 7x_2 - 3x_3 = c.$$

Dosadíme bod $P$ a vypočteme $c$

$$x_1 + 7x_2 - 3x_3 = -9.$$

**Definice 6.13.** *Afinní obal* bodů $P_0, P_1, \ldots, P_n$ značíme $\mathcal{L}\,(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ a definujeme předpisem

$$\mathcal{L}\,(P_0, P_1, \ldots, P_n) = P_0 + [P_1 - P_0, P_2 - P_0, \ldots, P_n - P_0],$$

kde [ ] značí lineární obal vektorů.

**Věta 6.14.** *Neprázdný průnik dvou afinních podprostorů je afinní podprostor. Afinní obal neprázdné množiny bodů je afinní podprostor.*

**Definice 6.15.** Řekneme, že afinní podprostor $\mathcal{M}$ je *průnikem* afinních podprostorů $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$, jestliže $\mathcal{M} \neq \emptyset$ a $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$. Řekneme, že afinní podprostor $\mathcal{M}$ je *spojením* afinních podprostorů $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$, značíme $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \sqcup \mathcal{M}_2$, jestliže $\mathcal{M}$ je jejich afinním obalem, tj. $\mathcal{M} = \mathcal{L}\,(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$.

**Věta 6.16.** *Buďte $\mathcal{M}_1 = P + V_1$, $\mathcal{M}_2 = Q + V_2$ afinní podprostory. Pak platí*

- $\operatorname{dir} \mathcal{M}_1 \sqcup \mathcal{M}_2 = V_1 + V_2$ *pro* $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 \neq \emptyset$,
- $\operatorname{dir} \mathcal{M}_1 \sqcup \mathcal{M}_2 = V_1 + V_2 + [P - Q]$ *pro* $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset$,
- $\dim \mathcal{M}_1 \sqcup \mathcal{M}_2 = \dim \mathcal{M}_1 + \dim \mathcal{M}_2 - \dim\,(\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2)$ *pro* $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 \neq \emptyset$,
- $\dim \mathcal{M}_1 \sqcup \mathcal{M}_2 = \dim \mathcal{M}_1 + \dim \mathcal{M}_2 + 1 - \dim\,(\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2)$ *pro* $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset$.

*Poznámka* 6.17. Nechť $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ jsou implicitní popisy dvou afinních podprostorů. Implicitní popis jejich průniku je soustava

$$\left(\frac{A}{C}\right)\mathbf{x} = \left(\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{d}}\right).$$

Nechť $A, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ a $B, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_l$ jsou parametrické popisy dvou afinních podprostorů. Parametrickým popisem jejich spojení je

$$A, (B - A)\,, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_l.$$

## Vzájemná poloha afinních podprostorů, afinní zobrazení, euklidovský afinní prostor, vzdálenost a odchylka afinních podprostorů v euklidovském prostoru

**Definice 6.18.** Řekneme, že afinní podprostory $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ jsou

| | | |
|---|---|---|
| *rovnoběžné*, | jestliže | $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset$ a $Z(\mathcal{M}_1) \subseteq Z(\mathcal{M}_2)$ nebo $Z(\mathcal{M}_2) \subseteq Z(\mathcal{M}_1)$, |
| *různoběžné*, | jestliže | $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 \neq \emptyset$ a neplatí $Z(\mathcal{M}_1) \subseteq Z(\mathcal{M}_2)$ ani $Z(\mathcal{M}_2) \subseteq Z(\mathcal{M}_1)$, |
| *mimoběžné*, | jestliže | $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset$ a neplatí $Z(\mathcal{M}_1) \subseteq Z(\mathcal{M}_2)$ ani $Z(\mathcal{M}_2) \subseteq Z(\mathcal{M}_1)$. |

*Poznámka* 6.19. Dalším případem vzájemné polohy je situace, kdy jeden afinní podprostor obsahuje druhý. Dá se definovat i pojem tzv. čátečné rovnoběžnosti (tento případ může nastat až v prostorech dimenze $n \geq 4$).

**Definice 6.20.** Zobrazení $\phi\colon \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$, které je tvaru $\phi(M + \mathbf{u}) = N + \varphi(\mathbf{u})$, kde $M \in \mathcal{M}_1$, $\mathbf{u} \in Z(\mathcal{M}_1)$, $N \in \mathcal{M}_2$ a $\varphi\colon Z(\mathcal{M}_1) \to Z(\mathcal{M}_2)$ je lineární, nazveme *afinním zobrazením.*

**Příklad 6.21.** Buď $\mathcal{M}_1 = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_2 = \mathbb{R}^k$. Zobrazení

$$\phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

kde $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^k$, je afinní.

**Definice 6.22.** *Euklidovským prostorem* rozumíme reálný vektorový prostor se skalárním součinem.

**Definice 6.23.** Nechť $\mathcal{A}$ je afinní prostor, $\operatorname{dir} \mathcal{A}$ je euklidovský prostor. Pak $\mathcal{A}$ nazveme *euklidovským afinním prostorem.*

*Poznámka* 6.24. Skalární součin se přenáší na afinní podprostor z původního vektorového prostoru. Jsme schopni měřit vzdálenost dvou bodů $A, B$ jakožto velikost vektoru $B - A \in Z(\mathcal{M})$.

**Definice 6.25.** Nechť $V$ je euklidovský prostor. *Vzdálenost afinních podprostorů* $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \subseteq V$ definujeme vztahem

$$\operatorname{dist}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) = \inf_{\substack{A \in \mathcal{M}_1 \\ B \in \mathcal{M}_2}} \operatorname{dist}(A, B).$$

**Lemma 6.26.** *Buď $V$ euklidovský prostor, $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ jeho libovolné afinní podprostory. Buďte dále $P \in \mathcal{M}_1, Q \in \mathcal{M}_2$ libovolné. Pak*

$$\operatorname{dist}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) = \operatorname{dist}(P - Q, \operatorname{dir} \mathcal{M}_1 + \operatorname{dir} \mathcal{M}_2).$$

**Definice 6.27.** Nechť $V$ je euklidovský prostor, $\mathcal{M}_1 = A + S, \mathcal{M}_2 = B + T$ jeho afinní podprostory. *Odchylku afinních podprostorů* $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ definujeme jako odchylku jejich zaměření, tj.

$$\measuredangle(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) = \measuredangle(S, T).$$

Odchylku $S, T$ definujeme takto:

- jestliže $S \subseteq T$ nebo $T \subseteq S$, pak $\measuredangle(S, T) = 0$,
- jinak pokud $S \cap T = \{\mathbf{o}\}$, pak $\measuredangle(S, T) = \inf_{\substack{\mathbf{x} \in S, \mathbf{x} \neq \mathbf{o} \\ \mathbf{y} \in T, \mathbf{y} \neq \mathbf{o}}} \measuredangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$,
- jinak označme $S_1 = S \cap (S \cap T)^\perp$, $T_1 = T \cap (S \cap T)^\perp$ a definujeme $\measuredangle(S, T) = \measuredangle(S_1, T_1)$.

# Kapitola 7

# Kuželosečky a kvadriky

## Projektivní prostor, komplexifikace

*Poznámka* 7.1. Budeme zkoumat body afinního prostoru, jejichž souřadnice splňují rovnici tvaru

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1}x_i + a_{n+1,n+1} = 0,$$

kde $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$ a alespoň jedno $a_{ij} \neq 0$ pro $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Tyto rovnice nemusí mít v reálném oboru řešení, proto budeme muset uvažovat komplexní rozšíření afinního prostoru. Zároveň budeme chtít skoumat i nevlastní body těchto objektů (body v nekonečnu), proto budeme muset uvažovat projektivní rozšíření afinního prostoru.

**Definice 7.2.** *Afinním prostorem* $\mathcal{A}$ se *zaměřením* $V$ rozumíme neprázdnou množinu $\mathcal{A}$ s vektorovým prostorem $V$, které jsou spolu svázány operací $\overrightarrow{\cdot\,\cdot}\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$ s vlastnostmi

- $\forall A \in \mathcal{A}, \mathbf{v} \in V\ \exists! B \in \mathcal{A}\colon \overrightarrow{AB} = \mathbf{v}$,
- $\forall A, B, C \in \mathcal{A}\colon \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

**Definice 7.3.** Nechť $V$ je reálný vektorový prostor. Jeho *komplexním rozšířením (komplexifikací)* rozumíme komplexní vektorový prostor $V^{\mathbb{C}}$ určený množinou $V \times V$, na které je definováno sčítání a násobení komplexním skalárem takto:

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + (\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) &= (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)\,,\\ (a + ib)\,(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= (a\mathbf{u} - b\mathbf{v}, b\mathbf{u} + a\mathbf{v})\,.\end{aligned}$$

*Poznámka* 7.4. Ztotožníme $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, 0) + \mathrm{i}\,(\mathbf{v}, 0) = \mathbf{u} + \mathrm{i}\mathbf{v}$.

**Definice 7.5.** Nechť $U, V$ jsou reálné vektorové prostory, $\varphi\colon U \to V$ lineární zobrazení. *Komplexifikací zobrazení* $\varphi$ rozumíme zobrazení $\varphi^{\mathbb{C}}\colon U^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ definované předpisem

$$\varphi^{\mathbb{C}}\,(\mathbf{u} + \mathrm{i}\mathbf{v}) = \varphi\,(\mathbf{u}) + \mathrm{i}\varphi\,(\mathbf{v})\,.$$

**Definice 7.6.** Nechť $\mathcal{A}$ je afinní prostor, jehož zaměření $V$ je reálný vektorový prostor. *Komplexním rozšířením (komplexifikací) afinního prostoru* $\mathcal{A}$ rozumíme množinu $\mathcal{A}^{\mathbb{C}} = \mathcal{A} \times V$ s operací $\overrightarrow{\cdot\,\cdot}^{\mathbb{C}}\colon \mathcal{A}^{\mathbb{C}} \times \mathcal{A}^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ definovanou předpisem

$$\overrightarrow{(A, \mathbf{u})(B, \mathbf{v})}^{\mathbb{C}} = \overrightarrow{AB} + \mathrm{i}(\mathbf{v} - \mathbf{u}).$$

**Definice 7.7.** Nechť $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je afinní zobrazení mezi reálnými afinními prostory. Jeho *komplexní rozšíření* $\phi^{\mathbb{C}}\colon \mathcal{A}^{\mathbb{C}} \to \mathcal{B}^{\mathbb{C}}$ definujeme předpisem

$$\phi^{\mathbb{C}}(A + \mathrm{i}\mathbf{u}) = \phi(A) + \mathrm{i}\varphi(\mathbf{u}),$$

kde $\varphi$ je indukované lineární zobrazení.

**Definice 7.8.** *Projektivním prostorem* dimenze $n$ nad tělesem $T$ (píšeme $P_n(T)$) rozumíme rozklad na množině $T^{n+1} \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$ příslušný ekvivalenci $\sim$, kterou definujeme takto: $(x_1, \dots, x_{n+1}) \sim (y_1, \dots, y_{n+1})$, právě když existuje $0 \neq \lambda \in T$ takové, že $\forall i \in \{1, \dots, n+1\}$ platí $x_i = \lambda y_i$. Bod projektivního prostoru obsahující $(x_1, \dots, x_{n+1})$ budeme značit $[x_1, \dots, x_{n+1}]$. Projektivní prostor dimenze $n$ nad tělesem $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ budeme značit jen $P_n$.

*Poznámka* 7.9. Alternativně: jednorozměrné vektorové podprostory v $(k+1)$-rozměrném vektorovém podprostoru $W_{k+1} \subseteq W_{n+1}$ tvoří $k$-rozměrný projektivní podprostor $P_k$ v projektivním prostoru $P_n$. Prostor $W_{n+1}$ se nazývá *aritmetickým základem* projektivního prostoru $P_n$.

**Definice 7.10.** Nechť $P_n$ a $P_n'$ jsou dva projektivní prostory dimenze $n$. Zobrazení $\phi\colon P_n \to P_n'$ se nazývá *kolineace*, jestliže existuje lineární izomorfismus $\varphi\colon W_{n+1} \to W_{n+1}'$ tak, že

$$\phi\left([\mathbf{u}]\right) = \left[\varphi\left(\mathbf{u}\right)\right]$$

pro všechna $\mathbf{u} \in W_{n+1}$. Kolineace $P_n$ do $P_n$ tvoří grupu, kterou budeme značit $PGL\left(P_n\right)$.

*Poznámka* 7.11.

- Uvažme ve $V \cong T^{n+1}$ nadrovinu danou rovnicí $x_{n+1} = 1$. Pak můžeme rozlišovat v příslušném projektivním prostoru body dvou typů: $[x_1, x_2, \dots, x_n, 1]$ a $[y_1, y_2, \dots, y_n, 0]$. První typ bodů nám zadává afinní nadrovinu (každý bod ztotožňujeme s bodem této nadroviny), druhý typ bodů pak nevlastní body této nadroviny (někdy nazývané směry). Tedy $P_n = \mathcal{A}_n \cup P_{n-1}$.
- Nechť $\mathcal{A}_n$ je $n$-rozměrný afinní prostor ze zaměřením $Z\left(\mathcal{A}_n\right)$. Projektivní $(n-1)$-rozměrný prostor (značený $\nu\left(\mathcal{A}_n\right)$) sestrojený na aritmetickém základu $Z\left(\mathcal{A}_n\right)$ se nazývá *nevlastní podprostor* afinního prostoru $\mathcal{A}_n$.
  Nechť $W_{n+1}$ je $(n+1)$-rozměrný vektorový prostor obsahující $Z\left(\mathcal{A}_n\right)$ jako svůj podprostor. $\mathcal{A}_n$ pak můžeme ztotožnit s nadrovinou ve $W_{n+1}$ rovnoběžnou, nikoli však totožnou, se $Z\left(\mathcal{A}_n\right)$. Prostor
  $$P_n = \mathcal{A}_n \cup \nu\left(\mathcal{A}_n\right)$$
  nazýváme *projektivním rozšířením afinního prostoru* $\mathcal{A}_n$.

**Definice 7.12.** Nechť $P_n$ je $n$-rozměrný projektivní prostor s aritmetickým základem reálným vektorovým prostorem $W_{n+1}$. *Komplexifikací projektivního prostoru* $P_n$ rozumíme prostor $P_n^{\mathbb{C}}$ s aritmetickým základem $W_{n+1}^{\mathbb{C}}$.

## Kvadriky v projektivním a afinním prostoru, pojem polární sdruženosti, projektivní klasifikace

**Definice 7.13.** Buď $\mathcal{A}_n$ reálný afinní prostor. *Nadkvadrikou* v $\mathcal{A}_n$ rozumíme množinu $Q \subseteq \mathcal{A}_n$ všech bodů, jejichž souřadnice v dané bázi splňují rovnici

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1} x_i + a_{n+1,n+1} = 0,$$

kde $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$ a alespoň jedno $a_{ij} \neq 0$ pro $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Nadkvadriky v $\mathcal{A}_2$ se nazývají *kuželosečky*, v $\mathcal{A}_3$ *kvadriky*.

*Poznámka* 7.14. Mnohé rovnice výše uvedeného typu nemají v reálném oboru řešení, proto je výhodné pracovat s nadkvadrikaimi v $\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$.

**Definice 7.15.** Buď $\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$ komplexní rozšíření reálného afinního prostoru. *Nadkvadrikou* v $\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$ rozumíme množinu $Q \subseteq \mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$ všech bodů, jejichž souřadnice v dané bázi splňují rovnici

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1} x_i + a_{n+1,n+1} = 0,$$

kde $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$ a alespoň jedno $a_{ij} \neq 0$ pro $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

*Poznámka* 7.16. Rozšíříme-li nadkvadriku do projektivního prostoru, dostáváme

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} x_i x_j = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 0.$$

Symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ definuje nenulovou reálnou symetrickou bilineární formu $f$ na aritmetickém základu projektivního prostoru předpisem

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}.$$

Dále budeme značit

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & a_{1,(n+1)} \\ & \widetilde{A} & & \vdots \\ & & & a_{n,(n+1)} \\ \hline a_{(n+1),1} & a_{(n+1),2} & \cdots & a_{(n+1),(n+1)} \end{array}\right).$$

**Definice 7.17.** Nechť $P_n$ je reálný projektivní prostor s aritmetickým základem $W_{n+1}$. Nechť $f$ je reálná nenulová symetrická bilineární forma na $W_{n+1}$. *Nadkvadrikou* $Q$ v projektivním prostoru $P_n$ rozumíme množinu bodů $[\mathbf{x}] \in P_n^{\mathbb{C}}$, pro které

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0.$$

**Definice 7.18.** Nechť $Q \subseteq P_n^{\mathbb{C}}$ je nadkvadrika definovaná pomocí formy $f$. Body $[\mathbf{x}], [\mathbf{y}]$ nazveme *polárně sdružené* vzhledem ke $Q$, jestliže

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

**Lemma 7.19.** *Množina polárně sdružených bodů k bodu* $[\mathbf{x}]$ *vzhledem k nadkvadrice* $Q$ *je buď celý projektivní prostor, nebo nějaká nadrovina.*

**Definice 7.20.** Bod $[\mathbf{x}] \in P_n^{\mathbb{C}}$ se nazývá *regulárním bodem* nadkvadriky $Q$, jestliže množina polárně sdružených bodů k $[\mathbf{x}]$ je nadrovina v $P_n^{\mathbb{C}}$. Tato nadrovina se nazývá *polární nadrovina* (v $P_2^{\mathbb{C}}$ jen *polára*).
Bod $[\mathbf{x}] \in P_n^{\mathbb{C}}$ se nazývá *singulárním bodem* nadkvadriky $Q$, jestliže množina polárně sdružených bodů k $[\mathbf{x}]$ je celý prostor $P_n^{\mathbb{C}}$.
Nadkvadrika $Q$ v $P_n^{\mathbb{C}}$ se nazývá *regulární*, pokud jsou všechny její body regulární.
Nadkvadrika $Q$ v $P_n^{\mathbb{C}}$ se nazývá *singulární*, pokud obsahuje nějaký singulární bod.

**Lemma 7.21.** *Nadkvadrika $Q$ v $P_n^{\mathbb{C}}$ je regulární právě tehdy, když hodnost symetrické matice $A$, která ji definuje v souřadnicích, je rovna $n+1$.*

**Definice 7.22.** *Geometrickou bazí* projektivního prostoru $P_n$ rozumíme uspořádanou $(n+2)$-tici bodů $(O_1, \dots, O_{n+1}, E)$ takových, že libovolných $n+1$ z nich je lineárně nezávislých. Body $O_1, \dots, O_{n+1}$ nazýváme *základní body*, bod $E$ *jednotkový bod.*

**Věta 7.23.** *Pro každou dvojici geometrických bazí v $P_n$ existuje právě jedna kolineace převádějící jednu bázi na druhou.*

*Poznámka* 7.24 (Projektivní klasifikace)*.* V projektivním prostoru je klasifikace nadkvadriky dána pouze její signaturou. Speciálně pro kuželosečky dostáváme:
Nechť $Q \subseteq P_2^{\mathbb{C}}$ je kuželosečka. Potom existuje geometrická báze $(O_1, O_2, O_3, E)$ tvořená body $P_2$ v níž je kuželosečka popsána právě jednou z rovnic

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 0 && \text{imaginární regulární kuželosečka,} \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 &= 0 && \text{reálná regulární kuželosečka,} \\ x_1^2 + x_2^2 &= 0 && \text{dvojice imaginárních přímek,} \\ x_1^2 - x_2^2 &= 0 && \text{dvojice reálných přímek,} \\ x_1^2 &= 0 && \text{dvojnásobná přímka.} \end{aligned}$$

## Tečny, asymptoty, střed, afinní klasifikace

**Definice 7.25.** *Tečnou nadrovinou* nadkvadriky $Q \subseteq P_n^{\mathbb{C}}$ v regulárním bodě $X \in Q$ rozumíme polární nadrovinu k $X$.

**Definice 7.26.** Bod $S \in P_n^{\mathbb{C}}$ se nazývá *střed* nadkvadriky $Q$, jestliže je polárně sdružen se všemi nevlastními body.

**Definice 7.27.** *Asymptotickou nadrovinou* k nadkvadrice $Q$ rozumíme tečnou nadrovinu v regulárním nevlasntím bodě.

*Poznámka* 7.28 (Afinní klasifikace kuželoseček)*.* Pro každou kuželosečku $Q$ v $\mathcal{A}_2^{\mathbb{C}}$ lze najít takovou bázi, že v jejích souřadnicích je kuželosečka zadána jednou z rovnic

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + 1 &= 0 && \text{imaginární elipsa,} \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 &= 0 && \text{reálná elipsa,} \\ x_1^2 - x_2^2 - 1 &= 0 && \text{hyperbola,} \\ x_1^2 + 2x_2 &= 0 && \text{parabola,} \\ x_1^2 + x_2^2 &= 0 && \text{dvě imaginární různoběžky,} \\ x_1^2 - x_2^2 &= 0 && \text{dvě reálné různoběžky,} \\ x_1^2 + 1 &= 0 && \text{dvě imaginární rovnoběžky,} \\ x_1^2 - 1 &= 0 && \text{dvě reálné rovnoběžky,} \\ x_1^2 &= 0 && \text{dvojnásobná přímka.} \end{aligned}$$

## Osové roviny, osové přímky, vrcholy, metrická klasifikace

*Poznámka* 7.29. V této časti budeme uvažovat afinní prostor $\mathcal{A}_n$, kde na $Z(\mathcal{A}_n)$ máme skalární součin. Budeme ho značit $\mathcal{E}_n$. Opět ho rozšíříme na $P_n^{\mathbb{C}} = (\mathcal{E}_n \cup \nu(\mathcal{E}_n))^{\mathbb{C}}$.

**Definice 7.30.** Směr $[\mathbf{u}]$ zadaný reálným vektore $\mathbf{u} \in Z(\mathcal{E}_n)$ se nazývá *hlavní směr* nadkvadriky $Q$ v $P_n^{\mathbb{C}}$, jestliže všechny k němu kolmé směry v $Z\left(\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}\right)$ jsou s ním polárně sdružené.

*Poznámka* 7.31. Je-li nadkvadrika $Q$ popsána bilineární formou $f$, pak $[\mathbf{u}]$ je hlavní směr právě tehdy, když

$$\forall \mathbf{v} \colon \mathbf{u} \perp \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0.$$

**Věta 7.32.** *Nenulový vektor* $\mathbf{u}$ *určuje hlavní směr nadkvadriky* $Q$ *právě tehdy, když je vlastním vektorem lineárního zobrazení zadaného maticí* $\widetilde{A}$.

**Důsledek 7.33.** *Ke každé nadkvadrice* $Q$ *v* $\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}$ *existuje ortonormální báze v* $Z(\mathcal{E}_n)$*, jejíž vektory určují hlavní směry nadkvadriky* $Q$*.*

**Definice 7.34.** Vlastní čísla matice $\widetilde{A}$ se nazývají *hlavní čísla* nadkvadriky $Q$.

**Definice 7.35.** *Hlavní nadrovinou* (též *osovou nadrovinou*) rozumíme

- polární nadrovinu k hlavnímu směru, který je regulárním bodem nadkvadriky,
- kolmou nadrovinu k hlavnímu směru, který je singulárním bodem nadkvadriky.

*Poznámka* 7.36. Obecněji: osová nadrovina je právě kolmá nadrovina k nějakému hlavnímu směru.

**Definice 7.37.** Průsečnice dvou osových rovin kvadriky $Q$ se nazývá *osová přímka* kvadriky $Q$. Body průniku osové přímky s kvadrikou se nazývají *vrcholy*.

*Poznámka* 7.38. Pro každou kuželosečku $Q$ v $\mathcal{E}_2^{\mathbb{C}}$ lze najít takovou ortonormální bázi, že v jejích souřadnicích je $Q$ zadána jednou z rovnic

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 + 1 &= 0 && \text{imaginární elipsa,}\\
\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 - 1 &= 0 && \text{reálná elipsa,}\\
\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 - 1 &= 0 && \text{hyperbola,}\\
x_1^2 + 2px_2 &= 0 && \text{parabola,}\\
\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 &= 0 && \text{dvě imaginární různoběžky,}\\
\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 &= 0 && \text{dvě reálné různoběžky,}\\
x_1^2 + p^2 &= 0 && \text{dvě imaginární rovnoběžky,}\\
x_1^2 - p^2 &= 0 && \text{dvě reálné rovnoběžky,}\\
x_1^2 &= 0 && \text{dvojnásobná přímka,}
\end{aligned}$$

kde $a_1 > 0, a_2 > 0, p \neq 0$.

*Poznámka* 7.39 (Převod kvadriky do kanonického tvaru). Mějme zadanou kvadriku maticí $A$. Naším cílem bude nalézt bázi, v níž bude mít kvadrika kanonický tvar.

- Nejprve zkusíme nalézt střed kvadriky $S$.
- Vypočítáme vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ a vlastní vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ matice $\widetilde{A}$.
- Vlastní vektory $\mathbf{u}_i$ nám zadávají hlavní směry $\mathbf{v}_i = \left[\left(\mathbf{u}_i^T, 0\right)^T\right]$.
- Jestliže má kvadrika $Q$ vlastní střed, pak:
  1. Matice kvadriky $Q$ má v bázi $(S, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ tvar
  $$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S^T A S \end{pmatrix}.$$

  V opačném případě ($Q$ nemá vlastní střed):
  1. Vypočítáme nějaké osové nadroviny, z nich osovou přímku.
  2. Nalezneme vrchol $V$ kvadriky jako průnik kvadriky s osovou přímkou. Předpokládejme, že osová přímka vznikla jako průnik polárních nadrovin ke směrům $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$.
  3. Matice kvadriky $Q$ má v bázi $(S, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ tvar
  $$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & V^T A \mathbf{v}_3 \\ 0 & 0 & V^T A \mathbf{v}_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Souvislost jednotlivých klasifikací s projektivní, afinní a ortogonální afinní grupou

**Definice 7.40.** *Projektivní grupou* $PGL(P_n)$ rozumíme množinu všech kolineací $P_n \to P_n$.

**Definice 7.41.** Zobrazení $\phi\colon \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ tvaru $\phi(M + \mathbf{u}) = N + \varphi(\mathbf{u})$, kde $M \in \mathcal{A}_1$, $\mathbf{u} \in Z(\mathcal{A}_1)$, $N \in \mathcal{A}_2$ a $\varphi\colon Z(\mathcal{A}_1) \to Z(\mathcal{A}_2)$ je lineární, nazveme *afinním zobrazením*.
Je-li navíc zobrazení $\varphi$ ortogonální, nazveme $\phi$ *ortogonální afinní zobrazení*.

*Poznámka* 7.42. Snadno rozmyslíme, že

- dvě geometrické báze prostoru $P_n$ na sebe převádí kolineace,
- dvě afinní báze prostoru $\mathcal{A}_n$ na sebe převádí afinní zobrazení,
- dvě ortonormální afinní báze prostoru $\mathcal{A}_n$ na sebe převádí ortogonální afinní zobrazení.

Hledáme-li při klasifikaci vhodnou geometrickou, afinní, respektive ortogonální afinní bázi, vidíme, že používáme pro přechod k této bázi kolineaci, afinní zobrazení, respektive ortogonální afinní zobrazení. Protože tyto zobrazení jsou právě prvky projektivní, afinní, respektive ortogonální afinní grupy, dostáváme tímto vazbu mezi těmito grupami a jednotlivými klasifikacemi.

**Příklad 7.43.** Uvažujme kvadriku zadanou rovnicí

$$x_1^2 - 4x_2^2 + 6x_1x_3 + x_3^2 + 4x_1 + 16x_2 - 4x_3 - 16 = 0.$$

Můžeme vypočítat její vlastní střed $S = (1, 2, -1)^T$ a ortonormální bázi tvořenou vektory $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, -1)^T$, $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^T$, $\mathbf{v}_3 = (0, -1, 0)^T$, které určují hlavní směry. V afinní bázi $(S, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ budeme mít souřadnice $(y_1, y_2, y_3)^T$, pro které platí

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{S}.$$

V homogenních souřadnicích tedy platí

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

Matice přechodu $P$ je tvaru

$$\left(\begin{array}{c|c} C & S \\ \hline \mathbf{o} & 1 \end{array}\right),$$

kde matice $C$ je ortogonální. $P$ je tedy matice ortogonálního afinního zobrazení, tj. je prvkem ortogonální afinní grupy. Metrická klasifikace souvisí s ortogonální afinní grupou tak, že v nových homogenních souřadnicích $\mathbf{y}$ má kvadrika rovnici

$$\mathbf{y}^T P^T A P \mathbf{y} = 0,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 8 & -2 & -16 \end{pmatrix},$$

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Jedná se o jednodílný hyperboloid.

