

# FYZIKÁLNÍ PRAKTIKUM

## Fyzikální praktikum 1

**Zpracoval:** Jan Beran

**Naměřeno:** 12. dubna 2018

**Obor:** UF

**Skupina:** F2180/06

**Testováno:**

---

### Úloha . 7: Měření Poissonovy konstanty vzduchu

$$T = 23,2 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$p = 965 \text{ hPa}$$

$$\varphi = 48 \text{ \%}$$

## 1. Úkoly

1. Měření Poissonovy konstanty Clément-Desormesovou metodou
2. Měření Poissonovy konstanty z rychlosti zvuku

## 2. Teorie

Pokud předpokládáme plyn, který je dokonale stlačitelný a mezi jeho molekulami není žádné vnitřní tření a srážky částic jsou dokonale pružné. Můžeme pak popsat ideální plyn tzv. stavovou rovnicí ideálního plynu (1), ve které vystupuje tlak  $p$ , objem  $V$ , látkové množství  $n$  termodynamická teplota  $T$  a tepelná molární konstanta  $R$ , která má hodnotu  $R = 83,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\text{mol}^{-1}$ .

$$pV = nRT \quad (1)$$

Adiabatický děj se definuje jako děj, při kterém konstantní teplo, nebo změna tepla je nulová. To znamená, že nedochází k tepelné výměně mezi ideálním plynem a jeho okolím. Pro adiabatický děj ideálního plynu platí vztah (2), ve kterém vystupuje tlak  $p$ , objem plynu  $V$  a Poissonova konstanta  $\kappa$ .

$$pV^{\kappa} = \text{konst.} \quad (2)$$

Poissonova konstanta  $\kappa$  můžeme určit z rovnice (3) kde  $C_p$  je molární tepelná kapacita při stálém tlaku a  $C_v$  je molární tepelná kapacita pro při stálém objemu.

$$\kappa = \frac{C_p}{C_v} \quad (3)$$

Molární tepelnou kapacitu při konstantním objemu  $C_v$  můžeme určit z ekvipartičního teorému. Podle něho je sestavena rovnice (4), ve kterém vystupuje molární plynová konstanta  $R$  a počet stupňů volnosti  $N$ .

$$C_v = \frac{N}{2}R \quad (4)$$

Následně pomocí Mayerova vztahu, který vyjadřuje rovnice (5) můžeme vypočítat molární tepelnou kapacitu  $C_p$  za konstantního tlaku.

$$C_p = C_v + R \quad (5)$$

plyn	% zast. v atm.	$\kappa$
dusík, $N_2$	78,09	$1 + \frac{2}{5}R$
kyslík, $O_2$	20,95	$1 + \frac{2}{5}R$
oxid uhličitý $CO_2$	0,04	$1 + \frac{2}{7}R$
Vzácné plyny	0,94	$1 + \frac{2}{3}R$

Tabulka 1: Hodnoty Poissonovy konstanty pro plyny, které mají největší zastoupení v atmosféře.

Po kombinaci těchto vztahů dostaneme rovnici (6), ze které můžeme jednoduše spočítat Poissonovu konstantu pouze ze znalosti složení plynu. (A samozřejmě musí platit náš předpoklad, že plyn lze považovat za ideální.)

$$\kappa = 1 + \frac{2}{N} \quad (6)$$

Z tabulky 1 jednoznačně plyne, že můžeme Poissonovu konstantu přibližně určit jako  $\kappa = 1 + \frac{2}{5}$ , protože vzduch je tvořen z 98 % dvouatomovým plynem, tedy dusíkem a kyslíkem.

