

FYZIKÁLNÍ PRAKTIKUM

Fyzikální praktikum 1

Zpracoval: Jan Beran

Naměřeno: 29. března 2018

Obor: UF

Skupina: F2180/06

Testováno:

Úloha . 5: Měření modulu pružnosti pevných látek

$$T = 24,2 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$p = 982 \text{ hPa}$$

$$\varphi = 48 \text{ }^{\circ}$$

1. Teorie

1.1. Měření modulu pružnosti v tahu přímou metodou z prodloužení drátu

Pro sílu rovnoměrně rozloženou na plochou S je normálové napětí definováno vztahem (1).

$$\sigma_n = \frac{F_n}{S} \quad (1)$$

Relativní prodloužení ε je určeno podle rovnice (2).

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (2)$$

Pokud je deformace elastická (pružná), tak platí Hookův zákon - vztah lineární závislosti mezi normálovým napětím σ_n a prodloužením ε . Tuto závislost, kde E je modul pružnosti (Youngův modul), vyjadřuje rovnice (3).

$$\sigma_n = E \cdot \varepsilon \quad (3)$$

Po dosazení definičních vztahů (1) a (2) do rovnice (3) dostaneme vztah pro prodloužení drátu, jenž vyjadřuje rovnice (4).

$$\Delta l = \frac{4l}{\pi d^2 E} F \quad (4)$$

Z této rovnice vyjádříme modul pružnosti E a dostaneme rovnici

$$E = \frac{4lF}{\Delta l \pi d^2} \quad (5)$$

Pakliže označíme

$$k = \frac{4gl}{\pi d^2 E},$$

dostaneme, že je prodloužení přímo úměrné hmotnosti s konstantou přímé úměrnosti k , tedy $\Delta l = k \cdot m$. Přičemž prodloužení při dané zátěži můžeme změřit a určit tak konstantu k , ze které můžeme určit modul pružnosti E jako

$$E = \frac{4gl}{\pi d^2 k} \quad (6)$$

1.2. Měření modulu pružnosti v tahu z průhybu plného obdélníkového nosníku

Pro modulu pružnosti v tahu při zátěži nosníku platí vztah

$$y = \frac{gl^3}{4a^3bE}m, \quad (7)$$

kde g je tíhové zrychlení, l je vzdálenost podpěr, y průhyb nosníku při zátěži m , a jeho tloušťka a b jeho šířka. Označíme-li

$$k = \frac{gl^3}{4a^3bE}$$

dostaneme, že průhyb je přímo úměrný zavěšené hmotnosti s konstantou přímé úměrnosti k , tedy

$$y = k \cdot m$$

Přičemž průhyb při dané zátěži můžeme změřit a určit tak konstantu k , ze které pak můžeme určit modul pružnosti E jako

$$E = \frac{gl^3}{4a^3bk} \quad (8)$$

1.3. Měření modulu pružnosti ve smyku dynamickou metodou

Smykové napětí pro tečnou sílu F_t rovnoměrně rozloženou na plochu S je dáno vztahem

$$\sigma_t = \frac{F_t}{S} \quad (9)$$

Relativní deformace γ je dána jako podíl posunutí Δ okrajových částí vrstvy k její tloušťce a , tedy

$$\gamma = \frac{\Delta}{a} \quad (10)$$

Hookův zákon bude mít podobu

$$\gamma \cdot G = \sigma_t, \quad (11)$$

kde G je modul pružnosti ve smyku, který je materiálovou konstantou.

Modul pružnosti ve smyku můžeme měřit také dynamickou metodou pomocí torzního oscilátoru. To jest zařízení, které měříme modul pružnosti ve smyku tak, že na měřený drát zavěsíme těžkou kouli a měříme periodu jejích torzních kmitů. Při něm platí vztah

$$G = \frac{16\pi m R^2 l}{5r^4 T^2} \quad (12)$$

kde m je hmotnost zavěšené koule, D její průměr, l délka měřeného drátu, d jeho průměr a T je perioda torzních kmitů oscilátoru.

1.4. Obecné vztahy a pojmy pro zpracování měření

Nejdříve zavedeme některé pojmy.

Chyba měření jest naměřená hodnota veličiny od níž odečteme správnou hodnotu veličiny.

Nejistota měření jest parametr přidružený k výsledku měření, jenž charakterizuje rozptýlení hodnot, jež by mohly být důvodně přisuzovány k měřené veličině.

