

Všechno co potřebujete znát na zkoušku z kombinatoriky
u doc. Fuchse
(„lehce neúplná verze“)

Jan Beran
✉ 460846@mail.muni.cz

13. února 2020

Obsah

1	Učebnice	2
1.1	Základy ke studiu kombinatoriky	2
1.2	Základní kombinatorické funkce a pojmy	3
1.3	Rozklady konečných množin	4
1.4	Princip inkluze a exkluze	5
1.5	Rozklady přirozených čísel na sčítance	6
1.6	Rozdělování do přihrádek	9
1.7	Řešení rekurentních formulí	11
1.8	Vytvořující funkce	13
1.9	Bloková schémata, latinské čtverce a konečné množiny	13
2	Problémy	15
3	Příklady z písemek	20

Úvod a značení

Tento soubor vznikl jako příprava na zkoušku v lednu 2020. Jedná se výpisky těch nejdůležitějších definic, vět a důkazů a „problémů“, které byli probírány na přednášce. Je možné, že se bude rozsah lehce měnit, podle toho, co na přednáškách bude v dalších letech. Důkazy nejsou zcela opsány ze skript, ale jsou lehce upravené. Například důkaz inkluze a exkluze je mnohem více rozepsán.

Chybí některá řešení příkladů, ale většina co chybí, se dá najít v definicích, větách a důkazech.

Označení jsou tady jiné než používá doc. Fuchs. Je to z důvodu jistého sjednocení značení a jistým kompromisem mezi přednáškou, cvičením a praktickým použitím. Na zkoušce ovšem v odlišném značení variací, permutace a kombinací nebyl problém.

$\mathbb{N}$ - přirozené čísla (bez nuly)

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\subseteq$ - podmnožina

$\subset$ - vlastní podmnožina

$\mathcal{P}(X)$ systém všech podmnožin. ($\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$)

$|X|$ - počet prvků množiny X (card X)

$P(n)$ - počet permutací (pořadí) n prvků.

$V(k, n)$ - počet variací k -té třídy z n prvků.

$C(n, k)$ - počet kombinací k -té třídy z n prvků.

$P_0(n_1, \dots, n_k)$ - počet permutací s opakováním z prvků druhů $n_1, \dots, n_k$

$V_0(k, n)$ - počet variací s opakováním k -té třídy z n prvků.

$C_0(k, n)$ - počet kombinací s opakováním k -té třídy z n prvků.

Kapitola 1

Učebnice

1.1 Základy ke studiu kombinatoriky

Definice 1.1.1 (Uspořádaná množina, řetězec). Buď A množina. Řekneme, že binární relace $\leq$ na A je *uspořádáním* jestliže je:

- reflexivní: $\forall x \in A$ platí: $x \leq x$,
- antisymetrická: $\forall x, y \in A$ platí: $x \leq y \wedge y \leq x \implies x = y$
- tranzitivní: $\forall x, y, z \in A$ platí: $x \leq y \wedge y \leq z \implies x \leq z$

Pakliže je relace navíc

- úplná: $\forall a, b \in A$ platí: $a \leq b \vee b \leq a$

pak se jí říká *lineárně uspořádaná množina* nebo *řetězec*.

Definice 1.1.2 (Nejmenší, největší, minimální a maximální prvek). Necht' $(M, \leq)$ je uspořádaná množina. Prvek $a \in M$ se nazývá

- **nejmenší**, jestliže $\forall x \in M$ platí: $a \leq x$
- **největší**, jestliže $\forall x \in M$ platí: $x \leq a$
- **minimální**, jestliže neexistuje prvek $x \in M$ s vlastností: $a < x$
- **maximální**, jestliže neexistuje prvek $x \in M$ s vlastností: $x < a$

Definice 1.1.3 (Horní a dolní závora). Buď A uspořádaná množina, $B \subseteq A$ libovolná. Řekneme, že prvek $U \in A$ (resp. $L \in A$) je *horní závora* (resp. *dolní závora*) množiny B jestliže $\forall x \in B$ platí $x \leq U$ (resp. $L \leq x$).

Definice 1.1.4 (Supremum a infimum). Necht' $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $M \subset X$. Řekneme, že prvek $G \in X$ je *supremum množiny* M , jestliže platí:

1. G je horní závorou množiny M ,
2. je-li prvek $G' \in X$ horní závorou množiny M , potom $G \leq G'$.

Řekneme, že prvek $g \in X$ je *infimum množiny* M , jestliže platí

1. g je dolní závorou množiny M ,
2. je-li prvek $g' \in X$ dolní závorou množiny M , potom $g' \leq g$.

Definice 1.1.5 (Svaz). Množinu X uspořádanou relací R nazveme *svazem*, jestliže pro každou její dvouprvkovou podmnožinu existuje a X obsahuje její supremum a infimum.

1.2 Základní kombinatorické funkce a pojmy

Věta 1.2.1 (Kombinatorické pravidlo součtu). Necht' $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ je systém neprázdných podmnožin množiny A , pro který platí:

$$1. \bigcap_{i=1}^n A_i = A$$

$$2. A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \wedge i \neq j$$

Potom $|A| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$.

Kombinatorické pravidlo součtu můžeme definovat i jiným způsobem.

Věta 1.2.2 (Kombinatorické pravidlo součtu). Lze-li objekt A vybrat n způsoby a objekt B lze vybrat m způsoby, pak objekt A nebo B lze vybrat $m + n$ způsoby.

Věta 1.2.3 (Kombinatorické pravidlo součinu). Buďte A a B konečné množiny. Pak $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Definice 1.2.1 (Variace). Buď $n \in \mathbb{N}$, $|X| = n$. Pro $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ nazveme *variací k -té třídy v X* každý řetězec $(A, \leq)$, kde $A \in \mathcal{P}_k(X)$. Počet všech variací k -té třídy z n prvků označme $V(k, n)$.

Definice 1.2.2 (Permutace). Variace n -té třídy z n prvkové množiny se nazývají *permutace* této množiny. Počet všech permutací z n prvků označme $P(n)$.

Vysvětleme nyní jednoduše co je to permutace. Mějme například 3 barevné křídly (množina našich objektů) - každá má jinou barvu, tedy je velmi jednoduše od sebe rozlišíme. Tyto tři křídly poskládáme vedle sebe, tedy vytvoříme z nich jedno pevné pořadí. (Toto je důvod, proč se permutace nazývá někdy pořadí.) Toto jedno námi dané pořadí je tedy permutace z oněch tří kříd. Je nyní asi jasné, že jsme tímto pořadím, naši množinu úplně uspořádali, tedy vytvořili jsme řetězec.¹

Nyní si vysvětleme pojem variace. Mějme nyní čtyři barevné křídly, přičemž znovu bude mít každá jinou barvu. Řekněme, že budeme chtít například vytvořit variaci třetí třídy z těchto čtyř kříd. Potom si jednoduše vybereme tři křídly a tyto křídly uspořádáme podle naší libosti. Dostaneme tak znovu úplně uspořádanou množinu tří kříd (tedy podmnožinu původní množiny), neboli řetězec.

Někdy se permutace a variace vysvětlují lépe v opačném pořadí, ale to závisí na způsobu výkladu.

Definice 1.2.3 (Kombinace). Buď X je konečná množina, $k \in \mathbb{N}_0$ buď libovolné. *Kombinací k -té třídy z X* rozumíme každou k prvkovou podmnožinu množiny X . (Množina $\mathcal{P}_k(X)$ je tedy množinou všech kombinací k -té třídy z X . Označme $C(n, k) := \mathcal{P}_k(X)$.)

Vysvětlení, co je to kombinace je velmi jednoduché. Chtějme například kombinace třetí třídy ze šesti prvků. Mějme například 6 různých knih. To bude naše množina X a nyní z nich vybereme 3 knihy. Ty můžeme například hodit do batohu. Tato podmnožina knih je kombinace.

¹Někdy se také úplně uspořádané množině říká lineárně uspořádaná množina.

Definice 1.2.4 (Variace s opakováním). Buď $X \neq \emptyset$ konečná množina, $|X| = n$. Necht' $k \in \mathbb{N}_0$ je libovolné. Uspořádanou k -tici prvků z množiny X , v níž se prvky mohou opakovat, nazýváme k -variace s opakováním z prvků množiny X . Počet všech k -variací s opakováním označme $V_0(k, n)$.

Definice 1.2.5 (Permutace s opakováním). Buď $k \in \mathbb{N}$ libovolné. Buď dáno n předmětů k druhů. Necht' n_i značí počet předmětů i -tého druhu, $i = 1, \dots, k$. (Tj. $n_1 + \dots + n_k = n$.) Symbolem $P_0(n_1, \dots, n_k)$ označme počet prvků množiny všech uspořádaných n -tic těchto předmětů. Tyto n -tice nazýváme *permutace s opakováním*.

Definice 1.2.6 (Kombinace s opakováním). Mějme dostatečný počet prvků n druhů. Skupinu k objektů, v níž nezáleží na pořadí a v níž navzájem nerozlišujeme předměty téhož druhu, nazýváme k -kombinace s opakováním. Počet těchto k -kombinací s opakováním označme $C_0(k, n)$.