## 2.1. Měření Poissonovy konstanty Clément-Desormesovou metodou

Tato metoda je založena na vyhodnocení naměřených veličin posloupnosti dějů v měřeném plynu sestávající z izotermického stlačení, adiabatické expanze a izochorického ohřevu měřeného plynu. Využívá se při tom velké nádoby, kterou je možno natlakovat a rychle odpustit. Přitom je k ní připojena U-trubice naplněna vodou, na které je možno odečítat změnu tlaku uvnitř nádoby pomocí centimetrů sloupce vody. Pro Poissonovu konstantu platí rovnice (7), kde  $p_0$  je tlak okolí a  $k$  je konstanta přepočtu výšky a vodního sloupce na tlak,

$$\kappa = \frac{\ln\left(\frac{p_0 + kh_1}{p_0}\right)}{\ln\left(\frac{p_0 + kh_1}{p_0 + kh_2}\right)} \quad (7)$$

Jestliže bude změna tlaku ve srovnání s atmosférickým tlakem dostatečně malá, pak můžeme použít pouze první člen rozvoje rovnice (7) podle  $h_1$  a  $h_2$ , který vyjadřuje rovnice (8).

$$\kappa \doteq \frac{h_1}{h_1 - h_2} \quad (8)$$

## 2.2. Měření Poissonovy konstanty z rychlosti zvuku

Pro rychlost zvuku  $c$  v ideálním plynu platí vztah (9), kde  $p$  je tlak ideálního plynu,  $\varrho$  je hustota vzduchu a  $\kappa$  je Poissonova konstanta.

$$c = \sqrt{\frac{\kappa \cdot p}{\varrho}} \quad (9)$$

Rychlost zvuku určíme podle rovnice (10).

$$c = 2f \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (10)$$

Z těchto dvou vztahů můžeme vyjádřit Poissonovu konstantu  $\kappa$  podle vztahu (11).

$$\kappa = \frac{4\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 f^2 \varrho}{p} \quad (11)$$

## 3. Postup měření

### 3.1. Měření Poissonovy konstanty Clément-Desormesovou metodou

Do uzavřené nádoby s nulovým rozdílem tlaků v U-trubici po otevření ventilu pumpičkou natlakujeme vzduch a ventil uzavřeme. Následně necháme hladiny ustálit a odečteme výšku  $h_1$ . Rychle plně

otevřeme a hned zavřeme hlavní ventil. Opět necháme hladiny ustálit a odečteme výšku  $h_2$ . Tento postup zopakujeme desetkrát.

### 3.2. Měření Poissonovy konstanty z rychlosti zvuku

Zasuneme píst do výchozí pozice, tj. co nejbližší reproduktoru. Na generátoru nastavíme výstupní frekvenci  $f$ . Posouváme píst trubicí a odečítáme vzdálenosti, na kterých nabývá vlnění maxim. Těmito vzdálenostmi pak proložíme lineární funkci v závislosti na pořadí, jejíž směrnice bude hledané  $\lambda/2$ . Postup provedeme pro 5 různých frekvencí.

## 4. Naměřené hodnoty

### 4.1. Měření Poissonovy konstanty Clément-Desormesovou metodou

Č. měření	$h_1$ [cm]	$h_2$ [cm]
1	276	79
2	253	68
3	274	78
4	264	75
5	254	70
6	286	90
7	266	64
8	263	73
9	289	89
10	252	67

Tabulka 2: Naměřené hodnoty výšky vodní hladiny po zvýšení tlaku  $h_1$  a po snížení tlaku  $h_2$ .

### 4.2. Měření Poissonovy konstanty z rychlosti zvuku

Frekvence [Hz]	poloha maxim $x$ [cm]										
$f_1 = 961,7$	24,0	41,7	59,6	77,5	95,5						
$f_2 = 1255,1$	33,0	46,7	60,2	74,2	87,8	101,5					
$f_3 = 1500,6$	24,3	36,0	47,5	58,6	70,2	81,6	93,0	104,5			
$f_4 = 1765,4$	29,1	39,0	48,5	58,4	68,0	77,8	87,5	97,3	107,0		
$f_5 = 2012,1$	22,0	30,8	40,5	49,2	57,6	65,8	74,6	83,2	91,8	100,3	108,9

Tabulka 3: Naměřené hodnoty maximálních hodnot výchylek vlnění při předem vybraných frekvencích.

Tlak vzduchu byl  $p = (96,65 \pm 0,05)$  kPa.