# Kapitola 8

# Základy obecné algebry

## Grupa, podgrupa, homomorfismus grup, součin grup

**Definice 8.1.** Nechť $G$ je množina. Libovoné zobrazení $G \times G \to G$ se nazývá *binární operace* na množině $G$.

**Definice 8.2.** Operace $\cdot$ na množině $G$ se nazývá

- *asociativní*, jestliže $\forall a, b, c \in G\colon a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,
- *komutativní*, jestliže $\forall a, b \in G\colon a \cdot b = b \cdot a$.

**Definice 8.3.** Množina $G$ spolu s operací $\cdot$ na $G$ se nazývá *grupoid*.
Grupoid $(G, \cdot)$ se nazývá

- *komutativní*, jestliže $\cdot$ je komutativní operace na $G$,
- *asociativní* (také *pologrupa*), jestliže $\cdot$ je asociativní operace na $G$.

**Definice 8.4.** Nechť $(G, \cdot)$ je grupoid. Prvek $e \in G$ se nazývá *neutrální prvek* grupoidu $G$, jestliže $\forall a \in G\colon a \cdot e = e \cdot a = a$.

**Definice 8.5.** Pologrupa s neutrálním prvkem se nazývá *monoid*.

**Definice 8.6.** Nechť $(G, \cdot)$ je monoid, $e$ jeho neutrální prvek. Buď $a \in G$. Prvek $b \in G$ se nazývá *inverzním prvkem k prvku a*, jestliže $a \cdot b = b \cdot a = e$.

**Definice 8.7.** $(G, \cdot)$ se nazývá *grupa*, jestliže

- $(G, \cdot)$ je monoid,
- ke každému prvku z $G$ existuje v $G$ prvek inverzní.

Je-li navíc operace $\cdot$ komutativní, řekneme, že grupa $G$ je *komutativní*.

**Definice 8.8.** Grupa $G$ se nazývá *triviální*, jestliže $G = \{e\}$.

**Definice 8.9.** Řekneme, že $H \subseteq G$ je *podgrupou* grupy $(G, \cdot)$ (píšeme $H \leq G$), jestliže

- neutrální prvek $e \in H$,
- pro každé $a \in H$ platí $a^{-1} \in H$,
- pro každé $a, b \in H$ platí $a \cdot b \in H$.

**Definice 8.10.** Nechť $(G_1, \cdot)$ a $(G_2, \star)$ jsou grupy. Řekneme, že $f\colon G_1 \to G_2$ je *homomorfismus grup*, jestliže pro každé $a, b \in G_1$ platí $f(a \cdot b) = f(a) \star f(b)$. Injektivní homomorfismus se nazývá *vnoření*. Bijektivní homomorfismus se nazývá *izomorfismus*.

**Definice 8.11.** Řekneme, že grupy $G_1$ a $G_2$ jsou *izomorfní* (píšeme $G_1 \cong G_2$), jestliže existuje alespoň jeden izomorfismus $f\colon G_1 \to G_2$.

**Definice 8.12.** Nechť $f\colon G_1 \to G_2$ je homomorfismus grup. Množina

$$\ker f = \{a \in G_1 \mid f(a) = e\}$$

se nazývá *jádro homomorfismu* $f$.

**Věta 8.13.** *Buďte* $(G_1, *)$*,* $(G_2, \star)$ *grupy. Definujme na kartézském součinu* $G_1 \times G_2$ *operaci* $\cdot$ *vztahem*

$$[a, b] \cdot [c, d] = [a * c, b \star d].$$

*Pak* $(G_1 \times G_2, \cdot)$ *je grupa.*

**Definice 8.14.** Grupa $(G_1 \times G_2, \cdot)$ z předchozí věty se nazývá *součinem grup* $G_1$ a $G_2$.

# Příklady grup

## Základní příklady

**Příklad 8.15.** Mezi nejznámější příklady grup patří běžné *číselné grupy* jako $(\mathbb{Z}, +)$ a $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$. Příkladem nekomutativní grupy je *obecná lineární grupa* $(\mathbb{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ pro $n \geq 2$, což je grupa invertibilních matic typu $n \times n$ nad $\mathbb{R}$.

## Grupa permutací

**Definice 8.16.** *Permutací* na množině $X$ rozumíme libovolnou bijekci $X \to X$. Množinu všech permutací na množině $X$ značíme $\mathbb{S}(X)$. Pokud $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, pak píšeme jen $\mathbb{S}_n$.

**Příklad 8.17.** $(\mathbb{S}(X), \circ)$ je grupa. Tato grupa není komutativní, má-li $X$ alespoň 3 prvky.

**Definice 8.18.** Nechť $i_1, i_2, \ldots, i_k$ pro $k \geq 2$ jsou vzájemně různé prvky množiny {1,2,. . . , n}. Permutaci z $\mathbb{S}_n$ takovou, že

$$i_1 \mapsto i_2, i_2 \mapsto i_3, \ldots, i_k \mapsto i_1,$$

přičemž pro všechny prvky $a \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $a \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ platí $a \mapsto a$, nazýváme *cyklem* délky $k$ a značíme $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$. Cykly délky dva se nazývají *transpozice*.

**Definice 8.19.** Cykly $(i_1, \ldots, i_k)$, $(j_1, \ldots, j_r) \in \mathbb{S}_n$ se nazývají *nezávislé*, jestliže $\{i_1, \ldots, i_k\} \cap$ $\cap \{j_1, \ldots, j_r\} = \emptyset$.

**Definice 8.20.** Nechť $f \in \mathbb{S}_n$. Řekneme, že $[i, j]$ je *inverze* permutace $f$, jestliže $1 \leq i < j \leq n$ a platí $f(i) > f(j)$. Permutace $f$ se nazývá *sudá* nebo *lichá* podle toho, zda má sudý nebo lichý počet inverzí. Paritu $p(f)$ permutace $f$ definujeme:

$$p(f) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } f \text{ sudá,} \\ -1 & \text{je-li } f \text{ lichá.} \end{cases}$$

### Grupa symetrií

**Definice 8.21.** Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Uvažme pravidelný $n$-úhelník. Označme $\mathbb{D}_n$ množinu shodností tohoto $n$-úhelníka. Pak $(\mathbb{D}_n, \circ)$ je grupa. Tuto grupu nazveme *grupou symetrií* pravidelného $n$-úhelníka.

*Poznámka* 8.22. Snadno se ukáže, že se skutečně jedná o grupu. Tato grupa má $2n$ prvků. Z toho $n$ rotací kolem středu a $n$ osových souměrností. Pokud očíslujeme vrcholy $n$-úhelníka po řadě čísly $1, 2, \ldots, n$, lze každou shodnost ztotožnit s prvkem grupy $\mathbb{S}_n$. Rotace jsou přitom ztotožněny s mocninami cyklu $(1, 2, \ldots, n)$. Každá osová souměrnost je ztotožněna se složením několika nezávislých transpozic.

### Grupa zbytkových tříd

**Definice 8.23.** Nechť $m \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Řekneme, že $a, b$ jsou *kongruentní* modulo $m$ ($a \equiv b \pmod{m}$), jestliže $m \mid a - b$.

*Poznámka* 8.24. Zřejmě $a \equiv b \pmod{m}$, právě když $a, b$ mají stejný zbytek po dělení číslem $m$.

**Definice 8.25.** Nechť $m \in \mathbb{N}$. Pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ definujeme množinu $[a]_m = \{a+k\cdot m \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Tato množina se nazývá *zbytková třída* modulo $m$ obsahující $a$. Množinu všech zbytkových tříd podle modulu $m \in \mathbb{N}$ značíme $\mathbb{Z}_m$. Dostáváme

$$\mathbb{Z}_m = \{[0]_m, [1]_m, \ldots, [m-1]_m\}.$$

**Věta 8.26.** *Pro libovolné $m \in \mathbb{N}$ je $(\mathbb{Z}_m, +)$ komutativní grupa s neutrálním prvkem $[0]_m$. Inverzním prvkem k prvku $[a]_m$ je prvek $[-a]_m$.*

**Věta 8.27.** *Pro libovolné $m \in \mathbb{N}$ je $(\mathbb{Z}_m, \cdot)$ komutativní pologrupa s neutrálním prvkem $[1]_m$.*

**Věta 8.28.** *Zbytková třída $[a]_m$ má v monoidu $(\mathbb{Z}_m, \cdot)$ inverzi, právě když* $\gcd(a, m) = 1$.

**Věta 8.29.** *Označme $\mathbb{Z}_m^\times$ množinu všech zbytkových tříd $[a]_m$, které mají inverzní prvek v monoidu $(\mathbb{Z}_m, \cdot)$. Tedy*

$$Z_m^\times = \{[a]_m \mid a \in \mathbb{Z},\ \gcd(a, m) = 1\}.$$

*Pro každé $m \in \mathbb{N}$ je $(\mathbb{Z}_m^\times, \cdot)$ komutativní grupa.*

## Lagrangeova věta a její důsledky

**Označení 8.30.** Od této chvíle budeme neutrální prvek grupy značit 1.

**Definice 8.31.** Řekneme, že grupa $G$ je *cyklická*, jestliže $G = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

**Definice 8.32.** Nechť $G$ je grupa, $a \in G$. Existuje-li přirozené číslo $n$ tak, že $a^n = 1$, pak nejmenší číslo s touto vlastností se nazývá *řád prvku $a$* v grupě $G$. Neexistuje-li žádné přirozené číslo $n$ s touto vlastností, pak definujeme řád prvku $a$ v grupě $G$ jako $\infty$.

**Definice 8.33.** *Řádem konečné grupy $G$* rozumíme |G|, tj. počet prvků této grupy.

**Definice 8.34.** Nechť $G$ je konečná grupa. Nejmenší $e \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $a \in G$ platí $a^e = 1$, se nazývá *exponent* grupy $G$.

**Definice 8.35.** Nechť $(G, \cdot)$ je grupa, $H$ její podgrupa. Pro libovolný prvek $a \in G$ definujeme jím určenou *levou třídu $a \cdot H$* rozkladu grupy $G$ podle podgrupy $H$ předpisem $a \cdot H = \{a \cdot h \mid h \in H\}$.

**Označení 8.36.** Množinu všech levých tříd grupy $G$ podle podgrupy $H$ budeme značit $G/H$, tj. $G/H = \{a \cdot H \mid a \in G\}$.

**Definice 8.37.** Počet |G/H| všech levých tříd grupy $G$ podle podgrupy $H$ se nazývá *index* podgrupy $H$ v grupě $G$.

**Věta 8.38.** *Buď $H$ podgrupa konečné grupy $G$. Pak $|G| = |G/H| \cdot |H|$.*

**Důsledek 8.39** (Lagrangeova věta)**.** *Řád libovolné podgrupy konečné grupy $G$ je dělitelem řádu grupy $G$.*

**Důsledek 8.40.** *Řád libovolného prvku konečné grupy $G$ je dělitelem řádu grupy $G$.*

**Důsledek 8.41.** *Libovolná grupa prvočíselného řádu je cyklická.*

**Důsledek 8.42.** *Nechť $G$ je konečná grupa řádu $n = |G|$. Pak pro libovolný prvek $a \in G$ platí $a^n = 1$. Jinými slovy: exponent konečné grupy $G$ je dělitelem řádu grupy $G$.*

**Důsledek 8.43** (Eulerova věta)**.** *Nechť $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$ jsou libovolná nesoudělná čísla. Pak platí*

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

## Klasifikace konečných komutativních grup

**Věta 8.44.** *Nechť $(G, \cdot)$ je konečná komutativní grupa, $|G| > 1$. Pak existují (ne nutně různá) prvočísla $p_1, p_2, \ldots, p_s$ a $k_1, k_2, \ldots, k_s \in \mathbb{N}$ tak, že*

$$(G, \cdot) \cong \left(\mathbb{Z}_{p_1^{k_1}}, +\right) \times \left(\mathbb{Z}_{p_2^{k_2}}, +\right) \times \cdots \times \left(\mathbb{Z}_{p_s^{k_s}}, +\right).$$

*Tento rozklad grupy $G$ na součin cyklických $p$-grup je určen jednoznačně až na pořadí činitelů. Zřejmě platí $|G| = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s}$.*

## Okruh, těleso

**Definice 8.45.** Množina $R$ spolu se dvěma binárními operacemi $+$ a $\cdot$ se nazývá *okruh*, jestliže

- $(R, +)$ je komutativní grupa,
- $(R, \cdot)$ je monoid,
- platí distributivní zákony: $\forall a, b, c \in R$: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ (užíváme obvyklé konvence o tom, že násobení má přednost před sčítáním).

**Označení 8.46.** Neutrální prvek grupy $(R, +)$ značíme 0 a nazýváme *nula okruhu $R$*.
Neutrální prvek monoidu $(R, \cdot)$ značíme 1 a nazýváme *jednička okruhu $R$*.
Inverzní prvek k prvku $a \in R$ v grupě $(R, +)$ značíme $-a$ a nazýváme *opačný prvek*.
Budeme dále užívat značení: $a - b$ pro $a + (-b)$.
Mocninu prvku $a \in R$ v grupě $(R, +)$ nazýváme *násobek prvku $a$* a značíme $na$ pro $n \in \mathbb{Z}$.
Množinu nenulových prvků okruhu $R$ značíme $R^*$.

**Definice 8.47.** Okruh $(R, +, \cdot)$ se nazývá *triviální*, jestliže má jediný prvek.
Okruh $(R, +, \cdot)$ se nazývá *komutativní*, je-li monoid $(R, \cdot)$ komutativní.

**Definice 8.48.** Prvky $a, b$ okruhu $R$ se nazývají *dělitelé nuly*, jestliže $a \neq 0$, $b \neq 0$, avšak $a \cdot b = 0$.

**Definice 8.49.** Netriviální komutativní okruh se nazývá *obor integrity*, jestliže nemá dělitele nuly.

**Věta 8.50.** *Netriviální komutativní okruh $R$ je obor integrity, právě když v něm platí zákon o krácení, tj. $\forall a, b, c \in R$ platí*

$$a \neq 0,\ a \cdot b = a \cdot c \quad \Rightarrow \quad b = c.$$

**Definice 8.51.** Nechť $R$ je okruh. Invertibilní prvek monoidu $(R, \cdot)$ se nazývá *jednotka* okruhu $R$. Množinu všech jednotek okruhu $R$ značíme $R^\times$.

**Definice 8.52.** Netriviální komutativní okruh $R$ se nazývá *těleso*, jestliže je každý jeho nenulový prvek jednotkou.

**Věta 8.53.** *Netriviální komutativní okruh $R$ je těleso, právě když $R^* = R^\times$, tedy právě když $(R^*, \cdot)$ je grupa.*

**Věta 8.54.** *Každé těleso je oborem integrity. Každý konečný obor integrity je těleso.*

**Definice 8.55.** Nechť $R$ je okruh. Nejmenší přirozené číslo $n$ takové, že $n1 = 0$, se nazývá *charakteristika* okruhu $R$. Pokud takové $n$ neexistuje, řekneme, že charakteristika okruhu $R$ je nula. Charakteristiku okruhu $R$ budeme značit $\operatorname{char} R$.

**Věta 8.56.** *Nechť $R$ je obor integrity. Pak char $R$ je buď nula, nebo prvočíslo.*

**Věta 8.57.** *Nechť $R$ je obor integrity. Pak pro libovolný $a \in R^*$ platí, že*

- *pokud char $R = 0$, pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ je $ka \neq 0$,*
- *pokud char $R = p > 0$, pak řád prvku $a$ v grupě $(R, +)$ je $p$.*

**Důsledek 8.58.** *Je-li $R$ obor integrity, pak nenulové prvky grupy $(R, +)$ mají stejný řád. Je-li $R$ konečné těleso charakteristiky $p$, pak grupa $(R, +)$ je izomorfní s grupou $(\mathbb{Z}_p, +) \times \cdots \times (\mathbb{Z}_p, +)$. Počet prvků konečného tělesa $R$ je tedy mocninou jeho prvočíselné charakteristiky $p$.*

## Homomorfismus okruhů

**Definice 8.59.** Nechť $(R, +, \cdot)$ a $(S, \boxplus, \star)$ jsou okruhy. Zobrazení $f\colon R \to S$ se nazývá *homomorfismus okruhů*, jestliže

- pro každé $a, b \in R$ platí $f(a + b) = f(a) \boxplus f(b)$,
- pro každé $a, b \in R$ platí $f(a \cdot b) = f(a) \star f(b)$,
- $f(1_R) = 1_S$.

Injektivní homomorfismus se nazývá *vnoření*. Bijektivní homomorfismus se nazývá *izomorfismus*. O okruzích $R, S$ řekneme, že jsou izomorfní (píšeme $R \cong S$), existuje-li alespoň jeden izomorfismus $R \to S$.

**Definice 8.60.** Nechť $f\colon R \to S$ je homomorfismus okruhů. Množina

$$\ker f = \{a \in R \mid f(a) = 0\}$$

se nazývá *jádro homomorfismu $f$*.

**Věta 8.61.** *Homomorfismus okruhů $f\colon R \to S$ je injektivní, právě když* $\ker f = \{0\}$.

## Svazy

**Definice 8.62.** *Svazem* rozumíme uspořádanou množinu $(G, \leq)$, v níž mají každé dva prvky $a, b \in G$ své infimum $a \wedge b$ a své supremum $a \vee b$.

**Věta 8.63.** *Nechť $(G, \vee, \wedge)$ je množina se dvěma idempotentními ($\forall a \in G\colon a \vee a = a \wedge a = a$), asociativními a komutativními operacemi, které jsou spolu svázány* absorpčními zákony*, tj. platí*

$$\forall a, b \in G\colon a \vee (b \wedge a) = a \wedge (b \vee a) = a.$$

*Pak platí*

- $\forall a, b \in G\colon a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$,
- *definujeme-li na $G$ operaci tak, že pro libovolné prvky $a, b \in G$ klademe*

  $$a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b,$$

  *pak je $\leq$ uspořádání na $G$ takové, že $(G, \leq)$ je svaz, v němž pro libovolné prvky $a, b \in G$ je prvek $a \vee b$ jejich supremum a prvek $a \wedge b$ jejich infimum.*

**Definice 8.64.** *Úplným svazem* rozumíme uspořádanou množinu $(G, \leq)$ v níž má každá podmnožina supremum a infimum.

**Věta 8.65.** *Nechť $(G, \leq)$ je uspořádaná množina. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- *$(G, \leq)$ je úplný svaz.*
- *$(G, \leq)$ má nejmenší prvek a každá neprázdná podmnožina množiny $G$ má v uspořádané množině $(G, \leq)$ supremum.*
- *$(G, \leq)$ má největší prvek a každá neprázdná podmnožina množiny $G$ má v uspořádané množině $(G, \leq)$ infimum.*

*Poznámka* 8.66 (Příklady úplných svazů)*.* S pomocí předchozí věty lze rozmyslet, že

- $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$ je úplný svaz,
- $(\mathbb{N} \cup \{0\}, |)$ je úplný svaz,
- všechy podalgebry libovolné $\Omega$-algebry tvoří úplný svaz vzhledem k inkluzi, zejména
  - všechny podgrupy libovolné grupy tvoří úplný svaz,
  - všechny podokruhy libovolného okruhu tvoří úplný svaz,
  - všechna podtělesa libovolného tělesa tvoří úplný svaz,
  - všechny vektorové podprostory libovolného vektorového prostoru tvoří úplný svaz,
- všechny normální podgrupy libovolné grupy tvoří úplný svaz,
- všechny ideály libovolného okruhu tvoří úplný svaz.

# Kapitola 9

# Polynomy

## Polynomy, ireducibilní polynomy a kořeny polynomů

**Definice 9.1.** Nechť $R$ je okruh. *Polynomem* na okruhem $R$ rozumíme nekonečnou posloupnost $f = (f_0, f_1, f_2, \ldots)$, kde $f_i \in R$ pro každé $i = 0, 1, 2, \ldots$ a platí, že množina $\{i \in \mathbb{N}_0 \mid f_i \neq 0\}$ je konečná. Prvky $f_0, f_1, f_2, \ldots$ nazýváme *koeficienty* polynomu $f$. Množinu všech polynomů nad okruhem $R$ budeme značit $R[x]$.

**Věta 9.2.** *Nechť $R$ je okruh. Na množině $R[x]$ definujeme operace $+, \cdot$ takto:*

$$(f+g)_i = f_i + g_i, \quad (f \cdot g)_i = \sum_{k=0}^{i} f_k \cdot g_{i-k}.$$

*Pak $(R[x], +, \cdot)$ je okruh. Je-li $R$ komutativní, pak je i $R[x]$ komutativní.*

**Definice 9.3.** Okruh $R[x]$ se nazývá *okruh polynomů* nad okruhem $R$.

**Označení 9.4.** Polynom $(a, 0, 0, \ldots)$ se nazývá *konstantní*, lze jej ztotožnit s $a \in R$.
Polynom $0 = (0, 0, 0, \ldots)$ se nazývá *nulový*. Ostatní polynomy se nazývají *nenulové*.
Budeme využívat standardního značení: $(0, 1, 0, 0, \ldots) = x$, $(0, 0, 1, 0, \ldots) = x^2, \ldots$.

**Definice 9.5.** Nechť $f$ je nenulový polynom nad okruhem $R$. Největší $n \geq 0$ takové, že $f_n \neq 0$, se nazývá *stupeň* polynomu $f$, značíme $st\,(f)$. Koeficient $f_n$ se pak nazývá *vedoucí koeficient* polynomu $f$. Stupeň nulového polynomu klademe roven $-\infty$, jeho vedoucí koeficient nedefinujeme.

**Definice 9.6.** Nenulový polynom se nazývá *normovaný*, je-li jeho vedoucí koeficient roven 1.

*Poznámka* 9.7. Můžeme formulovat větu o dělení dvou polynomů (kde vedoucí koeficienty jsou jednotky okruhu $R$) se zbytkem, provádět Euklidův algoritmus u polynomů nad tělesem. Pro polynomy nad tělesem platí i Bezoutova rovnost.

**Definice 9.8.** Nechť $R$ je těleso $f, g \in R[x]$ nenulové polynomy. Označme $\gcd(f, g)$ normovaný největší společný dělitel polynomů $f$ a $g$. Řekneme, že $f$ a $g$ jsou *nesoudělené*, je-li $\gcd(f, g) = 1$.

**Definice 9.9.** Nechť $R$ je okruh. $f \in R[x]$ se nazývá *ireducibilní polynom* nad $R$, jestliže $f$ není konstantní a nelze jej rozložit na součin dvou nekonstantních polynomů z okruhu $R[x]$.

**Definice 9.10.** Nechť $R$ je okruh, $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in R[x]$, $c \in R$. Pak prvek $a_n \cdot c^n + \cdots + a_1 \cdot c + a_0 \in R$ značíme $f\,(c)$ a nazýváme *hodnotou polynomu* $f$ v prvku $c$.

**Věta 9.11.** *Nechť $R$ je komutativní okruh, $f, g \in R[x]$, $c \in R$. Pak platí:*

- $(f+g)(c) = f(c) + g(c)$,
- $(f \cdot g)(c) = f(c) \cdot g(c)$.

**Důsledek 9.12.** *Nechť $R$ je komutativní okruh, $c \in R$. Pak zobrazení $\varphi\colon R[x] \to R$ určené předpisem $\varphi(f) = f(c)$ pro každé $f \in R[x]$ je homomorfismus okruhů.*

**Definice 9.13.** Nechť $R$ je okruh, $f \in R[x]$, $c \in R$. Řekneme, že $c$ je *kořenem* polynomu $f$, jestliže $f(c) = 0$.

**Věta 9.14.** *Nechť $R$ je komutativní okruh, $f \in R[x]$, $c \in R$. Pak $c$ je kořenem polynomu $f$, právě když $(x-c) \mid f$ v okruhu $R[x]$.*

**Definice 9.15.** Nechť $R$ je komutativní okruh, $f \in R[x]$, $f \neq 0$, $c \in R$, $f(c) = 0$. Přirozené číslo $k$ se nazývá *násobnost* kořene $c$ polynomu $f$, jestliže $(x-c)^k \mid f$ a $(x-c)^{k+1} \nmid f$ v okruhu $R[x]$. Kořeny násobnosti jedna se nazývají *jednoduché*.

**Věta 9.16.** *Nechť $R$ je obor integrity, $f \in R[x]$, $f \neq 0$. Polynom $f$ má nejvýše $st(f)$ kořenů v $R$, počítáno i s násobností.*

**Definice 9.17.** Nechť $R$ je okruh, $f = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \in R[x]$. *Derivací* polynomu $f$ rozumíme polynom

$$f' = n a_n x^{n-1} + \cdots + 2 a_2 x + a_1.$$

**Věta 9.18.** *Nechť $R$ je komutativní okruh, $f \in R[x]$, $c \in R$, $k \in \mathbb{N}$. Je-li $c$ $k$-násobným kořenem polynomu $f$, pak je $c$ kořenem polynomů $f', f'', \ldots, f^{(k-1)}$.*

**Věta 9.19.** *Nechť $R$ je komutativní okruh, $f \in R[x]$, $c \in R$, $k \in \mathbb{N}$. Nechť $charR = 0$ nebo $charR > k$. Pak $c$ je $k$-násobným kořenem polynomu $f$, právě když je $c$ kořenem polynomů $f', f'', \ldots, f^{(k-1)}$ a není kořenem polynomu $f^{(k)}$.*

## Základní věta algebry, charakterizace ireducibilních polynomů nad $\mathbb{R}$, racionální kořeny polynomů nad $\mathbb{Q}$

**Věta 9.20** (Základní věta algebry)**.** *Každý nekonstantní polynom $f \in \mathbb{C}[x]$ má v $\mathbb{C}$ kořen.*

**Definice 9.21.** Těleso $R$ se nazývá *algebraicky uzavřené*, jestliže každý nekonstantní polynom $f \in R[x]$ má v $R$ kořen.

**Věta 9.22.** *Je-li komplexní číslo $c$ kořenem polynomu $f \in \mathbb{R}[x]$, pak i číslo $\bar{c}$ komplexně sdružené s číslem $c$ je kořenem polynomu $f$.*

**Věta 9.23.** *Pro libovolný polynom $f \in \mathbb{R}[x]$ platí, že $f$ je ireducibilní nad $\mathbb{R}$, právě když je $f$ lineární, nebo je $f = ax^2 + bx + c$ kvadratický polynom se záporným diskriminantem $b^2 - 4ac < 0$.*

**Věta 9.24.** *Nechť $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ je nekonstantní polynom stupně $n$. Nechť dále $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$, $\gcd(r, s) = 1$ taková, že $\frac{r}{s}$ je kořen polynomu. Pak platí:*

- $r \mid a_0$,
- $s \mid a_n$,
- $(sm - r) \mid f(m)$ *pro každé* $m \in \mathbb{Z}$.

**Věta 9.25** (Gauss)**.** *Libovolný polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$ je ireducibilní nad $\mathbb{Z}$, právě když je ireducibilní nad $\mathbb{Q}$.*

**Věta 9.26** (Eisensteinovo kritérium)**.** *Nechť $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ je nekonstantní polynom stupně $n$. Jestliže existuje prvočíslo $p$ takové, že*

- $p \mid a_{n-1}, \ldots, p \mid a_1,\ p \mid a_0,$
- $p \nmid a_n,$
- $p^2 \nmid a_0,$

*pak je $f$ ireducibilní nad $\mathbb{Q}$.*

## Konstrukce konečných těles

**Věta 9.27.** *Buď $R$ obor integrity. Pak $\mathrm{char} R$ je buď nula, nebo prvočíslo.*

**Věta 9.28.** *Každé konečné těleso má $p^n$ prvků, kde $p$ je prvočíslo a $n \in \mathbb{N}$.*

**Definice 9.29.** Nechť $R$ je okruh. Neprázdná množina $I \subseteq R$ se nazývá *ideál* okruhu $R$, jestliže

- $\forall a, b \in I\colon a + b \in I,$
- $\forall a \in I, r \in R\colon a \cdot r, r \cdot a \in I.$

**Věta 9.30.** *Nechť $R$ je okruh $I$ jeho ideál. Zavedeme-li na rozkladu $R/I = \{a + I \mid a \in R\}$, kde $a + I = \{a + j \mid j \in I\}$ operace pomocí reprezentantů, dostáváme okruh $(R/I, +, \cdot)$.*

**Definice 9.31.** Okruh $(R/I, +, \cdot)$ nazýváme *faktorokruh* $R$ podle ideálu $I$.

**Definice 9.32.** Nechť $R$ je okruh, $I$ jeho ideál. Řekneme, že $I$ je

- *maximální ideál* okruhu $R$, jestliže $I \neq R$ a neexistuje ideál $J \subseteq R$ splňující $I \subset J \subset R$,
- *prvoideál* okruhu $R$, jestliže $I \neq R$ a $\forall a, b \in R$ platí: $a \cdot b \in I \Rightarrow a \in I$ nebo $b \in I$.