1.3 Rozklady konečných množin

Definice 1.3.1 (Rozklad množiny). Necht' M je libovolná neprázdná množina. Pak systém $\overline{M}$ neprázdných podmnožin množiny M , splňujících podmínky:

1. libovolné dvě různé množiny ze systému $\overline{M}$ jsou disjunktní
2. sjednocení všech množin ze systému $\overline{M}$ je rovno celé množině M ,

se nazývá *rozklad na množině M* . Prvky systému $\overline{M}$ se nazývají *třídy rozkladu $\overline{M}$* a systém všech rozkladů na množině M označíme $\mathcal{K}(M)$.

Definice 1.3.2 (Bellova čísla). Označme B_n počet všech rozkladů na n -prvkové množině, $n \in \mathbb{N}$. Čísla B_n se nazývají *Bellova čísla*.

Věta 1.3.1.

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k, \quad B_0 = 1 \quad (1.1)$$

Důkaz 1.3.1. Předpokládáme, že známe čísla $B_1, B_2, \dots, B_n$ a chceme určit číslo B_{n+1} . Buď X libovolná množina o n prvcích a libovolný prvek $a \notin X$. Vytvoříme novou množinu X_a následovně $X_a = X \cup \{a\}$. Je zřejmé, že $|X_a| = n + 1$.

Uvažujme libovolný rozklad $\overline{X_a}$ množiny X_a . Prvek a musí ležet v některé ze tříd, která má k prvků. Zbývajících $k - 1$ prvků můžeme vybrat libovolně právě $\binom{n}{k-1}$ způsoby. Což můžeme díky vlastnostem kombinačních čísel přepsat jako $\binom{n}{n-k+1}$. Ze zbylých $n - k + 1$ prvků množiny X_a můžeme vytvořit B_{n-k+1} rozkladů, což je číslo, které z předpokladu známe. Všechny rozklady množiny X_a , kde prvek a je ve třídě s k prvky je tedy $\binom{n}{n-k+1} B_{n-k+1}$, což plyne z pravidla součinu. Tady pokud provedeme substituci $r := n - k + 1$ pro všechny rozklady platí

$$B_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{n-k+1} B_{n-k+1} = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} B_r \quad (1.2)$$

přičemž jsme u první sumy volily meze podle toho, že číslo k musí být minimálně 1 neboť prvek a musí ležet v neprázdné množině, leží v ní alespoň prvek a . Maximální počet prvků, v množině ve které je prvek a musí být všechny prvky, tedy $n + 1$ prvků.

B_0 přitom značí počet rozkladů množiny X_a , kde prvek a leží ve třídě s $n + 1$ prvky. Takový rozklad je ovšem jen jeden, tedy musí platit $B_0 = 1$.

Definice 1.3.3 (Steinerovy čísla 2. druhu). Buďte $n \leq m$ přirozená čísla. Označme $S(n, m)$ počet rozkladů n -prvkové množiny na m tříd. Čísla $S(n, m)$ se nazývají *Stirlingova čísla 2. druhu*. Definitoricky klademe $S(0, 0) = 1$ $S(0, n) = 0$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Věta 1.3.2.

$$S(n+1, k) = S(n, k-1) + k \cdot S(n, k) \quad \text{pro } 1 < k < n \quad (1.3)$$

$$S(n, n) = S(n, 1) = 1 \quad (1.4)$$

Důkaz 1.3.2. Nejdříve dokažme druhou rovnici. Zřejmě existuje pouze jeden způsob jak rozložit n prvkovou množinu na n tříd, tedy každá třída obsahuje právě jeden prvek. Stejně tak existuje pouze jeden způsob jak rozložit množinu o n prvcích na 1 třídu. Tedy všechny prvky tvoříme právě jednu třídu rozkladu, která je jediná.

Dokažme nyní první rovnici. Mějme všechny rozklady $n+1$ prvkové množiny $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}$ na k tříd. V některých z těchto rozkladů tvoří prvek a_{n+1} jednoprvkovou třídu. Těchto rozkladů je zřejmě $S(n, k-1)$. Ve všech ostatních rozkladech je prvek a_{n+1} prvkem některé ze tříd o více prvcích. Prvek a_{n+1} přidáme k některé třídě rozkladu množiny $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ na k tříd a těch je zřejmě $S(n, k)$. Můžeme ovšem vybrat k způsoby, kam umístit prvek a_{n+1} . Z pravidla součinu tedy plyne, že těchto rozkladů je $k \cdot S(n, k)$. Vidíme, že jsme počet rozkladů množiny o $n+1$ prvcích na k tříd rozložili na dva disjunktní případy. První, kdy prvek a_{n+1} tvoří jednoprvkovou třídu. Těchto rozkladů je $S(n, k-1)$. A druhý případ, kdy netvoří jednoprvkovou třídu, a v tomto případě je všech rozkladů $k \cdot S(n, k)$. Z pravidla součtu dostáváme dokazovanou formuli

$$S(n+1, k) = S(n, k-1) + k \cdot S(n, k)$$

1.4 Princip inkluze a exkluze

Věta 1.4.1 (Princip inkluze a exkluze). Buď dána konečná množina M . Nechť prvky množiny M mohou mít vlastnosti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Symbolem $M(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}, \alpha'_{j_1}, \alpha'_{j_2}, \dots, \alpha'_{j_p})$ označme počet všech prvků množiny M , které mají vlastnosti $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$ a nemají žádnou z vlastností $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_p}$ (bez ohledu na to, mají-li nebo nemají vlastnosti, které ve výčtu $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}, \alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_p}$ nejsou uvedeny). Pak platí

$$\begin{aligned} M(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n) = & |M| - \sum_{i=1}^n M(\alpha_i) + \sum_{i < j} M(\alpha_i, \alpha_j) - \sum_{i < j < k} M(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k) + \dots \\ & \dots + (-1)^{n-1} \sum_{i_1 < \dots < i_{n-1}} M(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{n-1}}) + (-1)^n M(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Důkaz 1.4.1. Důkaz provedeme indukcí vzhledem k počtu vlastností.

(α) Pro jednu vlastnost α_1 dostáváme z formule 1.5

$$M(\alpha'_1) = |M| - M(\alpha_1)$$

což je zřejmě pravda.

(β) Nechť formule 1.5 platí pro $n-1$ vlastností a dokažme tuto formuli pro n . Platí

$$\begin{aligned} M(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{n-1}) = & |M| - \sum_{i=1}^n M(\alpha_i) + \sum_{i < j} M(\alpha_i, \alpha_j) - \sum_{i < j < k} M(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k) + \dots \\ & \dots + (-1)^{n-2} \sum_{i_1 < \dots < i_{n-2}} M(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{n-2}}) + (-1)^{n-1} M(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Pro prvky, které krom toho, že nemají vlastnosti $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$, mají navíc vlastnost α_n platí

$$\begin{aligned} M(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{n-1}, \alpha_n) &= M(\alpha_n) - \sum_{i=1}^{n-1} M(\alpha_i, \alpha_n) + \sum_{i < j} M(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_n) - \sum_{i < j < k} M(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k, \alpha_n) + \dots \\ &\dots + (-1)^{n-2} \sum_{i_1 < \dots < i_{n-2}} M(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{n-2}}, \alpha_n) + (-1)^{n-1} M(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Po odečtení rovnice 1.7 od rovnice 1.6 dostaneme na levé straně levou stranu dokazované rovnice 1.5.

$$M(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{n-1}) - M(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{n-1}, \alpha_n) = M(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{n-1}, \alpha'_n)$$

Na pravé straně dostáváme

$$\begin{aligned} |M| - \sum_{i=1}^n M(\alpha_i) - M(\alpha_n) + \sum_{i < j} M(\alpha_i, \alpha_j) + \sum_{i=1}^{n-1} M(\alpha_i, \alpha_n) - \sum_{i < j < k} M(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k) - \sum_{i < j} M(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_n) + \dots \\ \dots + (-1)^{n-2} \sum_{i_1 < \dots < i_{n-2}} M(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{n-2}}) - (-1)^{n-3} \sum_{i_1 < \dots < i_{n-3}} M(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{n-3}}, \alpha_n) + \\ + (-1)^{n-1} M(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) - (-1)^{n-2} \sum_{i_1 < \dots < i_{n-2}} M(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{n-2}}, \alpha_n) - (-1)^{n-1} M(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \end{aligned}$$

Což nám dává

$$\begin{aligned} |M| - \sum_{i=1}^n M(\alpha_i) + \sum_{i < j} M(\alpha_i, \alpha_j) - \sum_{i < j < k} M(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k) + \dots \\ \dots + (-1)^{n-1} \sum_{i_1 < \dots < i_{n-1}} M(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{n-1}}) + (-1)^n M(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n). \end{aligned}$$

což je pravá strana rovnice 1.5.

Q. E. D

Věta 1.4.2 (Speciální případ inkluze a exkluze). Necht' ve větě 1.4.1 pro každé $k = 1, \dots, n$ a pro každou kombinaci vlastností $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$ závisí číslo $M(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}) = M(k)$ pouze na počtu těchto vlastností. Pak platí

$$M(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) = |M| - \binom{n}{1} M(1) + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} M(n) = |M| + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} M(k) \quad (1.8)$$

1.5 Rozklady přirozených čísel na sčítance

Definice 1.5.1 (Kompozice čísla n na k sčítanců). Kompozicí čísla n na k sčítanců rozumíme každou uspořádanou k -tici $[x_1, \dots, x_k]$ přirozených čísel takovou, že

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \quad (1.9)$$

Počet všech kompozic čísla n na k sčítanců označme $K(n, k)$.