## 5. Zpracování měření

### 5.1. Obecné vztahy pro zpracování měření

Střední hodnotu určíme jako aritmetický průměr z naměřených hodnot, tedy podle rovnice (12).

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (12)$$

Nejistotu typu A ( $u_A$ ) určíme jako směrodatnou odchylku aritmetického průměru podle rovnice (13).

$$u_A(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N \cdot (N - 1)}} \quad (13)$$

Zákon přenášení nejistot vyjadřuje rovnice (14).

$$u_c(f) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \cdot u_c^2(x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \cdot u_c^2(x_2) + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \cdot u_c^2(x_n)} \quad (14)$$

## 5.2. Konkrétní vztahy pro zpracování měření v této úloze

### 5.2..1 Měření Poissonovy konstanty Clément-Desormesovou metodou

Střední hodnotu, kterou vyjadřuje rovnice (12), pro výšky  $h_1$  i  $h_2$ , v našem případě vyjádříme, pokud dosadíme měřené veličiny, pak přejde tento vzorec do tvaru, které popisují rovnice (15) a (16).

$$\bar{h}_1 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} h_{1i} \quad (15)$$

$$\bar{h}_2 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} h_{2i} \quad (16)$$

Nejistotu typu A, kterou vyjadřuje rovnice (13), pro výšky  $h_1$  i  $h_2$ , v našem případě vyjádříme, pokud dosadíme měřené veličiny, pak přejde tento vzorec do tvaru, které popisují rovnice (17) a (18).

$$u_A(h_1) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (h_{1i} - \bar{h}_1)^2}{10 \cdot (10 - 1)}} \quad (17)$$

$$u_A(h_2) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (h_{2i} - \bar{h}_2)^2}{10 \cdot (10 - 1)}} \quad (18)$$

Tvar zákona přenášení nejistot, který vyjadřuje rovnice (14), je pro vztah (7), který nám dovoluje vypočítat Poissonovu konstantu, ve tvaru, který vyjadřuje rovnice (19).

$$u_c(\kappa) = \sqrt{\left(\frac{1}{h_1 - h_2} + \frac{h_1}{(h_1 - h_2)^2}\right)^2 u(h_1)^2 + \frac{h_1^2 u(h_2)^2}{(h_1 - h_2)^4}} = \sqrt{\frac{h_2^2 u(h_1)^2 + h_1^2 u(h_2)^2}{(h_1 - h_2)^4}} \quad (19)$$

### 5.2..2 Měření Poissonovy konstanty z rychlosti zvuku

Nejistota frekvence je způsobena její nestálostí a stanovíme ji na 0,1 Hz. Jako nejistotu  $\frac{\lambda}{2}$  stanovíme nejistotu odečtu, tedy 1 mm. Nejistotu tlaku už jsem měli stanovenou. Nejistoty tedy budou přímo definovány podle rovnic (20), (21) a (22).

$$u_c(f) = 0,1 \text{ Hz} \quad (20)$$

$$u_c\left(\frac{\lambda}{2}\right) = 1 \text{ mm} \quad (21)$$

$$u_c(p) = 0,05 \text{ kPa} = 50 \text{ Pa} \quad (22)$$

Ze zákona přenášení nejistot (14) dostaneme celkovou nejistotu měření, která je vyjádřena rovnicí (23).

$$u_c(\kappa) = \sqrt{\frac{64 \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 f^4 \varrho^2 u_c\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}{p^2} + \frac{64 \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 f^2 \varrho^2 u_c(f)^2}{p^2} + \frac{16 \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 f^4 \varrho^2 u_c(\varrho)^2}{p^4}} \quad (23)$$

Tuto rovnici můžeme upravit do jednoduššího tvaru. Dostaneme pak rovnici (24).

$$u_c(\kappa) = 4 \cdot \sqrt{\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 f^2 \varrho^2 \left(4 u_c\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 f^2 p^2 + 4 u_c(f)^2 \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 p^2 + u_c(p)^2 f^2 \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2\right)}{p^4}} \quad (24)$$

