Naposledy upraveno: 27. února 2020.

Úkol 8. týden

Příklad 8.1. Uvažujte dlouhý vodič válcového tvaru o poloměru R protékaný proudem o velikosti proudové hustoty $j = kr$, kde r je radiální vzdálenost od osy vodiče. Určete velikost vektoru magnetické indukce uvnitř i mimo vodič.

$$\oint \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{r} = \mu_0 I$$
$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$
$$B = \underline{\frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

$$I_{\mathrm{out}} = \int \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{s} \quad \wedge \quad \mathrm{d}s = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$
$$I_{\mathrm{out}} = \int_0^{2\pi}\int_0^R kr^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi k\int_0^R r^2\,\mathrm{d}r = 2\pi k \cdot \frac{R^3}{3}$$

$$I_{\mathrm{IN}} = \int_0^{2\pi}\int_0^{r'} kr'\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = 2k\pi\int_0^{r'} r^2\,\mathrm{d}r = \underline{2k\pi\frac{r'^3}{3}}$$

$$B_{\mathrm{out}} = \frac{\mu_0 2\pi k R^3}{6\pi r} = \underline{\frac{\mu_0 k R^3}{3r}}$$
$$B_{\mathrm{IN}} = \frac{\mu_0 2\pi k r'^{3/2}}{6\pi r'} = \underline{\frac{\mu_0 k r'^2}{3}}$$

Příklad 8.2. Uvažujte nabitou dlouhou tyč válcového tvaru o poloměru R s konstantní hustotou náboje ϱ_0. Tyč je roztočena kolem osy symetrie úhlovou rychlostí ω. Určete velikost vektoru magnetické indukce uvnitř tyče v závislosti na radiální vzdálenosti od osy tyče.

$$B_{\mathrm{out}} = \mathrm{const.} = 0$$
$$\oint \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{r} = \mu_0 I$$
$$Bx == \frac{\mu_0 I}{x}$$
$$B_{\mathrm{IN}} = \underline{\frac{\mu_0\varrho_0\omega(R^2 - r^2)}{2}}$$

$$I = \int \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{s} \qquad \mathrm{d}s = x\,\mathrm{d}r$$
$$\vec{j} = \varrho_0 \cdot \vec{v} = \varrho_0\omega r$$
$$I = \int_r^R \varrho_0\omega r x\,\mathrm{d}r = \varrho_0\omega x\left[\frac{r^2}{2}\right]_r^R = \underline{\frac{\varrho_0\omega x(R^2 - r^2)}{2}}$$

Příklad 8.3. Uvažujte nabitou dlouhou tyč válcového tvaru o poloměru R s konstantní hustoto náboje $\varrho = k(R-r)$, kde r je radiální vzdálenost od osy tyče. Tyč je roztočena kolem osy symetrie úhlovou rychlostí *omega*. Určete velikost vektoru magnetické indukce uvnitř tyče v závislosti na radiální vzdálenosti od osy tyče.

$$\oint \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{r} = \mu_0 I$$
$$Bx = \mu_0 I$$
$$B = \frac{\mu_0 I}{x}$$

$$\vec{j} = \varrho\vec{v} = k(R-r)\omega r;\ \ \mathrm{d}s = x\,\mathrm{d}r$$
$$I = \int_{r'}^{R} k(R-r)\omega r x\,\mathrm{d}r = k\omega x \int_{r'}^{R}\int_{r'}^{R} Rr - r^2\,\mathrm{d}r =$$
$$= k\omega x\left[\frac{Rr^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right]_{r'}^{R} = k\omega x\left(\frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{3} - \left(\frac{Rr'}{2} - \frac{r'^3}{3}\right)\right) = \underline{k\omega x\frac{R^3}{6} - r'^2\left(\frac{R}{2} - \frac{r'}{3}\right)}$$

$$B_{\mathrm{out}} = 0$$
$$B_{\mathrm{IN}} = \underline{\mu_0\omega\left[\frac{R^3}{6} - r'^2\left(\frac{R}{2} - \frac{r'}{3}\right)\right]}$$

Příklad 8.4. Uvažujte nekonečně dlouhý vodivý válec o poloměru R_1. Do tohoto válce je vyvrtána dutina o poloměru R_2 (viz obrázek 1), Osy obou válců jsou rovnoběžné, ale nikoli totožné. Jejich vzdálenost je a, kde $a + R_2 < R_1$. Vypočtěte velikost vektoru magnetické indukce uvnitř dutiny na spojnici obou os ve chvíli, kdy válcem protéká proud konstantní hustotou proudu j. Radiální vzdálenost od středu vodivého válce (uvažujte na spojnici os) je r.

