Naposledy upraveno: 22. února 2020.

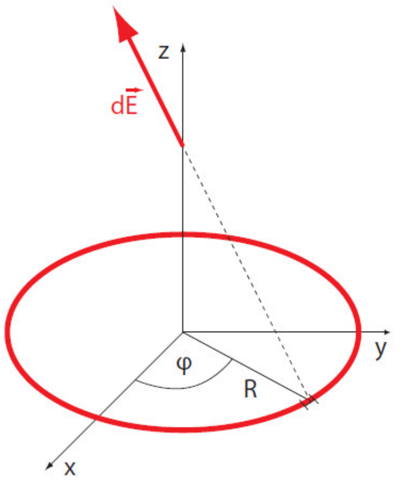
Úkol 2. týden

Příklad 2.1. Vypočtěte, jaký je poměr mezi elektrostatickou a gravitační silou působící v atomu vodíku mezi protonem a elektronem.[1]

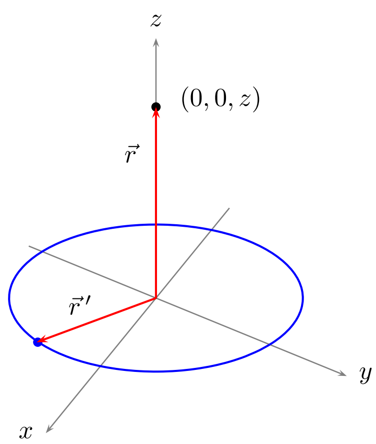
$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|Q_e|\cdot|Q_p|}{r^2}}{G \cdot \frac{m_e \cdot m_p}{r^2}} \doteq \frac{\frac{1}{4\cdot 3.1415\cdot 8,845\cdot 10^{-12}} \cdot (1,602176634)^2}{6,674 \cdot 10^{-11}\frac{9,1\cdot 10^{-31}}{1,7\cdot 10^{-27}}} \doteq \underline{2,23 \cdot 10^{39}}$$

Což znamená, že elektrostatické pole v atomu vodíku je přibližně $2,23 \cdot 10^{39}$ silnější než pole gravitační. Tedy svět atomů a molekul je plně ovládnut elektromagnetickou interakcí, a pakliže budeme zkoumat jevy na úrovni atomů a molekul nemá velkého smyslu brát v úvahu gravitační působení.

Příklad 2.2. Vypočtěte elektrickou intenzitu na ose nabitého prstence o náboji Q a délkové hustotě náboje τ a o poloměru R (viz obrázek 1).



Obrázek 1: Elektrická intenzita v blízkosti nabitého prstence.



Obrázek 2: Nabitý prstenec s délkovou hustotou τ a poloměrem R, který leží v rovině xy.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}Q' = \tau_0 \mathrm{d}l = \tau_0 R \mathrm{d}\varphi \\
&\vec{r} = (0, 0, z) \\
&\vec{r}\,' = (R\cos(\varphi'), R\sin\varphi', 0) \qquad \varphi' \in [0, 2\pi] \\
&(\vec{r} - \vec{r}\,') = (-R\cos(\varphi'), -R\sin\varphi', z) \\
&\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|^3 = (R^2\cos^2(\varphi') + R^2\sin^2(\varphi') + z^2)^{3/2} = (R^2 + z^2)^{3/2}
\end{aligned}$$

Nyní se na problém můžeme podívat řekněme fyzikálně a říct si, jak by měla výsledná intenzita vypadat. Kruhový prstenec vyzuje zřejmě nějakou symetrii. Pozorujme obrázek 2. Pakliže necháme prstenec ležet v rovině xy a budeme kolem tohoto prstence chodit uvidíme z jakéhokoli úhlu stejnou situaci. To ovšem znamená, že vektor elektrické intenzity nemůže mít nenulové složky x a y. Pakliže by je totiž neměl nenulové, tak by vektor elektrické intenzity musel směřovat mimo osu z a tím bychom, pakliže bychom chodili okolo prstence pozorovali různé situace.

Napíšeme vzorec pro výpočet elektrické intenzity pro spojité rozložení náboje.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|^{3/2}}\, \mathrm{d}Q'$$

[1] Od května 2019 je elementární náboj zafixován na přesnou hodnotu $Q_e = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}$ C.

Do vzorce doplníme naše parametry úlohy.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} \frac{(-R\cos(\varphi'), -R\sin(\varphi'), z)}{(R^2+z^2)^{3/2}}\tau_0 R\mathrm{d}\varphi'$$

Tento integrál se nám rozpadne na tři integrály. Jeden na každou složku vektoru $\vec{E}$. Zkusme si tedy vypočítat jednotlivé složky. Ze symetrie úlohy jsme odhadli, že x-ová a y-ová složka vektoru elektrické intenzity by měla být nulová. Zkusme tedy jestli i integrály vyjdou nulové.