**Věta 9.33.** *Nechť $R$ je komutativní okruh, $I$ jeho ideál. Pak platí:*

- *$I$ je prvoideál $\Leftrightarrow$ $R/I$ je obor integrity,*
- *$I$ je maximální ideál $\Leftrightarrow$ $R/I$ je těleso.*

**Věta 9.34.** *Nechť $R$ je těleso, $f \in R[x]$ je nenulový polynom. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- *$(f)$ je maximální ideál okruhu $R[x]$.*
- *$(f)$ je prvoideál okruhu $R[x]$.*
- *$f$ je ireducibilní polynom nad $R$.*

**Věta 9.35.** *Nechť $T$ je konečné těleso, $p$ jeho charakteristika. Pak $T$ je jednoduchým rozšířením tělesa $\mathbb{Z}_p$, tj. $T = \mathbb{Z}_p(\alpha)$, přičemž $\alpha \in T$ je algebraické nad $\mathbb{Z}_p$.*

**Věta 9.36.** *Nechť $p$ je libovolné prvočíslo, $n \in \mathbb{N}$ libovolné. Pak existuje těleso o $p^n$ prvcích.*

**Věta 9.37.** *Pro každé prvočíslo $p$ a libovolné $n \in \mathbb{N}$ existuje alespoň jeden ireducibilní (nad $\mathbb{Z}_p$) normovaný polynom $f \in \mathbb{Z}_p[x]$ jehož stupeň je $n$.*

**Věta 9.38.** *Libovolná dvě konečná tělesa o stejném počtu prvků jsou izomorfní.*

**Věta 9.39.** *Buďte $p$ prvočíslo, $n \in \mathbb{N}$ libovolné. Buď dále $f \in \mathbb{Z}_p[x]$ ireducibilní normovaný polynom stupně $n$. Faktorokruh $\mathbb{Z}_p[x]/(f)$ je těleso o $p^n$ prvcích.*

**Příklad 9.40.** Zkonstruujte těleso o 16 prvcích a nalezněte generátor jeho multiplikativní grupy.

*Řešení.* Nejprve vyjádříme číslo 16 jako mocninu prvočísla (pokud by to nešlo, takové těleso neexistuje). Zřejmě $16 = 2^4$. Hledáme proto ireducibilní normovaný polynom stupně 4 nad tělesem $\mathbb{Z}_2$. Tento polynom nesmí mít žádný kořen v $\mathbb{Z}_2$ a nesmí být ani součinem dvou ireducibilních polynomů stupně dva. Nejprve si proto rozmyslíme, jak vypadají ireducibilní kvadratické polynomy nad tělesem $\mathbb{Z}_2$. To jsou právě ty polynomy, které nemají v $\mathbb{Z}_2$ kořen. Snadno rozmyslíme, že takový polynom je jediný:

$$x^2 + x + 1.$$

Zřejmě totiž musí obsahovat $x^2$, aby byl kvadratický, absolutní člen, aby neměl kořen 0 a pak nutně musí obsahovat i lineární člen, aby neměl kořen 1. Snadno vypočítáme

$$\left(x^2 + x + 1\right)^2 = x^4 + x^2 + 1.$$

Nyní jsme připraveni zkonstruovat bikvadratický polynom nad $\mathbb{Z}_2$. To je takový polynom, který nemá kořen a není roven polynomu $x^4 + x^2 + 1$. Musí obsahovat člen $x^4$, aby byl požadovaného stupně. Dále musí obsahovat absolutní člen, aby neměl nulový kořen. Aby neměl kořen 1, musí mít lichý počet členů. Ireducibilní bikvadratické polynomy jsou tedy

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \quad x^4 + x^3 + 1, \quad x^4 + x + 1.$$

Je jedno, který z těchto polynomů využijeme pro konstrukci hledaného tělesa. Je však výhodné vzít takový polynom, který má co nejvyšší počet nulových koeficientů a který má nenulové koeficienty u členů s nižším stupněm. Proto hledané těleso budeme konstruovat jako

$$\mathbb{Z}_2[x]/(x^4 + x + 1).$$

V tomto tělese pak počítáme s polynomy standardním způsobem, přičemž platí $x^4 = x + 1$. Každý polynom budeme chtít s pomocí tohoto pravidla zredukovat na nejvýše kubický polynom. Označme

$$f = x^4 + x + 1, \quad \alpha = x + (f).$$

Budeme chtít rozhodnout, zda $\alpha$ je generátorem multiplikativní grupy našeho tělesa. Nejprve spočítáme $\left|(\mathbb{Z}_2[x]/(f))^\times\right| = 15$, vždyť se jedná o všechny prvky s výjimkou nuly. Proto generátor bude mít řád 15. Abychom ukázali, že $\alpha$ je generátor, stačí tedy ověřit, že $\alpha^3 \neq 1 + (f)$ a $\alpha^5 \neq 1 + (f)$:

$$\alpha^3 = x^3 + (f) \neq 1 + (f),$$
$$\alpha^5 = x \cdot x^4 + (f) = x \cdot (x + 1) + (f) = x^2 + x + (f) \neq 1 + (f).$$

Nalezli jsme tedy generátor multiplikativní grupy tělesa o 16 prvcích. Je jím $\alpha = x + (f)$. Pro ilustraci uvedeme ještě celou multiplikativní grupu vyjádřenou pomocí mocnin $\alpha$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\alpha = x + (f)$ | $\alpha^5 = x^2 + x + (f)$ | $\alpha^9 = x^3 + x + (f)$ | $\alpha^{13} = x^3 + x^2 + 1 + (f)$ |
| $\alpha^2 = x^2 + (f)$ | $\alpha^6 = x^3 + x^2 + (f)$ | $\alpha^{10} = x^2 + x + 1 + (f)$ | $\alpha^{14} = x^3 + 1 + (f)$ |
| $\alpha^3 = x^3 + (f)$ | $\alpha^7 = x^3 + x + 1 + (f)$ | $\alpha^{11} = x^3 + x^2 + x + (f)$ | $\alpha^{15} = 1 + (f)$ |
| $\alpha^4 = x + 1 + (f)$ | $\alpha^8 = x^2 + 1 + (f)$ | $\alpha^{12} = x^3 + x^2 + x + 1 + (f)$ | |

## Numerické metody hledání kořenů polynomů

**Věta 9.41** (Sturmova)**.** *Nechť $f(x)$ je polynom neobsahující násobné kořeny. Počet reálných kořenů polynomu $f(x)$ v intervalu $[a,b]$ je roven $W(b)-W(a)$, kde $W(y)$ je počet znaménkových změn ve Sturmově posloupnosti v bodě $y$.*

*Poznámka* 9.42 (Konstrukce Sturmovy posloupnosti)*.* Buď $f(x)$ polynom bez násobných kořenů. Pak klademe

- $P_0(x) = f(x)$,
- $P_1(x) = -P_0'(x)$,
- $P_n(x)$ bereme jako záporně vzatý zbytek po dělení polynomu $P_{n-2}(x)$ polynomem $P_{n-1}(x)$,
- poslední polynom ve Sturmově posloupnosti nemá reálné kořeny.

*Poznámka* 9.43*.* K hledání kořenů polynomů můžeme použít všechny metody používané k řešení nelineárních rovnic (metoda sečen, regula falsi, atd.). Běžně se používá *Newtonova metoda*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Jako počáteční aproximaci volíme libovolné číslo větší než největší kořen polynomu $f$.

**Věta 9.44.** *Nechť*

$$A = \max\{|a_1|,\dots,|a_n|\},\ B = \max\{|a_0|,\dots,|a_{n-1}|\},$$

*kde $a_k$, $k = 0,1,\dots,n$, $a_0a_n \neq 0$ jsou koeficienty polynomu $f$. Pak pro všechny kořeny $\xi_k$, pro $k = 0,1,\dots,n$, polynomu $f$ platí*

$$|\xi_k| \leq 1 + \frac{A}{|a_0|}.$$

**Věta 9.45.** *Nechť $f$ je polynom stupně $n \geq 2$. Nechť všechny kořeny $\xi_n \leq \xi_{n-1} \leq \cdots \leq \xi_1$ jsou reálné. Pak posloupnost $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ určená Newtonovou metodou je konvergentní klesající posloupnost pro každou počáteční aproximaci $x_0 > \xi_1$, $\xi_1 = \lim_{k\to\infty} x_k$.*

*Poznámka* 9.46*.* Pro hledání komplexních kořenů polynomu se využívá Bairstowova metoda. Jejím cílem je odštěpit kvadratický polynom s komplexními kořeny, který umíme vyřešit.

# Kapitola 10

# Metrické prostory

## Metrika, příklady různých metrik, otevřené, uzavřené množiny, uzávěr množiny, vnitřek množiny

**Definice 10.1.** Buď $P \neq \emptyset$. Zobrazení $\rho\colon P \times P \to \mathbb{R}_0^+$ nazveme *metrikou* na množině $P$, jestliže

- $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
- $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$.

Dvojici $(P, \rho)$ nazýváme *metrickým prostorem.*

**Příklad 10.2.**

- $P \neq \emptyset$

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases} \qquad \textit{diskrétní metrika}$$

- $P = \mathbb{R}$

$$\rho(x, y) = |x - y| \qquad \textit{přirozená metrika}$$

- $P = \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$$\rho_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \qquad \textit{součtová}$$

$$\rho_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \qquad \textit{euklidovská}$$

$$\rho_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{i=1,2,\ldots,n} |x_i - y_i| \qquad \textit{maximová}$$

- $P = C([a, b])$, tj. prostor všech spojitých funkcí na $[a, b]$

$$\rho_C(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| \qquad \textit{maximální metrika}$$

$$\rho_I(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x \qquad \textit{integrální metrika}$$

**Definice 10.3.** *Vzdálenost množin* $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $A, B \subseteq P$ definujeme předpisem

$$\rho(A, B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \rho(x, y) .$$

*Vzdálenost* bodu $a$ od množiny $B \neq \emptyset$ definujeme předpisem

$$\rho(a, B) = \rho(\{a\}, B) .$$

*Průměr množiny* $A \neq \emptyset$ definujeme předpisem

$$\mathrm{d}(A) = \sup_{\substack{x \in A \\ y \in A}} \rho(x, y) .$$

*Průměr prázdné množiny* klademe roven nule.

**Definice 10.4.** Je-li $\mathrm{d}(A) < \infty$, řekneme, že množina $A$ je *ohraničená (omezená)*.

**Definice 10.5.** *Uzávěrem množiny* $A \neq \emptyset$ rozumíme množinu $\bar{A} = \{x \in P \mid \rho(x, A) = 0\}$.
*Uzávěr prázdné množiny* definujeme jako prázdnou množinu.

**Definice 10.6.** Řekneme, že množina $A$ je *uzavřená*, jestliže $A = \bar{A}$.
Řekneme, že množina $A$ je *otevřená*, jestliže $P \setminus A$ je uzavřená.

**Věta 10.7.** *Pro* $A, B \in P$ *platí*

- $\bar{P} = P$,
- $A \subseteq \bar{A}$,
- $A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$,
- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$,
- $\bar{A} = \bar{\bar{A}}$.

**Definice 10.8.** *Okolím bodu* $a \in P$ rozumíme množinu $\mathscr{O}(a) = \{x \in P \mid \rho(x, a) < \epsilon\}$ pro nějaké $\epsilon > 0$.

**Definice 10.9.** Buďte $x_0 \in P$, $A \subseteq P$. Bod $x_0$ nazveme

- *vnitřním bodem*, jestliže $\exists \mathscr{O}(x_0) \subseteq A$,
- *hraničním bodem*, jestliže $\forall \mathscr{O}(x_0)$ platí $\mathscr{O}(x_0) \cap A \neq \emptyset$ a $\mathscr{O}(x_0) \cap (P \setminus A) \neq \emptyset$,
- *hromadným bodem*, jestliže $\forall \mathscr{O}(x_0)$ existuje nekonečně mnoho bodů množiny $A$ v tomto okolí,
- *izolovaným bodem*, jestliže $\exists \mathscr{O}(x_0)$ takové, že $\mathscr{O}(x_0) \cap A = \{x_0\}$.

**Definice 10.10.**

- *Vnitřkem* množiny $A$ (značíme $A^\circ$) rozumíme množinu všech jejích vnitřních bodů,
- *hranicí* množiny $A$ (značíme $\mathrm{h}(A)$, $\partial A$) rozumíme množinu všech jejích hraničních bodů,
- *derivací* množiny $A$ (značíme $A'$) rozumíme množinu všech jejích hromadných bodů,
- *adherencí* množiny $A$ rozumíme množinu všech jejích izolovaných bodů.

## Limita posloupnosti bodů, limita funkce mezi metrickými prostory, spojitost funkce v bodě, spojitost funkce na celém prostoru

**Definice 10.11.** Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq P$ *konverguje* v metrice $\rho$ k bodu $x_0 \in P$, jestliže $\rho(x_n, x_0) \to 0$ v $\mathbb{R}$. Píšeme $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$. Zapsáno pomocí kvantifikátorů:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \colon \rho(x_n, x_0) < \epsilon.$$

**Definice 10.12.** Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *Cauchyovská*, jestliže $\rho(x_m, x_n) \to 0$ pro $\min(m, n) \to \infty$. Zapsáno pomocí kvantifikátorů:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m, n \geq n_0 \colon \rho(x_m, x_n) < \epsilon.$$

**Věta 10.13.** *Buď $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq P$ posloupnost. Pak platí:*

- *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*
- *Každá konvergentní posloupnost je Cauchyovská.*
- *Pokud $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$, pak k $x_0$ konverguje i každá vybraná podposloupnost.*

**Definice 10.14.** Dvě metriky $\rho, \bar{\rho}$ na $P$ nazveme *ekvivalentní*, jestliže $x_n \xrightarrow{\rho} x_0 \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\bar{\rho}} x_0$.

**Věta 10.15.** *Množina $A$ je uzavřená, právě když pro každou konvergentní posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq$ $\subseteq A$, $x_n \xrightarrow{\rho} x_0 \in P$ platí $x_0 \in A$.*

**Definice 10.16.** Buďte $(P, \rho)$, $(Q, \tau)$ metrické prostory. Řekneme, že zobrazení $f \colon P \to Q$ má *limitu* $L \in Q$ v bodě $x_0 \in P$, jestliže platí

$$\forall \mathscr{O}_\epsilon(L) \ \exists \mathscr{O}_\delta(x_0) \ \forall x \in \mathscr{O}_\delta(x_0) : f(x) \in \mathscr{O}_\epsilon(L).$$

**Definice 10.17.** Buďte $(P, \rho)$, $(Q, \tau)$ metrické prostory. Zobrazení $f \colon P \to Q$ nazveme *spojité v bodě* $x_0 \in P$, jestliže $\forall \mathscr{O}(f(x_0)) \ \exists \mathscr{O}(x_0)$ takové, že $\underbrace{\forall x \in \mathscr{O}(x_0) \text{ je } f(x) \in \mathscr{O}(f(x_0))}_{f(\mathscr{O}(x_0)) \subseteq \mathscr{O}(f(x_0))}$.

Řekneme, že funkce $f$ je *spojitá na* $P$, jestliže je spojitá v každém bodě $x \in P$.

**Věta 10.18.** *Zobrazení $f \colon P \to Q$ je spojité v bodě $x_0 \in P \Leftrightarrow$ pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq$ $\subseteq P$, $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$ je $f(x_n) \xrightarrow{\tau} f(x_0)$.*

## Kompaktní množiny v metrických prostorech, úplný metrický prostor

**Definice 10.19.** Řekneme, že metrický prostor $(P, \rho)$ je *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq P$ lze vybrat konvergentní podposloupnost.

**Definice 10.20.** Množinu $A \subseteq P$ nazveme *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq$ $\subseteq A$ lze vybrat konvergentní podposloupnost, která konverguje v $A$.

**Věta 10.21.** *Buď $\emptyset \neq A \subseteq P$ kompaktní množina v metrickém prostoru $(P, \rho)$. Pak $A$ je ohraničená a uzavřená.*

**Věta 10.22.** *Buďte $(P, \rho)$, $(Q, \tau)$ metrické prostory, $f \colon P \to Q$ spojité zobrazení. Buď dále $A \subseteq P$ kompaktní množina. Pak $f(A) \subseteq Q$ je kompaktní.*

**Definice 10.23.** Řekneme, že metrický prostor $(P, \rho)$ je *úplný*, jestliže v něm každá Cauchyovská posloupnost konverguje.

**Věta 10.24.** *Buď $(P, \rho)$ úplný metrický prostor, $A \subseteq P$ jeho uzavřená podmnožina. Pak je také $(A, \rho)$ úplný metrický prostor.*

## Banachova věta o kontrakci

*Poznámka* 10.25. Speciálním případem spojitých zobrazení jsou tzv. Lipschitzovská zobrazení.

**Definice 10.26.** Buďte $(P,\rho)$, $(Q,\tau)$ metrické prostory. Řekneme, že zobrazení $f\colon P\to Q$ je *Lipschitzovské*, jestliže $\exists L>0$ takové, že $\forall x,y\in P$ platí $\tau\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)\leq L\cdot\rho\left(x,y\right)$. Je-li navíc $L<1$, nazývá se $f$ *kontrakce.*

**Definice 10.27.** Buď $(P,\rho)$ metrický prostor, $f\colon P\to P$. Bod $x_0\in P$ se nazývá *pevným bodem* zobrazení $f$, jestliže $f\left(x_0\right)=x_0$.

**Věta 10.28** (Banachova věta o kontrakci)**.** *Buď $(P,\rho)$ úplný metrický prostor, $f\colon P\to P$ kontrakce. Pak $f$ má jediný pevný bod.*

*Důkaz.* Definujme posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq P$ takto:

- zvolme $x_1\in P$ libovolně,
- $\forall i\in\mathbb{N}$ položme $x_{i+1}=f\left(x_i\right)$.

Je-li $x_1=x_2$, máme pevný bod. Předpokládejme tedy, že $x_1\neq x_2$. Pak $\forall n\in\mathbb{N}$ platí:

$$\rho\left(x_n,x_{n+1}\right)\leq L^{n-1}\rho\left(x_1,x_2\right).$$

Z trojúhelníkové nerovnosti platí pro všechna $m,n\in\mathbb{N}$, $m>n$

$$\begin{aligned}\rho\left(x_n,x_m\right)&\leq\rho\left(x_n,x_{n+1}\right)+\rho\left(x_{n+1},x_{n+2}\right)+\cdots+\rho\left(x_{m-1},x_m\right)\leq\\&\leq\rho\left(x_1,x_2\right)\left(L^{n-1}+L^n+\cdots+L^{m-2}\right)\leq\rho\left(x_1,x_2\right)\left(L^{n-1}+L^n+\dots\right)=\rho\left(x_1,x_2\right)\frac{L^{n-1}}{1-L}.\end{aligned}$$

Ukážeme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je Cauchyovská. Pro $L<1$, je $L^{n-1}\to 0$ pro $n\to\infty$. Proto $\forall\epsilon>0$ $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tak, že $\forall n\geq n_0$ platí

$$\rho\left(x_1,x_2\right)\frac{L^{n-1}}{1-L}<\epsilon.$$

Proto $\rho\left(x_n,x_m\right)\xrightarrow{\rho}0$ pro $\min\left(m,n\right)\to\infty$. Předpokládali jsme, že $(P,\rho)$ je úplný metrický prostor, proto tato posloupnost konverguje k nějakému $x_0\in P$.
Ukážeme, že $x_0$ je pevný bod zobrazení $f$. Předpokládejme sporem, že tomu tak není. Potom

$$\rho\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)=\epsilon>0.$$

$\forall n\in\mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}\rho\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)&\leq\rho\left(x_0,x_n\right)+\rho\left(x_n,f\left(x_0\right)\right)=\rho\left(x_0,x_n\right)+\rho\left(f\left(x_{n-1}\right),f\left(x_0\right)\right)\leq\\&\leq\underbrace{\rho\left(x_0,x_n\right)}_{\to 0}+L\underbrace{\rho\left(x_{n-1},x_0\right)}_{\to 0}.\end{aligned}$$

Proto lze $\rho\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ shora ohraničit například $\frac{\epsilon}{2}$ a dostáváme spor. Proto je $x_0$ pevný bod.
Nyní chceme ukázat, že $x_0$ je jediný pevný bod. Předpokládejme sporem, že i $y_0$ je pevný bod. Pak platí:

$$\begin{gathered}\rho\left(x_0,y_0\right)=\rho\left(f\left(x_0\right),f\left(y_0\right)\right)\leq L\cdot\rho\left(x_0,y_0\right),\\\rho\left(x_0,y_0\right)\left(1-L\right)\leq 0.\end{gathered}$$

Protože $1-L>0$, platí $\rho\left(x_0,y_0\right)=0$, tedy $x_0=y_0$.

# Kapitola 11

# Derivace, parciální derivace a diferenciál

## Definice a geometrický význam derivace, parciální derivace a diferenciálu

**Definice 11.1.** Zobrazení $f\colon M \to \mathbb{R}$, kde $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$, nazýváme *reálnou funkcí n proměnných.* Množinu $M$ nazýváme *definičním oborem* funkce $f$, značíme $D(f)$.

*Poznámka* 11.2. Uvažme případ $n = 1$.
Přímka procházející bodem $(x_0, y_0)$ a $(x_1, y_1)$, kde $x_0 \neq x_1$ má směrnici

$$k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Uvážíme nyní směrnici sečny funkce $f$ v bodech $x_0 \neq x_1$

$$k = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Odtud dostáváme směrnici tečny (jakožto limity sečny)

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

**Definice 11.3.** Buď $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce a $x_0 \in D(f)$ bod. Existuje-li

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

nazýváme tuto limitu *derivací funkce* $f$ v bodě $x_0$ a značíme $f'(x_0)$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ nebo $(f(x))'_{x=x_0}$.

**Definice 11.4.** Nechť je funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ definovaná na nějakém okolí bodu $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots x_{0n})$. *Parciální derivaci* funkce $f$ v bodě $\mathbf{x}_0$ podle proměnné $x_i$ definujeme vztahem:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} = f_{x_i}(\mathbf{x}_0) = \lim_{x_i \to x_{0i}} \frac{f(x_{01}, \dots, x_{0i-1}, x_i, x_{0i+1}, \dots, x_{0n}) - f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0i}, \dots, x_{0n})}{x_i - x_{0i}}.$$

*Poznámka* 11.5. Parciální dervace mají stejný geometrický význam jako derivace funkcí jedné proměnné. Stačí uvážit řez grafem ve směru příslušné osy.

**Definice 11.6.** Má-li funkce $f_{x_i}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ parciální derivaci podle $x_i$ v bodě $\mathbf{x}_0$, nazývá se tato parciální derivace derivací druhého řádu podle $x_i$ dvakrát.

*Poznámka* 11.7. Analogicky definujeme smíšené parciální derivace druhého řádu. Následně parciální derivace vyšších řádů.

**Věta 11.8** (Schwarzova věta o záměnnosti smíšených parciálních derivací)**.** *Má-li* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *spojité parciální derivace* $f_{x_i,x_j}$ *a* $f_{x_j,x_i}$ *v bodě* $\mathbf{x}_0$*, potom jsou tyto parciální derivace záměnné:*

$$f_{x_i,x_j}(\mathbf{x}_0) = f_{x_j,x_i}(\mathbf{x}_0).$$

**Definice 11.9.** Řekneme, že funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *diferencovatelná* v bodě $x_0$, jestliže existuje nějaké okolí $\mathscr{O}(x_0)$ takové, že pro všechny body $x_0 + h \in \mathscr{O}(x_0)$ platí

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + \tau(h),$$

kde $A$ je vhodné číslo a $\tau(h)$ je funkce taková, že $\lim_{h\to 0} \frac{\tau(h)}{h} = 0$.
Je-li funkce $f$ v bodě $x_0$ diferencovatelná, nazývá se $Ah$ *diferenciál* funkce $f$ v bodě $x_0$ a značí se $\mathrm{d}f(x_0)(h)$ nebo jen $\mathrm{d}f(x_0)$.

**Věta 11.10.** *Funkce* $f$ *je v bodě* $x_0$ *diferencovatelná* $\Leftrightarrow$ *existuje vlastní derivace* $f'(x_0)$*. Přitom pro konstantu* $A$ *z předchozí definice platí* $A = f'(x_0)$ *a tedy*

$$\mathrm{d}f(x_0)(h) = f'(x_0)(h).$$

*Píšeme též* $\mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x$*.*

**Definice 11.11.** Řekneme, že funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je *diferencovatelná* v bodě $[x_0, y_0]$ jestliže je v nějakém okolí tohoto bodu definovaná a existují $A, B \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{[h,k]\to[0,0]} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - Ah - Bk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Výraz $Ah + Bk$ se nazývá *diferenciál funkce* $f$ v bodě $[x_0, y_0]$ a značí se $\mathrm{d}f(x_0, y_0)(h, k)$ nebo jen $\mathrm{d}f(x_0, y_0)$.

**Věta 11.12.** *Je-li funkce* $f$ *diferencovatelná v bodě* $[x_0, y_0]$*, pak*

- *je v tomto bodě spojitá,*
- $A = f_x(x_0, y_0)$*,* $B = f_y(x_0, y_0)$ *a tedy*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x + f_y(x_0, y_0)\,\mathrm{d}y = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = \\ = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) \cdot (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)^T. \end{aligned}$$

**Věta 11.13.** *Jsou-li* $f_x$*,* $f_y$ *spojité v* $[x_0, y_0]$*, pak je funkce* $f$ *diferencovatelná v* $[x_0, y_0]$*.*

**Definice 11.14.** Nechť má funkce $f(x, y)$ v $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace až do řádu $m \in \mathbb{N}$. Pak definujeme *diferenciál* $m$*-tého řádu funkce* $f(x, y)$ vztahem:

$$\mathrm{d}^m f(x_0, y_0)(h, k) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}}(x_0, y_0)\, h^j k^{m-j}.$$

*Poznámka* 11.15 (Geometrický význam diferenciálu). Diferenciál je nejlepší lineární aproximací funkce v okolí bodu ve smyslu

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}_0) + \mathrm{d}f(\mathbf{x}_0).$$

## Význam derivace pro vyšetřování průběhu funkce a hledání extrémů

**Věta 11.16.** *Nechť má funkce $f$ na otevřeném intervalu $I$ vlastní derivaci. Pak platí:*

- *Funkce $f$ je neklesající na $I$ právě tehdy, když $f'(x) \geq 0$ na $I$.*
- *Funkce $f$ je rostoucí na $I$ právě tehdy, když $f'(x) \geq 0$ na $I$, přičemž rovnost $f'(x) = 0$ neplatí na žádném podintervalu intervalu $I$.*

*Analogická tvrzení platí pro nerostoucí a klesající funkce.*

**Důsledek 11.17.** *Nechť $f$ má konečnou derivaci na otevřeném intervalu $I$.*

- *Je-li $f'(x) > 0$ na $I$, pak je $f$ rostoucí na $I$.*
- *Je-li $f'(x) < 0$ na $I$, pak je $f$ klesající na $I$.*

**Věta 11.18.** *Nechť má funkce $f$ v bodě $x_0$ lokální extrém a $f'(x_0)$ existuje. Pak $f'(x_0) = 0$.*

**Věta 11.19.** *Nechť $f'(x_0) = 0$. Je-li $f''(x_0) > 0$, pak má funkce $f$ v bodě $x_0$ ostré lokální minimum. Je-li $f''(x_0) < 0$, pak má $f$ v bodě $x_0$ ostré lokální maximum.*

**Věta 11.20.** *Nechť $f$ má vlastní derivaci na otevřeném intervalu $I$. Pak je $f$ na $I$ konvexní (ostře konvexní) právě tehdy, když je funkce $f'$ neklesající (rostoucí) na $I$. Analogické tvrzení platí pro $f$ konkávní (ostře konkávní).*

**Důsledek 11.21.** *Nechť $I$ je otevřený interval a $f$ má na $I$ vlastní druhou derivaci.*

- *Je-li $f''(x) > 0$ na $I$, pak je $f$ na $I$ ostře konvexní.*
- *Je-li $f''(x) < 0$ na $I$, pak je $f$ na $I$ ostře konkávní.*

## Věta o střední hodnotě

**Věta 11.22** (Weierstrassova)**.** *Nechť $f \in C[a,b]$. Pak je $f$ na tomto intervalu ohraničená a nabývá v něm své největší i nejmenší hodnoty.*

**Věta 11.23** (Bolzanova)**.** *Nechť $f \in C[a,b]$. Pak $f$ na tomto intervalu nabývá všech hodnot mezi svou největší a nejmenší hodnotou.*

**Věta 11.24** (Rolleova)**.** *Nechť funkce $f \in C[a,b]$ má v každém bodě intervalu $(a,b)$ vlastní nebo nevlastní derivaci a nechť $f(a) = f(b)$. Pak existuje $c \in (a,b)$ tak, že $f'(c) = 0$.*

**Věta 11.25** (Lagrangeova)**.** *Nechť funkce $f \in C[a,b]$ má v každém bodě intervalu $(a,b)$ vlastní nebo nevlastní derivaci. Pak existuje $c \in (a,b)$ tak, že $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

**Věta 11.26** (Lagrangeova)**.** *Nechť $M$ je obdélník v $\mathbb{R}^2$ a nechť má $f(x,y)$ parciální derivace $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ pro každé $[x,y] \in M$. Nechť $[x_1,y_1], [x_2,y_2] \in M$. Pak existují $c \in (x_1,x_2)$, $d \in (y_1,y_2)$ takové, že*

$$f(x_2,y_2) - f(x_1,y_1) = f_x(c,y_2)(x_2-x_1) + f_y(x_1,d)(y_2-y_1).$$

## L'Hospitalovo pravidlo pro výpočet limit, aproximace funkce Taylorovým polynomem

**Věta 11.27.** *Buď* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^*$*. Nechť je splněna jedna z podmínek*

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$,
- $\lim_{x\to x_0} |g(x)| = \infty$.

