

# FYZIKÁLNÍ PRAKTIKUM

## Fyzikální praktikum 1

**Zpracoval:** Jan Beran

**Naměřeno:** 5. dubna 2018

**Obor:** UF

**Skupina:** F2180/06

**Testováno:**

---

### Úloha . 6: Tepelné vlastnosti kapalin - elektrický

$T = 22,0\text{ }^{\circ}\text{C}$  kalorimetr

$p = 971\text{ hPa}$

$\varphi = 48\text{ }\%$

## 1. Úkoly

1. Měření kapacity kalorimetru

2. Měření koeficientu chladnutí  $\beta$

(a) Pro jednoduchou nádobu

(b) Pro složenou nádobu

## 2. Teorie

Elektrický kalorimetr je zařízení, které umožňuje měřit tepelnou kapacitu kapalin. Energie dodaná do soustavy se vypočte z napětí  $U$  na spirále, proudu  $I$  jí procházející a času  $\tau$ , po kterou pracovala. Tato dodaná energie se spotřebuje jednak na ohřátí vnitřní kapaliny, jednak pro ohřátí samotného kalorimetru a část se vytratí ve formě ztrát. Toto popisuje rovnice (1), kde  $m$  je hmotnost kapaliny,  $c$  měrná tepelná kapacita kapaliny,  $K$  tepelná kapacita kalorimetru a  $dt$  je změna teploty soustavy  $dQ_s$  tepelné ztráty kalorimetru a za malý čas  $d\tau$ . Tepelné ztráty kalorimetru je možno spočítat ze vztahu (2).

$$(mc + K) dt + dQ_s = UI d\tau \quad (1)$$

$$dQ_s = \beta(t - t_0) d\tau \quad (2)$$

### 2.1. Měření kapacity kalorimetru

Tepelnou výměnu mezi kalorimetrem a dvěma kapalinami popisuje rovnice (3), kde  $m_1$  a  $m_2$  je hmotnosti kapalin o teplotách  $t_1$  a  $t_2$ .  $K$  je tepelná kapacita vlastního kalorimetru,  $c$  je měrná tepelná kapacita kapalin a  $t$  je výsledná teplota, pro promíslení kapalin.

$$(m_1c + K)(t - t_1) = m_2c(t_2 - t) \quad (3)$$

Po vyjádření  $K$  z rovnice (3) dostaneme rovnici (4).

$$K = \frac{m_2c(t_2 - t_1)}{t - t_1} - m_1c \quad (4)$$

## 2.2. Měření koeficientu chladnutí $\beta$

Koeficient chladnutí určíme z rovnice (5), kde  $t$  je výsledná teplota,  $t_0$  je teplota okolí,  $t_p$  je počáteční teplota,  $m$  je hmotnost náplně kalorimetru,  $c$  je tepelná kapacita náplně kalorimetru,  $K$  je tepelná kapacita vlastního kalorimetru,  $\tau$  je čas chladnutí,  $e$  je Eulerovo číslo a  $\beta$  je koeficient chladnutí.

$$t = t_0 + (t_p - t_0)e^{-\frac{\beta}{mc+K}\tau} \quad (5)$$

Rovnici (5) upravíme do lineární tvaru logaritmováním rovnice. Po úpravě dostaneme rovnici (6).

$$\frac{\beta}{mc+K} \cdot \tau = -\ln\left(\frac{t-t_0}{t_p-t_0}\right) \quad (6)$$

Tuto závislost, kterou vyjadřuje rovnice (6) proložíme lineární regresí. Dostaneme rovnici přímky ve tvaru rovnice (7) kde koeficient  $A$  bude hledaný člen, jenž v rovnici (6) násobí čas  $\tau$ . To znamená, že výpočet koeficientu  $\beta$  určíme podle rovnice (8).

$$y = A \cdot x + b \quad (7)$$

$$\beta = -A \cdot (mc + k) \quad (8)$$

Krom tohoto postupu můžeme rovnici (5) proložit rovnou exponenciální křivkou, která bude mír vyjádření podle rovnice (9). Koeficient  $T$  v této rovnici určuje převrácenou hodnotu členu v exponenciále v rovnici (5). Tudíž koeficient  $\beta$  můžeme vypočíst podle rovnice (10).

$$y = x_0 + A \cdot e^{\frac{-x}{T}} \quad (9)$$

$$\beta = \frac{mc + k}{T} \quad (10)$$

## 3. Postup měření

### 3.1. Měření kapacity kalorimetru

Do kalorimetru jsem napustil kapalinu o známé hmotnosti  $m_1$  a známé teplotě  $m_2$ . Následně jsem do kalorimetru dolil stejný druh kapaliny o známé hmotnosti  $m_2$  a známé teplotě  $t_2$ . V kalorimetru je zabudována magnetická míchačka, kterou jsme urychlili směšování kapalin. Po promísení obou kapalin se teplota ustálila na hodnotě  $t$ .