### 5.3. Dosazení hodnot do vztahů

#### 5.3..1 Měření Poissonovy konstanty Clément-Desormesovou metodou

Dosazením hodnot do vztahů (15) a (16) dostaneme již vztahy pro výpočet aritmetického průměru výšek, které jsou již připravené pouze pro výpočet, a to vztahy (25) a (26).

$$\bar{h}_1 = \frac{1}{10}(276 + 253 + 274 + 264 + 254 + 286 + 266 + 263 + 289 + 252) = 267,7 \quad (25)$$

$$\bar{h}_2 = \frac{1}{10}(55 + 53 + 59 + 57 + 53 + 62 + 55 + 66 + 60 + 53) = 75,3 \quad (26)$$

Pro výpočet hodnoty Poissonovy konstanty dosadíme do vzorce (7) střední hodnoty výšek  $h_1$  a  $h_2$  z rovnic (25) a (26). Následně dostaneme rovnici (27), která nám po numerickém výpočtu dá již výsledek Poissonovy konstanty.

$$\kappa = \frac{271}{271 - 57,3} \doteq 1,391372 \quad (27)$$

Podobně určíme nejistoty typu A, tedy podle rovnic (17) a (18), kam dosadíme již vypočtené hodnoty podle rovnic (25) a (26). Dostaneme tedy rovnice (28) a (29).

$$u_A(h_1) = \sqrt{\frac{(276 - 267,7)^2 + (253 - 267,7)^2 + \dots + (252 - 267,7)^2}{10 \cdot (10 - 1)}} \doteq 4,198015 \quad (28)$$

$$u_A(h_2) = \sqrt{\frac{(79 - 75,3)^2 + (68 - 75,3)^2 + (78 - 75,3)^2 + \dots + (67 - 75,3)^2}{10 \cdot (10 - 1)}} \doteq 2,804956 \quad (29)$$

Ze zákona přenášení nejistot potom určíme celkovou chybu měření Poissonovy konstanty jak vyjadřuje rovnice (30).

$$u_c(\kappa) = \sqrt{\frac{75,3^2 \cdot 4,198015^2 + 267,7^2 \cdot 2,804956^2}{(271 - 75,3)^4}} \doteq 0,022009 \quad (30)$$

#### 5.3..2 Měření Poissonovy konstanty z rychlosti zvuku

Z lineární regrese naměřených hodnot v závislosti na jejich pořadí jsem určili hodnotu  $\frac{\lambda}{2}$  pro každou frekvenci, jenž vyjadřuje tabulka 4.

	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$
$\frac{\lambda}{2}$ [cm]	17,88	13,71	11,43	9,73	8,65

Tabulka 4: Hodnoty směrnice tečny lineární regrese závislosti maxim vlnění na jejich pořadí (viz Dodatek - Grafy). Neboli hodnota  $\frac{\lambda}{2}$ .

Pro výpočet Poissonovy konstanty využijeme vztahu (11).

$$\kappa = \frac{4 \cdot 17,88^2 \cdot 961,7 \cdot 1,129}{96650} \doteq 1,381549 \quad (31)$$

Pro výpočet celkové chyby měření využijeme již upravenou rovnici ze zákona přenášení nejistot pro vztah (11), tedy vztah (24). Dostáváme

$$u_c(\kappa) = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{96650^4}} \cdot (961,7^2 \cdot 1,788^2 \cdot 1,129^2 \cdot (4 \cdot 0,001^2 \cdot 961,7^2 \cdot 96650^2 + 4 \cdot 0,1^2 \dots \quad (32)$$

$$\dots 1,788^2 \cdot 96650^2 + 50^2 \cdot 961,7^2 \cdot 1,788^2)^{\frac{1}{2}} \doteq 0,07 \quad (33)$$

## 5.4. Výsledky měření

### 5.4..1 Měření Poissonovy konstanty Clément-Desormesovou metodou

$\bar{h}_1$ [cm]	$\bar{h}_2$ [cm]	$u_c(h_1)$ [cm]	$u_c(h_2)$ [cm]	$\kappa$	$u_c(\kappa)$
267,7	75,3	4,2	2,8	1,39	0,02

Tabulka 5: Výsledky měření Poissonovy konstanty pomocí Clément-Desormesovy metody.