Systematická nejistota jest nejistota, jenž ovlivňuje měření deterministickým způsobem, který můžeme dobře předpovědět. Tyto nejistoty můžeme odstranit korekcemi.

Náhodná nejistota jest nejistota, která ovlivňuje měření nepředvídatelným způsobem, tedy nelze je vyloučit ani kompenzovat. Tyto nejistoty lze podchytit několikanásobným měřením, které následně statisticky zpracujeme.

Hrubá chyba jest chyba, která je způsobena výjimečnou příčinou, selháním měřicí aparatury, či nesprávným záznamem výsledku apod.

V celém protokolu uvažujeme pouze Gaussovo rozdělení pravděpodobnosti, někdy také nazýváno Normální rozdělení pravděpodobnosti.

Střední hodnotu určíme jako aritmetický průměr z naměřených hodnot. (Jestliže měříme veličinu pouze jednou, je střední hodnotou právě hodnota z tohoto jednoho měření.)

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (13)$$

Nejistoty můžeme rozdělit ještě jednou možností a to na nejistotu typu A a typu B.

Nejistota typu A (u_A) u Gaussova rozdělení chápeme jako směrodatnou odchylku aritmetického průměru. Je to tedy nejistota, kterou zjistíme více. To můžeme vyjádřit rovnicí

$$u_A(x) = \frac{s(\bar{x})}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N \cdot (N - 1)}} \quad (14)$$

Nejistota typu B jest nejistota, kterou získáváme jiným způsobem než statisticky. Nejčastěji pak ze specifikace přístroje. Nejistota typu B zahrnuje tedy jak systematické, tak náhodné vlivy na rozdíl od nejistoty typu A.

Kombinovaná nejistota (také celková kombinovaná nejistota nebo celková nejistota) je použita tam, kde se při měření přístrojem mění hodnota naměřené veličiny, jenž ukazuje přístroj. Poté vypočteme onu celkovou kombinovanou nejistotu jako

$$u_C(x) = \sqrt{u_A^2(x) + u_B^2(x)} \quad (15)$$

Rozšířená nejistota, tedy nejistota, kde zahrneme velkou část intervalu s určitou pravděpodobností spočteme jako

$$U(x) = t_{p,v} u(x), \quad (16)$$

kde $t_{p,v}$ je studentův koeficient pro hladinu pravděpodobnosti p a stupňů volnosti v , které spočteme jako $v = N - 1$, kde N je počet měření.

Zákon přenášení nejistot jest zákon, kterým spočteme veličinu, která jest nepřímo měřená. Tedy veličina, jenž závisí na přímo měřených veličinách, které mají standardní kombinované nejistoty. Potom vyjádříme zákon přenášení nejistot jako

$$u_c(f) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \cdot u_c^2(x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \cdot u_c^2(x_2) + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \cdot u_c^2(x_n)} \quad (17)$$

Výsledek měření zapisujeme jako

$$x = (\bar{x} \pm U_c(x)) \quad j \quad (p = \dots, v = \dots), \quad (18)$$

kde j značí jednotky (rozměr) naměřené veličiny.

1.5. Nejistoty přístrojů

1.5.1 Váhy

Výrobce vah udává většinou dva údaje a to je citlivost *readout*, což je nejmenší hodnota čtená na displeji a označuje se d a ověřovací dílek e (*verification value*), což je největší rozdíl mezi údajem vah a etalonem hmotnosti použitým při ověření vah. Krajiní nejistota měření je rovna e , tedy

$$U_B(m) = e \quad (19)$$

Tedy standardní nejistota jest

$$u_B(m) = \frac{U_B(m)}{3} = \frac{e}{3} \quad (20)$$

Pro váhy v praktiku platí

$$e = 10d, \quad (21)$$

což znamená, že můžeme nejistotu typu B spočítat jako

$$u_B = \frac{e}{3} = \frac{10}{3}d. \quad (22)$$

Protože nejmenší hodnota, kterou můžeme odečíst na digitálním displeji je 0,0001 g, tudíž ověřovací dílek je 0,001 g a nejistota typu B bude

$$u_B(m) = \frac{10 \cdot 0,0001}{3} \text{ g} = \frac{0,001}{3} \text{ g} \quad (23)$$

2. Postup měření

2.1. Měření modulu pružnosti v tahu přímoou metodou z prodloužení drátu

Stanovil jsem hmotnosti závaží na analytických vahách. Průměr drátu jsem změřil mikrometrem. Délka drátu již změřena byla, a to laserovým dálkoměrem. Polohu dolního konce drátu jsem měřil digitálním úchylkoměrem. Úchylkoměr jsem vynuloval a přidával na drát postupně závaží. Hodnoty prodloužení drátu a hmotnosti jsem zapsal do tabulky.

