Naposledy upraveno: 22. února 2020.

Úkol 12. týden

Příklad 12.1. Upravte a vypočtěte velikost komplexních čísel $\widetilde{a} = \frac{1}{i} + \frac{1}{i-1} + \frac{1}{i+1}$, $\widetilde{b} = \frac{1}{i} + \frac{1}{i-1} - \frac{1}{i+1}$. Nejdříve upravíme komplexní čísla.

$$\widetilde{a} = \frac{1}{i} + \frac{1}{i-1} + \frac{1}{i+1} = \frac{-2-(i+1)i+(i-1)i}{i(i^2-1)} = \frac{-3+i-1-i}{-2i} = \frac{2}{i} \cdot \frac{i}{i} = \underline{-2i}$$

$$\widetilde{b} = \frac{1}{i} + \frac{1}{i-1} - \frac{1}{i+1} = \frac{(i^2-1)+i^2+i-i^2+i}{i(i-1)(i+1)} = \frac{-2+2i}{-2i} = \underline{-1-i}$$

Velikost můžeme vypočítat z Pythagorovy věty, ovšem v prvním případě je to zbytečné a rovnou můžeme psát výsledek.

$$|\widetilde{a}| = 2$$
$$|\widetilde{b}| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \underline{\sqrt{2}}$$

Příklad 12.2. Najděte komplexní číslo $\widetilde{a} = 2i$ ve tvaru $Ae^{i\varphi}$.

Pakliže si uvědomíme, že komplexní číslo $2i$ leží v Gaussově rovině na imaginarní ose dvě jednotky od počátku, je jasné, že jeho velikost je právě 2 a úhel je roven $\pi/2$. Můžeme okamžitě psát výsledek.

$$\widetilde{a} = \underline{2e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

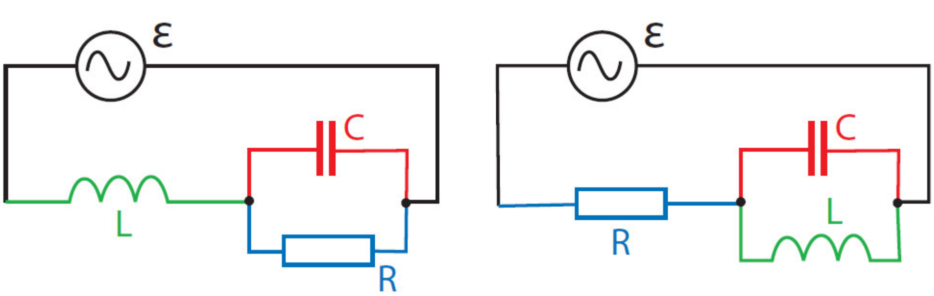
Příklad 12.3. Uvažujte střídavý obvod z prvního obrázku 1, kde R je odpor rezistoru, L indukčnost cívky, C kapacita kondenzátoru a ω frekvence zdroje. Vypočtěte reálnou a imaginární část impedance tohoto zapojení.

Nejdříve vypočtěme impedanci paralelního zapojení kondenzátoru a rezistoru.

$$\frac{1}{\widetilde{Z}_p} = \frac{1}{\widetilde{Z}_R} + \frac{1}{\widetilde{Z}_C} = i\omega C + \frac{1}{R} = \frac{i\omega CR+1}{R} \implies \widetilde{Z}_p = \frac{R}{i\omega CR+1}$$

$$Z_{all} = i\omega L + \frac{R}{i\omega R+1} = i\omega L + \frac{R}{i\omega CR+1} \cdot \frac{i\omega CR-1}{i\omega CR-1} = i\omega L + \frac{i\omega CR^2-R}{-1-\omega^2C^2R^2} = i\omega L + \frac{R-i\omega CR^2}{1+\omega^2C^2R^2}$$

$$\Re(\widetilde{Z}_{all}) = \underline{\frac{R}{1+\omega^2C^2R^2}}$$
$$\Im(\widetilde{Z}_{all}) = \underline{\omega L - \frac{\omega CR^2}{1+\omega^2C^2R^2}}$$



Obrázek 1: Střídavé obvody

Příklad 12.4. Uvažujte obvod z druhého obrázku 1, kde R je odpor rezistoru, L indukčnost cívky, C kapacita kondenzátoru a ω frekvence střídavého zdroje. Vypočtěte reálnou a imaginární část impedance tohoto zapojení.

$$\frac{1}{\widetilde{Z}_p} = \frac{1}{\widetilde{Z}_C} + \frac{1}{\widetilde{Z}_L} = i\omega C + \frac{1}{i\omega L} = \frac{1-\omega^2 CL}{i\omega L} \implies \widetilde{Z}_p = \frac{i\omega L}{1-\omega^2 CL}$$

$$\widetilde{Z}_{all} = \widetilde{Z}_R + \widetilde{Z}_p = R + \frac{i\omega L}{1-\omega^2 CL}$$

$$\Re(\widetilde{Z}_{all}) = \underline{R}$$
$$\Im(\widetilde{Z}_{all}) = \underline{-\frac{L\omega}{\omega^2 LC - 1}}$$

Příklad 12.5. Uvažujte zapojenou cívku o indukčnosti L a rezistor o odporu R. K této soustavě je v uzavřeném obvodu do série zapojený ampérmetr o zanedbatelném odporu a zdroj střídavého napětí $\mathcal{E}$. Z ampérmetru je zřejmé, že ve chvíli kdy je proud maximální, napětí na zdroji nabývá hodnoty jedné poloviny maximální hodnoty. Určete frekvenci zdroje napětí.

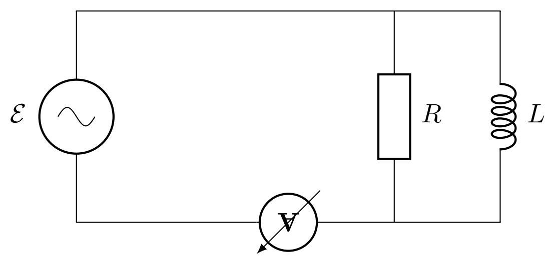
Vypočtěme impedanci zapojení.

$$\frac{1}{\widetilde{Z}} = \frac{1}{\widetilde{Z}_R} + \frac{1}{\widetilde{Z}_L} = \frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L} = \frac{i\omega L + R}{i\omega LR} \implies \widetilde{Z} = \frac{i\omega LR}{i\omega L + R} \cdot \frac{R - i\omega L}{R - i\omega L} = \frac{i\omega LR^2 + \omega^2 L^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$\widetilde{Z} = \frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2} + \frac{i\omega LR^2}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Protože platí

$$\widetilde{U} = \widetilde{Z}\widetilde{I} \wedge \mathrm{tg}(\alpha) = \frac{Z_I}{Z_R} = \frac{wLR^2}{w^2 RL^2} = \frac{R}{wL} \;\wedge\; \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \;\wedge\; \mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \implies \underline{\omega = \frac{R}{\sqrt{3}L}}$$



Obrázek 2: Obvod pro poslední úkol.