*Existuje-li* $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$*, pak existuje také* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *a platí*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Věta 11.28.** *Nechť má funkce* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *v okolí bodu* $x_0$ *vlastní derivace až do řádu* $n+1$ *pro některé* $n \in \mathbb{N}_0$*. Pak pro všechna* $x$ *z tohoto okolí platí*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i + R_n(x),$$

*kde*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1},$$

*přičemž* $\xi$ *je vhodné číslo ležící mezi* $x_0$ *a* $x$*. Toto vyjádření se nazývá* Taylorův vzorec*. Chyba* $R_n(x)$ *se nazývá* zbytek.

**Věta 11.29.** *Nechť má* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *v okolí bodu* $\mathbf{x}_0 = [x_0, y_0]$ *spojité parciální derivace až do řádu* $n+1$ *pro některé* $n \in \mathbb{N}_0$*. Pak pro všechna* $\mathbf{x} = [x, y]$ *z tohoto okolí platí*

$$f(\mathbf{x}) = T_n(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + R_n(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0),$$

*kde*

$$T_n(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\mathrm{d}^i f(\mathbf{x}_0)}{i!} \mathrm{d}\mathbf{x}, \quad R_n(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{\mathrm{d}^{n+1} f(\mathbf{x}_0 + \xi \mathbf{x}_0)}{(n+1)!} \mathrm{d}\mathbf{x},\ \xi \in [0, 1].$$

*Poznámka* 11.30. Uvažme $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Taylorův polynom stupně 2 je tvaru

$$\begin{aligned} T_2(x, y; x_0, y_0) &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ &+ \frac{1}{2}\left[f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2\right]. \end{aligned}$$

## Věta o implicitní funkci

**Definice 11.31.** Nechť $F$ je funkce dvou proměnných, $F(x_0, y_0) = 0$. Označme $M = \{[x, y] \in \in D(F) \mid F(x, y) = 0\}$. Jestliže existuje okolí $U = \{[x, y] \in D(f) \mid |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \epsilon\}$ bodu $[x_0, y_0]$ takové, že množina $M \cap U$ je totožná s grafem funkce $y = f(x)$ pro $|x - x_0| < \delta$, řekneme, že funkce $f$ je v okolí bodu $[x_0, y_0]$ *definovaná implicitně* rovnicí $F(x, y) = 0$.

*Poznámka* 11.32. Funkce $y = f(x)$ je v okolí bodu $[x_0, y_0]$ zadána implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $F(x, f(x)) = 0$ pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

**Věta 11.33.** *Nechť je $F(x,y)$ spojitá na čtverci $R = \{[x,y] \in D(f) \mid |x-x_0| < a, |y-y_0| < a\}$ a nechť $F(x_0,y_0) = 0$. Dále nechť má funkce spojitou parciální derivaci $F_y(x,y)$ v bodě $[x_0,y_0]$ a $F_y(x_0,y_0) \neq 0$. Pak existuje okolí bodu $[x_0,y_0]$ v němž je rovnicí $F(x,y) = 0$ implicitně definovaná jediná funkce $y = f(x)$, která je navíc spojitá. Tedy*

$$\left.\begin{aligned} F(x,y) \ \ &\textit{spojitá} \\ F(x_0,y_0) &= 0 \\ F_y(x,y) \ \ &\textit{spojitá} \\ F_y(x_0,y_0) &\neq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \exists!\ y = f(x)\,,\ \textit{která je spojitá.}$$

## Numerické metody řešení nelineárních rovnic

**Věta 11.34** (Newtonova metoda tečen)**.** *Buď $f(x)$ funkce taková, že existuje jediný kořen $\xi \in [a,b]$.*
*Vlastní metoda:*
*Počáteční aproximace $x_0 \in I$,*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

*Fourierovy podmínky (postačující podmínky konvergence):*

- *$f', f''$ jsou spojité v $[a,b]$,*
- *$f', f''$ nemění v $[a,b]$ znaménko,*
- *$f''(x_0) \cdot f(x_0) > 0$.*

**Věta 11.35** (Metoda sečen)**.** *Buď $f(x)$ funkce taková, že existuje jediný kořen $\xi \in [a,b]$.*
*Vlastní metoda:*
*Počáteční aproximace $x_0 = a$, $x_1 = b$,*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \cdot f(x_k)\,.$$

**Věta 11.36** (Regula falsi)**.** *Buď $f(x)$ funkce taková, že existuje jediný kořen $\xi \in [a,b]$.*
*Vlastní metoda:*
*Počáteční aproximace $x_0 = a$, $x_1 = b$,*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_s}{f(x_k) - f(x_s)} \cdot f(x_k)\,,$$

*kde $s$ je největší index takový, že $f(x_k) \cdot f(x_s) < 0$.*

**Věta 11.37** (Newtonova metoda pro soustavy nelineárních rovnic)**.** *Uvažujme soustavu*

$$\begin{aligned} f_1(x_1,\dots,x_m) &= 0, \\ f_2(x_1,\dots,x_m) &= 0, \\ &\ \,\vdots \\ f_m(x_1,\dots,x_m) &= 0, \end{aligned}$$

*kterou můžeme zapsat ve tvaru*

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{o}.$$

*Označme $J_F$ Jacobiho matici funkce $F$.*
*Vlastní metoda:*

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - J_F^{-1}(\mathbf{x}_k) \cdot F(\mathbf{x}_k)\,.$$

# Kapitola 12

# Extrémy reálných funkcí jedné a více proměnných

## Postačující a nutné podmínky pro existenci extrémů funkcí jedné i více proměnných na otevřené množině

**Definice 12.1.** Řekneme, že funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $\mathbf{x}_0$

- *lokální maximum*, jestliže existuje $\mathscr{O}(\mathbf{x}_0)$ tak, že $\forall \mathbf{x} \in \mathscr{O}(\mathbf{x}_0)$ je $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$,
- *lokální minimum*, jestliže existuje $\mathscr{O}(\mathbf{x}_0)$ tak, že $\forall \mathbf{x} \in \mathscr{O}(\mathbf{x}_0)$ je $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$,
- *ostré lokální maximum*, pokud existuje $\mathscr{O}(\mathbf{x}_0)$ tak, že $\forall \mathbf{x} \in \mathscr{O}(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ je $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0)$,
- *ostré lokální minimum*, jestliže existuje $\mathscr{O}(\mathbf{x}_0)$ tak, že $\forall \mathbf{x} \in \mathscr{O}(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ je $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_0)$.

Lokální maxima a minima nazýváme souhrnně *lokální extrémy.*

**Definice 12.2.** Buď $f$ definovaná na $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

- Řekneme, že funkce $f$ nabývá v bodě $\mathbf{x}_0 \in M$ *globálního maxima* na $M$, jestliže $\forall \mathbf{x} \in M\colon f(x) \leq f(\mathbf{x}_0)$.
- Řekneme, že funkce $f$ nabývá v bodě $\mathbf{x}_0 \in M$ *ostrého globálního maxima* na $M$, jestliže $\forall \mathbf{x} \in M \setminus \{\mathbf{x}_0\}\colon f(x) < f(\mathbf{x}_0)$.
- Řekneme, že funkce $f$ nabývá v bodě $\mathbf{x}_0 \in M$ *globálního minima* na $M$, jestliže $\forall \mathbf{x} \in M\colon f(x) \geq f(\mathbf{x}_0)$.
- Řekneme, že funkce $f$ nabývá v bodě $\mathbf{x}_0 \in M$ *ostrého globálního minima* na $M$, jestliže $\forall \mathbf{x} \in M \setminus \{\mathbf{x}_0\}\colon f(x) > f(\mathbf{x}_0)$.

Globální (někdy též absolutní) minima a maxima souhrnně nazýváme *globální extrémy.*

**Definice 12.3.** Buď $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce a $x_0 \in D(f)$ bod. Existuje-li

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

nazýváme tuto limitu *derivací funkce* $f$ v bodě $x_0$ a značíme $f'(x_0)$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ nebo $(f(x))'_{x=x_0}$.

**Věta 12.4.** *Nechť má funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v bodě $x_0$ lokální extrém a nechť $f'(x_0)$ existuje. Pak $f'(x_0) = 0$.*

**Věta 12.5.** *Buď f funkce spojitá v bodě $x_0$ s vlastní derivací v nějakém ryzím okolí $\mathscr{O}(x_0)\setminus\{x_0\}$.*

- *Jestliže $\forall x \in \mathscr{O}(x_0), x < x_0\colon f'(x) > 0$ a $\forall x \in \mathscr{O}(x_0), x > x_0\colon f'(x) < 0$, pak má funkce $f$ v bodě $x_0$ ostré lokální maximum.*
- *Jestliže $\forall x \in \mathscr{O}(x_0), x < x_0\colon f'(x) < 0$ a $\forall x \in \mathscr{O}(x_0), x > x_0\colon f'(x) > 0$, pak má funkce $f$ v bodě $x_0$ ostré lokální minimum.*

**Věta 12.6.** *Nechť $f'(x_0) = 0$.*

- *Je-li $f''(x_0) > 0$, pak má funkce $f$ v bodě $x_0$ ostré lokální minimum.*
- *Je-li $f''(x_0) < 0$, pak má funkce $f$ v bodě $x_0$ ostré lokální maximum.*

**Věta 12.7.** *Nechť $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$ a $f^{(k)} \neq 0$ pro $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$.*

- *Je-li $k$ sudé, je v bodě $x_0$ lokální extrém funkce. Pro $f^{(k)}(x_0) < 0$ je to maximum, pro $f^{(k)}(x_0) > 0$ je to minimum.*
- *Je-li $k$ liché, pro $f^{(k)}(x_0) > 0$ je $f$ v $x_0$ rostoucí, pro $f^{(k)}(x_0) < 0$ je $f$ v $x_0$ klesající. Zejména se zde nenachází extrém funkce $f$.*

**Definice 12.8.** Nechť je funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definovaná na nějakém okolí bodu $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots x_{0n})$. *Parciální derivaci* funkce $f$ v bodě $\mathbf{x}_0$ podle proměnné $x_i$ definujeme vztahem:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} = f_{x_i}(\mathbf{x}_0) = \lim_{x_i \to x_{0i}} \frac{f(x_{01}, \ldots, x_{0i-1}, x_i, x_{0i+1}, \ldots, x_{0n}) - f(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0i}, \ldots, x_{0n})}{x_i - x_{0i}}.$$

**Definice 12.9.** Buď $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkce, pro kterou existují parciální derivace prvního řádu. Vektor parciálních derivací

$$f'(\mathbf{x}) = \left(f_{x_1}(\mathbf{x}), f_{x_2}(\mathbf{x}), \ldots, f_{x_n}(\mathbf{x})\right)$$

nazýváme *gradient.*

**Definice 12.10.** Bod $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ nazveme *stacionárním bodem* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, pokud $f'(\mathbf{x}_0) = 0$.

**Věta 12.11.** *Pokud má $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lokální extrém v $\mathbf{x}_0$ a pokud existuje $f'(\mathbf{x}_0)$, pak $f'(\mathbf{x}_0) = 0$.*

**Definice 12.12.** Buď $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkce, pro kterou existují parciální derivace druhého řádu. Matici parciálních derivací druhého řádu

$$f''(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{x}) & f_{x_1x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{x_1x_n}(\mathbf{x}) \\ f_{x_2x_1}(\mathbf{x}) & f_{x_2x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{x_2x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(\mathbf{x}) & f_{x_nx_2}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{x_nx_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

nazyváme *Hessova matice*, její determinant *Hessián.*

**Věta 12.13** (Schwarzova věta o záměnnosti smíšených parciálních derivací)**.** *Má-li funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ spojité parciální derivace $f_{x_i,x_j}$ a $f_{x_j,x_i}$ v bodě $\mathbf{x}_0$, potom jsou tyto parciální derivace záměnné:*

$$f_{x_i,x_j}(\mathbf{x}_0) = f_{x_j,x_i}(\mathbf{x}_0).$$

**Důsledek 12.14.** *Má-li funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ spojité parciální derivace druhého řádu v bodě $\mathbf{x}_0$, pak je Hessova matice v tomto bodě symetrická.*

*Poznámka* 12.15. Pro symetrickou matici máme definovanou definitnost a známe kritéria, jak ji snadno zjistit. Platí:

- Všechny hlavní minory matice jsou kladné $\Leftrightarrow$ matice je pozitivně definitní.
- Hlavní minory (od nejmenšího k největšímu) mění znaménko, začínají od záporného $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ matice je negativně definitní.
- Pokud jsou hlavní minory nenulové a mění znaménka jinak $\Rightarrow$ matice je indefinitní.

**Věta 12.16.** *Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je funkce se spojitými parciálními derivacemi druhého řádu a $f'(\mathbf{x}_0) = 0$. Pak platí:*

- *$f''(\mathbf{x}_0)$ je pozitivně definitní $\Rightarrow f$ má v bodě $\mathbf{x}_0$ ostré lokální minimum,*
- *$f''(\mathbf{x}_0)$ je negativně definitní $\Rightarrow f$ má v bodě $\mathbf{x}_0$ ostré lokální maximum,*
- *$f''(\mathbf{x}_0)$ je indefinitní $\Rightarrow f$ má v bodě $\mathbf{x}_0$ sedlový bod.*

## Vázané extrémy

**Definice 12.17.** Buď funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $M \subseteq D(f)$. Bod $\mathbf{x}_0 \in M$ nazveme *lokálním minimem* (respektive *maximem*) *funkce $f(\mathbf{x})$ vzhledem k množině $M$*, jestliže

$$\exists \mathscr{O}(\mathbf{x}_0)\, \forall \mathbf{x} \in \mathscr{O}(\mathbf{x}_0) \cap M\colon f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$$

(respektive $f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})$). Pokud je nerovnost ostrá pro $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$, hovoříme o *ostrém lokálním minimu* (respektive *maximu*) *funkce $f(\mathbf{x})$ vzhledem k množině $M$*.

**Definice 12.18.** Funkce

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(\mathbf{x})$$

se nazývá *Lagrangeova funkce*, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *Lagrangeovy multiplikátory*.

**Definice 12.19.** Nechť množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je dána systémem rovnic $g_i(\mathbf{x}) = 0,\ i = 1, \ldots, m$. Bod $\mathbf{a} \in M$ se nazývá *stacionární bod funkce $f$* na $M$, jestliže existují Lagrangeovy multiplikátory $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ takové, že platí

$$\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_j} - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k(\mathbf{a})}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

**Věta 12.20.** *Nechť $f, g_1, \ldots, g_m\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mají spojité parciální derivace prvního řádu v otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^n$ a nechť v každém bodě množiny $U$ má matice*

$$g'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

*hodnost $m$. Označme $M = \{\mathbf{x} \in D(f) \mid g_i(\mathbf{x}) = 0 \text{ pro } i = 1, \ldots, m\}$. Jestliže má funkce $f$ v bodě $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \in M$ lokální extrém vzhledem k $M$, pak je to stacionární bod $f$ na $M$.*

**Věta 12.21.** *Nechť funkce $f, g_1, \dots, g_m$ mají spojité parciální derivace druhého řádu v bodě $\mathbf{a}$, který je stacionárním bodem $f$ na $M$ a $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ jsou příslušné Lagrangeovy multiplikátory (tj. platí $L'(\mathbf{a}, \lambda) = 0$). Dále nechť má matice*

$$g'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

*v bodě $\mathbf{a}$ hodnost $m$. Jestliže pro každé $0 \neq \mathbf{h} \in Lin\left(g_1'(\mathbf{a}), \dots, g_m'(\mathbf{a})\right)^\perp$ platí*

$$\left\langle L''(\mathbf{a})\,\mathbf{h}, \mathbf{h}\right\rangle > 0, \quad (\textit{respektive } < 0)\,,$$

*má funkce $f$ v bodě $\mathbf{a}$ ostré lokální minimum (respektive maximum) vzhedem k $M$. Jestliže existují $\widetilde{\mathbf{h}}, \bar{\mathbf{h}} \in Lin\left(g_1'(\mathbf{a}), \dots, g_m'(\mathbf{a})\right)^\perp$ taková, že*

$$\left\langle L''(\mathbf{a})\,\widetilde{\mathbf{h}}, \widetilde{\mathbf{h}}\right\rangle > 0 \quad a \quad \left\langle L''(\mathbf{a})\,\bar{\mathbf{h}}, \bar{\mathbf{h}}\right\rangle < 0,$$

*v bodě $\mathbf{a}$ lokální extrém vzhledem k $M$ nenastává.*

**Příklad 12.22.** Najděte extrémy funkce $f(x,y,z) = xy^2z^3$ na množině: $x + 2y + 3z = a$ pro $x, y, z, a > 0$.

*Řešení.* Nejprve zkonstruujeme Lagrangeovu funkci a spočteme stacionární body:

$$\begin{aligned} L(x,y,z,\lambda) &= xy^2z^3 - \lambda\,(x + 2y + 3z - a)\,, \\ L_x(x,y,z,\lambda) &= y^2z^3 - \lambda = 0, \\ L_y(x,y,z,\lambda) &= 2xyz^3 - 2\lambda = 0, \\ L_z(x,y,z,\lambda) &= 3xy^2z^2 - 3\lambda = 0, \\ L_\lambda(x,y,z,\lambda) &= -\,(x + 2y + 3z - a) = 0. \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic dostaneme $2y^2z^3 = 2xyz^3$, odtud $x = y$. Z první a třetí rovnice dostáváme $3y^2z^3 = 3xy^2z^2$, odtud $x = z$. Snadno dostáváme, že stacionárním bodem je

$$P = [a/6, a/6, a/6]\,,$$

přičemž Lagrangeův multiplikátor je $\lambda = x^5 = a^5/6^5$. Spočtěme $L''(P)$:

$$L''(P) = \begin{pmatrix} 0 & 2yz^3 & 3y^2z^2 \\ 2yz^3 & 2xz^3 & 6xyz^2 \\ 3y^2z^2 & 6xyz^2 & 6xy^2z \end{pmatrix}_{x=y=z=a/6} = \frac{a^4}{6^4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Kdyby byla přímo tato matice definitní, mohli bychom o extrému rozhodnout přímo. To není náš případ, proto uvažme $h \in Lin\left((1,2,3)\right)^\perp$. Zjevně, bázi podprostoru kolmého na $(1,2,3)$ tvoří $(2,-1,0)$ a $(1,1,-1)$. Proto $h = k\,(2,-1,0) + l\,(1,1,-1)$. Pro $h \neq 0$ platí

$$\left(k\,(2,-1,0) + l\,(1,1,-1)\right) L''(P) \left(k\,(2,-1,0) + l\,(1,1,-1)\right)^T = \frac{a^4}{6^4}\left(-6k^2 - 3l^2 - 3kl\right) < 0.$$

V bodě $P$ nabývá funkce $f$ lokálního maxima $\frac{a^6}{6^6}$.

# Kapitola 13

# Neurčitý integrál a Riemannův integrál v $\mathbb{R}$

## Primitivní funkce, integrace metodou per partes, integrace podle věty o substituci

**Definice 13.1.** Buďte $f, F$ funkce definované na intervalu $I$. Řekneme, že funkce $F$ je *primitivní* k funkci $f$ na $I$, jestliže $\forall x \in I\colon F'(x) = f(x)$.

**Věta 13.2.** *Buď funkce $f$ spojitá na intervalu $I$. Pak k ní existuje funkce primitivní na $I$.*

**Věta 13.3.** *Nechť $F$ je nějaká primitivní funkce k funkci $f$ na intervalu $I$. Pak $\{F + c \mid c \in \mathbb{R}\}$ je množina všech primitivních funkcí k funkci $f$ na $I$.*

**Definice 13.4.** Množina všech primitivních funkcí k funkci $f$ na intervalu $I$ se nazývá *neurčitý integrál* z funkce $f$ na $I$ a značí se $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, $x \in I$, někdy jen $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

**Věta 13.5.** *Nechť $f, g$ jsou funkce definované na intervalu $I$ a nechť $F$ je primitivní funkce k $f$, $G$ je primitivní funkce ke $g$ na $I$, $a, b \in \mathbb{R}$. Pak je $aF + bG$ primitivní funkce k $af + bg$ na $I$.*

**Věta 13.6** (Metoda per partes)**.** *Nechť funkce $u, v$ mají derivaci na intervalu $I$. Pak*

$$\int u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\,v(x) - \int u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Věta 13.7** (Substituční metoda)**.** *Nechť $f\colon I_1 \to \mathbb{R}$, $\varphi\colon I_2 \to I_1$. Pak*

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t.$$

*Poznámka* 13.8. Odvození metody per partes se dělá přes derivaci součinu:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Odvození metody substituce se dělá přes derivaci složené funkce:

$$[F(\varphi(x))]' = f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,,$$

kde $F$ je primitivní k $f$.

**Příklad 13.9.** Spočtěme $\int \ln x$:

$$\int \ln x = \left| \begin{array}{ccc} \ln x & \to & \frac{1}{x} \\ 1 & \to & x \end{array} \right| = x \ln x - \int 1\mathrm{d}x = x \ln x - x + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

**Příklad 13.10.** Spočtěme $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ na $I = (-1,1)$:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ccc} x & = & \sin t \\ \mathrm{d}x & = & \cos t\,\mathrm{d}t \\ x \in (-1,1) & \Rightarrow & t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right| = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) = \frac{1}{2}(t + \sin t\cos t) = \frac{1}{2}\left(t + \sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

## Definice Riemannova integrálu pomocí dělení intervalů, výpočet Riemannova integrálu pomocí primitivní funkce

**Označení 13.11.** Pro jednoduchost budeme dále značit $[a,b] = I$.

**Definice 13.12.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
*Dělením* intervalu $I$ rozumíme každou konečnou množinu $D \subseteq I$ takovou, že $a \in D$, $b \in D$.
Dělení budeme zapisovat jako konečnou posloupnost:

$$D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \quad \text{kde } a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Čísla $x_k$ nazýváme *dělicí body*, intervaly $[x_{k-1}, x_k]$ *dělicí intervaly* dělení $D$.
Množinu všech dělení na intervalu $I$ značíme $\mathcal{D}(I)$ nebo jenom $\mathcal{D}$.

**Definice 13.13.** Buďte $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f$ omezená na $I$. Nechť $D = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{D}$. Označme

$$m_k = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \quad M_k = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

pro $k = 1, \dots, n$ a položme

$$s(D,f) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}), \quad S(D,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}).$$

Číslo $s(D,f)$ nazýváme *dolní součet*, číslo $S(D,f)$ *horní součet* funkce $f$ při dělení $D$.

**Věta 13.14.** *Buď $f$ omezená funkce na intervalu $I$, $c, d \in \mathbb{R}$ taková, že $\forall x \in I\colon c \le f(x) \le d$. Pak pro libovolná $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ platí*

$$c(b-a) \le s(D_1, f) \le S(D_2, f) \le d(b-a).$$

**Definice 13.15.** Nechť $f$ je omezená na $I$. Pak klademe

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{def}{=} \sup\{s(D,f) \mid D \in \mathcal{D}\},$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{def}{=} \inf\{S(D,f) \mid D \in \mathcal{D}\}.$$

Číslo $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ nazýváme *dolním Riemannovým integrálem*, číslo $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ *horním Riemannovým integrálem* funkce $f$ přes interval $I$.

**Věta 13.16.** *Buďte $f$ omezená na $I$, $c, d \in \mathbb{R}$ taková, že $\forall x \in I\colon c \le f(x) \le d$. Pak*

$$c(b-a) \le \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le d(b-a).$$

**Definice 13.17.** Buď $f$ omezená na $I$. Jestliže platí $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$, nazývá se funkce $f$ *integrovatelná* v Riemannově smyslu na $I$. V tomto případě definujeme *Riemannův integrál* na $I$

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

V opačném případě říkáme, že funkce $f$ *není integrovatelná* na $I$.

**Věta 13.18.** *Platí:*

- *Je-li $f$ monotónní na $I$, pak $f \in \mathcal{R}(I)$.*
- *Je-li $f$ spojitá na $I$, pak $f \in \mathcal{R}(I)$.*
- *Je-li $f$ omezená na $I$ a spojitá na $I \setminus M$, kde $M$ je konečná množina, pak $f \in \mathcal{R}(I)$.*
- *$f \in \mathcal{R}(I)$ právě tehdy, když je $f$ spojitá skoro všude na $I$.*

**Lemma 13.19.** *Nechť $f, g \in \mathcal{R}(I)$. Pak $\forall c, d \in \mathbb{R}$: $cf + dg \in \mathcal{R}(I)$, $|f| \in \mathcal{R}(I)$, $fg \in \mathcal{R}(I)$ a platí*

$$\int_a^b (cf(x) + dg(x))\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + d\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

**Věta 13.20.** *Buďte $a < c < b$. Pak $f \in \mathcal{R}([a,b]) \Leftrightarrow f \in \mathcal{R}([a,c])$ a $f \in \mathcal{R}([c,b])$ a platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Věta 13.21** (O střední hodnotě integrálního počtu)**.** *Nechť $f, g \in \mathcal{R}(I)$ a nechť pro každé $x \in I$ platí $g(x) \geq 0$. Pak $\exists c \in \mathbb{R}$ takové, že*

$$\inf\{f(x) \mid x \in I\} \leq c \leq \sup\{f(x) \mid x \in I\} \quad a \quad \int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b g(x).$$

**Důsledek 13.22.** *Nechť $f \in \mathcal{R}(I)$. Pak existuje $c$ takové, že*

$$\inf\{f(x) \mid x \in I\} \leq c \leq \sup\{f(x) \mid x \in I\} \quad a \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot (b-a).$$

**Definice 13.23.** Buď $f \in \mathcal{R}(I)$. Definujme $\forall x \in I$ funkci $F(x)$ předpisem

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Věta 13.24.** *Buď $f \in \mathcal{R}(I)$. Pak $F(x)$ je spojitá na $I$.*

**Věta 13.25.** *Buďte $f \in \mathcal{R}(I)$, $x_0 \in I$. Je-li $f$ spojitá v bodě $x_0$, má $F(x)$ v bodě $x_0$ derivaci a platí*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

**Věta 13.26.** *Nechť $f \in \mathcal{R}(I)$ a nechť $F$ je na $I$ spojitá a primitivní k $f$ na $(a,b)$. Pak*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

*Poznámka* 13.27. Protože metodami substituce a per partes umíme hledat primitivní funkci, lze tyto metody využít i v tomto případě.

**Věta 13.28** (Metoda per partes)**.**

$$\int_a^b u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x = [u(x)\, v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x.$$

**Věta 13.29** (Substituční metoda)**.**

$$\int_a^b f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

**Definice 13.30.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{R}([a,b])$ pro libovolné $b \in \mathbb{R}$, $b > a$. Definujeme funkci $F$ na intervalu $[a, \infty)$ vztahem

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Existuje-li vlastní limita $\lim_{x\to\infty} F(x)$, říkáme, že *nevlastní integrál* $\int_a^\infty f(x)\, \mathrm{d}x$ *konverguje* a klademe

$$\int_a^\infty f(t)\, \mathrm{d}t = \lim_{x\to\infty} F(x).$$

V opačném případě říkáme, že nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x)\, \mathrm{d}x$ *diverguje.*

*Poznámka* 13.31. Analogicky definujeme integrál $\int_{-\infty}^a f(x)\, \mathrm{d}x$ a pro $\lim_{x\to b^\pm} f(x) = \pm\infty$ integrály $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$, respektive $\int_b^c f(x)\, \mathrm{d}x$.