Věta 1.5.1. Pro každá přirozená n, k platí:

$$K(n, k) = \binom{n-1}{k-1} \quad (1.10)$$

Důkaz 1.5.1. Představme si každé číslo x_i jako přihrádku, do které budeme sypat kuličky, kterých je n . Jenom si uvědomme, že čísla $x_1, \dots, x_k$ jsou všechna přirozená, tedy žádné nesmí být nulové. To znamená, že do každé přihrádky dejme nejdříve jednu kuličku. Dostaneme tedy pouze $n - k$ kuliček, které můžeme rozdělovat libovolně. Zřejmě hledáme permutaci s opakováním, tedy všech kompozic čísla n na k sčítanců je

$$K(n, k) = P_0(n - k, k - 1) = \frac{(n - 1)!}{(n - k)!(k - 1)!} = \binom{n - 1}{k - 1}$$

Věta 1.5.2. Kompozic čísla n na nejvýše k sčítanců je $P_0(n, k - 1)$.

Důkaz 1.5.2. Budeme postupovat naprosto stejně jako v předchozím případě, jen ne začátku nedáme do každé přihrádky po jedné kuličce. Z toho ihned plyne tvrzení věty.

Definice 1.5.2 (Rozklad čísla n na k sčítanců). Buďte n, k přirozená čísla. *Rozkladem* čísla n na k sčítanců rozumíme každou (neuspořádanou) k -tici přirozených čísel $x_1, \dots, x_k$ takovou, že

$$x_1 + \dots + x_k = n. \quad (1.11)$$

Počet všech rozkladů čísla n na k sčítanců označme $p(n, k)$.

Věta 1.5.3.

$$p(n, k) = \sum_{i=1}^k p(n - k, i); \quad p(n, 1) = p(n, n) = 1 \quad (1.12)$$

Důkaz 1.5.3. Zřejmě počet možností jak rozložit přirozené číslo n na n přirozených sčítanců je právě jeden, tedy ten, kdy každý sčítanec bude jednička. Počet možností jak rozložit přirozené číslo n na 1 sčítanec je také jeden a to číslo samo. K tomu abychom dokázali rekurentní si uvědomme, že skutečnost, že na pořadí sčítanců nezáleží je stejné jako když budeme se dohodneme na jistém přesně daném pořadí, v jakém budeme tyto rozklady zapisovat. Tady naše domluva bude taková, že sčítance budeme zapisovat v pořadí pro která platí $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_k$. Předpokládejme, že

$$n = x_1 + \dots + x_k$$

je rozklad čísla n na k sčítanců. Pak platí

$$n - k = (x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \dots + (x_k - 1)$$

je rozklad čísla $n - k$ na k nebo méně sčítanců nebo některé z čísel x_i mohlo být jedna. Přitom přiřazení $(x_1, \dots, x_k) \rightarrow (x_1 - 1, \dots, x_k - 1)$ je bijekcí množiny všech rozkladů čísla n na k sčítanců na množinu všech rozkladů čísla $n - k$ na nejvýše k sčítanců. Tedy počet prvků množiny všech rozkladů čísla n na k sčítanců musí být tolik jako počet prvků množiny rozkladů čísla $n - k$ na nejvýše k sčítanců. Podle definice je číslo $p(n - k, i)$ vyjadřující počet rozkladů čísla $n - k$ na i sčítanců. Součet všech rozkladů čísla $n - k$ na i sčítanců pro $i = 1, \dots, k$ je rovno číslo $p(n, k)$. Q. E. D

Definice 1.5.3. Číslo, které udává počet rozkladů čísla n na nejvýše k sčítanců označme $q(n, k)$.

Věta 1.5.4.

$$q(n, k) = \sum_{i=0}^k p(n, i) \quad (1.13)$$

Důkaz 1.5.4. Tvrzení plyne okamžitě z věty 1.5.3 a jejího důkazu 1.5.3.

Q. E. D

Věta 1.5.5.

$$q(n, k) = p(n + k, k) \quad (1.14)$$

Důkaz 1.5.5. Pakliže ve větě 1.5.3 vyměníme číslo n za číslo $n + k$ dostaneme

$$p(n + k, k) = \sum_{i=1}^k p(n, i)$$

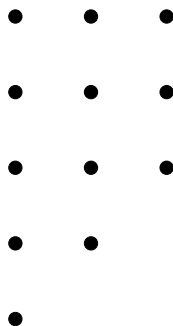
a pakliže tuto do této rovnice dosadíme z věty 1.5.4 dostaneme

$$q(n, k) = p(n + k, k)$$

Q. E. D

Definice 1.5.4 (Ferresovy diagramy). *Feressův diagram* je diagram, ve kterém každému sčítanci odpovídá řádek bodů v rovině.

Poznámka 1.5.1. Například Feressův diagram rozkladu čísla 12 na 5 sčítanců je na obrázku 1.1.



Obrázek 1.1: Feressův diagram rozkladu čísla 12 na 5 sčítanců.

Definice 1.5.5 (Adjungovaný rozklad). Je-li α rozklad čísla n , pak tzv. *adjungovaný rozklad* α^* k rozkladu α obdržíme tak, že Ferresův diagram přečteme po sloupcích. (Provedeme transpozici Feressova diagramu.)

Definice 1.5.6 (Samoadjungovaný rozklad). Platí-li $\alpha = \alpha^*$, potom rozklad α se nazývá *samoadjungovaný rozklad*.

Definice 1.5.7 (Youngův svaz). Buď Y množina všech nerostoucích posloupností nezáporných celých čísel, jejichž součtem přirozené číslo (tj. všechny členy každé posloupnosti jsou od jistého indexu $i \geq 2$ rovny nule). Definujeme relaci $\leq$ na Y tak, že pro libovolná $\alpha = (a_n)_{n=1}^\infty$, $\beta = (b_n)_{n=1}^\infty$ platí:

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow a_i \leq b_i \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad (1.15)$$

Věta 1.5.6. Relace $\leq$ je definována v definici 1.5.7 je uspořádání na množině Y a $(Y, \leq)$ je svaz v němž

$$\begin{aligned}\alpha \vee \beta &= (\max\{a_1, b_1\}, \max\{a_2, b_2\}, \dots) \\ \alpha \wedge \beta &= (\min\{a_1, b_1\}, \min\{a_2, b_2\}, \dots)\end{aligned}\tag{1.16}$$

1.6 Rozdělování do přihrádek

Věta 1.6.1 (Dirichletův princip). Při každém rozdělení n předmětů do k přihrádek, kde $k < n$, existuje alespoň jedna přihrádka obsahující alespoň dva předměty.

Budeme uvažovat vždy n předmětů a k přihrádek.

- Rozlišitelné předměty do rozlišitelných přihrádek.

- I prázdné přihrádky.

$$n^k$$

- Pouze neprázdné přihrádky.

$$k!S(n, k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$

- Nerozlišitelné předměty do rozlišitelných přihrádek.

- I prázdné přihrádky.

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

- Pouze neprázdné přihrádky.

$$\binom{n-1}{k-1}$$

- Rozlišitelné předměty do nerozlišitelných přihrádek.

- I prázdné přihrádky.

$$\sum_{i=1}^k S(n, i)$$

- Pouze neprázdné přihrádky.

$$S(n, k)$$

- nerozlišitelné předměty do nerozlišitelných přihrádek.

- I prázdné přihrádky.

$$\sum_{i=1}^k p(n, i) = p(n+k, k)$$

- Pouze neprázdné přihrádky.

$$p(n, k)$$

Věta 1.6.2 (Rozlišitelné předměty do rozlišitelných přihrádek). Buďte k, n libovolná přirozená čísla. Pak lze n nerozlišitelných předmětů rozmístit do k rozlišitelných přihrádek právě

$$k^n$$

způsoby.

Pakliže chceme, aby všechny přihrádky byly neprázdné, je pak počet těchto rozdělení roven číslu

$$k!S(n, k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \quad (1.17)$$

Důkaz 1.6.1. Budeme postupně rozmisťovat předměty do přihrádek. Pro první předmět máme k přihrádek, kam můžeme předmět vložit. Pro druhý máme také na výběr znovu z k přihrádek. Z pravidla součinu plyne, že dohromady máme k^n způsobů, jak rozmístit n rozlišitelných předmětů do rozlišitelných přihrádek.

Pakliže chceme, aby všechny přihrádky byly neprázdné stačí si uvědomit, že je to totéž, jako sestavit surjekci množiny předmětů na množinu přihrádek. A protože každá surjekce je pouze rozklad množiny předmětů na k tříd, což dává číslo $S(n, k)$ a každý rozklad nám dává $k!$ surjekcí, tak nám ihned z pravidla součinu plyne levá strana dokazované rovnice. Pravou stranu můžeme odvodit z principu inkluze a exkluze. Využijeme speciální případ principu inkluze a exkluze, tedy rovnici 1.8. Řekneme, že prvek f (hledáme počet surjekcí, takže prvky množiny jsou funkce) má vlastnosti α_i jestliže $y_i \notin f(X)$. Zřejmě platí, že $M(1) = (k-1)^n$, $M(2) = (k-2)^n, \dots, M(k) = (k-n)^n$, z toho již plyne

$$|\text{surj}(Y^X)| = k^n - \binom{k}{1} M(1) + \dots + (-1)^k M(k) = \sum_{i=1}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$

což je pravá strana dokazované rovnice.