### 5.4..2 Měření Poissonovy konstanty z rychlosti zvuku

Frekvence	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$
$\frac{\lambda}{2}$ [cm]	17,88	13,71	11,43	9,7	8,7
$\kappa$	1,38	1,38	1,37	1,38	1,42
$u_c(\kappa)$	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07

Tabulka 6: Výsledky měření Poissonovy konstanty pomocí rychlosti zvuku v plynu.

## 6. Závěr

Hodnotu Poissonovy konstanty jsem v tomto cvičení určoval pomocí Clément-Desormesovy metody a z rychlosti zvuku v plynu. Tabulková hodnota Poissonovy konstanty pro vzduch se shoduje s určením Poissonovy konstanty podle ekvipartičního teorému a ona je hodnota je  $\kappa = 1,4$ . Tato hodnota platí pro vzduch od 20°C do 30°C.

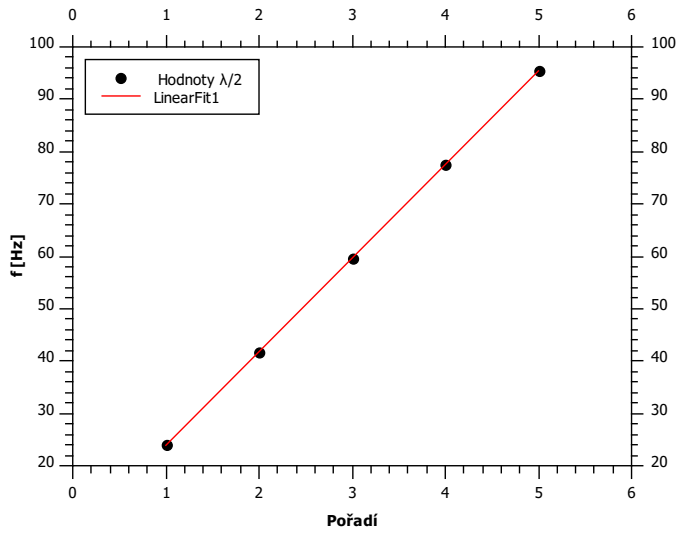
Clément-Desormesovou metodou jsem stanovil hodnotu Poissonovy konstanty jako  $\kappa = (1,39 \pm 0,02)$ . Hodnota Poissonovy konstanty se v tomto intervalu zřejmě nacházejí.

Pětkrát jsem určil Poissonovu konstantu pomocí rychlosti zvuku v plynu. Jak je vidět z tabulky 6, tak každý výsledek Poissonovy konstanty odpovídá tabulkové hodnoty i hodnoty Poissonovy konstanty určené pomocí ekvipartičního teorému. Při porovnání s těmito hodnotami je vidět, že nejistota měření je až zbytečně velká. To mohlo způsobeno určením nejistoty měření polohy maxim na 1 mm. Lidské oko by mohlo být schopné rozlišit i rozdíl 0,5 mm, avšak není možné, aby nejistota byla v tom měření zaměněna za tuto menší neboť se poloha maxim určovala podle obyčejného svinovacího metru, který má obecně nejistotu od 0.1 mm do 0.5 mm v závislosti na hodnotě vzdálenosti a výrobci onoho metru.