*Poznámka* 13.32 (Aplikace integrálu)*.*

- Plocha mezi dvěma grafy $f(x) \geq g(x) \geq 0$:

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, \mathrm{d}x.$$

- Délka křivky $[x(t), y(t)]$, $t \in [\alpha, \beta]$:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, \mathrm{d}t.$$

  Speciálně pro délku křivky zadanou funkcí $y = f(x)$:

$$L = \int_a^b \sqrt{(f'(x))^2 + 1}\, \mathrm{d}x.$$

- Objem rotačního tělesa vzniklého rotací $f(x)$ kolem osy $x$:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, \mathrm{d}x.$$

- Plášť rotačního tělesa vzniklého rotací $f(x)$ kolem osy $x$:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{(f'(x))^2 + 1}\, \mathrm{d}x.$$

# Kapitola 14

# Obyčejné diferenciální rovnice

## Existence a jednoznačnost řešení

**Definice 14.1.** Buď $F\colon G \to \mathbb{R}$, $G \subseteq \mathbb{R}^3$. Rovnice

$$F\left(x, y\left(x\right), y'\left(x\right)\right) = 0, \quad \text{někdy jen } F\left(x, y, y'\right) = 0, \quad ' = \frac{d}{dx}$$

se nazývá *obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu. Řešením* rozumíme funkci $y$, která je definovaná na nějakém intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$ a $\forall x \in J$ platí

$$\begin{gathered}\left[x, y\left(x\right), y'\left(x\right)\right] \in G,\\ F\left(x, y\left(x\right), y'\left(x\right)\right) = 0.\end{gathered}$$

Není-li interval $J$ otevřený, pak v krajním bodě značí $y'$ příslušnou jednostrannou derivaci. Graf řešení se nazývá *integrální křivka.*
Buďte dále $y_1, y_2$ řešení definované na intervalech $J_1, J_2$. Jestliže $J_1 \subset J_2$ a $y_1 = y_2$ na $J_1$, říkáme, že řešení $y_1$ je *zúžením* řešení $y_2$ na interval $J_1$ nebo také, že $y_2$ je *prodloužením* řešení $y_1$ na interval $J_2$.

**Definice 14.2.** O diferenciální rovnici tvaru

$$y' = f\left(x, y\right)$$

řekneme, že je *rozřešená vzhledem k derivaci,*

$$y'\left(x\right) = f\left(x, y\left(x\right)\right), \quad y\left(\xi\right) = \eta$$

se nazývá *počáteční problém* této rovnice, číslo $\eta$ *počáteční hodnota řešení $y$* v bodě $\xi$.

**Definice 14.3.** *Úplným řešením* rozumíme takové řešení, které již není možné dále rozšířit. Řekneme, že počáteční problém má právě jedno řešení, jestliže existuje jediné úplné řešení. *Obecným řešením* diferenciální rovnice rozumíme každé řešení $y\left(x, c\right)$, z něhož lze konkrétní volbou konstanty $c$ obdržet libovolné řešení této rovnice.

**Věta 14.4** (Picardova). *Uvažme diferenciální rovnici*

$$y'\left(x\right) = f\left(x, y\left(x\right)\right).$$

*Nechť $f$ je spojitá na obdélníku $D = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| < a,\ |y - y_0| < b\}$, kde $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$. Nechť $f$ splňuje Lipschitzovu podmínku, tj. $\exists L > 0\ \forall x, y \in D\colon |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$. Pak má úloha*

$$y'\left(x\right) = f\left(x, y\left(x\right)\right), \quad y\left(x_0\right) = y_0$$

*na intervalu $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ jediné řešení, kde $\alpha = \min\{a, bM^{-1}\}$, kde $M = \max\limits_{(x,y)\in D} \left|f\left(x, y\right)\right|$.*

*Poznámka* 14.5. Pokud bychom odebrali předpoklad Lipschitzovy podmínky, dostáváme předpoklady pro tzv. Peanovu větu, která nám zaručí pouze existenci řešení.

## Metody řešení rovnic 1. řádu: separované proměnné, homogenní, lineární

**Definice 14.6.** Diferenciální rovnici tvaru

$$y'(x) = f(x)\, g(y)$$

nazveme *rovnicí se separovanými proměnnými.*

**Metoda řešení.** Nechť $g(y) \neq 0$ (v opačném případě máme $y' = 0$, tedy $y(x) = c$).

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f(x)\, g(y), \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} &= \int f(x)\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Odtud rovnou dostáváme obecné řešení.

*Poznámka* 14.7. Rovnice tvaru

$$y' = f(ax + by + c)$$

převedeme na rovnice se separovanými proměnnými substitucí $z = ax + by + c$.

**Definice 14.8.** Diferenciální rovnici tvaru

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

nazveme *homogenní rovnicí.*

**Metoda řešení.** Uvažme substituci $u = \frac{y}{x}$. Pak $y = ux$ a $y' = u'x + u$.

$$\begin{aligned} y' &= f\left(\frac{y}{x}\right), \\ u'x + u &= f(u), \\ u' &= (f(u) - u)\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Tímto dostáváme rovnici se separovanými proměnnými.

*Poznámka* 14.9. Rovnice tvaru

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{Ax + By + C}\right)$$

převedeme na homogenní následujícím postupem:
Řešíme soustavu

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0, \\ Ax + By + C &= 0. \end{aligned}$$

- Má-li soustava jediné řešení $x = x_0$, $y = y_0$, zavedeme substituci $u = x - x_0$, $v = y - y_0$.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = f\left(\frac{au + bv}{Au + Bv}\right),$$
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = f\left(\frac{a + b\frac{v}{u}}{A + B\frac{v}{u}}\right).$$

- Nemá-li soustava řešení, pak zavedeme substituci $z = ax + by$ a dostáváme rovnici se separovanými proměnnými.

**Definice 14.10.** Rovnici tvaru
$$y' = a(x)\,y + b(x)$$
nazýváme *lineární diferenciální rovnicí.*

**Metoda řešení** (Variace konstant)**.** Nejprve vyřešíme příslušnou homogenní rovnici

$$y' = a(x)\,y.$$

Dostáváme řešení
$$y = ce^{\int a(x)\mathrm{d}x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$
Nyní předpokládáme, že $c = c(x)$ a řešení homogenní rovnice zderivujeme

$$y' = c'(x)\,e^{\int a(x)\mathrm{d}x} + c(x)\,e^{\int a(x)\mathrm{d}x}a(x).$$

Dosadíme do zadané rovnice

$$c'(x)\,e^{\int a(x)\mathrm{d}x} + c(x)\,e^{\int a(x)\mathrm{d}x}a(x) = a(x)\,c(x)\,e^{\int a(x)\mathrm{d}x} + b(x).$$

Vypočítáme $c(x)$
$$c(x) = \int b(x)\,e^{-\int a(x)\mathrm{d}x}$$
a dosadíme za $c(x)$ do řešení homogenní rovnice

$$y = e^{\int a(x)\mathrm{d}x}\int b(x)\,e^{-\int a(x)\mathrm{d}x}.$$

**Metoda řešení** (Integrační faktor)**.** Rovnici upravujeme následujícím způsobem

$$\begin{aligned}
y' &= a(x)\,y + b(x),\\
y' - a(x)\,y &= b(x),\\
\left(y' - a(x)\,y\right)e^{-\int a(x)\mathrm{d}x} &= b(x)\,e^{-\int a(x)\mathrm{d}x},\\
\left[ye^{-\int a(x)\mathrm{d}x}\right]' &= b(x)\,e^{-\int a(x)\mathrm{d}x},\\
ye^{-\int a(x)\mathrm{d}x} &= \int b(x)\,e^{-\int a(x)\mathrm{d}x},\\
y &= e^{\int a(x)\mathrm{d}x}\int b(x)\,e^{-\int a(x)\mathrm{d}x}.
\end{aligned}$$

**Definice 14.11.** *Bernoulliho rovnicí* rozumíme rovnici tvaru

$$y' + a(x)\,y = b(x)\,y^r, \quad r \in \mathbb{R},\, r \neq 1,\, r \neq 0.$$

**Metoda řešení.** Vydělením $y^r$ dostaneme

$$y^{-r}y' + a(x)\,y^{1-r} = b(x)\,.$$

Zavedeme substituci $z = y^{1-r}$, $z' = (1-r)\,y^{-r}y'$, dosadíme

$$\frac{z'}{1-r} + a(x)\,z = b(x)$$

a dostáváme lineární rovnici.

**Definice 14.12.** Rovnici

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

nazveme *exaktní diferenciální rovnicí*, jestliže výraz na levé straně dané rovnice je úplným diferenciálem $\mathrm{d}\,F(x,y)$ nějaké funkce $F(x,y)$. Tuto funkci nazýváme *kmenovou funkcí*.

**Metoda řešení.** Z definice je

$$\mathrm{d}F(x,y) = F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y = 0.$$

Aplikací Schwarzovy věty o záměnnosti smíšených derivací (když jsou tyto spojité), dostáváme podmínku

$$\text{rovnice je exaktní} \Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

K vyřešení původní rovnice nám stačí nalézt kmenovou funkci $F$. Obecné řešení pak můžeme psát v implicitním tvaru

$$F(x,y) = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

## Lineární rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty, variace konstant, speciální pravé strany

**Definice 14.13.** *Lineární diferenciální rovnicí $n$-tého řádu s konstantními koeficienty* rozumíme rovnici tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = f(x)\,.$$

Je-li $f(x) = 0$, nazveme tuto rovnici *homogenní*, v opačném případě *nehomogenní*.

**Metoda řešení** (Homogenní)**.** Nejprve zkonstruujeme charakteristický polynom

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

a nalezneme všechny jeho kořeny $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

- Každému reálnému kořenu $\lambda$ násobnosti $k$ odpovídá $k$ partikulárních řešení

  $$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\lambda x}.$$

- Každé dvojici komplexně sdružených kořenů $\lambda = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$ násobnosti $k$ odpovídá $k$ dvojic partikulárních řešení

  $$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
  $$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Obecné řešení je pak tvaru
$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n,$$
kde $y_1, y_2, \ldots, y_n$ jsou lineárně nezávislá partikulární řešení, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ libovolné konstanty. Systém $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ pak nazýváme *fundamentální systém řešení.*

**Metoda řešení** (Nehomogenní – variace konstant)**.** Nalezneme obecné řešení homogenní rovnice
$$y\left(x\right) = c_1 y_1\left(x\right) + c_2 y_2\left(x\right) + \cdots + c_n y_n\left(x\right).$$
Obecné řešení příslušné nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru
$$Y\left(x\right) = c_1\left(x\right) y_1\left(x\right) + c_2\left(x\right) y_2\left(x\right) + \cdots + c_n\left(x\right) y_n\left(x\right),$$
přičemž funkce $c_1\left(x\right), \ldots, c_n\left(x\right)$ vypočítáme z následující soustavy
$$\begin{array}{ccccccc}
c_1'\left(x\right) y_1\left(x\right) & + & \cdots & + & c_n'\left(x\right) y_n\left(x\right) & = & 0, \\
c_1'\left(x\right) y_1'\left(x\right) & + & \cdots & + & c_n'\left(x\right) y_n'\left(x\right) & = & 0, \\
c_1'\left(x\right) y_1''\left(x\right) & + & \cdots & + & c_n'\left(x\right) y_n''\left(x\right) & = & 0, \\
 & & \cdots & & & & \\
c_1'\left(x\right) y_1^{(n-2)}\left(x\right) & + & \cdots & + & c_n'\left(x\right) y_n^{(n-2)}\left(x\right) & = & 0, \\
c_1'\left(x\right) y_1^{(n-1)}\left(x\right) & + & \cdots & + & c_n'\left(x\right) y_n^{(n-1)}\left(x\right) & = & f\left(x\right).
\end{array}$$
Speciálně pro $n = 2$ vypočteme z kvadratického polynomu $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ kořeny $\lambda_1, \lambda_2$. Dostáváme dvě partikulární řešení $y_1\left(x\right)$, $y_2\left(x\right)$. Vypočítáme $c_1\left(x\right)$, $c_2\left(x\right)$ ze soustavy
$$\begin{aligned}
c_1'\left(x\right) y_1\left(x\right) + c_2'\left(x\right) y_2\left(x\right) &= 0, \\
c_1'\left(x\right) y_1'\left(x\right) + c_2'\left(x\right) y_2'\left(x\right) &= f\left(x\right)
\end{aligned}$$
a obecné řešení dostáváme ve tvaru
$$Y\left(x\right) = c_1\left(x\right) y_1\left(x\right) + c_2\left(x\right) y_2\left(x\right).$$

**Metoda řešení** (Nehomogenní – metoda neurčitých koeficientů)**.** Je-li $f\left(x\right)$ zobecněný polynom
$$f\left(x\right) = e^{\alpha x}\left(P\left(x\right)\cos\beta x + Q\left(x\right)\sin\beta x\right),$$
hledáme partikulární řešení ve tvaru
$$Y_p = x^k e^{\alpha x}\left(\widetilde{P}\left(x\right)\cos\beta x + \widetilde{Q}\left(x\right)\sin\beta x\right),$$
kde číslo $k$ je násobnost $\alpha + \mathrm{i}\beta$ jakožto kořene charakteristického polynomu. Polynomy $\widetilde{P}$, $\widetilde{Q}$ jsou polynomy s neznámými koeficienty stupně nejvýše $m$, kde $m = \max\{\operatorname{st} P, \operatorname{st} Q\}$. Dosazením do zadané rovnice vypočteme neznámé koeficienty. Obecné řešení bude tvaru
$$Y\left(x\right) = Y_p\left(x\right) + Y_h\left(x\right),$$
kde $Y_h$ je řešení homogenní soustavy.

# Kapitola 15

# Číselné řady a řady funkcí

## Kritéria konvergence řad s nezápornými členy

**Definice 15.1.** *Posloupností reálných čísel* rozumíme funkci $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Místo $a(n)$ píšeme $a_n$ a toto číslo nazýváme $n$-tým členem posloupnosti. Posloupnost značíme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

**Definice 15.2.** Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Formální výraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

nazýváme *nekonečnou číselnou řadou.* Posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

nazýváme *posloupnost částečných součtů* této řady. Existuje-li limita $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}$ *konverguje* a má součet $s$. Jestliže vlastní limita neexistuje, řekneme, že řada *diverguje.*

**Věta 15.3** (Nutná podmínka konvergence)**.** *Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

**Lemma 15.4** (Cauchyovo-Bolzanovo kritérium konvergence)**.** *Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když posloupnost jejích částečných součtů je cauchyovská, tj.*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall m \in \mathbb{N}\colon |s_{n+m} - s_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_{n+m}| < \epsilon.$$

**Věta 15.5.** *Buďte $\sum a_n$, $\sum b_n$ konvergentní řady a nechť $\sum a_n = s$, $\sum b_n = t$. Pak je konvergentní i řada $\sum (a_n + b_n)$ a platí*

$$\sum (a_n + b_n) = s + t.$$

**Věta 15.6.** *Jestliže řada $\sum a_n$ konverguje, pak pro libovolné $k \in \mathbb{R}$ konverguje též řada $\sum k a_n$ a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} k a_n = k \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

**Věta 15.7** (Asociativní zákon pro číselné řady)**.** *Nechť $\sum a_n$ konverguje, $\{n_k\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Položme $n_0 = 0$ a pro $k \in \mathbb{N}$ označme*

$$b_k = a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \cdots + a_{n_k}.$$

*Pak řada* $\sum b_k$ *konverguje a platí*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

**Definice 15.8.** Řada $\sum a_n$ se nazývá *řada s nezápornými (kladnými) členy*, je-li $a_n \geq 0$ ($a_n > 0$) pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

**Věta 15.9** (Srovnávací kritérium). *Buďte* $\sum a_n$, $\sum b_n$ *řady s nezápornými členy a nechť* $a_n \leq b_n$ *pro skoro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *(tj. pro všechna až na konečně mnoho). Potom platí*

$$\sum b_n \text{ konverguje } \Rightarrow \sum a_n \text{ konverguje,}$$
$$\sum a_n \text{ diverguje } \Rightarrow \sum b_n \text{ diverguje.}$$

**Věta 15.10** (Limitní srovnávací kritérium). *Buďte* $\sum a_n$, $\sum b_n$ *řady s nezápornými členy a nechť existuje*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

*Je-li* $L < \infty$ *a konverguje-li řada* $\sum b_n$*, pak konverguje i řada* $\sum a_n$.
*Je-li* $L > 0$ *a diverguje-li řada* $\sum b_n$*, pak diverguje i řada* $\sum a_n$.

**Věta 15.11** (Odmocninové kritérium – Cauchyovo). *Nechť* $\sum a_n$ *je řada s nezápornými členy.*

- *Pokud* $\forall n \in \mathbb{N}$ *platí* $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, *pak řada konverguje.*
  *Pokud pro nekonečně mnoho* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, *pak řada diverguje.*
- *Jestliže existuje* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, *kde* $q \in \mathbb{R}^*$, *pak v případě* $q < 1$ *řada* $\sum a_n$ *konverguje a v případě* $q > 1$ *řada* $\sum a_n$ *diverguje.*

**Věta 15.12** (Podílové kritérium – d'Alembertovo). *Buď* $\sum a_n$ *řada s kladnými členy.*

- *Pokud* $\forall n \in \mathbb{N}$ *platí* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, *pak řada konverguje.*
  *Pokud* $\forall n \in \mathbb{N}$ *platí* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, *pak řada* $\sum a_n$ *diverguje.*
- *Jestliže existuje* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, *kde* $q \in \mathbb{R}^*$, *pak v případě* $q < 1$ *řada* $\sum a_n$ *konverguje a v případě* $q > 1$ *řada* $\sum a_n$ *diverguje.*

**Věta 15.13** (Limitní Raabeovo kritérium). *Nechť* $\sum a_n$ *je řada s kladnými členy a nechť existuje*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = q, \quad q \in \mathbb{R}^*.$$

*Je-li* $q > 1$, *řada* $\sum a_n$ *konverguje. Je-li* $q < 1$, *řada* $\sum a_n$ *diverguje.*

**Věta 15.14** (Integrální kritérium). *Nechť* $f$ *je funkce definovaná na intervalu* $[1, \infty)$, *která je na tomto intervalu nezáporná a nerostoucí. Nechť* $\forall n \in \mathbb{N}$ *platí* $f(n) = a_n$. *Pak řada* $\sum a_n$ *konverguje právě tehdy, když konverguje nevlastní integrál* $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

## Absolutně a neabsolutně konvergentní číselné řady, komutativní zákon pro číselné řady

**Definice 15.15.** Nekonečná řada $\sum a_n$ se nazývá *alternující*, jestliže $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $\operatorname{sgn} a_{n+1} = -\operatorname{sgn} a_n$.

**Věta 15.16** (Leibnizovo kritérium)**.** *Nechť $a_n$ je monotonní posloupnost kladných čísel. Pak alternující řada $\sum (-1)^{n-1} a_n$ konverguje právě tehdy, když $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

**Věta 15.17.** *Konverguje-li řada $\sum |a_n|$, pak konverguje i řada $\sum a_n$.*

**Definice 15.18.** Řekneme, že řada $\sum a_n$ konverguje absolutně, jestliže konverguje řada $\sum |a_n|$. Jestliže řada $\sum a_n$ konverguje a $\sum |a_n|$ diverguje, pak řekneme, že řada $\sum a_n$ konverguje neabsolutně.

**Věta 15.19** (Abelovo a Dirichletovo kritérium)**.** *Nechť $\{b_n\}$ je monotonní posloupnost a platí jedna z následujících podmínek:*

- *(Dirichlet) Posloupnost částečných součtů řady $\sum a_n$ je ohraničená a $\lim b_n = 0$.*
- *(Abel) Řada $\sum a_n$ konverguje a posloupnost $\{b_n\}$ je ohraničená.*

*Pak řada $\sum a_n b_n$ konverguje.*

**Definice 15.20.** Nechť $\sum a_n$ je číselná řada, $\{k_n\}$ permutace množiny $\mathbb{N}$. Pak říkáme, že $\sum a_{k_n}$ vznikla *přerovnáním řady* $\sum a_n$.

**Věta 15.21** (Komutativní zákon pro číselné řady)**.** *Nechť řada $\sum a_n$ konverguje absolutně. Pak konverguje absolutně každá řada $\sum a_{k_n}$ vzniklá přerovnáním řady $\sum a_n$ a platí $\sum a_{k_n} = \sum a_n$.*

**Věta 15.22** (Riemannova)**.** *Nechť řada $\sum a_n$ konverguje neabsolutně a $s \in \mathbb{R}$ je libovolné. Pak existují přerovnání $\sum a_{k_n}$, $\sum a_{p_n}$, $\sum a_{q_n}$ řady $\sum a_n$ takové, že $\sum a_{k_n} = s$, $\sum a_{p_n}$ určitě diverguje a $\sum a_{q_n}$ osciluje.*

## Mocninné řady, poloměr konvergence, Taylorův polynom a Taylorova řada, derivování a integrování mocninných řad

**Definice 15.23.** Nechť $\{f_n(x)\}$ je posloupnost funkcí na intervalu $I$, $x_0 \in I$ je libovolné. Je-li číselná posloupnost $\{f_n(x_0)\}$ konvergentní, říkáme, že posloupnost $\{f_n(x)\}$ je *konvergentní v bodě* $x_0$.
Řekneme, že posloupnost funkcí *bodově konverguje k funkci* $f$ na $I$, jestliže konverguje $\forall x \in I$, tj.

$$\forall x \in I\ \forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \colon |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Píšeme $\lim f_n(x) = f(x)$ pro $x \in I$ nebo $f_n \to f$ na $I$.

**Definice 15.24.** Nechť $\{f_n(x)\}$ je posloupnost funkcí definovaných na intervalu $I$. Formální výraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

nazýváme *nekonečnou řadou funkcí*. Posloupnost $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x),$$

nazýváme *posloupností částečných součtů* řady $\sum f_n(x)$.
Jestliže $\forall x \in I$ posloupnost částečných součtů $\{s_n(x)\}$ konverguje, řekneme, že řada $\sum f_n(x)$ *bodově konverguje* na intervalu $I$ a funkci $s(x) = \lim s_n(x)$ nazýváme *součtem řady* $\sum f_n(x)$.

**Definice 15.25.** Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}$ *konverguje stejnoměrně* k funkci $f(x)$ na intervalu $I$, jestliže

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; \forall x \in I \colon |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Píšeme $f_n \rightrightarrows f$ na $I$.

**Definice 15.26.** Řekneme, že řada funkcí $\sum f_n(x)$ *konverguje stejnoměrně* na intervalu $I$ ke svému součtu $s(x)$, jestliže posloupnost $\{s_n(x)\}$ jejích částečných součtů stejnoměrně konverguje na $I$ k funkci $s(x)$.

**Věta 15.27** (Weierstrassovo kritérium). *Nechť $\{f_n(x)\}$ je posloupnost funkcí na $I$. Nechť existuje posloupnost nezáporných čísel $\{a_n\}$ taková, že $\sum a_n$ konverguje a platí*

$$\forall x \in I \; \forall n \in \mathbb{N} \colon |f_n(x)| \leq a_n.$$

*Pak řada $\sum f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na $I$.*

**Definice 15.28.** Buď $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ posloupnost reálných čísel, $x_0 \in \mathbb{R}$ libovolné. *Mocninnou řadou* se středem v bodě $x_0$ a koeficienty $a_n$ rozumíme řadu funkcí tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n .$$

**Věta 15.29.** *Nechť $\sum a_n x^n$ je mocninná řada a nechť $a = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.*
*Je-li $a = 0$, pak řada absolutně konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Říkáme, že řada vždy konverguje.*
*Je-li $a = \infty$, pak řada diverguje pro všechna $x \neq 0$. Říkáme, že řada vždy diverguje.*
*Je-li $0 < a < \infty$, pak řada absolutně konverguje pro $|x| < \frac{1}{a}$ a diverguje pro $|x| > \frac{1}{a}$.*

**Definice 15.30.** Je-li $0 < a = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$, pak se číslo $r = \frac{1}{a}$ nazývá *poloměr konvergence* a interval $(-r, r)$ se nazývá *konvergenční interval. Oborem konvergence* rozumíme množinu bodů, kde řada konverguje, v tomto případě konvergenční interval s případnými krajními body.

**Věta 15.31.** *Nechť $r > 0$ je poloměr konvergence mocninné řady $\sum a_n x^n$. Pak tato řada stejnoměrně konverguje na každém uzavřeném podintervalu $[-\rho, \rho]$ intervalu $(-r, r)$.*

**Věta 15.32.** *Nechť $r > 0$ je poloměr konvergence mocninné řady $\sum a_n x^n$. Pak součet této řady je spojitá funkce na intervalu $(-r, r)$.*

**Věta 15.33.** *Buď $r > 0$ poloměr konvergence mocninné řady $\sum a_n x^n$. Pak*

$$\int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n \, \mathrm{d}t,$$
$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)',$$

*přičemž mocninné řady na pravých stranách mají opět poloměr konvergence $r$.*

**Definice 15.34.** Nechť funkce $f$ má v bodě $x_0$ derivace všech řádů. Mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

nazýváme *Taylorovou řadou* funkce $f$ v bodě $x_0$.
Je-li $x_0 = 0$ hovoříme o *Maclaurinově* řadě.

**Věta 15.35.** *Nechť má funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v okolí bodu $x_0$ vlastní derivace až do řádu $n+1$ pro některé $n \in \mathbb{N}_0$. Pak pro všechna $x$ z tohoto okolí platí*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i + R_n(x),$$

*kde*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1},$$

*přičemž $\xi$ je vhodné číslo ležící mezi $x_0$ a $x$. Toto vyjádření se nazývá* Taylorův vzorec. *Chyba $R_n(x)$ se nazývá* zbytek.

**Věta 15.36.** *Nechť funkce $f$ má v nějakém bodě $x_0$ derivace všech řádů. Pak $\forall x \in I \ni x_0$ platí*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

*právě tehdy, když pro posloupnost $\{R_n(x)\}$ Taylorových zbytků platí $\forall x \in I\colon \lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.*

## Fourierovy řady

**Definice 15.37.** Buďte $f, g$ integrovatelné na $[a, b]$. Číslo

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$$

nazýváme *skalárním součinem* funkcí $f$, $g$. Funkce $f$, $g$ se nazývají *ortogonální* (na intervalu $[a, b]$), jestliže $\langle f, g \rangle = 0$.

**Definice 15.38.** Buď $f$ integrovatelná na $[a, b]$. *Normou funkce* $f$ rozumíme číslo $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$. Funkce $f$ se nazývá *normovaná*, jestliže $\|f\| = 1$.

**Definice 15.39.** Buď $\{\varphi_n\}$ konečná nebo spočetná posloupnost integrovatelných funkcí na intervalu $[a, b]$. Tato posloupnost se nazývá *ortogonální*, jestliže každé dvě funkce $\varphi_m$, $\varphi_n$ pro $m \neq n$ jsou ortogonální a každá funkce $\varphi_n$ má kladnou (nenulovou) normu.
Posloupnost $\{\varphi_n\}$ se nazývá *ortonormální*, jestliže je ortogonální a každá funkce $\varphi_n$ je normovaná.

**Definice 15.40.** Buď $\{\varphi_n\}$ ortogonální posloupnost funkcí na $[a, b]$, $f$ integrovatelná na $[a, b]$. Pak čísla

$$c_n = \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle} = \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\|\varphi_n\|^2}$$

nazýváme *Fourierovy koeficienty funkce* $f$ vzhledem k ortogonální posloupnosti $\{\varphi_n\}$ a řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$$

*Fourierovou řadou funkce* $f$ vzhledem k ortogonální posloupnosti $\{\varphi_n\}$.

**Lemma 15.41.** *Posloupnost $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots\}$ je ortonormální na $[-\pi, \pi]$.*

*Poznámka* 15.42. Uvažme ortonormální bázi $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ vektorového prostoru. Buď $\mathbf{v}$ libovolný vektor. Naším cílem bude vyjádřit vektor $\mathbf{v}$ v bázi $(\mathbf{u}_i)$. Víme, že $\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_n\mathbf{u}_n$ pro nějaké skaláry $a_1, \ldots, a_n$. Proto

$$\begin{gathered}\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle = a_i \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle = a_i \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, n,\\ \mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_2 \rangle \mathbf{u}_2 + \cdots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_n \rangle \mathbf{u}_n.\end{gathered}$$

Podobně budeme chtít vyjádřit $f$ v ortonormálním systému $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots\}$:

$$\begin{aligned}&f \rightsquigarrow \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, f \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left\langle \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, f \right\rangle \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + \left\langle \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, f \right\rangle \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right) =\\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \,\mathrm{d}x \right) \cos nx + \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \,\mathrm{d}x \right) \sin nx \right].\end{aligned}$$

Tyto poznatky shrnuje následující věta.