Q. E. D

Věta 1.6.3 (Nerozlišitelné předměty do rozlišitelných přihrádek). Buďte k, n libovolná přirozená čísla. Pak lze n nerozlišitelných předmětů rozmístit do k rozlišitelných přihrádek právě

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

způsoby.

Pakliže požadujeme, aby všechny přihrádky byly neprázdné, tak těchto možností je celkem

$$\binom{n-1}{n-k}$$

Důkaz 1.6.2. Nyní si uvědomme, že nás zajímá pouze počet jednotlivých předmětů v přihrádkách, protože jednotlivé předměty nemůžeme rozlišit. Použijeme tedy trik s jedničkami a nulami. Jedničky budou určovat počet nerozlišitelných předmětů a nuly budou oddělovat předměty v jednotlivých přihrádkách. Zřejmě dostáváme $P_0(n, k-1)$ což nám dává

$$P_0(n, k-1) = \frac{n+k-1}{n! \cdot (k-1)!} = \binom{n+k-1}{k-1}$$

Pakliže požadujeme, aby každá přihrádka byla neprázdná, stačí nejdříve do každé přihrádky vložit jeden předmět. Potom dostáváme

$$P_0(n-k, k-1) = \frac{(n-1)!}{(n-1)! \cdot (n-k)!} = \binom{n-1}{n-k}$$

Q. E. D

Věta 1.6.4 (Rozlišitelné předměty do nerozlišitelných přihrádek). Počet rozmístění n rozlišitelných předmětů do k nerozlišitelných přihrádek je roven číslu

$$S(n, 1) + S(n, 2) + \dots + S(n, k) = \sum_{i=1}^k S(n, i)$$

Chceme-li zejména, aby všechny přihrádky byly neprázdné, je těchto možností právě $S(n, k)$.

Důkaz 1.6.3. Uvažme n rozlišitelných předmětů a k nerozlišitelných přihrádek. Rozdělit tyto předměty do přihrádek aby všechny přihrádky byly neprázdné značí utvořit rozklad na množině všech předmětů. Těchto rozkladů je právě $S(n, k)$. Pakliže povolíme, aby některá ze tříd byla i prázdná, tak všech takových to rozkladů bude součet všech rozkladů na rozkladů na i tříd pro $i = 1, \dots, k$, tedy

$$S(n, 1) + S(n, 2) + \dots + S(n, k) = \sum_{i=1}^k S(n, i)$$

Q. E. D

Věta 1.6.5 (Nerozlišitelné předměty do nerozlišitelných přihrádek (i prázdné)). Je-li dáno n nerozlišitelných předmětů, lze je do k nerozlišitelných přihrádek rozdělit

$$p(n, 1) + p(n, 2) + \dots + p(n, k) = \sum_{i=1}^k p(n, i) = p(n + k, k) \quad (1.18)$$

Chceme-li, aby všechny přihrádky byly neprázdné, je těchto možností právě $p(n, k)$.

Důkaz 1.6.4. Za předměty můžeme vzít cifry 1 a za přihrádky sčítance, jejichž pořadí nerozlišujeme, tedy chceme udělat rozklad čísla n na k sčítanců. Všechny rozklady čísla n na k sčítanců jsem označili $p(n, k)$. Toto číslo jsem schopni spočítat rekurentním vztahem

$$p(n, k) = \sum_{i=1}^k p(n - k, i)$$

To je tedy pro případ, že jsou všechny přihrádky neprázdné. Pakliže budeme uvažovat i prázdné přihrádky musíme zjistit kolik je rozkladů čísla n na nanejvýš k sčítanců, kterých je

$$q(n, k) = \sum_{n=1}^k p(n, i) = p(n + k, k)$$

1.7 Řešení rekurentních formulí

Definice 1.7.1 (Řád rekurentní formule). Řekneme, že rekurentní formule pro výpočet hodnot $f(n)$ je řádu $k \in \mathbb{N}$, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ lze $f(n+k)$ určit pomocí $f(n), f(n+1), \dots, f(n+k-1)$, přičemž k je nejmenší přirozené číslo s uvedenou vlastností.

Definice 1.7.2 (Řešení rekurentní formule). Buď dána rekurentní formule k -tého řádu pro výpočet čísel $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je řešením této rekurentní formule, jestliže pro každé $i \in \mathbb{N}$ dostaneme po dosazení čísel a_{i+j} za $f(n+j)$, $j = 0, \dots, k$ identitu.

Definice 1.7.3 (Lineární rekurentní formule). Rekurentní formule tvaru

$$f(n+k) = a_1 \cdot f(n+k-1) + a_2 \cdot f(n+k-2) + \cdots + a_k \cdot f(n), \quad (1.19)$$

kde $a_1, \dots, a_k$ jsou reálná čísla, $a_k \neq 0$, se nazývá *lineární rekurentní formule k -tého řádu s konstantními koeficienty*.

Definice 1.7.4 (Obecné řešení rekurentní formule). Je-li dána nějaká rekurentní formule, může a nemusí se stát, že existuje posloupnost $(g(n, c_1, c_2, \dots, c_k))_{n=1}^{\infty}$ obsahující parametry $c_1, c_2, \dots, c_k$ tak, že platí:

1. Dosadíme-li za parametry $c_1, c_2, \dots, c_k$ libovolná reálná čísla, je vzniklá posloupnost řešením dané rovnice.
2. Každé řešení dané rekurentní formule lze získat vhodnou volbou parametrů $c_1, c_2, \dots, c_k$ ve výše uvedené rekurentní posloupnosti.

Pokud posloupnost s výše uvedenými vlastnostmi existuje, nazývá se *obecné řešení* dané rekurentní formule.

Věta 1.7.1. Nechť je dána lineární rekurentní formule

$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + a_2 f(n+k-2) + \cdots + a_k f(n)$$

řádu k s konstantními koeficienty. Nechť

$$(f_1(n))_{n=1}^{\infty}, \dots, (f_k(n))_{n=1}^{\infty}$$

jsou lineárně nezávislá řešení dané formule. Pak je posloupnost $g(n)_{n=1}^{\infty}$ kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$g(n) = c_1 f_1(n) + \cdots + c_k f_k(n)$$

obecným řešením rekurentní formule.

Věta 1.7.2. Je-li reálné číslo r řešením rovnice

$$x^k = a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k \quad (1.20)$$

je každá posloupnost $(cr^n)_{n=1}^{\infty}$, $c \in \mathbb{R}$ libovolné, řešením lineární rekurentní formule

$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + a_2 f(n+k-2) + \cdots + a_k f(n)$$

Definice 1.7.5 (Charakteristická rovnice). Rovnice $x^k = a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k$ se nazývá *charakteristická rovnice* formule

$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + \cdots + a_k f(n) \quad (1.21)$$

Věta 1.7.3. Buď $f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + \cdots + a_k f(n)$, $a_k \neq 0$, lineární rekurentní formule k -tého řádu s konstantními koeficienty. Nechť charakteristická rovnice

$$x^k = a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k$$

má jednoduché navzájem různé kořeny $r_1, \dots, r_k$. Pak obecné řešení dané rekurentní formule je tvaru

$$(c_1 r_1^n + c_2 r_2^n + \cdots + c_k r_k^n)_{n=1}^{\infty} \quad (1.22)$$

Příklad 1.7.1. Nalezněte obecné řešení rekurentní formule $f(n+2) = 7f(n+1) - 10f(n)$.

Budeme uvažovat řešení ve tvaru $(x^n)_{n=1}^\infty$. Dosadíme jej do rekurentní formule a dostaneme charakteristickou rovnici a tu vyřešíme.

$$\begin{aligned}x^{n+2} &= 7x^{n+1} - 10x^n \\x^2 &= 7x - 10 \\x^2 - 7x + 10 &= 0 \\(x-2)(x-5) &= 0 \\x_1 &= 2 \quad x_2 = 5\end{aligned}$$

Takže obecné řešení je ve tvaru

$$(c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 5^n)_{n=1}^\infty \quad (1.23)$$

1.8 Vytvořující funkce

Definice 1.8.1 (Vytvořující funkce). Vytvořující funkcí posloupnosti $(a_n)_{n=0}^\infty$ nazýváme mocninou řadu $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ (na množině, kde tato řada konverguje).

1.9 Bloková schémata, latinské čtverce a konečné množiny

Definice 1.9.1 (Blokové schéma). Buďte v, b, k, r, λ přirozená čísla, A konečná množina, $|A| = v$. Systém podmnožin

$$X_1, X_2, \dots, X_b \quad (1.24)$$

množiny A se nazývá *blokové schéma typu* (v, b, k, r, λ) v množině A , jestliže $|X_1| = |X_2| = \dots = |X_b| = k$, každý prvek $a \in A$ je prvkem právě r množin X_i a pro každé dva různé prvky $a, b \in A$ je $\{a, b\}$ podmnožinou právě λ množin X_i . Množiny X_i se nazývají *bloky* daného blokového schématu.