2.2. Měření modulu pružnosti v tahu z průhybu plného obdélníkového nosníku

Šířku a tloušťku nosníku jsem změřil posuvným měřidlem. Nosník s navlečeným břitem jsem položil na břity stojanu. Třmen jsem umístil tak, aby úchylkoměr směřoval do jeho středu. Úchylkoměr jsem vynuloval a třmen jsem postupně zatěžoval závažími a odečítal jsem velikost prohnutí nosníku. Měřil jsem prohnutí jak při postupném zatěžování, tak při postupném odlehčování.

Tento postup jsem opakoval pro všechny tři nosníky.

2.3. Měření modulu pružnosti ve smyku dynamickou metodou

Délku drátu jsem změřil metrem a průměr drátu jsem změřil mikrometrem. Hmotnost koule byla vyražena na kouli a průměr koule jsem změřil posuvným měřidlem. Kouli jsem natočil kolem svislé osy o úhel, který byl mezi úhly 45° a 90°. Po uvolnění koule jsem měřil několikrát dobu 10 kmitů.

3. Naměřené hodnoty

3.1. Naměřené hodnoty hmotnosti závaží

Č. závaží	hmotnost [g]
1.	99,6013
2.	99,6031
3.	98,9448
4.	99,7117
5.	99,7305
6.	99,6431
7.	99,6055
8.	99,3444
9.	99,3730
10.	99,0908

Tabulka 1: Hmotnosti menších závaží

Č. závaží	hmotnost [g]
1.	111,7084
2.	108,0812
3.	112,1500
4.	113,5348
5.	113,1115
6.	112,0026
7.	113,2968
8.	110,0632
9.	108,3369
10.	115,1323

Tabulka 2: Hmotnosti větších závaží

3.2. Měření modulu pružnosti v tahu přímoou metodou z prodloužení drátu

Drát		
Č. závaží	zatěžování	odlehčování
0	0,000	0,003
1	0,046	0,045
2	0,094	0,091
3	0,139	0,139
4	0,187	0,188
5	0,234	0,237
6	0,282	0,278
7	0,332	0,332
8	0,387	0,382
9	0,427	0,443
10	0,483	0,483

Tabulka 3: Napnutí drátu

3.3. Měření modulu pružnosti v tahu z průhybu plného obdélníkového nosníku

Vzorek 1		
Č. závaží	zatěžování	odlehčování
0	0,000	0,003
1	0,475	0,482
2	0,953	0,958
3	1,425	1,436
4	1,901	1,915
5	2,378	2,384
6	2,856	2,854
7	3,332	3,334
8	3,807	3,807
9	4,275	4,286
10	4,761	4,761

Tabulka 4: Prohnutí

Vzorek 2		
Č. závaží	zatěžování	odlehčování
0	0,001	0,008
1	0,273	0,273
2	0,546	0,546
3	0,819	0,818
4	1,091	1,089
5	1,364	1,362
6	1,637	1,635
7	1,912	1,908
8	2,182	2,181
9	2,455	2,453
10	2,725	2,725

Tabulka 5: Prohnutí

Vzorek 3		
Č. závaží	zatěžování	odlehčování
0	0,013	0,020
1	1,674	1,703
2	3,388	3,358
3	5,033	5,086
4	6,790	6,718
5	8,481	8,481

Tabulka 6: Prohnutí

3.4. Měření modulu pružnosti ve smyku dynamickou metodou

Č. měření	$10T$
1	39,49
2	39,52
3	39,71
4	39,81
5	39,51
6	39,57

Tabulka 7: Doba 10 kmitů

4. Zpracování měření

4.1. Měření modulu pružnosti v tahu přímoou metodou z prodloužení drátu

Pro výpočet modulu pružnosti využijeme rovnici (6).