**Věta 15.43.** *Fourierova řada libovolné integrovatelná funkce $f$ na $[-\pi, \pi]$ má vzhledem k systému $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x \ldots\}$ tvar*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

*kde $a_n$, $b_n$ jsou Fourierovy koeficienty funkce $f$ pro něž platí:*

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}_0,\\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

**Důsledek 15.44.** *Buď $f$ integrovatelná funkce na $[-\pi, \pi]$.*
*Je-li $f$ sudá, pak má její Fourierova řada tvar*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad \textit{kde } \forall n \in \mathbb{N}_0\colon a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \,\mathrm{d}x.$$

*Je-li $f$ lichá, pak má její Fourierova řada tvar*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad \textit{kde } \forall n \in \mathbb{N}\colon b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \,\mathrm{d}x.$$

**Definice 15.45.** Řekneme, že funkce $f$ je *po částech spojitá* na $[a, b]$, jestliže má na tomto intervalu pouze konečný počet bodů nespojitosti a v těchto bodech existují vlastní jednostranné limity.
Řekneme, že funkce $f$ je *po částech monotonní* na $[a, b]$, jestliže existuje konečné dělení tohoto intervalu tak, že uvnitř každého dělícího intervalu je daná funkce monotonní.

**Věta 15.46** (Dirichletova). *Nechť funkce $f$ je po částech spojitá a po částech monotonní na $[-\pi, \pi]$. Pak její Fourierova řada konverguje na $[-\pi, \pi]$ a její součet je roven*

- $f(x_0)$ *v každém bodě $x_0 \in (-\pi, \pi)$, v němž je $f$ spojitá,*
- $\frac{1}{2}\left[f\left(x_0^-\right) + f\left(x_0^+\right)\right]$ *v každém bodě $x_0 \in (-\pi, \pi)$, v němž je $f$ nespojitá,*
- $\frac{1}{2}\left[f(-\pi^+) + f(\pi^-)\right]$ *v krajních bodech intervalu $[-\pi, \pi]$.*

*Poznámka* 15.47. Snadno odvodíme tvar Fourierovy řady periodických funkcí s periodou $p \neq 2\pi$. Označme $p = 2h$ a předpokládejme, že $f$ je integrovatelná funkce na $[-h, h]$. Fourierova řada funkce $f$ bude tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{h} x + b_n \sin \frac{n\pi}{h} x \right),$$

kde Fourierovy koeficienty jsou dány vzorci

$$a_n = \frac{1}{h} \int_{-h}^{h} f(x) \cos \frac{n\pi}{h} x \, \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$
$$b_n = \frac{1}{h} \int_{-h}^{h} f(x) \sin \frac{n\pi}{h} x \, \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

# Kapitola 16

# Integrální počet v $\mathbb{R}^n$

## Konstrukce Riemannova integrálu v $\mathbb{R}^n$, Fubiniho věta

*Poznámka* 16.1. Uvažujme prostor $\mathbb{R}^2$. Naším cílem bude zavést rozumný způsob, jak přiřadit míru množinám $A \subseteq \mathbb{R}^2$.

**Definice 16.2.** Buď $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ohraničená.

- Čtvercům o hraně délky jedna přiřadíme míru $m(A) = 1$.
  Jestliže $A \cap B = \emptyset$ a existují $m(A)$, $m(B)$, pak $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.
  Je-li $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ shodné zobrazení a existuje $m(A)$, pak $m(F(A)) = m(A)$.
- Definujeme *síť řádu $n$*. Tou bude čtvercová síť tvořená čtverci o hraně délky $\frac{1}{2^n}$, která vznikne rozdělením $\mathbb{R}^2$ přímkami $y = \frac{k}{2^n}$ a $x = \frac{l}{2^n}$ pro $k, l \in \mathbb{Z}$.
- *Elementární množinou* $A \subseteq \mathbb{R}^2$ rozumíme množinu, která vznikla sjednocením čtverců řádu $n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Její mírou $m(A)$ je součet měr jednotlivých čtverců.
- *Jádrem* řádu $n$ množiny $A \subseteq \mathbb{R}^2$ rozumíme množinu $J_n(A)$ obsahující všechny čtverce řádu $n$, které leží pod $A^\circ$.
- *Obalem* řádu $n$ množiny $A \subseteq \mathbb{R}^2$ rozumíme množinu $O_n(A)$ obsahující všechny čtverce řádu $n$, které mají s $\bar{A}$ neprázdný průnik.

Díky tomu jsou $m(J_n(A))$ a $m(O_n(A))$ dobře definované a platí:

$$\begin{aligned} J_n(A) \subseteq J_{n+1}(A) &\Rightarrow m(J_n(A)) \leq m(J_{n+1}(A)), \\ O_n(A) \supseteq O_{n+1}(A) &\Rightarrow m(O_n(A)) \geq m(O_{n+1}(A)). \end{aligned}$$

Posloupnost $\{m(J_n(A))\}$ je neklesající a shora ohraničená, $\{m(O_n(A))\}$ je nerostoucí a zdola ohraničená, můžeme proto definovat následující pojmy:

- Číslo $m_*(A) \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} m(J_n(A))$ nazýváme *vnitřní Jordanovou mírou* množiny $A$.
- Číslo $m^*(A) \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} m(O_n(A))$ nazýváme *vnější Jordanovou mírou* množiny $A$.
- Jestliže navíc platí $m_*(A) = m^*(A)$, pak číslo $m(A) \overset{def}{=} m_*(A) = m^*(A)$ nazveme *Jordanovou mírou* množiny $A$.
- Jestliže $m_*(A) < m^*(A)$, pak řekneme, že $A$ *není Jordanovsky měřitelná.*

**Věta 16.3.** *Omezená množina $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná $\Leftrightarrow m\left(h\left(A\right)\right) = 0$.*

**Definice 16.4.** Buď $A \subseteq \mathbb{R}^2$ omezená a měřitelná, $f\colon A \to \mathbb{R}$. Uvažme síť řádu $n$ a pomocí ní rozložme množinu $A = \bigcup_{i=1}^{m} D_i$, kde $D_i$ vzniknou jako průniky $A$ se čtverci sítě. Označme

$$m_i = \inf_{[x,y]\in D_i} f\left(x,y\right), \quad M_i = \sup_{[x,y]\in D_i} f\left(x,y\right)$$

a definujme:

- Číslo $s_n\left(A,f\right) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{m} m_i \cdot m\left(D_i\right)$ nazýváme *dolním součtem* řádu $n$.
- Číslo $S_n\left(A,f\right) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{m} M_i \cdot m\left(D_i\right)$ nazýváme *horním součtem* řádu $n$.
- Číslo $\lim_{n\to\infty} s_n\left(A,f\right) \stackrel{def}{=} \underline{\iint}_A f\left(x,y\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ nazýváme *dolní Riemannův integrál.*
- Číslo $\lim_{n\to\infty} S_n\left(A,f\right) \stackrel{def}{=} \overline{\iint}_A f\left(x,y\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ nazýváme *horní Riemannův integrál.*
- Jestliže $\underline{\iint}_A f\left(x,y\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint}_A f\left(x,y\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, pak $\iint_A f\left(x,y\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \stackrel{def}{=} \underline{\iint}_A f\left(x,y\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint}_A f\left(x,y\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ nazveme *Riemannovým integrálem* funkce $f$ přes množinu $A$.
- Existuje-li $\iint_A f\left(x,y\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty$, řekneme, že funkce $f$ je *integrovatelná* na $A$.

**Věta 16.5.** *Buď $A \subseteq \mathbb{R}^2$ omezená a měřitelná, $f$, $g$ integrovatelné na $A$. Pak jsou zde integrovatelné i funkce $f \pm g$ a $f \cdot g$. Existuje-li $m > 0$ takové, že $\forall x \in A\colon \frac{1}{g(x)} < m$, je $\frac{f}{g}$ integrovatelná na $A$.*

**Věta 16.6.** *Buďte $A$, $B$ omezené a měřitelné.*
*Je-li $f$ integrovatelná na $A$, pak je integrovatelná na každé měřitelné podmnožině $A$.*
*Je-li $f$ integrovatelná na $A$ i $B$, $A \cap B = \emptyset$, pak je $f$ integrovatelná na $A \cup B$ a platí*

$$\iint_{A\cup B} f\left(x,y\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_A f\left(x,y\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_B f\left(x,y\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

*Je-li $f$ omezená na $A$ a $m\left(A\right) = 0$, pak je $f$ integrovatelná na $A$ a platí $\iint_A f\left(x,y\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$.*
*Je-li $f$ omezená a spojitá na $A$, pak je $f$ na $A$ integrovatelná.*
*Je-li $f$ omezená a množina bodů nespojitosti $f$ na $A$ má Jordanovu míru nula, pak je $f$ integrovatelná na $A$.*

**Věta 16.7** (Fubiniho). *Buď $f$ integrovatelná na obdélníku $A = [a,b] \times [c,d]$. Označme*

$$F\left(x\right) = \overline{\int_c^d} f\left(x,y\right) \mathrm{d}y, \quad G\left(x\right) = \underline{\int_c^d} f\left(x,y\right) \mathrm{d}y.$$

*Pak jsou funkce $F$, $G$ integrovatelné na $[a,b]$ a platí*

$$\iint_A f\left(x,y\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b F\left(x\right) \mathrm{d}x = \int_a^b G\left(x\right) \mathrm{d}x.$$

*Speciálně, je-li $f$ na $A$ spojitá, pak*

$$\iint_A f\left(x,y\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_c^d f\left(x,y\right) \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = \int_c^d \left[\int_a^b f\left(x,y\right) \mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y.$$

**Věta 16.8.** *Označme* $A = \{[x, y] \mid x \in [a, b]\,,\ g(x) \le y \le h(x)\}$, *přičemž* $g, h$ *jsou spojité funkce na* $[a, b]$ *takové, že* $\forall x \in [a, b] : g(x) \le h(x)$. *Buď* $f$ *integrovatelná na* $A$. *Pak*

$$\iint\limits_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x.$$

*Poznámka* 16.9. Analogicky můžeme definovat integrál v $\mathbb{R}^n$ a vyslovit pro něj Fubiniho větu.

## Věta o transformaci integrálu, geometrické aplikace integrálu

**Definice 16.10.** Nechť $g, h$ jsou funkce definované na množině $B \subseteq \mathbb{R}^2$. Označme $F : B \to \mathbb{R}^2$, $F(u, v) = [g(u, v)\,,\, h(u, v)]$. Řekneme, že zobrazení $F$ je *spojitě diferencovatelné* v $B$, jestliže existuje otevřená množina $\Omega \supseteq B$ taková, že funkce $g$, $h$ lze rozšířit na $\Omega$ takovým způsobem, že $g$, $h$ mají v $\Omega$ spojité parciální derivace prvního řádu podle obou proměnných $u$, $v$.

**Definice 16.11.** Buď $F : B \to \mathbb{R}^2$, $F = [g(u, v)\,, h(u, v)]$ spojitě diferencovatelné zobrazení v $B$. Determinant

$$J_F = \begin{vmatrix} g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{vmatrix}$$

se nazývá *jacobián* zobrazení $F$. Jacobián $J_F : B \to \mathbb{R}$ je funkcí proměnných $u$, $v$.

**Definice 16.12.** Spojitě diferencovatelné zobrazení $F : B \to \mathbb{R}^2$ na otevřené množině $B$ se nazývá *regulární*, je-li jeho jacobián $J$ různý od nuly v každém bodě množiny $B$.

**Věta 16.13.** *Nechť* $B \subseteq \mathbb{R}^2$ *je uzavřená a měřitelná množina,* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, $\Omega \supseteq B$ *je otevřená. Nechť* $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $F(u, v) = [g(u, v)\,, h(u, v)]$ *je prosté regulární zobrazení. Nechť funkce* $f(x, y)$ *je spojitá na* $A = F(B)$. *Pak platí*

$$\iint\limits_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_B f(g(u, v)\,, h(u, v))\,|J_F(u, v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

*Poznámka* 16.14. Transformace provádíme následujícím způsobem

$$\iint\limits_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ \left| F : \begin{array}{l} x = g(u, v) \\ y = h(u, v) \end{array} \right| = \iint\limits_{F^{-1}(A)} f(g(u, v)\,, h(u, v))\,|J_F|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

*Poznámka* 16.15. Analogické definice a větu můžeme vyslovit pro $\mathbb{R}^n$.

*Poznámka* 16.16 (Typické transformace). Uvedeme si nejčastější příklady transformací.

- Polární souřadnice
$$\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{array} \quad\Rightarrow\quad |J| = \rho.$$
- Eliptické souřadnice
$$\begin{array}{l} x = a\rho\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\varphi \end{array} \quad\Rightarrow\quad |J| = ab\rho.$$
- Sférické souřadnice
$$\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi\sin\vartheta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\vartheta \\ z = \rho\cos\vartheta \end{array} \quad\Rightarrow\quad |J| = \rho^2\sin\vartheta.$$

- Cylindrické souřadnice

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \qquad \Rightarrow \qquad |J| = \rho. \\ z &= z \end{aligned}$$

*Poznámka* 16.17. Chceme-li vypočítat objem nějakého objektu $A$, počítáme vlastně integrál

$$\int_A 1\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

# Křivkový a plošný integrál I. a II. druhu, Greenova věta, Gauss-Ostrogradského věta

**Definice 16.18.** Nechť jsou $\varphi$, $\psi\colon\ [\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ spojité na $[\alpha,\beta]$,

$$C = \{[x,y]\in\mathbb{R}^2 \mid x=\varphi(t)\,,\ y=\psi(t)\}.$$

$C$ se nazývá *spojitá křivka* v rovině s parametrickým vyjádřením $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$.
Pokud mají $\varphi$, $\psi$ spojité parciální derivace $\varphi'$, $\psi'$ a $\forall t\in[\alpha,\beta]:\ (\varphi')^2+(\psi')^2\neq 0$, nazývá se $C$ *hladká křivka*. Křivka $C$ se nazývá *po částech hladká*, jestliže lze rozdělit na konečně mnoho intervalů, na kterých je hladká.
Křivka $C$ se nazývá *uzavřená*, jestliže $[\varphi(\alpha),\psi(\alpha)]=[\varphi(\beta),\psi(\beta)]$.
Křivka $C$ se nazývá *jednoduchá*, jestliže sama sebe neprotíná ve vnitřním bodě.
Křivka $C$ se nazývá *Jordanova*, jestliže je uzavřená a jednoduchá.

*Poznámka* 16.19. Analogicky zavedeme křivku v prostoru (či ve vyšší dimenzi).

*Poznámka* 16.20. Pro křivku, která není uzavřená můžeme zavést orientaci tak, že určíme pořadí dvou různých bodů.
Pro uzavřenou křivku můžeme zavést orientaci tak, že u tří různých bodů určíme jejich pořadí.
Pokud se s rostoucím $t$ pohybujeme po křivce v souladu s orientací, řekneme, že její parametrizace je *souhlasná*. V opačném případě řekneme, že její parametrizace je *nesouhlasná*.

**Definice 16.21.** Buď $C$ po částech hladká křivka, jejíž souřadnice jsou popsány v kartézské soustavě souřadnic parametrickými rovnicemi

$$C:\quad x=x(t)\,,\quad y=y(t)\,,\quad z=z(t)\,,\quad t\in J=[\alpha,\beta]\,.$$

Uvažme dále funkci $f(x,y,z)$ definovanou v bodech křivky $C$.
Budeme předpokládat, že $f(x(t),y(t),z(t))$ je po částech spojitá na $[\alpha,\beta]$.
Uvažme dělení $\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$ pro $n\in\mathbb{N}$. Tyto dělící body přeneseme na křívku $C$ a označíme $A_k=[x(t_k),y(t_k),z(t_k)]$. Body $A_0,\ldots,A_n$ rozdělí křivku na $n$ úseků, které nazýváme *elementy křivky* a značíme je $s_k$. Označme dále $m(s_k)$ délku elementu $s_k$. V každém z elementů zvolíme libovolný bod $M_k=[x_k,y_k,z_k]$ a utvoříme integrální součet

$$\mathcal{S}_n=\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\cdot m(s_k)\,.$$

Limitu

$$\lim_{\max_k m(s_k)\to 0}\mathcal{S}_n$$

nazýváme *křivkovým integrálem* prvního druhu a značíme ji

$$\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}l.$$

*Poznámka* 16.22. Právě jsme si konsktruktivně zavedli křivkový integrál prvního druhu. Podobně můžeme zavést i ostatní integrály, ale pro jednoduchost zvolíme iný přístup.

**Definice 16.23.** Nechť $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je po částech hladká křivka. Pro funkci $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ spojitou na $[\gamma]$ definujeme *křivkový integrál ze skalární funkce* $f$ předpisem

$$\int\limits_{\gamma} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}l \overset{def}{=} \int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

**Definice 16.24.** Buď $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ po částech hladká křivka. *Křivkový integrál podle křivky* $\gamma$ *z vektorové funkce* $\vec{F}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ spojité na $[\gamma]$ definujeme vztahem

$$\int\limits_{\gamma} \vec{F}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}l = \int\limits_{\gamma} P_1(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1 + P_2(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_2 + \cdots + P_n(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_n \overset{def}{=} \pm \int_a^b \left\langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \right\rangle \mathrm{d}t,$$

přičemž volíme znaménko $+$, je-li parametrizace souhlasná s orientací křivky $\gamma$, v opačném případě volíme znaménko $-$.

**Věta 16.25** (Greenova). *Nechť* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *je jednoduchá, uzavřená, kladně orientovaná, po částech hladká křivka. Nechť* $\vec{F} = [P,Q] : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *je vektorové pole třídy* $C^1$ *na množině* $D = [\gamma] \cup \operatorname{int}(\gamma)$*. Pak platí*

$$\int\limits_{\gamma} \vec{F}(x,y)\,\mathrm{d}l = \iint\limits_{D} \left[Q_x(x,y) - P_y(x,y)\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

**Důsledek 16.26.** *Buď* $C$ *po částech hladká Jordanova křivka,* $D$ *množina ohraničená křivkou* $C$*. Pak*

$$m(D) = \frac{1}{2} \int\limits_{C} -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y.$$

**Věta 16.27.** *Křivkový integrál* $\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ *nezávisí na integrační cestě* $\Leftrightarrow$ $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ *je diferenciálem nějaké kmenové funkce* $F$.

**Věta 16.28.** *Buďte* $P$*,* $Q$*,* $P_y$*,* $Q_x$ *spojité v otevřené a souvislé množině* $G$*.* $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ *je diferenciálem nějaké funkce* $F \Leftrightarrow P_y = Q_x$ *v* $G$.

**Definice 16.29.** Buď $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^2$ otevřená a $\varphi\colon M \to \mathbb{R}^3$ třídy $C^1(M)$. Buď $f$ spojitá na $[\varphi]$. *Plošný integrál ze skalární funkce* $f(x,y,z)$ přes $\varphi$ definujeme vztahem

$$\iint\limits_{\varphi} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S \overset{def}{=} \iint\limits_{M} f(\varphi(u,v))\,\|\varphi_u \times \varphi_v\|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

**Definice 16.30.** Buď $[\varphi] \subseteq \mathbb{R}^3$ plocha. Buď $C$ libovolná uzavřená křivka na $[\varphi]$. Jestliže se normálový vektor k $[\varphi]$ při oběhu po $C$ vrátí se stejnou orientací, pak řekneme, že plocha $[\varphi]$ je *orientovatelná*.
*Orientací* rozumíme volbu orientace normálového vektoru v libovolném (každém) bodě orientovatelné plochy $[\varphi]$. Řekneme, že plocha $[\varphi]$ pro $\varphi(u,v) : M \to \mathbb{R}^3$ je kladně orientovaná, jestliže orientace normály je souhlasná s orientací $\varphi_u \times \varphi_v$ v nějakém bodě $[\varphi]$.

**Definice 16.31.** Buď $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^2$ otevřená a $\varphi\colon M \to \mathbb{R}^3$ kladně orientovaná plocha třídy $C^1(M)$. Buď $\vec{F} = (P,Q,R) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spojité vektorové pole na $[\varphi]$. *Plošný integrál z vektorové funkce* $\vec{F}$ definujeme vztahem

$$\iint\limits_{\varphi} \vec{F}(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{\varphi} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \overset{def}{=} \iint\limits_{M} \left\langle \vec{F}(\varphi(u,v)), \varphi_u \times \varphi_v \right\rangle \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

**Definice 16.32.** Buď $\vec{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vektorové pole třídy $C^1$. *Divergenci vektorového pole* $\vec{F}$ definujeme předpisem

$$\operatorname{div} \vec{F} \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

**Definice 16.33.** Nechť $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je jednoduše souvislá množina a $g, q \in C^1(D, \mathbb{R})$. Množina

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D,\ g(x, y) \leq z \leq q(x, y)\}$$

se nazývá *regulární obor ve směru z*.

**Definice 16.34.** Nechť $V \subset \mathbb{R}^3$ lze vyjádřit jako konečné sjednocení regulárních oborů ve směrech $x, y, z$. Pak se množina $V$ nazývá *regulární obor*.

**Věta 16.35** (Gaussova-Ostrogradského)**.** *Buď $V \subset \mathbb{R}^3$ regulární obor, $\vec{F} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spojitá na $\overline{V}$. Označme $S = \mathrm{h}(V)$ hranici množiny V orientovanou ve směru vnější normály. Pak platí*

$$\iint_S \vec{F}\, \mathrm{d}S = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F}\, \mathrm{d}V,$$

*tedy*

$$\iint_S P\, \mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\, \mathrm{d}x\mathrm{d}z + R\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_V (P_x + Q_y + R_z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

## Lebesgueův integrál

**Definice 16.36.** Buď $X \neq \emptyset$ množina, $\mathcal{A} \subseteq 2^X$, $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Řekneme, že $\mathcal{A}$ je *σ-algebra* na $X$, jestliže

- $X \in \mathcal{A}$,
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X - A \in \mathcal{A}$,
- $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

**Definice 16.37.** Buď $X \neq \emptyset$. *Mírou* na $X$ rozumíme množinovou funkci $\mu$ definovanou na nějaké $\sigma$-algebře $\mathcal{A}$ na X, která splňuje:

- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow 0 \leq \mu(A) \leq \infty$,
- $\mu(\emptyset) = 0$,
- $A_n \in \mathcal{A},\ n \in \mathbb{N}$ po dvou disjunktní $\Rightarrow \mu\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Číslo $\mu(A)$ se nazývá *mírou množiny A*. Prvky $\sigma$-algebry $\mathcal{A}$ se nazývají *měřitelné množiny* vzhledem k míře $\mu$. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se nazývá *měřitelný prostor*.

**Označení 16.38.** Uvažujme nyní měřitelný prostor $(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}, \lambda)$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \in \mathscr{L}$, $f \colon A \to \mathbb{R}^*$, kde $\mathscr{L}$ je $\sigma$-algebra Lebesgueovsky měřitelných množin, $\lambda$ Lebesgueova míra.

**Definice 16.39.** Buď $(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}, \lambda)$ měřitelný prostor. Zobrazení $f \colon A \to \mathbb{R}^*$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá *reálná funkce* na množině $A$. $f$ nazveme *konečnou funkcí*, jestliže obor hodnot $H(f) \subseteq \mathbb{R}$. Reálná funkce $f$ se nazývá *měřitelná funkce*, jestliže

- $A \in \mathscr{L}$,
- $\forall a \in \mathbb{R} \colon \{x \in A \mid f(x) < a\} \in \mathscr{L}$.

**Definice 16.40.** Funkce $f$ se nazývá *jednoduchá*, je-li konečná, měřitelná, nezáporná a množina funkčních hodnot je konečná.

**Lemma 16.41** (Reprezentace jednoduché funkce)**.** *Každou jednoduchou funkci $f$ lze jednoznačně vyjádřit v tzv. kanonickém tvaru*

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i},$$

*kde $A_i \in \mathcal{A}$, $a_i \geq 0$, $\forall i \neq j \colon a_i \neq a_j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ a $\chi_{A_i}$ je charakteristická funkce množiny $A_i$.*

**Definice 16.42.** Buď $f$ jednoduchá funkce na $A$, $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ její kanonické vyjádření. *Integrálem* funkce $f$ přes množinu $A$ vzhledem k míře $\lambda$ rozumíme číslo

$$\int\limits_A f \,\mathrm{d}\lambda \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda\left(A_i\right).$$

**Definice 16.43.** Buď $f$ nezáporná funkce na $A$. Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost jednoduchých funkcí taková, že $f_n \nearrow f$. Definujeme

$$\int\limits_A f \,\mathrm{d}\lambda \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} \int\limits_A f_n \,\mathrm{d}\lambda.$$

Je-li $\int_A f \,\mathrm{d}\lambda < \infty$, řekneme, že $f$ je *integrovatelná* na $A$.

**Označení 16.44.** Označme $f^+ = \max\{f, 0\}$ a $f^- = \max\{-f, 0\}$.

**Definice 16.45.** Buď $f$ libovolná měřitelná funkce na množině $A$. Je-li alespoň jedna z funkcí $f^+$, $f^-$ integrovatelná na $A$, pak definujeme

$$\int\limits_A f \,\mathrm{d}\lambda \overset{def}{=} \int\limits_A f^+ \,\mathrm{d}\lambda - \int\limits_A f^- \,\mathrm{d}\lambda.$$

Řekneme, že $f$ je *integrovatelná* na $A$, jestliže $\int_A f \,\mathrm{d}\lambda$ existuje a je konečný.

# Kapitola 17

# Základy analýzy v komplexním oboru

## Holomorfní funkce

**Definice 17.1.** Buď $G \subseteq \mathbb{C}$ otevřená množina a uvažujme funkci $f\colon G \to \mathbb{C}$. Buď $z_0 \in G$. Řekneme, že funkce $f$ je v bodě $z_0$ *komplexně diferencovatelná* (*monogenní*), jestliže existuje konečná limita

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \mathbb{C}}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Tuto limitu nazýváme *derivací funkce* $f$ v bodě $z_0$ a značíme $f'(z)$ nebo $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z_0)$.

**Věta 17.2.** *Označme* $u = \mathrm{Re}(f)$, $v = \mathrm{Im}(f)$, $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$. *Je-li* $f$ *komplexně diferencovatelná v bodě* $z_0$, *pak platí*

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0),$$
$$u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0).$$

*Tyto podmínky nazýváme* Cauchyho-Riemannovy *podmínky.*

**Definice 17.3.** Funkce $f$ se nazývá *holomorfní v bodě* $z_0$, je-li $f$ komplexně diferencovatelná v nějakém jeho okolí. Funkce $f$ se nazývá *holomorfní na otevřené množině* $M \subseteq \mathbb{C}$, jestliže je holomorfní v každém bodě množiny $M$.

**Definice 17.4.** *Derivaci komplexní funkce* $\gamma$ *reálné proměnné* $t$ definujeme vztahem

$$\gamma'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}.$$

## Cauchyova věta a Cauchyův vzorec

**Definice 17.5.** *Křivkou* rozumíme spojité zobrazení $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$. Říkáme, že *křivka je parametrizovaná vzhledem k intervalu* $[\alpha, \beta]$, nezávisle proměnnou funkce $\gamma$ nazýváme *parametr. Geometrickým obrazem* (*grafem*) křivky $\gamma$ rozumíme množinu $[\gamma] = \gamma([\alpha, \beta])$.
Buď $t_0 \in [\alpha, \beta]$. Existuje-li $\gamma'(t_0) \neq 0$, nazývá se $\gamma'(t_0)$ *směrový vektor* křivky $\gamma$ v $t_0$.
Přímku $z = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)\, t$ nazýváme *tečnou ke křivce* $\gamma$ v bodě $t_0$.

Křivka $\gamma$ se nazývá

- *uzavřená*, jestliže $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$,
- *hladká*, jestliže má funkce $\gamma$ spojitou a nenulovou derivaci na $[\alpha, \beta]$,
- *po částech hladká*, jestliže lze rozdělit na konečně mnoho hladkých křivek,
- *cesta*, lze-li rozdělit na konečně mnoho křivek, které mají spojitou derivaci,
- *jednoduchá*, jestliže sama sebe neprotne ve vnitřním bodě,
- *oblouk*, jestliže není uzavřená,
- *Jordanova křivka*, jestliže je jednoduchá a uzavřená,
- *Jordanova cesta*, jestliže je $\gamma$ Jordanova křivka a zároveň cesta.