Nejdříve předpokládejme, že dutina ve válci není, ale na jejím místě pomocnou křivku o poměru r. Dostaneme

$$\oint B_1\,\mathrm{d}r = \mu_0 0 I_1$$
$$I_1 = \int \vec{j}\,\mathrm{d}s = j\pi r^2$$
$$B_1 2\pi r = \mu_0 j\pi r^2$$
$$B_1 = \frac{\mu_0 j r}{2}$$

Uvažujme „antiválec“ se zápornou hustotou proudu ($\vec{j_2} = \vec{j_1}$).

Pro $a > r \implies r_{\mathrm{anti}} := a - r$

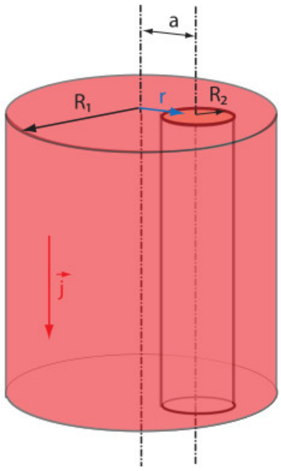
$$\oint \vec{B}_2\,\mathrm{d}\vec{r} = \mu_0 I_2$$
$$I_2 = \int \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{s} = -j\pi(a-r)^2$$
$$B\cdot 2\pi(a-r) = \mu_0(-j)\pi(a-r)$$
$$B_2 = \frac{-\mu_0 j(a-r)}{2}$$

$$B_{a>r} = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 jr}{2} - \frac{mu_0 j(a-r)}{2}$$
$$B_{a>r} = \frac{mu_0 j}{2}(r-a+r) = \underline{\frac{\mu_0 j}{2}(2r-a)}$$

Pro $a > r \implies r_{\mathrm{anti}} := a - r$

$$\oint \vec{B}_3\,\mathrm{d}\vec{r} = \mu_0 I_3$$
$$I_3 = \int -\vec{j}\,\mathrm{d}\vec{s} = -j\pi(r-a)^2$$
$$B_3\cdot 2\pi(r-a) = -j\pi(r-a)^2\mu_0$$
$$B_3 = \frac{-\mu_0 j(r-a)}{2}$$

$$B_{r>a} = B_1 + B_3 = \frac{\mu_0 jr}{2} - \frac{\mu_0 j(r-a)}{2} =$$
$$= \frac{\mu_0 j}{2}(r-r+a) = \underline{\frac{\mu_0 ja}{2}}$$



Obrázek 1: Vodič s válcovou dutinou.

Příklad 8.5. Uvažujte v rovině xy nekonečně velkou vodivou tenkou desku, kterou protéká proud ve směru osy x. Délková hustota proudu je i (Proud je $I = iL$, kde L je délka v rovině xy ve směru y.) Určete vektor magnetické indukce v závislosti na vzdálenosti od roviny.

Vyjděme z rovnice

$$\oint B \, \mathrm{d}r = \mu_0 I$$

Protože je I konstantní, je také B konstantní a podle pravidla pravé ruky víme, že směr $\vec{B}$ je proti ose y nad vodivou deskou a po směru osy y pod deskou. A z je kolmé k vektoru B.

$$B2l = \mu_0 I$$
$$B = \frac{\mu_0 I}{2L}$$

$$I = iL$$

$$B = \frac{\mu_0 iL}{2L} = \frac{\mu_0 i}{2}$$

Nad deskou dostáváme:

$$B = -\frac{\mu_0 i}{2}$$

Pod deskou dostáváme:

$$B = \frac{\mu_0 i}{1}$$