### 3.2. Měření koeficientu chladnutí $\beta$

Do kalorimetru jsem napustil velmi teplou kapalinu o známé teplotě  $t_p$ , hmotnosti  $m$  a molární tepelné kapacity. Tuto kapalinu necháme volně chladnou a zaznamenáváme čas a teplotu, až do doby, kdy bude závislost teploty na čase zjevně lineární a to podle rovnice (5).

Stejný postup jsem opakoval pro měření koeficientu  $\beta$  pro kalorimetr s dvojitou nádobou.

## 4. Naměřené hodnoty

### 4.1. Měření kapacity kalorimetru

$t_1$ [K]	$t_2$ [K]	$t$ [K]	$m_1$ [Kg]	$m_2$ [Kg]
295,15	331,15	313,15	0,26652	0,29981

Tabulka 1: Naměřené hodnoty teploty kapalin a hmotnosti kapalin pro stanovení kapacity kalorimetru.

#### 4.2. Měření koeficientu chladnutí $\beta$

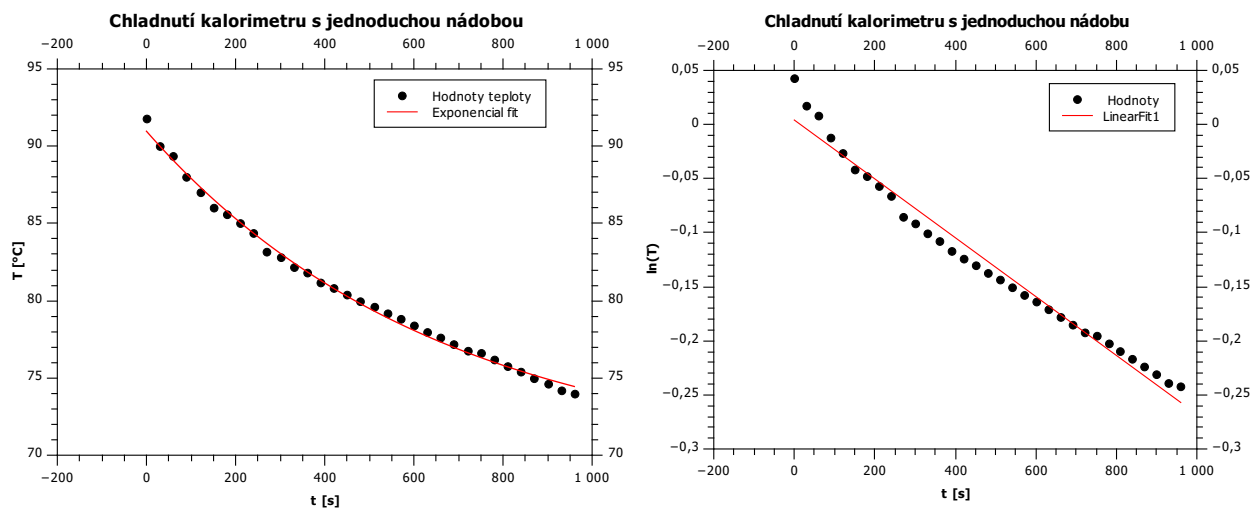
čas [s]	$T_1$ [°C]	$T_2$ [°C]	$T_1^k$ [K]	$T_2^k$ [K]
0	91,8	92,0	364,95	365,15
30	90,0	90,4	363,15	363,55
60	89,4	89,6	362,55	362,75
90	88,0	88,4	361,15	361,55
120	87,0	87,2	360,15	360,35
150	86,0	86,2	359,15	359,35
180	85,6	85,0	358,75	358,15
210	85,0	84,2	358,15	357,35
240	84,4	83,4	357,55	356,55
270	83,2	82,8	356,35	355,95
300	82,8	82,0	355,95	355,15
330	82,2	81,4	355,35	354,55
360	81,8	80,6	354,95	353,75
390	81,2	80,0	354,35	353,15
420	80,8	79,4	353,95	352,55
450	80,4	78,8	353,55	351,95
480	80,0	78,2	353,15	351,35
510	79,6	77,8	352,75	350,95
540	79,2	77,2	352,35	350,35
570	78,8	76,6	351,95	349,75
600	78,4	76,2	351,55	349,35
630	78,0	75,8	351,15	348,95
660	77,6	75,2	350,75	348,35
690	77,2	74,8	350,35	347,95
720	76,8	74,2	349,95	347,35
750	76,6	73,8	349,75	346,95
780	76,2	73,2	349,35	346,35
810	75,8	72,4	348,95	345,55
840	75,4	72,2	348,55	345,35
870	75,0	72,0	348,15	345,15
900	74,6	71,6	347,75	344,75
930	74,2	71,2	347,35	344,35
960	74,0	70,8	347,15	343,95