Definice 1.9.2 (Steinerův systém trojic). Blokové schéma týmu $(v, b, 3, r, \lambda)$ se nazývá *systém trojic*. Pro $\lambda = 1$ se systém trojic nazývá *Steinerův*.

Poznámka 1.9.1. Steinerův systém trojic se dá popsat bez použití blokového schématu, což je velmi často vyžadováno u zkoušky. Dá se popsat takto: „*Steinerův systém trojic* je takový systém tříprvkových podmnožin konečné a neprázdné množiny A , kde každé dva prvky množiny A se nacházejí právě v jedné z podmnožin množiny A .“

Věta 1.9.1. Pakliže má Steinerův systém trojic existovat musí pro číslo $|A| = v$ platit

$$v = 6k + 1, \text{ respektive } v = 6k + 3, \text{ kde } k \in \mathbb{N} \quad (1.25)$$

Definice 1.9.3 (Latinské čtverce). Buď dána n -prvková množina A ($n \in \mathbb{N}$). *Latinským čtvercem řádu n* rozumíme čtvercovou tabulku o n řádcích a n sloupcích takovou, že v každém řádku a v každém sloupci je permutace všech prvků množiny A .

Definice 1.9.4 (Ortogonální latinské čtverce). Buďte dány dva latinské čtverce n -tého řádu utvořené z prvků množiny A . Označme a_{ij} , respektive b_{ij} , prvek ležící v průsečíku i -tého řádku a j -tého sloupce prvního, respektive druhého latinského čtverce. Protože $|A^2| = n^2$, lze všechny prvky množiny A^2 vepsat do schématu utvořeného z n řádků a n sloupců. Řekneme, že daná dva čtverce (a_{ij}) a (b_{ij}) jsou *ortogonální*, když ve čtverci $(a_{ij}), b_{ij}$ je každý prvek z A^2 právě jednou.

Definice 1.9.5 (Konečná afinní rovina). Buď $A \neq \emptyset$ konečná množina, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(A)$. Necht' platí

1. $\forall x, y \in A, x \neq y \exists! P \in \mathcal{R} : \{x, y\} \subseteq P$.
2. $\forall P \in \mathcal{R} \text{ a } \forall x \in A, x \notin P, \exists! Q \in \mathcal{R} : x \in Q \text{ a } P \cap Q = \emptyset$.
3. $\exists x, y, z \in A, x \neq y \neq z : \{x, y, z\} \not\subseteq P \in \mathcal{R} \forall P \in \mathcal{R}$

Pak se dvojice $(A, \mathcal{R})$ nazývá *konečná afinní rovina*. Prvky množiny A se nazývají *body* a prvky množiny $\mathcal{R}$ *přímky* této roviny.

Definice 1.9.6 (Rovnoběžky a směr). Dvě disjunktní přímky se nazveme *rovnoběžkami*. *Směrem* v afinní rovině nazveme systém všech rovnoběžek s danou přímkou. Skutečnost, že přímka P, Q jsou rovnoběžné, budeme značit symbolem $P \parallel Q$.

Věta 1.9.2. Všechny přímky v konečné afinní rovině mají stejný počet bodů.

Definice 1.9.7 (Řád konečné afinní roviny). *Řádem* konečné afinní roviny rozumíme počet bodů ležících na přímkách v této rovině.

Věta 1.9.3. Konečná afinní rovina řádu n má n^2 bodů a $n^2 + n$ přímek.

Věta 1.9.4. Konečná afinní rovina řádu $n \geq 3$ existuje právě tehdy, když existuje $n - 1$ latinských ortogonálních čtverců n -tého řádu, z nichž každé dva jsou ortogonální.

Poznámka 1.9.2. Jako důsledek předchozí věty dostáváme, že neexistuje konečná afinní rovina 6. řádu neboť neexistuje ortogonální latinský čtverec 6. řádu.

Kapitola 2

Problémy

1. Buďte A, B konečné množiny, kolik existuje:

(a) zobrazení A do B ?

Nechť $|A| = n$ a $|B| = k$. První prvek z množiny A mohu zjevně zobrazit na k prvků množiny B . Stejně tak i druhý prvek mohu zobrazit na k prvků množiny B . Tedy každý prvek mohu zobrazit na k prvků množiny B . Tedy pro počet všech zobrazení množiny A do B $p(A, B)$ z pravidla součinu platí:

$$p(A, B) = \underbrace{k \cdot k \cdot \dots \cdot k}_n = k^n$$

(b) injekcí¹ A do B ?

Nechť $|A| = n$ a $|B| = k$. Pro první vzor můžeme najít k obrazů. Pro druhý prvek $k - 1$ obrazů neboť na stejný prvek jako předtím již nesmíme druhý prvek zobrazit. Třetí prvek můžeme zobrazit na $k - 2$ prvků a tak dále. Z pravidla součinu pro počet všech injekcí $p_i(A, B)$ dostáváme:

$$p_i(A, B) = k \cdot (k - 1) \cdot (k - 2) \cdot \dots \cdot (k - n + 1) = (k)_n = V(k, n)$$

(c) surjekcí² A do B ?

Nechť $|A| = n$, $|B| = k$ a platí $n \leq k$. Množinu surjekcí A do B označme $\text{surj}(B^A)$. Nechť f je surjekce. Potom tato surjekce určuje rozklad množiny A na k tříd. Jednotlivé třídy jsou úplné vzory prvků množiny B . Každý takovýto rozklad nám určuje $k!$ surjekcí neboť pro první třídu mám k možností na jaký obraz ji zobrazit. Pro druhou třídu mám už jen $k - 1$ možností kam ji zobrazit a tak dále. Tady všech surjekcí je

$$|\text{surj}(B^A)| = k! \cdot S(n, k) \quad (2.1)$$

(d) bijekcí³ A do B ?

Nechť $|A| = n$ a $|B| = k$. Pakliže ovšem $n \neq k$, ovšem bijekce na konečné množině neexistuje. Tudíž musí platit $n = k$. Prvnímu vzoru můžeme přiřadit n obrazů. Druhému vzoru $n - 1$ obrazů. Když takto budeme pokračovat, tak pro poslední vzor nám zbude jeden obraz. Z pravidla součinu pro počet všech bijekcí $p_b(A, B)$ dostáváme:

$$p_b(A, B) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1 = n! = P(n)$$

2. Buďte A, B konečné množiny. Kolik existuje izotonních zobrazení A do B ?

Nejdříve si řekněme, co je to izotonní zobrazení.

Definice 2.0.1. Nech f je zobrazení uspořádané množiny A do uspořádané množiny B (tedy na obou je definována relace uspořádání, která ovšem může být definována různě, pro každou každou množinu), tedy $f : A \rightarrow B$. Toto zobrazení se nazývá izotonní jestliže platí:

$$x \leq y \implies f(x) \leq f(y) \quad \forall x, y \in A \quad (2.2)$$

¹Připomeňme, že injektivní zobrazení množiny A do množiny B je takové zobrazení, které každé dva vzory (prvky množiny A) zobrazí na dva různé obrazy (prvky množiny B). Nebo můžeme říci, že každý prvek množiny B má nejvýše jeden vzor.

²Připomeňme, že surjektivní množiny A do množiny B , je takové zobrazení, kde se na každý prvek množiny B zobrazí nějaký prvek množiny A . Nebo můžeme říci, že každý prvek množiny B má alespoň jeden vzor.

³Připomeňme, že bijektivní zobrazení je takové zobrazení, které každý vzor (prvek množiny A) zobrazí právě na jeden obraz (prvek množiny B). Nebo můžeme říci, že je to zobrazení, které je zároveň injektivní i surjektivní.

Z toho vyplývá, že izotonních zobrazení je tolik, kolik je všech neklesajících k -tic prvků z B . TO že k -tice mají pevně daná pořadí je to stejné, jako když pořadí k -tic nerozlišujeme. Můžeme to tedy chápat jako kombinace s opakováním ze kterých ihned plyne, že

$$C_0(|A|, |B|) = \binom{|A| + |B| - 1}{|A|}$$

nebo můžeme jednotlivé prvky množiny A chápat jako přihrádky a druhy množiny B chápat jako nerozlišitelné předměty, tedy například číslice 1. Pakliže utvoříme posloupnost $|B|$ jedniček a $|A| - 1$ nul, takovou, že nuly budou rozdělovat jedničky do jednotlivých přihrádek dostaneme, že počet všech izotonních zobrazení je

$$P_0(|A| - 1, |B|) = \frac{|A| + |B| - 1}{(|A| - 1)! \cdot |B|!} = \binom{|A| + |B| - 1}{|A|}$$

3. Kolik existuje relací ekvivalence na konečné množině?

Relací ekvivalence existuje tolik, kolik je rozkladů na dané množině. Počet rozkladů na množině nám udávají Bellova čísla pro která platí:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k, \quad B_0 = 1 \quad (2.3)$$

Odvození je v důkazu pro Bellova čísla 1.3.1.