**Definice 17.6.** Nechť $g\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je po částech spojitá funkce. *Integrál* $\int_\alpha^\beta g(t)\,\mathrm{d}t$ definujeme vztahem

$$\int_\alpha^\beta g(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \operatorname{Re} g(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_\alpha^\beta \operatorname{Im} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Definice 17.7.** Nechť $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je cesta a nechť $f\colon [\gamma] \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce. *Křivkový integrál* funkce $f$ po cestě $\gamma$ definujeme vztahem

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Definice 17.8.** Buď $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ spojitá funkce na otevřené množině $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Řekneme, že křivkový integrál $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ v $\Omega$ *nezávisí na integrační cestě*, jestliže $\forall \gamma_1, \gamma_2$ mající stejné počáteční a koncové body platí

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

**Věta 17.9** (Cauchy)**.** *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast. Nechť funkce $f$ je holomorfní v $\Omega$. Pak pro každou uzavřenou cestu $\gamma$ v $\Omega$ platí*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

**Věta 17.10** (Cauchy-Goursat)**.** *Nechť $\gamma$ je Jordanova cesta v $\mathbb{C}$. Nechť $f$ je holomorfní funkce v $\operatorname{Int}\gamma$ a spojitá a konečná na $\overline{\operatorname{Int}\gamma}$. Pak*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

**Věta 17.11** (Cauchyho věta pro dvojici Jordanových cest)**.** *Nechť $\gamma$, $\omega$ jsou kladně orientované Jordanovy cesty v $\mathbb{C}$ takové, že $[\omega] \subset \operatorname{Int}\gamma$. Nechť $f$ je holomorfní funkce v oblasti $\operatorname{Int}\gamma \cap \operatorname{Ext}\omega$ a spojitá a konečná na $\overline{\operatorname{Int}\gamma \cap \operatorname{Ext}\omega}$. Pak platí*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\omega f(z)\,\mathrm{d}z.$$

**Věta 17.12** (Cauchyho vzorce)**.** *Nechť $\gamma$ je kladně orientovaná Jordanova cesta v $\mathbb{C}$. Nechť $f$ je holomorfní v $\operatorname{Int}\gamma$ a spojitá a konečná na $\overline{\operatorname{Int}\gamma}$. Pak platí*

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = \begin{cases} f(z_0) & z_0 \in \operatorname{Int}\gamma, \\ 0 & z_0 \in \operatorname{Ext}\gamma. \end{cases}$$

*Dále, pro libovolné $z_0 \in \operatorname{Int}\gamma$ a $n \in \mathbb{N}_0$ platí*

$$\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z = f^{(n)}(z_0).$$

## Elementární funkce v komplexním oboru

*Poznámka* 17.13. Definice *posloupnosti*, *řady*, *absolutní konvergence*, *řady funkcí* a *stejnoměrné konvergence* se v komplexní analýze téměř shodují s těmi, které se zavádějí v analýze reálné. Omezíme se proto na pojmy a tvrzení, které souvisí s elementárními funkcemi.

**Věta 17.14.** *Řada* $\sum a_n$ *konverguje právě tehdy, když konvergují řady* $\sum \operatorname{Re}(a_n)$ *a* $\sum \operatorname{Im}(a_n)$.

**Definice 17.15.** Řekneme, že řada $\sum f_n(z)$ *konverguje skoro stejnoměrně* na množině $M$, jestliže konverguje stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině $K \subseteq M$.

**Definice 17.16.** *Mocninnou řadou* rozumíme funkční řadu tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, přičemž $a_n$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Čísla $a_n$ nazveme *koeficienty* mocninné řady a $z_0$ *středem* mocninné řady.

**Věta 17.17** (Cauchy-Hadamard)**.** *Buď* $\sum a_n (z - z_0)^n$ *mocninná řada. Položme*

$$l = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

- *Je-li* $l = 0$*, pak mocninná řada konverguje absolutně v každém bodě* $z \in \mathbb{C}$.
- *Je-li* $l = \infty$*, pak mocninná řada diverguje v každém bodě* $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.
- *Je-li* $0 < l < \infty$*, pak mocninná řada*
  - *konverguje absolutně v každém bodě* $z \in \mathbb{C}$ *takovém, že* $|z - z_0| < \frac{1}{l}$,
  - *diverguje v každém bodě* $z \in \mathbb{C}$ *takovém, že* $|z - z_0| > \frac{1}{l}$.

**Definice 17.18.** Číslo $R = \frac{1}{l}$ nazveme *poloměrem konvergence* mocninné řady. Je-li $0 < R \le \infty$, nazývá se kruh $K(z_0, R)$ *konvergenčním kruhem* mocninné řady, jeho hranice *konvergenční kružnicí.*

**Věta 17.19.** *Mocninná řada konverguje v konvergenčním kruhu absolutně a funkce, ke které konverguje je spojitá. Na konvergenční kružnici může konvergovat i divergovat. Vně konvergenčního kruhu řada diverguje.*

**Věta 17.20** (Taylorova věta)**.** *Nechť je* $f$ *holomorfní v* $K(z_0, r)$*,* $z_0 \in \mathbb{C}$*,* $0 < r \le \infty$*. Pak pro* $z \in K(z_0, r)$ *platí*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n .$$

**Definice 17.21.** Pro $z \in \mathbb{C}$ definujeme *elementární funkce* následujícím způsobem:
*Exponenciální funkce* $\exp z = e^z$:

$$\exp z = e^z \stackrel{def}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

*Goniometrické a cyklometrické funkce*:

$$\cos z \stackrel{def}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \cosh z = \operatorname{ch} z \stackrel{def}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin z \stackrel{def}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \sinh z = \operatorname{sh} z \stackrel{def}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\operatorname{tg} z \stackrel{def}{=} \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \operatorname{tgh} z \stackrel{def}{=} \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z},$$

$$\operatorname{cotg} z \stackrel{def}{=} \frac{\cos z}{\sin z}, \qquad \operatorname{cotgh} z \stackrel{def}{=} \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

*Polynomem* v komplexním oboru rozumíme funkci

$$f(z) \overset{def}{=} a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0,$$

kde $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ jsou konstanty.
*Racionální lomennou funkci* definujeme jako podíl dvou polynomů.
Definujeme *$n$-tou mocninu* ($n \in \mathbb{N}$) předpisem

$$w \overset{def}{=} z^n.$$

Dále definujeme *$n$-tou odmocninu* jako inverzi k mocnině $z^n$, *logaritmickou funkci* jako inverzi k $e^z$ a *inverzní funkce k funkcím goniometrickým a hyperbolickým.* Obecně jsou tyto funkce mnohoznačné. Abychom mohli definovat jednoznačnou inverzní funkci, omezíme se na nějaký *obor prostoty* (množinu, kde je původní funkce prostá).
Nechť $c \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Obecnou mocninu $z^c$* definujeme vztahem

$$z^c \overset{def}{=} e^{c \operatorname{Log} z}.$$

**Věta 17.22.** *Buď $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pak platí*

$$\begin{aligned} \operatorname{Log} z &= \ln|z| + \mathrm{i}\left(\arg z + 2k\pi\right), \ k \in \mathbb{Z}, \\ \log z &= \ln|z| + \mathrm{i} \arg_{[-\pi,\pi)} z. \end{aligned}$$

*Poznámka* 17.23 (Odvození dalších vztahů)*.* Protože jsou vzorce pro počítání inverzních funkcí k funkcím goniometrickým a hyperbolickým netriviální, ukážeme si, jakým způsobem je možné je odvodit. Využijeme známých vztahů

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2}, & \sin z &= \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}, \\ \operatorname{ch} z &= \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, & \operatorname{sh} z &= \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}. \end{aligned}$$

Odvodíme například vzorec pro arcsin. Označme $w = \sin z$. Chceme vyjádřit $z$ jako funkci $w$.

$$\begin{aligned} w = \sin z &= \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}, \\ e^{\mathrm{i}z} - 2\mathrm{i}w - e^{-\mathrm{i}z} &= 0, \\ \left(e^{\mathrm{i}z}\right)^2 - 2\mathrm{i}w e^{\mathrm{i}z} - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Dostáváme kvadratický polynom v proměnné $e^{\mathrm{i}z}$, který vyřešíme.

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{i}z} &= \mathrm{i}w \pm \sqrt{1 - w^2}, \\ \mathrm{i}z &= \operatorname{Log}\left(\mathrm{i}w \pm \sqrt{1 - w^2}\right), \\ z &= -\mathrm{i} \operatorname{Log}\left(\mathrm{i}w \pm \sqrt{1 - w^2}\right). \end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$\arcsin z = -\mathrm{i} \operatorname{Log}\left(\mathrm{i}z \pm \sqrt{1 - z^2}\right).$$

## Izolované singularity, výpočty pomocí reziduí

*Poznámka* 17.24. Pro jednoduchost se budeme věnovat pouze izolovaným singularitám a reziduím v bodech $z_0 \in \mathbb{C}$. Případ $z_0 = \infty$ je třeba uvážit zvlášť.

**Definice 17.25.** Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$ pro $n \in \mathbb{Z}$. Součet řad

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n}$$

nazýváme *Laurentovou řadou* se středem v bodě $z_0$ s koeficienty $a_n$. Značíme

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n .$$

Řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ nazýváme *regulární částí* Laurentovy řady.
Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n}$ nazýváme *hlavní částí* Laurentovy řady.
Říkáme, že Laurentova řada *konverguje v bodě $z$*, pokud zde konverguje regulární i hlavní část.

*Poznámka* 17.26. Laurentova řada je zobecněním mocninné řady pro $a_{-n} = 0$.

- Označme $R$ poloměr konvergence regulární části Laurentovy řady.
- Provedeme substituci $\xi = (z-z_0)^{-1}$ v hlavní části a dostáváme $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\xi^n$.
- Označme $\rho$ poloměr konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\xi^n$. Položme $r = \frac{1}{\rho}$.
- Hlavní část konverguje pro $|z-z_0| > r$, diverguje pro $|z-z_0| < r$.

Laurentova řada konverguje (absolutně a skoro stejnoměrně) na množině

$$P(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-z_0| < R\}$$

a diverguje na množině

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < r \vee |z-z_0| > R\}.$$

**Definice 17.27.** Je-li $r < R$, pak se množina $P(z_0, r, R)$ nazývá *mezikruží konvergence*.
Pro $0 < R \leq \infty$ se množina $P(z_0, R) = P(z_0, 0, R)$ nazývá *prstencové okolí* bodu $z_0$.

**Věta 17.28** (Laurentova)**.** *Buď $f(z)$ holomorfní funkce v mezikruží $P(z_0, r, R)$. Pak existuje Laurentova řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ mající mezikruží konvergence $P(z_0, r, R)$ taková, že její součet je v $P(z_0, r, R)$ roven $f(z)$. Přitom $\forall n \in \mathbb{Z}$ platí*

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z,\ \ \textit{kde}\ \gamma(t) = z_0 + \rho e^{\mathrm{i}t},\ \ t \in [0, 2\pi]\,,\ \ \rho \in (r, R)\,.$$

**Definice 17.29.** Bod $z_0 \in \mathbb{C}$ se nazývá *izolovaná singularita* funkce $f$, jestliže funkce $f$ není holomorfní v bodě $z_0$, ale je holomorfní v jistém prstencovém okolí $P(z_0, R)$ bodu $z_0$.
Je-li $z_0$ izolovaná singularita funkce $f$, lze $f$ v $P(z_0, R)$ rozvinout do Laurentovy řady

$$(\star) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n .$$

Izolovanou singularitu $z_0$ nazveme *odstranitelnou singularitou*, jestliže všechny koeficienty hlavní části Laurentova rozvoje ($\star$) jsou rovny 0.
Izolovanou singularitu $z_0$ funkce $f$ nazveme *pólem řádu $k$*, $k \in \mathbb{N}$, jestliže $a_{-k} \neq 0$ a $a_{-n} = 0$ pro $n \geq k+1$. V případě $k = 1$ hovoříme o *jednoduchém pólu*.
Izolovanou singularitu $z_0$ funkce $f$ nazveme *podstatnou singularitou*, jestliže $a_{-n} \neq 0$ pro nekonečně mnoho indexů $n \in \mathbb{N}$.

**Věta 17.30.** *Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovaná singularita funkce $f$. Pak platí:*

- *$z_0$ je odstranitelná singularita právě tehdy, když $\exists\, a \in \mathbb{C}$: $\lim_{z \to z_0} f(z) = a$,*
- *$z_0$ je pólem právě tehdy, když $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$,*
- *$z_0$ je podstatná singularita právě tehdy, když neexistuje limita $\lim_{z \to z_0} f(z)$.*

**Věta 17.31.** *Funkce $f$ má v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ pól řádu $m$ právě tehdy, když*

$$\frac{1}{f}(z_0) = \left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = \cdots = \left(\frac{1}{f}\right)^{(m-1)}(z_0) = 0 \quad a \quad \left(\frac{1}{f}\right)^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

**Definice 17.32.** Buď $f$ holomorfní v prstencovém okolí $P(z_0, R)$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$. Označme $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ Laurentův rozvoj funkce $f$. *Reziduem* funkce $f$ v bodě $z_0$ rozumíme koeficient $a_{-1}$, značíme $\operatorname{res}_{z_0} f$.

**Věta 17.33.** *Buď $z_0 \in \mathbb{C}$. Platí*

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z, \ \ kde\ \gamma = z_0 + \rho e^{\mathrm{i}t},\ \ t \in [0, 2\pi]\,,\ \ 0 < \rho < R.$$

*Je-li $f$ holomorfní v $z_0$, pak $\operatorname{res}_{z_0} f = 0$.*

**Věta 17.34.** *Buďte $z_0 \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$. Je-li $z_0$ pól řádu $m$ funkce $f$, pak*

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^m f(z)\right]^{(m-1)}.$$

**Věta 17.35.** *Nechť $\gamma$ je kladně orientovaná Jordanova cesta v $\mathbb{C}$. Nechť funkce $f$ je holomorfní v $\operatorname{Int}\gamma \setminus \{z_1, \ldots, z_m\}$ a spojitá a konečná na $\overline{\operatorname{Int}\gamma} \setminus \{z_1, \ldots, z_m\}$, přičemž $\{z_1, \ldots, z_m\} \subset \operatorname{Int}\gamma$. Pak*

$$\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \sum_{j=1}^{m} \operatorname{res}_{z_j} f.$$

# Kapitola 18

# Základy pravděpodobnosti

## Kolmogorovova axiomatická definice pravděpodobnosti

**Definice 18.1.** Nechť $\Omega$ značí neprázdný *prostor elementárních jevů* a $\mathcal{A} \in 2^{\Omega}$ neprázdný systém podmnožin, pro který platí:

- $\Omega \in \mathcal{A}$,
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$,
- $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Pak $\mathcal{A}$ nazýváme *jevovou $\sigma$-algebrou* na $\Omega$, dvojici $(\Omega, \mathcal{A})$ nazýváme *jevové pole* a libovolný prvek $A \in \mathcal{A}$ nazýváme *náhodný jev.*

**Věta 18.2.** *Nechť $\mathcal{S} \in 2^{\Omega}$ libovolný systém podmnožin neprázdné množiny $\Omega$. Pak existuje množinová $\sigma$-algebra $\sigma(\mathcal{S})$ taková, že platí:*

- $\mathcal{S} \subseteq \sigma(\mathcal{S})$,
- *je-li $\mathcal{A}$ množinová $\sigma$-algebra taková, že $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$, pak $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{A}$.*

**Definice 18.3.** Množinová $\sigma$-algebra $\sigma(\mathcal{S})$ z předchozí věty se nazývá *$\sigma$-algebra generovaná* systémem $\mathcal{S}$.

*Poznámka* 18.4. Důležitým příkladem $\sigma$-algebry jsou tzv. *borelovské množiny.* Systém borelovských množin $\mathcal{B}$ v $\mathbb{R}$ dostaneme jako $\sigma$-algebru generovanou systémem $\mathcal{S} = \{(-\infty, x] \mid x \in \mathbb{R}\}$, tedy $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{S})$. Podobně dostaneme systém borelovských množin $\mathcal{B}^n$ v $\mathbb{R}^n$, tj. $\mathcal{B}^n = \sigma(\mathcal{S}^n)$, kde $\mathcal{S}^n = \{(-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \cdots \times (-\infty, x_n] \mid (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$.

**Definice 18.5.** Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je jevové pole a $P$ je množinová funkce definovaná na $\mathcal{A}$ s vlastnostmi:

- $P(\Omega) = 1$,
- pro každé $A \in \mathcal{A}$ je $P(A) \geq 0$,
- je-li $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnost náhodných jevů takových, že pro $j \neq l$ je $A_j \cap A_l = \emptyset$, pak $P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$.

Funkci $P$ nazýváme *pravděpodobností* a trojici $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *pravděpodobnostním prostorem.*

**Příklad 18.6.** Uveďme si několik definic pravděpodonosti.

- Klasická definice pravděpodobnosti: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}, \mathcal{A} = 2^\Omega, P(\omega_k) = \frac{1}{n}$. Platí $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.
- Geometrická definice pravděpodobnosti: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ borelovská podmnožina, $\mathcal{A} = \mathcal{B}^n(\Omega)$ nejmenší borelovská $\sigma$-algebra na $\Omega$, $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$, kde $\mu$ je Lebesgueova míra.

**Věta 18.7.** *Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor. Pravděpodobnost $P$ má následující vlastnosti:*

- $P(\emptyset) = 0$,
- $A, B \in \mathcal{A}, A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$,
- $A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B), P(B - A) = P(B) - P(A)$,
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$,
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$,
- $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
- $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow P(\bigcup_{k=1}^n A_k) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k)$.

## Podmíněná pravděpodobnost, vzorec pro úplnou pravděpodobnost, Bayesův vzorec, nezávislost

**Definice 18.8.** Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $B \in \mathcal{A}, P(B) > 0$. Pak číslo

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

nazýváme *podmíněnou pravděpodoností* jevu $A$ za podmínky, že nastal jev $B$.

**Věta 18.9.** *Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $B \in \mathcal{A}, P(B) > 0$. Pak funkce*

$$P_B : \mathcal{A} \to [0, 1], P_B(A) = P(A|B)$$

*je pravděpodobnost na $(\Omega, \mathcal{A})$.*

**Věta 18.10.** *Platí následující vztahy:*

- $P(A|\,\Omega) = P(A)$ *pro každé* $A \in \mathcal{A}$,
- $P(\bigcap_{k=1}^n A_k) = P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \cdots P(A_3|A_1 \cap A_2)P(A_2|A_1)P(A_1)$ *pro* $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$ *(věta o násobení pravděpodobností).*

**Definice 18.11.** Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor. Řekneme, že systém $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$ tvoří *úplný systém jevů*, jestliže platí:

- pro různé jevy $A, B$ je $A \cap B = \emptyset$,
- $\bigcup \mathcal{S} = \Omega$.

**Věta 18.12** (Vzorec pro úplnou pravděpodobnost)**.** *Nechť nejvýše spočetný systém jevů $\mathcal{S}$ tvoří úplný systém jevů na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a $\forall A \in \mathcal{S}$ je $P(A) > 0$. Pak pro libovolné $B \in \mathcal{A}$ platí*

$$P(B) = \sum_{A \in \mathcal{S}} P(B|A)P(A).$$

**Věta 18.13** (Bayesův vzorec)**.** *Nechť nejvýše spočetný systém jevů $\mathcal{S}$ tvoří úplný systém jevů na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a $\forall A \in \mathcal{S}$ je $P(A) > 0$. Pak pro libovolné $B \in \mathcal{A}$ takové, že $P(B) > 0$ a pro všechna $A \in \mathcal{S}$ platí*

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{\sum_{C \in \mathcal{S}} P(B|C)P(C)}.$$

**Definice 18.14.** Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor. Řekneme, že jevy $A$ a $B$ jsou *nezávislé*, jestliže $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

*Poznámka* 18.15. Pokud jsou jevy $A$ a $B$ nezávislé, pak platí $P(A|B) = P(A), P(B|A) = P(B)$, což je v souladu s intuicí.

**Věta 18.16.** *$\Omega$ a $\emptyset$ jsou nezávislé s libovolným jevem. Dále platí, že pokud jsou jevy $A$ a $B$ nezávislé, pak také jevy $A$ a $\overline{B}$, $\overline{A}$ a $B$, $\overline{A}$ a $\overline{B}$ jsou nezávislé.*

**Definice 18.17.** Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor a $M = \{A_k\}_{k \in \mathcal{I}}$ je systém jevů indexovaný nějakou indexovou množinou $\mathcal{I}$. Řekneme, že náhodné jevy systému $M$ jsou *nezávislé*, jestliže pro libovolnou konečnou množinu indexů $\{k_1, k_2, \ldots, k_n\} \subseteq \mathcal{I}, n \in \mathbb{N}$ platí

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_{k_j}\right) = \prod_{j=1}^{n} P(A_{k_j}).$$

**Věta 18.18.** *Platí:*

- *jestliže v dané množině nezávislých náhodných jevů nahradíme libovolný počet jevů jevy opačnými, opět dostaneme množinu nezávislých náhodných jevů,*
- *pro nezávislé náhodné jevy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ platí*

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - P(A_k)).$$

*Poznámka* 18.19. Všechny věty v této kapitole lze snadno dokázat.

# Kapitola 19

# Náhodné veličiny a vektory

## Definice náhodných veličin a vektorů, diskrétní a absolutně spojité náhodné veličiny, distribuční funkce, pravděpodobnostní funkce, hustota, příklady diskrétních a absolutně spojitých rozdělení

**Definice 19.1.** Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor. Zobrazení $X: \Omega \to \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} = X^{-1}\left((-\infty, x]\right) \in \mathcal{A}$$

nazýváme *náhodnou veličinou* vzhledem k jevovému poli $(\Omega, \mathcal{A})$.

**Označení 19.2.** Zaveďme následující zkratky v značení:

- $\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega \colon X(\omega) \leq x\}$,
- $P\left(X \leq x\right) = P\left(\{X \leq x\}\right)$,
- $P(X \in B) = P\left(\{\omega \in \Omega \colon X(\omega) \in B\}\right)$.

**Definice 19.3.** Nechť $X$ je náhodná veličina definovaná na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Funkci $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou pro každé $x \in \mathbb{R}$ vztahem $F(x) = P(X \leq x)$ nazýváme *distribuční funkcí* náhodné veličiny $X$.

**Věta 19.4.** *Nechť $F$ je distribuční funkce náhodné veličiny $X$ definované na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. $F$ má následující vlastnosti:*

- *je neklesající,*
- *je zprava spojitá,*
- $0 \leq F(x) \leq 1$ *pro* $x \in \mathbb{R}$,
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$,
- $P(X = x) = F(x) - \lim_{t \to x-} F(t)$ *pro* $x \in \mathbb{R}$,
- $P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$ *pro* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2$,
- *má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti.*

**Definice 19.5.** O náhodné veličině $X$ na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ řekneme, že je *diskrétního typu*, pokud existuje nejvýše spočetná množina $M \subseteq \mathbb{R}$ taková, že $P\left(X \in M\right) = 1$. Funkci definovanou pro $x \in \mathbb{R}$ vztahem $p(x) = P(X = x)$ nazýváme *pravděpodobnostní funkcí* $X$ a množinu $M = \{x \in \mathbb{R} \mid p\left(x\right) \neq 0\}$ nazýváme *oborem hodnot* $X$. Značíme $X \sim (M, p)$.

**Věta 19.6.** *Nechť $X \sim (M, p)$. Pak platí:*

- $p(x) \geq 0$ *pro* $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{x \in M} p(x) = 1$,
- $p(x) = F(x) - \lim_{t \to x-} F(t)$ *pro* $x \in \mathbb{R}$,
- $P(X \in B) = \sum_{x \in M \cap B} p(x)$ *pro libovolnou borelovskou množinu* $B$,
- $F(x) = \sum_{t \leq x} p(t)$ *pro* $x \in \mathbb{R}$.

**Příklad 19.7.** Uveďme tři příklady diskrétních rozdělení.

- *Alternativní rozdělení*, $X \sim A(\theta), \theta \in (0, 1)$, pravděpodobnostní funkce je tvaru

$$p(x) = \begin{cases} 1 - \theta & x = 0 \\ \theta & x = 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- *Binomické rozdělení*, $X \sim Bi(n, \theta), \theta \in (0, 1), n \in \mathbb{N}$, pravděpodobnosntní funkce je tvaru

$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n - x} & x = 0, 1, \ldots, n \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- *Poissonovo rozdělení*, $X \sim Po(\lambda), \lambda > 0$, pravděpodobnosntní funkce je tvaru

$$p(x) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} & x = 0, 1, \ldots \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

**Definice 19.8.** Řekneme, že náhodná veličina $X$ definovaná na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je *absolutně spojitého typu*, jestliže existuje nezáporná funkce integrovatelná v Lebesgueově smyslu taková, že pro libovolnou borelovskou množinu $B$ platí $P(X \in B) = \int_B f(x) \mathrm{d}x$. Funkci $f$ nazýváme *hustotou* náhodné veličiny $X$.

**Věta 19.9.** *Nechť $X$ je náhodná veličina absolutně spojitého typu, $f$ je její husota a $F$ její distribuční funkce. Pak platí:*

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, \mathrm{d}x = 1$,
- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \, \mathrm{d}t$,
- *$F$ je absolutně spojitá funkce,*
- *$f$ je určena skoro všude jednoznačně, tj. jsou-li $f$ a $g$ dvě hustoty náhodné veličiny $X$, pak $\mu(\{x \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$, kde $\mu$ je Lesbegueova míra,*
- *funkce $F'$ existuje skoro všude vzhledem k Lesbegueově míře a je hustotou $X$,*
- *pro každé $a < b$ platí*

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = F(b) - F(a) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b).$$

**Příklad 19.10.** Uveďme příklady absolutně spojitých rozdělení.

- *Normální rozdělení*, $X \sim N(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$, hustota je pro $x \in \mathbb{R}$ tvaru
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$
- *Gamma rozdělení*, $X \sim \Gamma(\mu, a), \mu > 0, a > 0$, hustota je tvaru
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu^a \Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\frac{x}{\mu}} & x > 0 \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$
kde $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} \,\mathrm{d}x$ pro $a > 0$. Volbou $a = 1$ dostaneme *exponenciální rozdělení* $Ex\left(\frac{1}{\mu}\right)$, volbou $a = \frac{\nu}{2}, \mu = 2$ dostaneme $\chi^2$ *rozdělení* $\chi^2(\nu)$.

**Definice 19.11.** Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pravděpodobnostní prostor. Zobrazení $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ takové, že pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ platí
$$\{\omega \in \Omega \mid \mathbf{X}(\omega) \leq \mathbf{x}\} \in \mathcal{A}$$
nazýváme *n-rozměrným náhodným vektorem.* Funkci $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovanou pro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vztahem $F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n) = P(\mathbf{X} \leq \mathbf{x})$ nazýváme *distribuční funkcí* náhodného vektoru $\mathbf{X}$.

*Poznámka* 19.12. Stejně jako u náhodných veličin, definujeme náhodné vektory diskrétního a absolutně spojitého typu.

**Definice 19.13.** Řekneme, že náhodné veličiny $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou *nezávislé*, jestliže jsou pro libovolné $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ nezávislé náhodné jevy $\{X_1 \leq x_1\}, \{X_2 \leq x_2\}, \ldots, \{X_n \leq x_n\}$.

**Věta 19.14.** *Nechť $X$ je náhodná veličina a $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je borelovsky měřitelné zobrazení, tj. úplné vzory borelovských množin jsou borelovksé množiny. Pak $g(X)$ je náhodná veličina. Podobně, pokud je $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ náhodný vektor a $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je borelovsky měřitelné zobrazení, pak $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m) = g(\mathbf{X})$ je náhodný vektor.*

## Číselné charakteristiky náhodných veličin a vektorů: střední hodnota, rozptyl, kvantily, kovariance, korelace

**Definice 19.15.** Nechť $X$ je náhodná veličina na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pokud existuje a je konečný integrál
$$\int_\Omega X(\omega) \,\mathrm{d}P(\omega),$$
pak ho nazýváme *střední hodnotou* náhodné veličiny $X$ a značíme $\mathrm{E}\,(X)$. V opačném případě říkáme, že střední hodnota $X$ neexistuje.