Tabulka 2: Hodnoty teploty pro postupné chladnutí kapaliny v kalorimetru.

## 5. Zpracování měření

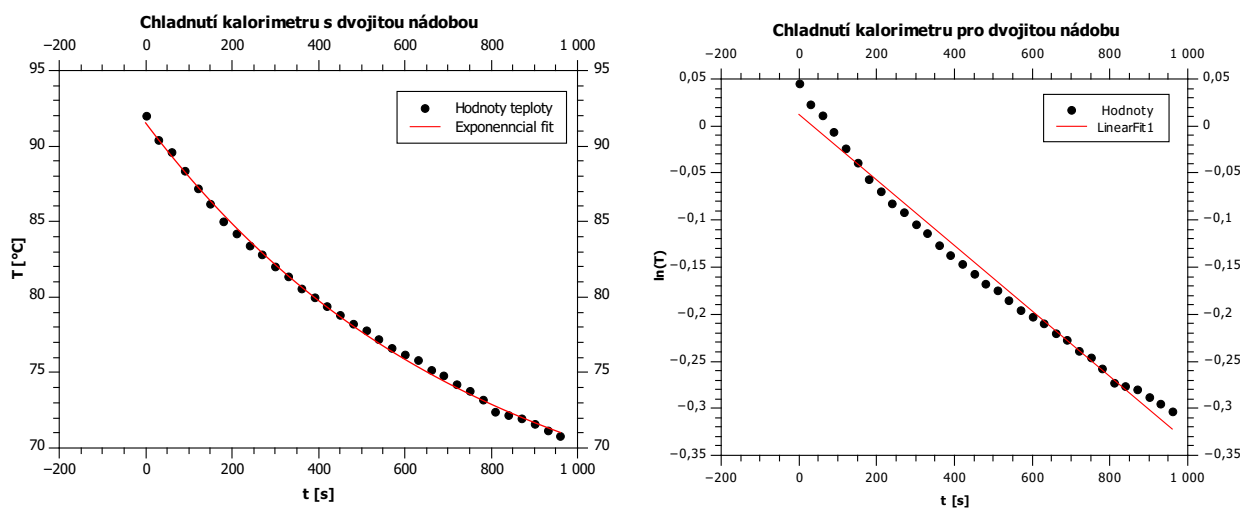
### 5.1. Grafy

#### 5.2. Měření koeficientu chladnutí $\beta$ pro jednoduchou nádobu



Obrázek 1: Exponenciální a lineární regrese pro chladnutí kalorimetru s jednoduchou nádobou.

#### 5.3. Měření koeficientu chladnutí $\beta$ pro dvojitou nádobu



Obrázek 2: Exponenciální a lineární regrese pro chladnutí kalorimetru s dvojitou nádobou.

## 5.4. Koeficienty rovnic lineární a exponenciální regrese

	Lineární		Exponenciální		
Koeficienty	$A$	$B$	$A$	$T$	$x_0$
Jednoduchá nádoba	-0,00027	0,00412	21,46694	654,02789	69,50211
Dvojitá nádoba	-0,00035	0,01232	28,29242	744,44292	63,24135

Tabulka 3: Koeficienty pro lineární a exponenciální regresi chladnutí kalorimetru.