4. Kolika způsoby lze přirozené číslo n rozdělit na k přirozených sčítanců?

Rozdělit číslo n na k přirozených sčítanců můžeme udělat dvě způsoby. Buď nám bude záležet na pořadí v jakém sčítance píšeme, potom uspořádané k -tici čísel $x_1, \dots, x_k$ budeme říkat *kompozice* a číslo udávající všechny kompozice čísla n na k sčítanců označujeme $K(n, k)$. Pakliže nám nebude záležet na pořadí sčítanců, budeme jim říkat rozklady a počet všech rozkladů čísla n na k sčítanců označme $p(n, k)$.

Nejdříve spočteme $K(n, k)$. Použijeme představu posloupnosti n jedniček a $k - 1$ nul, kdy rozdělení jedniček nulami nám dá právě k sčítanců. Zřejmě platí, že všechna $x_1, \dots, x_k$ musí být přirozená čísla a tudíž musí vedle každé nuly být alespoň jedna jednička (každý sčítanec musí být alespoň jedna). Je zřejmé, že se jedná o permutace s opakováním, tedy platí:

$$K(n, k) = P_0(n - k, k - 1) = \frac{n - 1}{(n - k)! \cdot (k - 1)!} = \binom{n - 1}{n - k} \quad (2.4)$$

Pakliže bychom chtěli zjistit všech kompozic čísla n na nejvýše k sčítanců, pouze povolíme některé sčítance nulové a tím dostáváme

$$P_0(n, k - 1) = \frac{(n + k - 1)!}{n! \cdot (k - 1)!} \quad (2.5)$$

Počet všech rozkladů bude těžší určit. Odvodíme pro něj rekurentní formuli. Skutečnost, že na pořadí sčítanců nezáleží vlastně znamená, to stejné, jako zapisovat tyto sčítance ve jistém pevně daném pořadí. Dohodněme se, že je budeme zapisovat ve tvaru $x_1 \geq x_2, \dots, \geq x_k$. Předpokládejme

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

Bude rozklad čísla n na k sčítanců. Potom můžeme napsat

$$n - k = (x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \dots + (x_k - 1)$$

Zřejmě jsem zkonstruovali bijektivní zobrazení množiny všech rozkladů čísla n na k sčítanců na množinu všech rozkladů čísla $n - k$ na nanejvýš k rozkladů. To tedy znamená, že počet prvků těchto množin se musí rovnat. Stačí nám tedy spočítat počet prvků množiny všech rozkladů čísla $n - k$ na nanejvýš k sčítanců, což je zřejmě součet pro $k = 1, \dots, k$, tedy dostáváme

$$p(n, k) = \sum_{i=1}^k p(n - k, i)$$

Pakliže položíme označíme číslo všech rozkladů čísla n na nanejvýš k sčítanců symbolem $q(n, k)$, tak zřejmě platí

$$q(n, k) = \sum_{i=1}^k p(n, i)$$

$$p(n + k, k) = \sum_{i=1}^k p(n, i)$$

$$q(n, k) = p(n + k, k)$$

5. Čtyři děti mají 50 jablek. Kolika způsoby si je mohou rozdělit? (+ Alespoň jedno jablko pro každého.)

Budeme postupovat trikem. Přihodíme k oněm 50 jablkům ještě tři hrušky (může to být cokoli). Tyto tři hrušky nám rozdělí jablka na tři části. Každou z těchto částí budeme chtít dát dítěti. Nyní nám jde pouze o to, kolik existuje pořadí (s opakováním) z těchto 50 jablek a tří hrušek. To jsou permutace s opakováním. Tedy:

$$P_0(50, 3) = \frac{53!}{3! \cdot 50!}$$

Pakliže dáme každému nejdříve jedno jablko, tak nam zbyde už jenom 46 jable a snimi porveme to stejné. Dostaneme tak:

$$P_0(46, 3) = \frac{49!}{46! \cdot 3!}$$

6. Je dáno n rozlišitelných eventuálně rozlišitelných předmětů. Kolika způsoby je lze rozmístit do k rozlišitelných eventuálně nerozlišitelných přihrádek? (Hint: Nejjednodušší jsou rozlišitelné do rozlišitelných přihrádek.)

- Rozlišitelné předměty do rozlišitelných přihrádek.

Budeme postupně rozmisťovat předměty do přihrádek. Pro první předmět máme k přihrádek, kam můžeme předmět vložit. Pro druhý máme také na výběr znovu z k přihrádek. Z pravidla součinu plyne, že dohromady máme k^n způsobů, jak rozmístit n rozlišitelných předmětů do rozlišitelných přihrádek.

- Nerozlišitelné předměty do rozlišitelných přihrádek.

Nyní si uvědomme, že nás zajímá pouze počet jednotlivých předmětů v přihrádkách, protože jednotlivé předměty nemůžeme rozlišit. Použijeme tedy trik s jedničkami a nulami.

- Rozlišitelné předměty do nerozlišitelných přihrádek

$$S(n, 1) + S(n, 2) + \dots + S(n, k) = \sum_{i=1}^k S(n, i) \quad (2.6)$$

- Nerozlišitelné předměty do nerozlišitelných přihrádek.

$$p(n, 1) + p(n, 2) + \dots + p(n, k) = \sum_{i=1}^k p(n, i) = p(n + k, k) \quad (2.7)$$

7. V následujícím hlášení je chyba! Kde a jaká?

	Rok	2. pol.	Export za rok	Export 2. pol
Podnik A	25 000	16 000	18 000	15 000
Podnik B	20 000	14 000	10 000	
Celkem	45 000	30 000	28 000	17 000

Tabulka 2.1: Hlášení o dvou závodech.

Chybu v tomto hlášení najdeme pomocí inkluze a exkluze. Využijeme speciální případ inkluze a exkluze 1.8. Označíme $|M|$ celkový počet výrobků. Označíme vlastnosti α_1 bude vlastnost: *vyrobena v závodě A*. Vlastnost α_2 bude *vyroben ve 2. pololetí* a α_3 bude vlastnost *byl exportován*. Pak platí:

- $|M| = 45\,000$
- $M(\alpha_1) = 25\,000$

- $M(\alpha_2) = 30\,000$
- $M(\alpha_3) = 28\,000$
- $M(\alpha_1, \alpha_2) = 16\,000$
- $M(\alpha_1, \alpha_3) = 18\,000$
- $M(\alpha_2, \alpha_3) = 17\,000$
- $M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 15\,000$

8. *Problém šatnářky:* Šatnářka vydává n osobám nahodile klobouky, jak se mění pravděpodobnost, že alespoň jedna osoba dostane svůj klobouk?

Nejdříve si zdefinujeme pravděpodobnost P .

Definice 2.0.2. Pravděpodobnost P , že nastane jeden z příznivých případů je dána jako:

$$P = \frac{a}{b} \quad (2.8)$$

kde a je počet příznivých případů a b je počet všech případů.

Počty případů jsou v tomto případě poměrně jednoduché, pakliže budeme uvažovat opačně. Jaká je pravděpodobnost, že nikdo nedostane svůj klobouk. Předdefinujme se lehce nyní tuto úloh. Uvědomme si, že je to stejné, jako když hledáme kolik existuje bijekcí množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ samu na sebe⁴, které nemají ani jeden pevný bod. Připomeňme si, co je to pevný bod v následující definici.

Definice 2.0.3. Necht' f je zobrazení množiny A samu na sebe, tedy $f : A \rightarrow A$. Řekneme, že x je pevný bod zobrazení f jestliže platí $f(x) = x$.

Tuto úlohu můžeme vyřešit pomocí speciálního případu principu inkluze a exkluze 1.4.2. Všech bijekcí je $n!$. Označme α_i vlastnost, že zobrazení f má i pevných bodů pro $i = 1, 2, \dots, n$. Potom zřejmě platí

$$M(1) = (n-1)!, \quad M(2) = (n-2)!, \dots, M(k) = (n-k)!$$

Naším úkolem je tedy zjistit $M(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$. Po dosazení do 1.8 dostáváme

$$M(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) = n! + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} M(k) = n! + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} (n-k)! = \quad (2.9)$$

$$= n! + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n!}{k!} = n! \left(1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1}{k!} \right) = n! \left(\sum_{n=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!} \right) \quad (2.10)$$

Připomeňme, že Taylorův rozvoj funkce e^x má tvar:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Po dosazení $x = -1$ dostáváme

$$e^{-1} = \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \pm \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$$

Nyní si všimněme, že pravá strana rovnice 2.9 po vydělení číslem $n!$ nám dává číslo e^{-1} pakliže n (tedy počet osob) půjde k nekonečnu. Nyní pravděpodobnost P_n^- toho, že nikdo z n osob nedostane svůj klobouk je

$$P_n^- = \frac{n! \left(\sum_{n=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!} \right)}{n!} = \left(\sum_{n=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!} \right) \quad (2.11)$$

⁴Což můžeme chápat jako permutace

Zřejmě nemůže nastat jiná situace než, že nikdo nestane svůj klobouk nebo alespoň jedna osoba dostane svůj klobouk. Tedy pravděpodobnost P_n^- , že nikdo nedostane svůj klobouk a pravděpodobnost P_n^+ , že alespoň jedna osoba dostane svůj klobouk nám dávají dohromady jistý jev, tedy jev, který se musí uskutečnit, tedy jeho pravděpodobnost musí být rovna 1. Dostáváme tedy

$$P_n^- + P_n^+ = 1 \quad (2.12)$$

Po dosazení rovnice 2.11 do rovnice 2.12 dostáváme

$$P_n^+ = 1 - \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!} \right) \implies P_\infty^+ = 1 - \frac{1}{e} \quad (2.13)$$

9. *Úloha o hostech:* Kolika způsoby lze kolem kulatého stolu rozsadit n manželských párů tak, aby se muži a ženy střídali a přitom žádní dva manželé neseděli vedle sebe?
10. *Eulerova úloha o 36 důstojnících* Rozmístit 36 důstojníků 6 různých hodností a 6 pluků tak, aby se v žádné řadě ani zástupu (sloupci) neopakovala žádná hodnost ani pluk.