Pro gravitační zrychlení v městě Brně platí¹

$$g = 9,809980 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (24)$$

Číslo π zadáme s přesností na 5 desetinných míst²

$$\pi = 3,14159 \quad (25)$$

Průměr drátu d zjistíme mikrometrem

$$d = (0,460 \pm 0,005) \text{ mm} \quad (26)$$

Délka drátu již byla naměřená laserovým dálkoměrem jako

$$l = 1,567 \text{ m} \quad (27)$$

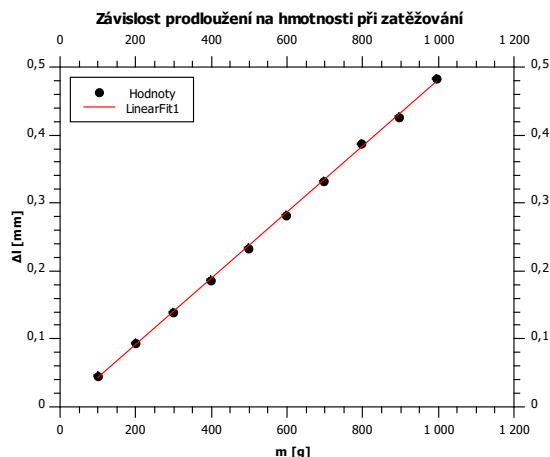
Nejistota úchylkoměru je

$$u_B(l) = 0,001 \text{ mm} \quad (28)$$

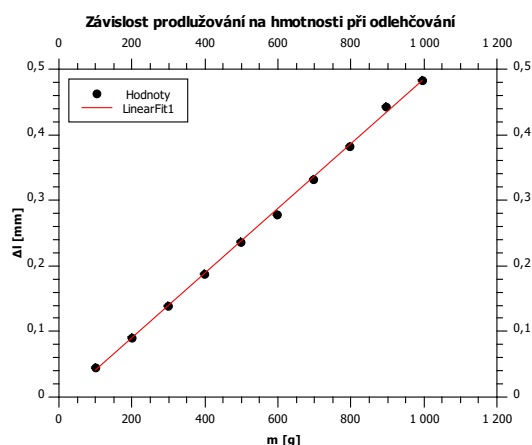
Nejistota váhy (hmotnosti) při vážení jest

$$u_B(l) = 0,003 \text{ g} \quad (29)$$

Pomocí grafu závislosti prodloužení drátu na hmotnosti zátěže dostaneme konstantu k . Protože jsem do grafu zanesl i nejistoty měření délky i hmotnosti je určena i nejistota konstanty k . Graf i s lineární regresí při zatěžování je na obrázku 1 a graf s lineární regresí při odlehčování je na obrázku 2.



Obrázek 1: Graf při zatěžování



Obrázek 2: Graf při odlehčování

Při zatěžování drátu jsem dostali konstantu k jako

$$k_z = (4,8651672247144 \cdot 10^{-4} \pm 1,1065532195565 \cdot 10^{-6})$$

Při odlehčování drátu jsem dostali konstantu k jako

$$k_o = (4,9303264831800 \cdot 10^{-4} \pm 1,1065532195565 \cdot 10^{-6})$$

¹Hodnotu gravitačního zrychlení g v městě Brně jsem zjistil z internetové stránky http://www.physics.muni.cz/kof/vyuka/prss_1.pdf

²Hodnotu čísla π jsem zjistil na internetové stránce Wikipedia

Hodnotu měření dostaneme z již zmiňované rovnice (6). Nejistotu měření dostaneme ze zákona přenášení nejistot jako rovnici (30).

$$u_C(E) = 4 \sqrt{\frac{g^2 (u_C(l))^2}{\pi^2 d^4 k^2} + 4 \frac{g^2 l^2 (u_C(d))^2}{\pi^2 d^6 k^2} + \frac{g^2 l^2 (u_C(k))^2}{\pi^2 d^4 k^4}} \quad (30)$$

Dostaneme tak hodnotu Youngova modulu pružnosti jako

$$E = (1,91 \pm 0,06) \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$

4.2. Měření modulu pružnosti v tahu z průhybu plného obdélníkového nosníku

Pro výpočet použijeme rovnici (8). Pro určení celkové nejistoty měření modulu pružnosti E využijeme zákonu přenášení nejistot, který nám dává rovnici

$$u_C(E) = \frac{1}{4} \sqrt{9 \frac{g^2 l^4 (u_C(l))^2}{a^6 b^2 k^2} + 9 \frac{g^2 l^6 (u_C(a))^2}{a^8 b^2 k^2} + \frac{g^2 l^6 (u_C(b))^2}{a^6 b^4 k^2} + \frac{g^2 l^6 (u_C(k))^2}{a^6 b^2 k^4}} \quad (31)$$

Naměřené hodnoty vzdálenosti podpěr l , tloušťky nosníků a , šířky nosníků b a konstanty k kterou určí přímo QtiPlot uvedeme pro každý vzorek.