## 5.5. Obecné vztahy pro zpracování měření

Zákon přenášení nejistot.

$$u_c(f) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \cdot u_c^2(x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \cdot u_c^2(x_2) + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \cdot u_c^2(x_n)} \quad (11)$$

## 5.6. Konkrétní vztahy pro zpracování měření v této úloze

### 5.6..1 Měření kapacity kalorimetru

Kapacitu kalorimetru  $K$  vypočteme podle rovnice (4). Tedy rovnici

$$K = \frac{m_2 c (t_2 - t_1)}{t - t_1} - m_1 c$$

Nejistoty přímo měřených veličin buďto rozumně odhadneme nebo určíme dle informace od výrobce stroje, jenž používáme k naměření veličiny. Pro měření teploty odhadneme nejistotu měření podle rovnice (12). Pro měření hmotnosti určíme nejistotu měření podle ověřovacího dílku, který uvádí výrobce vah, tedy nejistotu měření hmotnosti vyjadřuje rovnice (12).

$$u_c(t) = u_c(t_1) = u_c(t_2) = 0,1 \text{ K} \quad (12)$$

$$u_c(m_1) = u_c(m_2) = e : 3 = 1 \cdot 10^{-6} : 3 \text{ Kg} = 3,3 \cdot 10^{-7} \text{ Kg} \quad (13)$$

Ze zákona přenášení nejistot, který vyjadřuje rovnice (11) dostaneme nejistotu nepřímě měřené veličiny kapacity kalorimetru. Vztah pro výpočet této nejistoty udává rovnice (14).

$$u_c(K) = \left( c^2 u_c(m_1)^2 + \frac{c^2 (t_2 - t_1)^2 u_c(m_2)^2}{(t - t_1)^2} + \left( -\frac{m_2 c}{t - t_1} - \frac{m_2 c (t_2 - t)}{(t - t_1)^2} \right)^2 u_c(t)^2 + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{m_2^2 c^2 (t_2 - t)^2 u_c(t_1)^2}{(t - t_1)^4} + \frac{m_2^2 c^2 u_c(t_2)^2}{(t - t_1)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

## 5.7. Měření koeficientu chladnutí $\beta$

Nejistoty přímo měřených veličin jsem určili v předešlém úkolu. Stejně tak využijeme výsledku nejistoty měrné tepelné kapacity kalorimetru.

### 5.7..1 Pro jednoduchou nádobu

#### Určení pomocí lineární regrese

K výpočtu koeficientu chladnutí  $\beta$  využijeme rovnice (7) a (8). Rovnici pro výpočet nejistoty měření využijeme Zákon přenášení nejistot, který aplikujeme na rovnici (8) a dostaneme

$$u(\beta) = \sqrt{A^2 c^2 u(m)^2 + A^2 u(K)^2} \quad (15)$$

## Určení pomocí exponenciální regrese

K výpočtu koeficientu chladnutí  $\beta$  využijeme rovnice (9) a (10). Rovnici pro výpočet nejistoty měření využijeme Zákon přenášení nejistot, který aplikujeme na rovnici (9) a dostaneme

$$u(\beta) = \sqrt{\frac{c^2 u(m)^2}{T^2} + \frac{u(K)^2}{T^2}} \quad (16)$$

### 5.7..2 Pro dvojitou nádobu nádobu

Pro dvojitou nádobu určíme hodnotu koeficientu  $\beta$  a nejistoty  $u(\beta)$  stejně jako v případě s jednoduchou nádobou.

## 5.8. Dosazení hodnot do vztahů

Protože jsem výpočet prováděl pomocí programu Maple, tak místo dosazení do vztahů vkládám kód z Maplu.

### 5.8..1 Měření kapacity kalorimetru

Výpočet kapacity kalorimetru.

```
restart:
K:=m2*c*(t2-t)/(t-t1)-m1*c:
t1:=22+273.15;t2:=58+273.15;m1:=0.26652;m2:=0.29981;t:=40.4+273.15;c:=4186:
K;
```

Výpočet nejistoty kapacity kalorimetru

```
restart:
K:=m2*c*(t2-t)/(t-t1)-m1*c;
u(k):=(diff(K,m1)^2*um1^2 + diff(K,m2)^2*um2^2 + diff(K,t)^2*ut^2 +
diff(K,t1)^2*ut1^2 + diff(K,t2)^2*ut2^2)^(1/2);
P:=u(k);
um1:=0.000033;um2:=0.000033;ut:=0.1;ut1:=0.1;ut2:=0.1;t1:=22+273.15;
t2:=58+273.15;m1:=0.26652;m2:=0.29981;t:=40.4+273.15;c:=4186;
P;
```