Tato úloha nemá řešení. Sám Euler měl hypotézu, že tato úloha opravdu nemá řešení, ale neuměl ji dokázat. Dále vyslovit hypotézu, že *neexistují dva ortogonální latinské čtverce řádu $n = 4k + 2$ pro $k = 0, 1, 2, \dots$* . Pravdivost této hypotézy se velmi jednoduše ukáže pro $k = 1$ nebo existují pouze dva latinské čtverce 2. řádu, které zjevně nejsou ortogonální. To, že neexistují latinské ortogonální čtverce 6. řádu dokázal francouzský matematik G. Tarry, který to dokázal výčtem možností. Eulerova hypotéza byla vyvrácena v roce 1959 kdy R. C. Bose a S. Shrikhande sestrojili dva ortogonální latinské čtverce 22. řádu a později dokázali následující větu.

Věta 2.0.1. Pro každé přirozené $n > 2$ kromě $n = 6$ existují ortogonální latinské čtverce n -tého řádu.

11. *Problém čtyř barev:* Jaký je nejmenší počet barev nutný k tomu, abychom každou politickou mapu mohli vybarvit tak, aby se žádné dva sousední státy neměli stejnou barvu? Přitom upřesněme dvě skutečnosti
 - předpokládáme, že území každého státu je „souvislé“. (Což v praxi není vždy splněno - viz. například USA a Aljaška.)
 - Dva státy považujeme za sousední, když mají společnou hraniční „čáru“.

V roce 1890 dokázal P. J. Heawood, že pro nám bude vždy stačit pět barev. Definitivně problém vyřešili až v roce 1976 K. Appel a W. Haken z univerzity v Illinois (USA). Důkaz převedli na prověření vlastností dvou tisíc speciálních grafů, které prověřil počítač. Ten na to potřeboval 1200 hodin strojového času.

12. *Nalezení minimální kostry:* Naleznete minimální kostru v souvislém ohodnoceném grafu.
Kostra grafu je taková část grafu, s minimálním počtem hran takových aby byl graf ještě souvislý. Algoritmus pro nalezení minimální kostry grafu našel Otakar Borůvka - prof. na MUNI, tehdy ještě univerzitě Jana Evangelisty Purkyně.
13. *Problém obchodního cestujícího:* Zná náklady z jednoho místa do druhého, Tak aby navštívil místa a vrátil se domů s minimálními náklady.
Problém teorie grafů.
14. Problém nejkratší cesty.
Problém teorie grafů.
15. Dokažte, že neexistuje žádný jiný pravidelný konvexní mnohostěn, než oněch známých 5 platónských těles.
Pravidelná konvexní mnohostěn je takový mnohostěn, který má tu vlastnost, že z každého jeho vrcholu vychází stejný počet hran a všechny stěny tvoří shodné pravidelné mnohoúhelníky. Nebo můžeme použít ekvivalentní definici a to tu, že v každém vrcholu se stýká stejný počet stěn.
Pět platónských těles je těchto: čtyřstěn, krychle, osmistěn, dvanáctistěn, dvacetistěn.
Důkaz se provede pomocí teorie grafů.

Kapitola 3

Příklady z písemek

Zkouškové 2020

1. Z poličky je vybráno 10 knih. Utvořte variace bez a s opakováním.

Variace bez opakování: Deset knih seřadím do řady podle tloušťky. Od nejtlustší po nejtenčí.

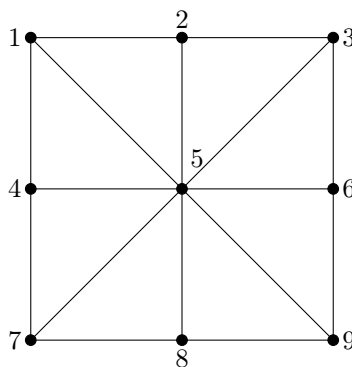
Variace s opakováním:

2. Udejte konkrétní příklad afinní rovin 3. řádu.

Protože je tato rovina 3. řádu, tak musí obsahovat 9 bodů a 12 přímek. Necht' $A = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ tuto množinu si nakresleme jako tečky na obrázku 3.1. Každé tři spojené body budou na obrázku 3.1 představují přímky. To je dohromady 8 přímek. Další čtyři přímky budou představovat „menší diagonály“ s třetím rohovým bodem, tedy $\{2, 6, 7\}$, $\{4, 5, 3\}$, $\{2, 4, 9\}$, $\{6, 5, 1\}$. Dohromady tedy dostáváme afinní rovinu 3. řádu jako dvojici $A, \mathcal{R}$, kde

$$A = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

$$\mathcal{R} = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\}, \{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6, 9\}, \{2, 6, 7\}, \{4, 5, 3\}, \{2, 4, 9\}, \{6, 5, 1\}\}$$



Obrázek 3.1: Nákres k afinní rovině 3. řádu.

3. Napište vytvořující funkci pátého řádku Pascalova trojúhelníku. Pátý řádek Pascalova trojúhelníku je 1, 4, 6, 4, 1. Ostatní členy posloupnosti doplníme nulami. Dostáváme

$$1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4 + 0 + 0 + \dots$$

4. Odvoďte počet izotonních zobrazení 5 prvkové množiny na 3 prvkovou.
5. Odvoďte vzorec pro výpočet všech kombinací s opakováním.
6. Odvoďte vzorec pro počet rozkladů čísla n na k sčítanců.
7. Definujte pojem svaz a vysvětlete pojem Youngův svaz.
8. Má každá rekurentní formule obecné řešení?

Nemá, neboť rekurentní formule nemusí mít žádné řešení.

9. **Dokažte, že existuje latinský čtverec libovolného řádu.**
10. **Vysvětlete co nejjednodušeji, co je to Steinerův systém trojic?**
 Nebo můžeme říci, že Steinerův systém trojic je takový systém tříprvkových podmnožin dané konečné množiny, že každé dva prvky se současně vyskytují právě v jedné z podmnožin.
 Pozor nechce definici přes blokové schéma. Tedy, že Steinerův systém trojic je blokové schéma typu $(v, b, 3, r, 1)$.

Zkouškové 2019

1. **Kombinace bez opakování/ s opakováním. Vysvětlit na příkladu.**

Nechť M je lib. neprázdná množina a platí $|M| = n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Pak kombinace k -té třídy z n prvků množiny M rozumíme každou podmnožinu množiny $\mathcal{P}(A)$. Pakliže máme dostatečný počet prvků n druhů, potom skupinu k objektů v níž nezáleží na pořadí v níž navzájem nerozlišujeme předměty stejného druhu nazýváme kombinace s opakováním k -té třídy z n druhů.

Příklad: Mějme například 30 dětí ve třídě. Množina deseti dětí, které půjdou na matematickou olympiádu je kombinace bez opakování, neboť je mohu zřejmě všechny rozlišit a bude rozdíl, kdo na olympiádu půjde. Ovšem pakliže se domluvíme, že mezi sebou nebudeme rozlišovat hochy a děvčata, tak skupina 10 dětí v níž je 6 dívek a 4 hoši je kombinace s opakováním.

2. **Co je to samoadjungovaný diagram?**

Samoadjungovaný Ferrerův diagram je takový diagram, který, zjednodušeně řečeno, čteme po sloupcích i po řádcích stejně.

3. **Odvoďte vzorec pro rozklady čísla n na k sčítanců.**

Rozklad je neuspořádaná k -tice čísel, tedy je zřejmé, že dohodnout se na pevném zápisu těchto čísel je to stejné jako nerozlišovat pořadí sčítanců, tak se dohodneme, že budeme zapisovat sčítance v tomto tvaru $x_1 \geq \dots \geq x_k$. Označme počet všech rozkladů čísla n na k sčítanců symbolem $p(n, k)$. Zřejmě platí

$$\begin{aligned} n &= x_1 + \dots + x_k \\ n - k &= (x_1 - 1) + \dots + (x_k - 1) \end{aligned}$$

Zřejmě jsme takto zkonstruovali bijekci mezi množinou všech rozkladů čísla n na k sčítanců a mezi rozkladem čísla $n - k$ na nanejvýš k sčítanců. Z toho plyne, že počet prvků v těchto množinách musí být stejný. Stačí tedy jen spočítat počet rozkladů čísla $n - k$ na nanejvýš k sčítanců. Což je ovšem

$$\sum_{i=1}^k p(n - k, i)$$

4. **Napište vytvořující funkci posloupnosti sudých čísel.**

$$2 + 4x + 6x^2 + 8x^3 + \dots$$

5. **Ve třídě bylo vybráno 6 hochů, napište tři různé možnosti kombinací s opakováním.**

Nebudeme rozlišovat hochy se stejnou barvou vlasů. Potom můžeme mít kombinaci s opakováním tvořenou 2 hochy s hnědými vlasy a 3 hochy s blond vlasy. Nebudeme rozlišovat hochy narozené ve stejný rok. Kombinace s opakováním je hoch narozen v roce 2000 a 4 hoši narození v roce 2001. Nebudeme rozlišovat hochy se stejnými známkami z matematiky. Kombinaci s opakováním pak tvoří tři hoši se známkou 1 a tři hoši se známkou 2.