Vzdálenost l je pro všechny nosníky samozřejmě stejná a to

$$l = (90,0 \pm 0,1) \text{ cm}$$

Pro první vzorek nosníku jsou hodnoty

$$a_1 = (4,990 \pm 0,005) \text{ mm}$$

$$b_1 = (28,40 \pm 0,02) \text{ mm}$$

$$k_1 = (4780 \pm 5) \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Pro druhý vzorek nosníku jsou hodnoty

$$a_2 = (4,790 \pm 0,005) \text{ mm}$$

$$b_2 = (28,50 \pm 0,02) \text{ mm}$$

$$k_2 = (274 \pm 1) \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Pro třetí vzorek nosníku jsou hodnoty

$$a_3 = (3,950 \pm 0,005) \text{ mm}$$

$$b_3 = (15,00 \pm 0,02) \text{ mm}$$

$$k_3 = (17045 \pm 4) \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Nyní již můžeme psát výsledky Youngových modulů pružnosti jako

$$E_1 = (1,060 \pm 0,005) \cdot 10^{11} \text{ Pa} \quad (32)$$

$$E_2 = (20,9 \pm 0,01) \cdot 10^{11} \text{ Pa} \quad (33)$$

$$E_3 = (1,135 \pm 0,006) \cdot 10^{11} \text{ Pa} \quad (34)$$

4.3. Měření modulu pružnosti ve smyku dynamickou metodou

Modul pružnosti ve smyku spočteme podle rovnice (12). Délku drátu l jsem změřil metrem, jeho průměr d jsem změřil mikrometrem. Průměr zavěšené koule R jsem změřil metrem a na kouli byla vyražena její hmotnost m . Dostaneme hodnoty

$$\begin{aligned}
m &= (5905 \pm 5) \text{ g} \\
R &= (99,0 \pm 0,1) \text{ mm} \\
d &= (0,98 \pm 0,02) \text{ mm} \\
l &= (50,7 \pm 0,2) \text{ cm}
\end{aligned}$$

Pro aritmetický průměr doby 10 kmitů dostaneme

$$T = (3,97 \pm 0,01) \text{ s} \quad (35)$$

Ze zákona přenášení nejistot, dostaneme celkovou nejistotu pro měření modulu pružnosti ve smyku jako

$$u_C(G) = \frac{16}{5} \sqrt{4 \frac{\pi^2 R^2 l^2 (u(R))^2}{r^8 T^4} + \frac{\pi^2 R^4 (u(l))^2}{r^8 T^4} + 4 \frac{\pi^2 R^4 l^2 (u(T))^2}{r^8 T^6}} \quad (36)$$

Po dosazení těchto hodnot do rovnice (12) dostaneme modul pružnosti ve smyku, tedy

$$G = (8,1 \pm 2) \cdot 10^{10} \text{ Pa} \quad (37)$$

5. Závěr

5.1. Měření modulu pružnosti v tahu přímoou metodou z prodloužení drátu

Měření modulu pružnosti v tahu protažením drátu nám vyšel modul odpovídající tažené oceli, protože tabulková hodnota tažné oceli je $1,90$ až $2,15 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ a naše naměřená hodnota byla $1,91 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$. Že se jednalo o tažnou ocel je velice pravděpodobné.

5.2. Měření modulu pružnosti v tahu z průhybu plného obdélníkového nosníku

Při měření průhybem nosníku jsme měli tři nosníky. Jejich moduly pružnosti jsou

$$\begin{aligned}
E_1 &= (1,060 \pm 0,005) \cdot 10^{11} \text{ Pa} \\
E_2 &= (20,9 \pm 0,01) \cdot 10^{11} \text{ Pa} \\
E_3 &= (1,135 \pm 0,006) \cdot 10^{11} \text{ Pa}
\end{aligned}$$

První modul pružnosti by odpovídal tabulkové hodnotě mosazi, jenž má tabulkovou hodnotu $0,90$ až $1,0 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$. Druhý by odpovídal opět tažené oceli viz minulý úkol a posledního víme, že šlo o uhlíkový nosník, dle naměřeného modulu pružnosti šlo nejspíš o viskózu s udávanou hodnotou kolem $1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$.

5.3. Měření modulu pružnosti ve smyku dynamickou metodou

Torzním oscilátorem jsem dospěli k modulu pružnosti ve smyku, který odpovídá tažené oceli s tabulkou hodnotou $8,0$ až $8,5 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$.