## 5.9. Měření koeficientu chladnutí $\beta$ a výpočet z lineární závislosti

### 5.9..1 Pro jednoduchou nádobu

Výpočet koeficientu chladnutí  $\beta$

```
restart:
b1:=-A*(m*c+k);
A:=-0.00027;c:=4186;m:=0.458;k:=87.8;
simplify(b1);
```

Výpočet nejistoty koeficientu chladnutí  $\beta$

```
restart:
b1:=-A*(m*c+k);
ub1:=(diff(b1,m)^2*um^2 + diff(b1,k)^2*uk^2)^(1/2);
A:=-0.00027;m:=0.458;c:=4186;k:=87.8;um:=0.000033;uk:=16.3;
ub1;
```

### 5.9..2 Pro dvojitou nádobu

#### Výpočet koeficientu chladnutí $\beta$

```
restart:
b1:=-A*(m*c+k);
A:=-0.00034;c:=4186;m:=0.458;k:=87.8;
simplify(b1);
```

#### Výpočet nejistoty koeficientu chladnutí $\beta$

```
restart:
b1:=-A*(m*c+k);
ub1:=(diff(b1,m)^2*um^2 + diff(b1,k)^2*uk^2)^(1/2);
A:=-0.00034;;m:=0.458;c:=4186;k:=87.8;um:=0.000033;uk:=16.3;
ub1;
```

### 5.10. Měření koeficientu chladnutí $\beta$ a výpočet z exponenciální závislosti

```
restart:
b1:=(m*c+K)/(T);
T:=654.02789;c:=4186;m:=0.458;K:=87.8;
b1;
```

#### Výpočet nejistoty koeficientu chladnutí $\beta$

```
restart:
b1:=(m*c+K)/(T);
ub1:=(diff(b1,m)^2*um^2 + diff(b1,K)^2*uK^2)^(1/2);
T:=654.02789;m:=0.458;c:=4186;K:=87.8;um:=0.000033;uK:=16.3;
ub1;
```

#### 5.10..1 Pro dvojitou nádobu

#### Výpočet koeficientu chladnutí $\beta$

```
restart:
b1:=(m*c+K)/(T);
T:=744.44292;c:=4186;m:=0.458;K:=87.8;
b1;
```

#### Výpočet nejistoty koeficientu chladnutí $\beta$

```
restart:
b1:=(m*c+K)/(T);
ub1:=(diff(b1,m)^2*um^2 + diff(b1,K)^2*uK^2)^(1/2);
T:=744.44292;m:=0.458;c:=4186;K:=87.8;um:=0.000033;uK:=16.3;
ub1;
```

## 6. Výsledky měření

### 6.1. Měření kapacity kalorimetru

$$K = (84, 79 \pm 16, 35) \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \quad (17)$$

## 6.2. Měření koeficientu chladnutí $\beta$

### 6.2..1 Pro jednoduchou nádobu

Pomocí lineární regrese

$$\beta = (0,545 \pm 0,004) \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \quad (18)$$

Pomocí exponenciální regrese

$$\beta = (3,07 \pm 0,02) \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \quad (19)$$

### 6.2..2 Pro dvojitou nádobu

Pomocí lineární regrese

$$\beta = (0,698 \pm 0,006) \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \quad (20)$$

Pomocí exponenciální regrese

$$\beta = (3,69 \pm 0,02) \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \quad (21)$$

## 7. Závěr

### 7.1. Měření kapacity kalorimetru

Naměřil jsem kapacitu kalorimetru  $K = (84,79 \pm 16,35) \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ . Relativní chyba tohoto měření je 19,28 %. Je tedy zřejmé, že toto měření nebylo příliš přesné. Tato nepřesnost je dána několika faktory. K určení kapacity kalorimetru jsme používali příliš mnoho přímo měřených veličin jiných. Ze zákona přenášení nejistot je potom zřejmé, že čím více bude veličin, které musíme určit pro nepřímou měřenou veličinu, tím bude větší i chyba nepřímou měřené veličiny.<sup>1</sup> Kromě toho je velká chyba v měření teploty ( $u_c(t) = 0.1 \text{ K}$ ). Tím, že jsme teplotu měřili několikrát, je chyba velice velká.