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} \frac{-R\cos(\varphi')}{(R^2+z^2)^{3/2}}\tau_0 R\mathrm{d}\varphi'$$

Vše, kde není proměnná φ', přes kterou integrujeme je konstanta, kterou můžeme vytknout před integrál. Udělejme to tedy.

$$E_x = -\frac{R^2\tau_0}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\cos(\varphi')\,\mathrm{d}\varphi' = -\frac{R^2\tau_0}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}\left[\sin(\varphi')\right]_0^{2\pi} = 0$$

Pro ypsilonovou složku postupujeme podobně.

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} \frac{-R\sin(\varphi')}{(R^2+z^2)^{3/2}}\tau_0 R\mathrm{d}\varphi'$$

$$E_x = -\frac{R^2\tau_0}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\sin(\varphi')\,\mathrm{d}\varphi' = -\frac{R^2\tau_0}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}\left[\cos(\varphi')\right]_0^{2\pi} = 0$$

Pro poslední složku elektrické intenzity dostáváme

$$E_z = \frac{\tau R}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\mathrm{d}\varphi' = \frac{\tau R z}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi' = \frac{2\pi R\tau_0 z}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}$$

Pakliže si uvědomíme, že platí

$$Q = \int \mathrm{d}Q = \int_0^{2\pi}\tau_0 R\mathrm{d}\varphi' = 2\pi R\tau_0$$

můžeme psát výsledek ve tvaru

$$\underline{\vec{E} = \frac{zQ}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{z}_0} \qquad \text{kde } \vec{z}_0 = (0,0,1)$$

Příklad 2.3. Uvažujte homogenně nabitý (plošná hustota náboje je σ) tenký kruh o poloměru R ležící v rovině $z=0$. Střed kruhu se nachází v bodě $\vec{r} = (0,0,0)$. Určete vektor elektrické intenzity v libovolném bodě uvnitř slupky $r < R_1$.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}Q' = \sigma\mathrm{d}S' = \sigma r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\varphi'\\
&\vec{r} = (0,0,z)\\
&\vec{r}' = (r'\cos(\varphi'), r'\sin(\varphi), 0) \qquad \varphi\in[0,2\pi] \quad r'\in[0,R]\\
&(\vec{r}-\vec{r}') = (-r'\cos(\varphi'), -r'\sin(\varphi), z)\\
&\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3 = (r'^2\cos^2(\varphi') + r'^2\sin^2(\varphi') + z^2)^{3/2} = (r'^2+z^2)^{3/2}
\end{aligned}$$

Po dosazení do

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3}\mathrm{d}Q'$$

dostaneme

$$\begin{aligned}
E_z &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^R\frac{z\sigma r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\varpi}{[r'^2\cdot\cos^2\varphi' + r'^2\cdot\sin^2\varphi' + z^2]^{3/2}} = \frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^R\frac{r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\varphi'}{[r'^2+z^2]^{3/2}} =\\
&= \frac{2\pi\sigma z}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\frac{r'\mathrm{d}r'}{[r'^2+z'^2]^{3/2}} = \left\|\begin{matrix} u = r'^2+z^2\\ \mathrm{d}u = 2r'\mathrm{d}r'\end{matrix}\right\| = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\frac{1}{2}\int_{z^2}^{R^2+z^2}\frac{\mathrm{d}u}{u^{3/2}} = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0}\left[-\frac{2}{u^{1/2}}\right]_{z^2}^{R^2+z^2} =\\
&= \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0}\left[-\frac{2}{\sqrt{R^2+z^2}} + \frac{2}{z}\right] = \underline{\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)}
\end{aligned}$$

Příklad 2.4. Uvažujte tlustou sférickou slupku o vnitřním a vnějším poloměru R_1 a R_2: Slupka je homogenně nabitá s hustotou náboje ϱ: Vypočtěte vektor elektrické intenzity v libovolném bodě uvnitř slupky $r < R_1$.