6. **Uveďte konkrétní příklad konečné afinní roviny 2. řádu.**

Konečná afinní rovina 2. řádu bude dvojice $(A, \mathcal{R})$ taková, že:

$$A = 1, 2, 3, 4, \mathcal{R} = \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}.$$

7. **Napište vytvořující funkcí posloupnosti $1, -2, 3, -4, \dots$**

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 \dots$$

8. **Odvoďte formuli pro rozklad na desetiprvkové množině.**
9. **Formulujte problém šatnářky a naznačte jeho řešení.**
10. **Kolik lze vytvořit náhrdelníků ze všech 10 korálek červené barvy a 10 korálek modré barvy?**

Rozvineme náhrdelník do přímky. Vytvoříme permutace s opakováním, kterých je $P_0(10, 10)$ a tyto permutace vydělíme číslem 19, neboť existuje 19 různých otočení náhrdelníku. Tedy dostáváme

$$\frac{P_0(10, 10)}{19} = \frac{20!}{10! \cdot 10!} \cdot \frac{1}{19} = 9724$$

11. **Je součet dvou řešení rekurentní formule jejím řešením?** Ne. Toto platí pouze pro lineární rekurentní formule.
12. **Kolik přímek prochází jednotlivými body v konečné afinní rovině?**
13. **Odvoďte počet kompozic n na k sčítanců.**

Kompozici čísla n na k sčítanců jsem definovali jako uspořádanou k -tici přirozených čísel $(x_1, \dots, x_k)$ pro kterou platí

$$n = x_1 + \dots + x_k$$

přičemž jsem označili $K(n, k)$ počet všech kompozic čísla n na k sčítanců. Představme si tuto úlohu jako posloupnost jedniček jichž je n mezi nimi bude $k - 1$ nul, které budou mezi těmito jedničkami tvořit oněch k přihrádek. Protože každé z čísel musí být přirozené, musí být v každé přihrádce alespoň jedna jednička. Tedy rozdělujeme $n - k$ jedniček do $k - 1$ přihrádek, což nám dává

$$K(n, k) = P_0(n - k, n - 1) = \frac{(n - 1)!}{(n - k)!(n - 1)!} = \binom{n - 1}{n - k}$$

14. **Definujte svaz a Youngův svaz**

Svaz je množina X s relací uspořádání $\leq$, pro kterou platí, že každá její dvouprvková podmnožina obsahuje její supremum i infimum.

15. **Definujte řetězec, izotonní zobrazení a počet izotonních zobrazení.**

Nech A j libovolná neprázdná množina a $\leq$ je relace úplného uspořádání na této množině, tedy platí, že tato relace je

- reflexivní: $\forall a \in X$ platí $x \leq x$,
- antisymetrická: $\forall a, b \in X$ platí $a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b$,
- tranzitivní: $\forall a, b, c \in X$ platí $a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$,
- úplná: $\forall a, b \in X \implies a \leq b \vee b \leq a$.

pak se dvojice $(X, \leq)$ nazývá řetězec.

Izotonní zobrazení A do B kde A, B jsou uspořádané množiny je takové zobrazení, pro které platí

$$x \leq y \implies f(x) \leq f(y) \quad \forall x, y \in A$$

Z toho vyplývá, že izotonních zobrazení je tolik, kolik je všech neklesajících k -tic prvků z B . TO že k -tice mají pevně daná pořadí je to stejné, jako když pořadí k -tic nerozlišujeme. Můžeme to tedy chápat jako kombinace s opakováním ze kterých ihned plyne, že

$$C_0(|A|, |B|) = \binom{|A| + |B| - 1}{|A|}$$

nebo můžeme jednotlivé prvky množiny A chápat jako přihrádky a druhy množiny B chápat jako nerozlišitelné předměty, tedy například číslice 1. Pakliže utvoříme posloupnost $|B|$ jedniček a $|A| - 1$ nul, takovou, že nuly budou rozdělovat jedničky do jednotlivých přihrádek dostaneme, že počet všech izotonních zobrazení je

$$P_0(|A| - 1, |B|) = \frac{|A| + |B| - 1}{(|A| - 1)! \cdot |B|!} = \binom{|A| + |B| - 1}{|A|}$$

16. Je více kompozic nebo rozkladů čísla n na k sčítanců?

Více je kompozic neboť máme-li libovolný rozklad čísla n na k sčítanců dostaneme pouhým přehozením dvou různých sčítanců další kompozici, ale stejný rozklad.

17. Napište vytvořující funkci posloupnosti prvočísel.

Definice 3.0.1. Vytvořující funkcí posloupnosti $(a_n)_{n=0}^\infty$ nazýváme každou mocninou řadu $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ (na množině, kde tato řada konverguje).

Z definice ihned vyplývá, že vytvořující funkce by měla mít tento tvar¹:

$$2 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \dots$$

18. Vysvětlete pojem obecné řešení rekurentní formule.

Existuje-li posloupnost $(g(n, c_1, \dots, c_k))_{n=1}^\infty$ taková, že

- osadíme-li za $c_1, \dots, c_k$ jakákoli čísla z $\mathbb{R}$, dostaneme řešení rekurentní formule,
- máme libovolné řešení rekurentní formule, tak ho dostaneme volbou $c_1, \dots, c_k$,

tak se posloupnost $(g(n, c_1, \dots, c_k))_{n=1}^\infty$ nazývá *obecné řešení rekurentní formule*.

19. Odvoďte počet rozkladů konečné množiny. (Bellova čísla)

20. Uveďte motivační příklady pojmů variace bez i s opakováním

Variace bez opakování: Seřadím pět jogurtů do řady. Variace s opakováním: Dohodneme se, že jogurty stejné příchutě (stejného výrobce atp.) nebudeme rozlišovat a jogurty seřadíme do řady.

21. Zdůvodněte existenci latinského čtverce libovolného řádu.

Vždy mohu zkonstruovat latinský čtverec n -tého řádu následovně. Necht' množina, ze které vytvoříme latinský čtverec lib. řádu bude $A = 1, 2, \dots, n$. Do prvního řádku napíši tuto permutaci množiny A : $(1, 2, \dots, n)$. Do druhého řádku napíši tuto permutaci $(2, 3, \dots, n, 1)$. A tak dále. Je zřejmé, že v každém řádku i v každém sloupci je permutace prvků množiny A .

Necht' A je konečná množina a platí $|A| = n$. Latinský ortogonální čtverec je tabulka o n řádcích a n sloupcích takových, že v každém řádku a v každém sloupci je permutace množiny A .

22. Co je to řád konečné roviny? Existuje konečná afinní rovina libovolného řádu?

Řád konečné afinní roviny je počet bodů, které leží na každé přímce v konečné afinní rovině.

Neexistuje konečná afinní rovina 6. řádu neboť platí, že Konečná afinní rovina řádu $n \geq 3$ existuje právě tehdy, když existuje $n-1$ latinských ortogonálních čtverců n -tého řádu, z nichž každé dva jsou ortogonální. Z toho plyne, že nemůže existovat konečná afinní rovina 6. řádu, neboť neexistují dva ortogonální latinské čtverce 6. řádu.

Další řešené úlohy z minulých let

1. Dokažte, že pro Stirlingova čísla druhého druhu platí $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$.

Hledáme počet rozkladů n prvkové množiny na 2 třídy. U každého prvku máme dvě možnosti, jestli jej umístíme do jedné nebo druhé třídy, což je 2^n možností, ale musíme ještě odečíst 2 možnosti, pro případy, že jedna z těchto tříd bude prázdná. Nyní si musíme uvědomit, že pouhé „přehození“ tříd nám dá stejný rozklad. Tedy každý rozklad máme započítán dvakrát. Stačí tedy vydělit počet možností dvěma. Dostaneme:

$$S(n, 2) = \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1$$

Q. E. D.

2. Dokažte, že pro Stirlingova čísla druhého druhu platí $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$.

Takový rozklad je tvořen $n-2$ třídami o jednom prvku a jednou jednoprvkovou třídou. Pakliže určíme onu dvouprvkovou třídu, tak jsou zbylé třídy již určeny. Vybíráme tedy 2 prvky z n prvků což lze udělat $\binom{n}{2}$ způsoby.

Q. E. D.

¹Exaktně bychom měli ještě najít, kde tato řada konverguje, ale nejspíš proto, že to přesahuje rámec znalostí z matematické analýzy, tak najít poloměr konvergence této řady nebyl u zkoušky vyžadován.