Avšak hodnota kapacity kalorimetru  $84,79 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$  je reálná hodnota kapacity kalorimetru. Můžeme tedy tvrdit, že měření nebylo zatíženo žádnou hrubou systematickou chybou.

### 7.2. Měření koeficientu chladnutí $\beta$

Měřili jsme koeficient chladnutí  $\beta$  pro dvojitou a jednoduchou nádobu. Pro vyhodnocení koeficientu chladnutí  $\beta$  jsem použil dva postupy. První byl logaritmování rovnice (5), kde dostaneme lineární závislost teploty na čase. Tuto následně proložit lineární regresí a z koeficientů rovnice přímky dopočítat koeficient chladnutí  $\beta$ . Druhý postup byl vytvořit graf exponenciální závislosti teploty na čase, tento graf proložit exponenciální regresí a z koeficientů této regrese dopočítat koeficient chladnutí  $\beta$ .

V této úloze jsme se dopustil chyby a to té, že jsme nenaměřili kapacitu kalorimetru s dvojitou nádobou. Tím jsme zadávali špatný údaj o tepelné kapacitě kalorimetru s dvojitou nádobou. Avšak jak uvidíme dále, tak tato chyba neměla vliv na výsledek měření.

#### 7.2..1 Lineární závislost

Pro lineární závislost jsme naměřili hodnotu koeficientu chladnutí  $\beta$  pro jednoduchou nádobu jako  $\beta = (0,545 \pm 0,004) \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$  a pro dvojitou nádobu jako  $\beta = (0,698 \pm 0,006) \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ .

I když nejistota ze zákona přenášení nejistot vyšla relativně malá, protože relativní nejistota těchto měření se pohybuje v řádech desetin procenta, tak výsledek nedává reálný smysl. Koeficient chladnutí  $\beta$  totiž vyšel pro dvojitou nádobu větší než jednoduchou nádobu. To by ovšem znamenalo, že by

---

<sup>1</sup>Samozřejmě za předpokladu, že bychom menší počet přímo měřených veličin nenaměřili s mnohem větší nejistotou než větší počet přímo naměřených veličin.



kalorimetr s dvojitou nádobou chladnul rychleji, než kalorimetr s jednoduchou nádobou, což nedává fyzikálně smysl. I když jsem se dopustil chyby a zadával jsem tepelnou kapacitu jednoduchého kalorimetru, tak by to na výsledku, že by byl koeficient chladnutí  $\beta$  větší u kalorimetru s dvojitou nádobou nic nezměnilo, což vyplývá přímo z rovnice (8).

### 7.2..2 Exponenciální závislost

Pro exponenciální závislost jsme naměřili hodnotu koeficientu chladnutí  $\beta$  pro jednoduchou nádobu jako  $\beta = (3,07 \pm 0,02) \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$  a pro dvojitou nádobu jako  $\beta = (3,69 \pm 0,02) \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Je ihned vidět, že pro dvojitou nádobu je koeficient chladnutí  $\beta$  větší než pro nádobu jednoduchou a tudíž stejně jako při měření lineární závislosti, tak nemá výsledek fyzikální smysl.

### 7.2..3 Porovnání lineární a exponenciální regrese

Na první pohled je vidět rozdíl mezi výsledky, kdy jsme použili exponenciální regresi a výsledky, kdy jsme použili lineární regresi. Tento velký rozdíl je nejspíše způsoben větší chybou proložení exponenciální regrese grafem. Zatímco u lineární regrese stačí najít správnou směrnici a následně pomocí absolutního členu „umístit“ přímku na správné místo, tak u exponenciální regrese je toto mnohem složitější. I když onen výpočet pomocí metody nejmenších čtverců dělal počítač, tak je možné například v programu QtiPlot upravit koeficienty ručně. To jsme v tomto případě nedělali v rámci protokolu, ale vyzkoušeli jsem si jak se například změni korelační koeficient  $R^2$  při různých ručních úpravách koeficientů exponenciální regrese. Vzhledem k tomu, že jsme dokázali s minimální změnou korelačního koeficientu docílit změny koeficientu  $T$  v řádech desítek, tak je nejspíše v pořádku tvrdit, že lineární regrese je přesnější. Což se i shoduje s doporučením, které je napsáno v zadání tohoto úkolu, tedy že „Z naměřené závislosti  $t(\tau)$  určíme  $\beta$  nejlépe lineární regreseí logaritmované rovnice ...“.