**Věta 19.16.** *Nechť $\mathbf{X}$ náhodný vektor na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ borelovsky měřitelná funkce.*

- *Pokud je $\mathbf{X} \sim (M, p)$ diskrétního typu, pak platí, že střední hodnota náhodné veličiny $g(\mathbf{X})$ existuje, právě když $\sum_{\mathbf{x} \in M} g(\mathbf{x}) p(\mathbf{x})$ absolutně konverguje a platí $\mathrm{E}\,(g(\mathbf{x})) = \sum_{\mathbf{x} \in M} g(\mathbf{x}) p(\mathbf{x})$.*
- *Pokud je $\mathbf{X}$ absolutně spojitého typu s hustotou $f$, pak platí, že střední hodnota náhodné veličiny $g(\mathbf{X})$ existuje, právě když je funkce $g(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})$ integrovatelná v Lebesgueově smyslu a platí $\mathrm{E}\,(g(\mathbf{x})) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})$.*

*Poznámka* 19.17. Ve speciálním případě, kdy $\mathbf{X}$ bude jenom náhodná veličina a funkce $g$ bude identita, nám předešlá věta dává praktický návod na výpočet střední hodnoty $X$.

**Definice 19.18.** *Rozptylem* náhodné veličiny $X$ nazýváme číslo $\mathrm{D}(X) = \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X))^2\right)$ (pokud existuje). *Kovariancí* dvou náhodných veličin $X$ a $Y$ nazýváme číslo (pokud existuje) $\mathrm{C}(X,Y) = \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))(Y - \mathrm{E}(Y)))$. Číslo $\mathrm{R}(X,Y) = \frac{\mathrm{C}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{D}(X)\mathrm{D}(Y)}}$ nazýváme *korelační koeficient* (pokud existuje).

**Definice 19.19.** Nechť $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ je distribuční funkce a $\alpha \in (0,1)$. Potom funkci

$$Q(\alpha) = F^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq \alpha\}$$

nazýváme *kvantilová funkce* a číslo $x_\alpha = Q(\alpha)$ nazýváme $\alpha$-*kvantil* rozdělení s touto distribuční funkcí.

**Věta 19.20** (Vlastnosti číselných charakteristik)**.** *Nechť $X, X_1, X_2, Y$ jsou náhodné veličiny definované na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $a, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Pokud existují příslušné číselné charakteristiky, pak platí:*

- $P(X = a) = 1 \Rightarrow \mathrm{E}(X) = a$, $\mathrm{D}(X) = 0$,
- $\mathrm{E}(a_1X_1 + a_2X_2) = a_1\mathrm{E}(X_1) + a_2\mathrm{E}(X_2)$,
- $X_1 \leq X_2 \Rightarrow \mathrm{E}(X_1) \leq \mathrm{E}(X_2)$,
- $P(X \geq 0) = 1 \Rightarrow \mathrm{E}(X) \geq 0$,
- $\mathrm{D}(X) \geq 0$,
- $\mathrm{D}(a_1 + a_2X) = a_2^2\mathrm{D}(X)$,
- $\mathrm{C}(X,X) = \mathrm{D}(X)$, $\mathrm{R}(X,X) = 1$,
- $\mathrm{C}(X,Y) = \mathrm{C}(Y,X)$, $\mathrm{R}(X,Y) = \mathrm{R}(Y,X)$,
- $\mathrm{C}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$,
- $X$, $Y$ *nezávislé* $\Rightarrow \mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$, $\mathrm{D}(X+Y) = \mathrm{D}(X) + \mathrm{D}(Y)$, $\mathrm{C}(X,Y) = \mathrm{R}(X,Y) = 0$,
- $|\mathrm{C}(X,Y)| \leq \sqrt{\mathrm{D}(X)\mathrm{D}(Y)}$, $|\mathrm{R}(X,Y)| \leq 1$,
- $\mathrm{C}(a_1 + a_2X, b_1 + b_2Y) = a_2b_2\mathrm{C}(X,Y)$,
- $\mathrm{D}(X+Y) = \mathrm{D}(X) + \mathrm{D}(Y) + 2\mathrm{C}(X,Y)$,
- $\mathrm{R}(X,Y) = 1 \Leftrightarrow$ *existují konstanty $m$ a $n > 0$ takové, že* $P(Y = m + nX) = 1$,
  $\mathrm{R}(X,Y) = -1 \Leftrightarrow$ *existují konstanty $m$ a $n < 0$ takové, že* $P(Y = m + nX) = 1$.

**Věta 19.21** (Čebyševova nerovnost)**.** *Nechť $X$ je náhodná veličina a nechť existuje* $\mathrm{D}(X)$*. Potom pro libovolné $\epsilon > 0$ platí*

$$P(|X - \mathrm{E}(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathrm{D}(X)}{\epsilon^2}.$$

## Asymptotické vlastnosti náhodných veličin: zákon velkých čísel, centrální limitní věta

**Definice 19.22.** Řekneme, že posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje podle pravděpodobnosti (konverguje slabě) k číslu* $\theta \in \mathbb{R}$, jestliže platí

$$\forall \epsilon > 0 \lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - \theta| > \epsilon\right) = 0$$

a píšeme

$$X_n \xrightarrow{P} \theta.$$

**Definice 19.23.** Řekneme, že posloupnost náhodných veličin $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ splňuje *slabý zákon velkých čísel*, jestliže platí

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \mathrm{E}\left(X_k\right)\right) \xrightarrow{P} 0 \text{ pro } n \to \infty,$$

tj. platí

$$\forall \epsilon > 0 \lim_{n\to\infty} P\left(|Y_n| > \epsilon\right) = 0.$$

**Definice 19.24.** Řekneme, že posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje skoro jistě (konverguje silně) k číslu* $\theta \in \mathbb{R}$, jestliže platí

$$P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = \theta\right) = 1$$

a píšeme

$$X_n \xrightarrow{s.j.} \theta.$$

**Definice 19.25.** Řekneme, že posloupnost náhodných veličin $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ splňuje *silný zákon velkých čísel*, jestliže platí

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \mathrm{E}\left(X_k\right)\right) \xrightarrow{s.j.} 0 \text{ pro } n \to \infty,$$

tj. platí

$$P\left(\lim_{n\to\infty} Y_n = 0\right) = 1.$$

**Věta 19.26** (Chinčinova)**.** *Nechť $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin se stejným rozdělením pravděpodobnosti, jehož střední hodnota $\mu = \mathrm{E}\left(X_k\right)$ existuje. Potom $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ splňuje slabý i silný zákon velkých čísel, tj. platí*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \mu \text{ pro } n \to \infty,$$
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{s.j.} \mu \text{ pro } n \to \infty.$$

**Definice 19.27.** Řekneme, že posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje v distribuci* k náhodné veličině $X$ s distribuční funkcí $F$, jestliže pro její posloupnost distribučních funkcí $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí, že ve všech bodech spojitosti $F$ je

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

a píšeme

$$X_n \xrightarrow{d} X.$$

**Věta 19.28** (Lindebergova-Lévyho centrální limitní věta)**.** *Nechť* $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ *je posloupnost nezávislých náhodných veličin se stejným rozdělením pravděpodobnosti se střední hodnotou* $\mu$ *a nenulovým rozptylem* $\sigma^2$*. Potom posloupnost standardizovaných aritmetických průměrů konverguje v distribuci k náhodné veličině se standardizovaným normálním rozdělením, tj. platí*

$$U_{\overline{X}_n} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\left(X_k\right)}{\sqrt{\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{D}\left(X_k\right)}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{d} U \sim N(0,1).$$

# Kapitola 20

# Základy statistiky

## Náhodný výběr a statistiky jako odhady parametrických funkcí, jejich vlastnosti: nestrannost a konzistence

**Definice 20.1.** Náhodný vektor $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)^T$ nazveme *náhodným výběrem* z rozdělení pravděpodobnosti $P$, jestliže

- $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny,
- $X_1, \ldots, X_n$ mají stejné rozdělení pravděpodobnosti.

Číslo $n$ nazýváme *rozsah náhodného výběru.* Libovolný bod $\mathbf{x}_n = (x_1, \ldots, x_n)^T$, kde $x_i$ je realizace náhodné veličiny $X_i$, budeme nazývat *realizací náhodného výběru* $\mathbf{X}_n$.

*Poznámka* 20.2. Naším cílem bude na základě náhodného výběru odhadnout nějaké parametry rozdělení pravděpodobnosti náhodného výběru, respektive funkce těchto parametrů.

**Definice 20.3.** Libovolnou náhodnou veličinu $T_n$, která vznikne jako funkce náhodného výběru $\mathbf{X}_n = \{X_1, \ldots, X_n\}^T$ nazýváme *statistikou.*

*Poznámka* 20.4. Nechť $\theta$ je nějaký parametr rozdělení pravděpodobnosti $P$ náhodných veličin $X_i$. Funkci $\gamma(\theta)$ nazýváme *parametrickou funkcí. Odhadem parametrické funkce* $\gamma(\theta)$ budeme rozumět nějakou statistiku $T_n$, která bude pro různé náhodné výběry kolísat kolem $\gamma(\theta)$. Podobně mužeme uvažovat vektor parametrů $\boldsymbol{\theta}$, jak to je například u binomického rozdělení $Bi(n,p)$, $\boldsymbol{\theta} = (n,p)$, $\mu(\boldsymbol{\theta}) = np$. Pro jednoduchost se tady ale omezíme jenom na případ jednoho parametru.

**Definice 20.5.** Nechť $\mathbf{X}_n$ je náhodný výběr z rozdělení pravděpodobnosti $P_\theta$. Nechť $\gamma(\theta)$ je daná parametrická funkce. Řekneme, že statistika $T_n$ je

| | | |
|---|---|---|
| *nestranným* (*nevychýleným*) | odhadem parametrické funkce $\gamma(\theta)$ | pokud $\forall\theta \in \Theta$ platí: $E_\theta T_n = \gamma(\theta)$, |
| *kladně vychýleným* | | $E_\theta T_n > \gamma(\theta)$, |
| *záporně vychýleným* | | $E_\theta T_n < \gamma(\theta)$, |
| *asymptoticky nestranným* | | $\lim\limits_{n\to\infty} E_\theta T_n = \gamma(\theta)$, |
| *slabě konzistentním* | | $\forall\epsilon > 0 \lim\limits_{n\to\infty} P_\theta(\lvert T_n - \gamma(\theta)\rvert > \epsilon) = 0$, |
| *silně konzistentním* | | $P_\theta\left(\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \gamma(\theta)\right) = 1$. |

**Definice 20.6** (Výběrové charakteristiky)**.** Nechť $\mathbf{X}_n$ je náhodný výběr z rozdělení s distribuční funkcí $F(x;\theta)$, $\theta \in \Theta$. Statistika

| | | |
|---|---|---|
| $\overline{X} = \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ | se nazývá | *výběrový průměr,* |
| $S^2 = S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)$ | se nazývá | *výběrový rozptyl,* |
| $S = \sqrt{S^2}$ | se nazývá | *výběrová směrodatná odchylka.* |

**Věta 20.7.** *Nechť $\mathbf{X}_n$ je náhodný výběr z rozdělení, které má*

- $\forall\theta \in \Theta$ *střední hodnotu $\mu(\theta)$. Pak je $\overline{X}$ nestranným odhadem $\mu(\theta)$.*
- $\forall\theta \in \Theta$ *rozptyl $\sigma^2(\theta)$. Pak je $S^2$ nestranným odhadem $\sigma^2(\theta)$.*
- $\forall\theta \in \Theta$ *střední hodnotu $\mu(\theta)$ a rozptyl $\sigma^2(\theta)$. Jestliže*
  - $\mu(\theta) < \infty$*, je $\overline{X}$ silně (i slabě) konzistentním odhadem $\mu(\theta)$.*
  - $\sigma^2(\theta) < \infty$*, je $S^2$ silně (i slabě) konzistentním odhadem $\sigma^2(\theta)$.*

**Definice 20.8.** Nechť $T_n$ je nestranný odhad parametrické funkce $\gamma(\theta)$ a pro všechna $\theta \in \Theta$ platí

$$D_\theta T_n \leq D_\theta T_n^*,$$

kde $T_n^*$ je libovolný nestranný odhad parametrické funkce $\gamma(\theta)$. Pak odhad $T_n$ nazveme *nejlepším nestranným odhadem* parametrické funkce $\gamma(\theta)$.

## Konstrukce bodových odhadů: metoda maximální věrohodnosti

*Poznámka* 20.9. Buď $\mathbf{X}_n$ náhodný výběr z rozdělení s distribuční funkcí $F(x;\theta)$, kde $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$. Předpokládejme, že $F(x;\theta)$ lze vyjádřit ve tvaru

$$F(x;\theta) = \int_{-\infty}^{x} f(x;\theta)\,\mathrm{d}\nu(t),$$

kde $f(x;\theta)$ je hustota pravděpodobnosti vzhledem k míře $\nu$ (prakticky je to buď obyčejná hustota nebo pravděpodobnostní funkce).

**Definice 20.10.** Sdruženou hustotu pravděpodobnosti náhodného vektoru $\mathbf{X}_n$ značíme

$$L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

a nazýváme *věrohodnostní funkcí náhodného výběru.*
Odhad $\hat{\theta}_{MLE}$ nazveme *maximálně věrohodný*, jestliže $\forall\theta \in \Theta$ platí

$$L\left(\hat{\theta}_{MLE}; x_1, \ldots, x_n\right) \geq L(\theta; x_1, \ldots, x_n).$$

*Poznámka* 20.11. Nalezení hodnoty $\hat{\theta}_{MLE}$ provádíme pomocí metod matematické analýzy:

- Hledání maxima funkce $L$ a jejího logaritmu je ekvivalentní, proto můžeme uvážit

$$l(\theta; x_1, \ldots, x_n) = \ln L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i;\theta).$$

- Nalezneme stacionární bod funkce $l$ (derivujeme podle $\theta$ a výsledek položíme roven nule).
- Ověříme, zda se jedná o maximum.

Můžeme uvažovat případ, kdy $\theta$ bude vektor parametrů. V takovém případě postupujeme úplně stejně, jen při počítání stacionárního bodu uvažujeme parciální derivace a dostáváme soustavu rovnic, kterou nazýváme *soustavou věrohodnostních rovnic.*

## Intervalové odhady

**Definice 20.12.** Nechť $\mathbf{X}_n$ je náhodný výběr z rozdělení pravděpodobnosti s distribuční funkcí $F(x;\theta)$, $\theta \in \Theta$. Uvažujme parametrickou funkci $\gamma(\theta)$, $\alpha \in (0,1)$ a statistiky $D = D(X_1,\dots,X_n)$ a $H = H(X_1,\dots,X_n)$. Interval $[D,H]$ nazveme $100\cdot(1-\alpha)\%$ *intervalem spolehlivosti* pro $\gamma(\theta)$, jestliže

$$P_\theta\left(D(X_1,\dots,X_n) \le \gamma(\theta) \le H(X_1,\dots,X_n)\right) = 1-\alpha.$$

Podobně definujeme jednostranné intervaly spolehlivosti.

**Definice 20.13.** Nechť $F$ je distribuční funkce, $\alpha \in (0,1)$. Funkce

$$Q(\alpha) = F(\alpha)^{-1} = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \ge \alpha\}$$

se nazývá *kvantilová funkce.* Číslo $x_\alpha = Q(\alpha)$ se nazývá *$\alpha$-kvantil.*

**Věta 20.14.** *Nechť $\mathbf{X}_n$ je náhodný výběr z rozdělení $N(\mu,\sigma^2)$. Pak platí:*

- $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$,
- $U = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$,
- $K = \frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2(n-1)$,
- $T = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$.

*Poznámka* 20.15. Zkonstruujme oboustranný 90% interval spolehlivosti ($\alpha = 0{,}1$) pro střední hodnotu $\mu$, kde neznáme rozptyl $\sigma^2$.

- Hledáme statistiku závisející na $\mu$, která ve svém vyjádření nemá rozptyl. To je statistika $T$.
- Vyjdeme ze vztahu $P\left(t_{\frac{\alpha}{2}} \le T \le t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 0{,}9$. Dosadíme za $T$ a upravujeme:

$$t_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \le t_{1-\frac{\alpha}{2}},$$
$$\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}} - \overline{X} \le -\mu \le \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}} - \overline{X},$$
$$\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \mu \le \overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}.$$

- Využijeme-li vztahu $t_{\frac{\alpha}{2}} = -t_{1-\frac{\alpha}{2}}$, dostáváme interval spolehlivosti

$$I = \left[\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}; \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right].$$

S využitím vhodné statistiky a příslušných kvantilů se zkonstruují intervaly spolehlivosti i pro ostatní parametry.

**Věta 20.16.** *Buď* $\mathbf{X}_{n_1}$ *náhodný výběr z rozdělení* $N\left(\mu_1, \sigma_2^2\right)$, $\overline{X}$ *jeho výběrový průměr,* $S_1^2$ *jeho výběrový rozptyl. Buď* $\mathbf{Y}_{n_2}$ *náhodný výběr z rozdělení* $N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$, $\overline{Y}$ *jeho výběrový průměr,* $S_2^2$ *jeho výběrový rozptyl. Předpokládejme dále, že oba výběry jsou stochasticky nezávislé. Pak platí:*

- $U_* = \frac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N\left(0,1\right).$
- *Nechť* $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. *Označme* $S_{12}^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$. *Pak* $T_* = \frac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_{12}^2}{n_1}+\frac{S_{12}^2}{n_2}}} \sim t\left(n-1\right).$
- $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F\left(n_1-1, n_2-2\right).$

## Testy o parametrech normálního rozdělení

*Poznámka* 20.17. Uvažujme náhodný výběr $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ z rozdělení s distribuční funkcí $F\left(x;\theta\right)$, $\theta \in \Theta$. Předpokládáme, že o parametru $\theta$ existují dvě konkurující si hypotézy: $H_0$ (tzv. *nulová hypotéza*) a $H_1$ (tzv. *alternativní hypotéza*). O platnosti hypotézy $H_0$ se snažíme rozhodnout na základě realizace náhodného výběru $\mathbf{X}_n$. Na testování použijeme vhodnou testovací statistiku $T_n = T\left(\mathbf{X}_n\right)$. Množinu hodnot, kterých může tato statistika nabývat rozdělíme na dvě oblasti. Jednu z nich označíme $W_\alpha$ a nazveme ji *kritickou oblastí*, druhou pak nazveme *doplňkovou oblastí*. Na základě realizace $\mathbf{x}_n$ náhodného výběru $\mathbf{X}_n$ spočítáme hodnotu testovací statistiky $T_n\left(\mathbf{x}_n\right)$. Padne-li tato hodnota do kritické oblasti, zamítáme hypotézu $H_0$. Pokud do kritické oblasti nepadne, hypotézu $H_0$ nezamítáme.

**Definice 20.18.** Chybu, která spočívá v nesprávném zamítnutí $H_0$ nazveme *chybou prvního druhu*. Nejvyšší možnou pravděpodobnost toho, že se této chyby dopustíme, tj. číslo
$\alpha = \sup_{\theta\in\Theta} P_\theta\left(T_n\left(\mathbf{X}_n\right) \in W_\alpha \mid H_0 \text{ platí}\right)$, nazveme *hladinou významnosti*.
Chybu, která spočívá v nesprávném přijetí $H_0$ nazveme *chybou druhého druhu*.

*Poznámka* 20.19. Testování hypotéz pro jeden náhodný výběr.

| $H_0$ | $H_1$ | předpoklady | volba statistiky | $W_\alpha$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mu = \mu_0$ | $\mu \neq \mu_0$ | známe $\sigma^2$ | $U$ | $(-\infty, u_{\frac{\alpha}{2}}] \cup [u_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$ |
| $\mu = \mu_0$ | $\mu > \mu_0$ | známe $\sigma^2$ | $U$ | $[u_{1-\alpha}, \infty)$ |
| $\mu = \mu_0$ | $\mu < \mu_0$ | známe $\sigma^2$ | $U$ | $(-\infty, u_\alpha]$ |
| $\mu = \mu_0$ | $\mu \neq \mu_0$ | neznáme $\sigma^2$ | $T$ | $(-\infty, t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)] \cup [t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1), \infty)$ |
| $\mu = \mu_0$ | $\mu > \mu_0$ | neznáme $\sigma^2$ | $T$ | $[t_{1-\alpha}(n-1), \infty)$ |
| $\mu = \mu_0$ | $\mu < \mu_0$ | neznáme $\sigma^2$ | $T$ | $(-\infty, t_\alpha(n-1)]$ |
| $\sigma^2 = \sigma_0^2$ | $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ | neznáme $\mu$ | $K$ | $(-\infty, \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)] \cup [\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1), \infty)$ |
| $\sigma^2 = \sigma_0^2$ | $\sigma^2 > \sigma_0^2$ | neznáme $\mu$ | $K$ | $[\chi^2_{1-\alpha}(n-1), \infty)$ |
| $\sigma^2 = \sigma_0^2$ | $\sigma^2 < \sigma_0^2$ | neznáme $\mu$ | $K$ | $(-\infty, \chi^2_\alpha(n-1)]$ |

*Poznámka* 20.20. Analogicky provádíme testování hypotéz pro dva náhodné výběry $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, přičemž využíváme statistik $U_*$, $T_*$ a $F$. Hypotézy $H_0$ jsou pak tvaru: $\mu_1 = \mu_2$ nebo $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

# Literatura


1. Vektorové prostory a lineární zobrazení

    - ZLATOŠ, Pavol. *Lineárna algebra a geometria: Cesta z troch rozmerov s presahmi do príbuzných odborov.* Bratislava: Marenčin PT, 2011. ISBN 9788081141119. Dostupné z: http://thales.doa.fmph.uniba.sk/zlatos/la/LAG_A4.pdf

2. Soustavy lineárních rovnic, matice a determinanty

    - ZLATOŠ, Pavol. *Lineárna algebra a geometria: Cesta z troch rozmerov s presahmi do príbuzných odborov.* Bratislava: Marenčin PT, 2011. ISBN 9788081141119. Dostupné z: http://thales.doa.fmph.uniba.sk/zlatos/la/LAG_A4.pdf
    - HOROVÁ, Ivana a Jiří ZELINKA. *Numerické metody.* 2. rozšířené vydání. Brno: Masarykova univerzita, 2008. ISBN 978-80-210-3317-7. Dostupné z: http://www.math.muni.cz/~zelinka/dokumenty/numerika.pdf

3. Prostory se skalárním součinem a lineární operátory na nich

    - ZLATOŠ, Pavol. *Lineárna algebra a geometria: Cesta z troch rozmerov s presahmi do príbuzných odborov.* Bratislava: Marenčin PT, 2011. ISBN 9788081141119. Dostupné z: http://thales.doa.fmph.uniba.sk/zlatos/la/LAG_A4.pdf

4. Vlastní čísla a vektory, Jordanův kanonický tvar

    - ZLATOŠ, Pavol. *Lineárna algebra a geometria: Cesta z troch rozmerov s presahmi do príbuzných odborov.* Bratislava: Marenčin PT, 2011. ISBN 9788081141119. Dostupné z: http://thales.doa.fmph.uniba.sk/zlatos/la/LAG_A4.pdf

5. Bilineární a kvadratické formy

    - ZLATOŠ, Pavol. *Lineárna algebra a geometria: Cesta z troch rozmerov s presahmi do príbuzných odborov.* Bratislava: Marenčin PT, 2011. ISBN 9788081141119. Dostupné z: http://thales.doa.fmph.uniba.sk/zlatos/la/LAG_A4.pdf

6. Afinní a euklidovská geometrie

    - ZLATOŠ, Pavol. *Lineárna algebra a geometria: Cesta z troch rozmerov s presahmi do príbuzných odborov.* Bratislava: Marenčin PT, 2011. ISBN 9788081141119. Dostupné z: http://thales.doa.fmph.uniba.sk/zlatos/la/LAG_A4.pdf

7. Kuželosečky a kvadriky

    - ČADEK, Martin. *Lineární algebra a geometrie III* [online]. 19. 2. 2003 [cit. 2014-07-01]. Dostupné z: http://www.math.muni.cz/~cadek/la3/SKRIPTA.pdf

8. Základy obecné algebry
   - ROSICKÝ, Jiří. *Algebra.* 4., přeprac. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2002. ISBN 80-210-2964-1.
   - KUČERA, Radan. *Základy teorie svazů* [online]. 16. listopadu 2010 [cit. 2014-07-01]. Dostupné z: `http://www.math.muni.cz/~kucera/texty/Svazy2010.pdf`
9. Polynomy
   - ROSICKÝ, Jiří. *Algebra.* 4., přeprac. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2002. ISBN 80-210-2964-1.
   - HOROVÁ, Ivana a Jiří ZELINKA. *Numerické metody.* 2. rozšířené vydání. Brno: Masarykova univerzita, 2008. ISBN 978-80-210-3317-7. Dostupné z: `http://www.math.muni.cz/~zelinka/dokumenty/numerika.pdf`
10. Metrické prostory
    - DOŠLÁ, Zuzana a Ondřej DOŠLÝ. *Metrické prostory: Teorie a příklady.* 3. vydání. Brno: Masarykova univerzita, 2006. ISBN 80-210-4160-9.
11. Derivace, parciální derivace a diferenciál
    - DOŠLÁ, Zuzana a Jaromír KUBEN. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné.* Brno: Masarykova univerzita, 2004. ISBN 80-210-3121-2. Dostupné z: `http://www.math.muni.cz/~xchudoba/matalyza.pdf`
    - DOŠLÁ, Zuzana a Ondřej DOŠLÝ. *Diferenciální počet funkcí více proměnných.* 3. vydání. Brno: Masarykova univerzita, 2006. ISBN 9788021041592.
    - HOROVÁ, Ivana a Jiří ZELINKA. *Numerické metody.* 2. rozšířené vydání. Brno: Masarykova univerzita, 2008. ISBN 978-80-210-3317-7. Dostupné z: `http://www.math.muni.cz/~zelinka/dokumenty/numerika.pdf`
12. Extrémy reálných funkcí jedné a více proměnných
    - DOŠLÁ, Zuzana a Jaromír KUBEN. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné.* Brno: Masarykova univerzita, 2004. ISBN 80-210-3121-2. Dostupné z: `http://www.math.muni.cz/~xchudoba/matalyza.pdf`
    - DOŠLÁ, Zuzana a Ondřej DOŠLÝ. *Diferenciální počet funkcí více proměnných.* 3. vydání. Brno: Masarykova univerzita, 2006. ISBN 9788021041592.
13. Neurčitý integrál a Riemannův integrál v $\mathbb{R}$
    - NOVÁK, Vítězslav. *Integrální počet v R.* 3. vydání. Brno: Masarykova univerzita, 2001. ISBN 80-210-2720-7.
14. Obyčejné diferenciální rovnice
    - PLCH, Roman. *Příklady z matematické analýzy: Diferenciální rovnice.* Brno: Masarykova univerzita, 1995.
    - RÁB, Miloš. *Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic.* Brno: Masarykova univerzita, 2012. ISBN 978-80-210-5816-3.

15. Číselné řady a řady funkcí
    - DOŠLÁ, Zuzana a Vítězslav NOVÁK. *Nekonečné řady.* 2. vydání. Brno: Masarykova univerzita, 2007. ISBN 978-80-210-4334-3.
16. Integrální počet v $\mathbb{R}^n$
    - KALAS, Josef a Jaromír KUBEN. *Integrální počet funkcí více proměnných.* Brno: Masarykova univerzita, 2009. ISBN 978-80-210-4975-8.
    - DOŠLÝ, Ondřej a Jaromír KUBEN. *Křivkový integrál.* Brno: Masarykova univerzita, 2005. Dostupné z: `http://math.muni.cz/~dosly/`
    - REMO, Adam. *Plošný integrál.* Brno, 2006. Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. Dostupné z: `http://math.muni.cz/~dosly/`
    - LUKEŠ, Jaroslav a Jan MALÝ. *Míra a integrál.* 2. vydání. Praha: Karolinum, 2002. ISBN 80-246-0543-0.
17. Základy analýzy v komplexním oboru
    - KALAS, Josef. *Analýza v komplexním oboru.* Brno: Masarykova univerzita, 2006. ISBN 80-210-4045-9.
18. Základy pravděpodobnosti
    - FORBELSKÁ, Marie a Jan KOLÁČEK. *Pravděpodobnost a statistika I.* Brno: Masarykova univerzita, 2013. Elportál. ISBN 978-80-210-6710-3.
19. Náhodné veličiny a vektory
    - FORBELSKÁ, Marie a Jan KOLÁČEK. *Pravděpodobnost a statistika I.* Brno: Masarykova univerzita, 2013. Elportál. ISBN 978-80-210-6710-3.
20. Základy statistiky
    - FORBELSKÁ, Marie a Jan KOLÁČEK. *Pravděpodobnost a statistika II.* Brno: Masarykova univerzita, 2013. Elportál. ISBN 978-80-210-6711-0.