$$\begin{aligned} E_x &= 0 \qquad x = 0 \qquad x' = r' \cos\varphi' \sin\theta' \\ E_y &= 0 \qquad y = 0 \qquad y' = r' \sin\varphi' \sin\theta' \\ E_z &=? \qquad z = z \qquad z' = r' \cos\theta' \\ \mathrm{d}Q &= \varrho r'^2 \sin\theta' \mathrm{d}r' \mathrm{d}\varphi' \mathrm{d}\theta' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_z &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{(z - r'\cos\theta')\varrho r'^2 \sin\theta'}{[x'2 + y'^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \mathrm{d}r' \mathrm{d}\varphi' \mathrm{d}\theta' = \\
&= \frac{\varrho}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{z - r'\cos\theta'}{[r'^2 + z^2 - 2zz']^{3/2}} r'^2 \sin\theta' \mathrm{d}r' \mathrm{d}\varphi' \mathrm{d}\theta' = \\
&= \frac{\varrho 2\pi}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{\pi} \frac{z - r'\cos\theta'}{[r'^2 + z^2 - 2zz']^{3/2}} r'^2 \sin\theta' \mathrm{d}r' \mathrm{d}\theta' = \\
&= \left\| \begin{array}{c} r'^2 + z^2 - 2zz' = a \\ -r'\cos\theta' = \frac{a - r'^2 - z^2}{2z} \end{array} \right\| \wedge \left\| \begin{array}{c} \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\theta} = 2zr'\sin\theta' \\ \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}a}{2zr'\sin\theta'} \end{array} \right\| \wedge \left\| \begin{array}{c} a(0) = (r'-z)^2 \\ a(\pi) = (r'-z)^2 \end{array} \right\| = \\
&= \frac{\varrho 2\pi}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \int_{(r'-z)^2}^{(r'+z^2)^2} \frac{z + \frac{a - r'^2 - z^2}{2z}}{a^{3/2}} r'^2 \sin\theta' \mathrm{d}r' \frac{\mathrm{d}a}{2zr'\sin\theta'} = \frac{\varrho 2\pi}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \int_{(r'-z)^2}^{(r'+z)^2} \frac{\frac{2z^2 + a - r'^2 - z^2}{2z}}{a^{3/2} \cdot 2z} r' \mathrm{d}r' \mathrm{d}a = \\
&= \frac{\varrho}{4\pi\varepsilon_0} \cdot 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \int_{(r'-z)^2}^{(r'+z)^2} \frac{(2z^2 + a - r'^2 - z^2) r'}{a^{3/2} 4z^2} \mathrm{d}r' \mathrm{d}a = \frac{\varrho 2\pi}{4\pi\varepsilon_0 4z^2} \int_{R_1}^{R_2} r' \int_{(r'-z)^2}^{(r'+z)^2} \left(\frac{a}{a^{3/2}} + \frac{-r' + z^2}{a^{3/2}} \right) \mathrm{d}a \mathrm{d}r' = \\
&= \frac{2\pi\varrho}{16\pi z^2 \varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} r' \left[2a^{1/2} + a^{-1/2}(r' - z^2) \cdot 2 \right]_{(r'-z)^2}^{(r'-z)^2} \mathrm{d}r' = \\
&= \frac{\varrho}{8z^2\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} r' \left[2(r'-z) + 2\frac{(r'^2 - z^2)}{r'+z} - 2(r'-z) - 2\frac{r'^2 - z^2}{(r'-z)} \right] \mathrm{d}r' = \\
&= \frac{\varrho}{8z^2\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} r' \left[1(r'+z) + 2(r'2 - z) - 2(r'-z) - (2(r'+z)) \right] \mathrm{d}r' = 0
\end{aligned}$$

Tudíž

$$\underline{\vec{E} = (0,0,0) = \vec{0}}$$

Příklad 2.5. Uvažujte nabitý čtverec o délkové hustotě ϱ a délce hran $2a$. Jaká je elektrická intenzita na ose čtverce? Uvažujte, že střed čtverce leží v bodě $\vec{r} = (0,0,0)$ a rovina, ve které leží, je dána $z = 0$.

Nejdříve obecně:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Q' &= \tau \mathrm{d}l' \\ \vec{r} &= (0,0,z) \\ \vec{r} &= (x', y', 0) \\ (\vec{r} - \vec{r}') &= (-x' - y' + z) \\ \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3 &= [x'^2 + y'^2 + z^2]^{3/2} \end{aligned}$$

Nyní spočteme elektrickou intenzitu pro každou stranu čtverce zvlášť. Začneme stanou, která leží ose y ve vzdálenosti a.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Q' &= \tau \mathrm{d}l' = \tau \mathrm{d}x' \qquad x \in [-a, a] \\ \vec{r} &= (0,0,z) \\ \vec{r} &= (x', a, 0) \\ (\vec{r} - \vec{r}') &= (-x' - a + z) \\ \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3 &= [x'^2 + a^2 + z^2]^{3/2} \end{aligned}$$

$$E_z = 4 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int_{-a}^{a} \frac{z \cdot \tau}{[x'^2 + y'^2 + z'^2]^{3/2}} \mathrm{d}x' = \frac{4\tau}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-a}^{a} \frac{z}{[x'^2 + a^2 + z^2]^{3/2}} \mathrm{d}x' = \frac{4\tau z}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-a}^{a} \frac{1}{[x'^2 + \underbrace{a^2 + z^2}_{b^2}]^{3/2}} \mathrm{d}x' =$$

$$= \left\| \text{ Tabulkový integrál } \right\| = \frac{4\tau z}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{x'}{(a^2 + z^2)\sqrt{x'^2 + a^2 + z^2}} \right]_{-a}^{a} =$$

$$= \frac{4\tau z}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{a}{(a^2 + z^2)\sqrt{2a^2 + z^2}} + \frac{a}{(a^2 + z^2)\sqrt{2a^2 + z^2}} \right] = \frac{4\tau z}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2a}{(a^2 + z^2)\sqrt{2a^2 + z^2}} =$$

$$= \underline{\frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0 (2a^2 + z^2)^{1/2} \cdot (a^2 + z^2)}}$$