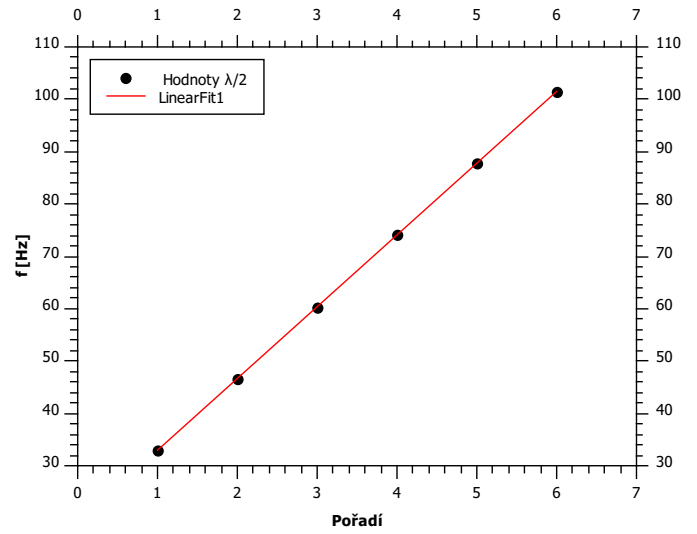
Ukázalo se, že měření Clément-Desormasovou metodou je přesnější a to je způsobena zejména více veličinami, které je potřeba znát. Tedy u Clément-Desormasovy metody stačí mít pouze dobrý přístroj k měření výšky vodního sloupce, zatímco u určování Poissonovy konstanty z rychlosti zvuku je nutné znát atmosférický tlak vzduchu, polohu maxim, hustotu vzduchu a frekvenci, tedy mít dobrý generátor zvukových vln, který dokáže generovat vlny se stálou frekvencí. Avšak u Clément-Desormasovy metody je závažnější lidský faktor při vypouštění plynu z láhve. Pakliže se bude vypouštět příliš dlouho, tak dojde k systematické chybě, která nebude zahrnuta do výpočty, a proto bych hodnotil určení Poissonovy konstanty pomocí rychlosti zvuku v plynu jako spolehlivější.

## DODATEK - Grafy

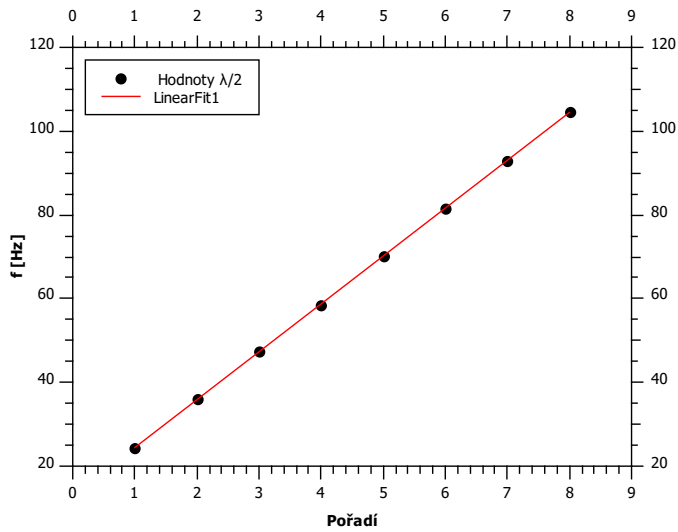
Maxima pro první frekvenci



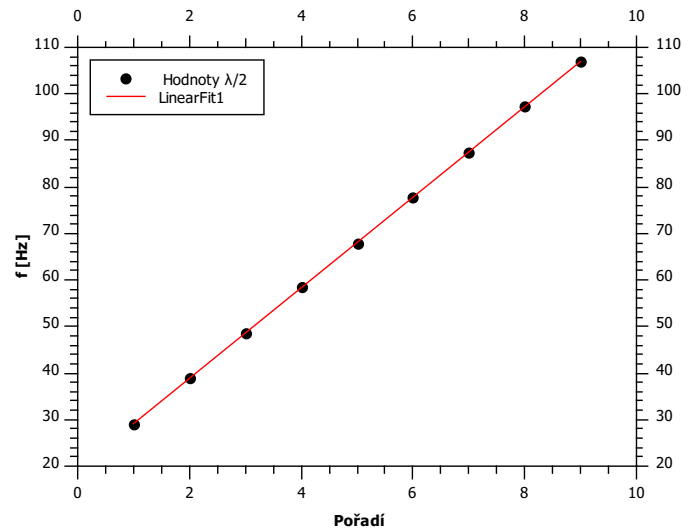
Maxima pro druhou frekvenci



Maxima pro třetí frekvenci



Maxima pro čtvrtou frekvenci



Maxima pro pátou frekvenci

