Naposledy upraveno: 22. února 2020.

Úkol 3

NEOBSAHUJE GRAFY

Potřebné znalosti:

$$\varphi = -\int_{\vec{A}}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{1}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathrm{d}Q}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + K \tag{2}$$

Příklad 3.1. Uvažujte homogenně nabitou úsečku o délce $2a$ umístěnou na ose x. Střed úsečky leží v počátku souřadnicové soustavy. Vypočtěte potenciál soustavy. Vypočtěte potenciál mimo úsečku a) na ose y b) na ose y. Použijte oba uvedené způsoby popsané rovnicemi (1) a (2).

a)
Nejdříve první způsob.

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-a}^{a} \frac{\tau \mathrm{d}x'}{(x - x')} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \left[\ln|x - x'|\right]_{-a}^{a} = \underline{\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|}$$

Nyní druhý způsob.

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-a}^{a} \frac{x - x'}{(x - x')^3} \tau \mathrm{d}x' = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-a}^{a} (x - x')^{-2} \mathrm{d}x' = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \left[(x - x')\right]_{-a}^{a} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right) =$$
$$= \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{x + a - x + a}{x^2 - a^2}\right) = \frac{\tau 2a}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 - a^2)} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 - a^2)}$$

$$\varphi = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 - a^2)} \mathrm{d}x = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\infty}^{\vec{r}} \frac{1}{x^2 - a^2}$$

Rozklad na parciální zlomky:

$$\begin{aligned}
&1 = A(x + a) + B(x - a) \\
&x^1 : A + B = 0 \implies A = -B \\
&x^0 : Aa - Ba = 1 \implies (A - B) = \frac{1}{a} \\
&A = \frac{1}{2a} \qquad B = -\frac{1}{2a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi &= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\int_{\infty}^{x} \frac{1}{x - a} \mathrm{d}x - \int_{\infty}^{x} \frac{1}{x + a}\right] = \\
&= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{2a} \left([\ln|x - a|]_{\infty}^{x} - [\ln|x + a|]_{\infty}^{x}\right) = \underline{-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|}
\end{aligned}$$

b)
První způsob:

$$\begin{aligned}
\varphi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\mathrm{d}Q}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-a}^{a} \frac{\tau \mathrm{d}x'}{[x'^2 + y'^2]^{1/2}} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}x'}{[x'^2 + y^2]^{1/2}} = \\
&= \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \left[\ln\left|x' + \sqrt{x'^2 + y^2}\right|\right]_{-a}^{a} = \underline{\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + y^2}}{-a + \sqrt{a^2 + y^2}}}
\end{aligned}$$

Druhý způsob:

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{y\tau}{(x'^2+y^2)^{3/2}}\mathrm{d}x' = \frac{ty}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{d}x'}{(x'^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\tau y}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{x'}{y^2(x'^2+y^2)^{1/2}}\right]_{-a}^{a} =$$
$$= \frac{\tau y}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{a}{y^2(a^2+y^2)^{1/2}}+\frac{a}{y^2(a^2+y^2)^{1/2}}\right) = \frac{2\tau ya}{4\pi\varepsilon_0 y^2(a^2+y^2)^{1/2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 y(a^2+y^2)^{1/2}}$$

$$\phi = -\int_{\vec{A}}^{\vec{r}}\vec{E}\mathrm{d}\vec{r} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_A^r\frac{\mathrm{d}y}{y(a^2+y^2)^{1/2}} = \left\|\begin{array}{l} t=a^2+y^2 \implies y^2=t-a^2 \\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}=2y \implies \mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}t}{2y}\end{array}\right\| =$$
$$-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 2}\int\frac{\frac{\mathrm{d}t}{2y}}{yt^{1/2}} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 2}\int\frac{\mathrm{d}t}{(t-a^2)t^{1/2}} = \left\|\begin{array}{l} n=\sqrt{t} \implies n^2=t \\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}n}=2n \implies \mathrm{d}t=2n\mathrm{d}n\end{array}\right\| =$$
$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 2}\int\frac{2n\mathrm{d}n}{(n^2-a^2)n} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\mathrm{d}n}{n^2-a^2} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int\left[\frac{\frac{1}{2a}}{n-a}-\frac{\frac{1}{2a}}{n+a}\right]\mathrm{d}n =$$
$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2a}\left[\ln\frac{\sqrt{a^2+y^2}-a}{\sqrt{a^2+y^2}+a}\right]_{\infty}^{y} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2a}\ln\frac{\sqrt{a^2+y^2}-a}{\sqrt{a^2+y^2}+a} = \underline{\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a+\sqrt{a^2+y^2}}{-a+\sqrt{a^2+y^2}}}$$

Příklad 3.2. Uvažujte homogenně nabitý (plošná hustota náboje je σ) tenký kruh o poloměru R ležící v rovině $z = 0$. Střed kruhu se nachází v bodě $\vec{r} = (0,0,0)$. Určete potenciál na ose kruhu ve vzdálenosti z od středu kruhu. Potenciál v nekonečné vzdálenosti od kruhu uvažujte jako nulový.

$$\begin{aligned}&\vec{r} = (x,y,z) = (0,0,z)\\ &\vec{r}' = (x',y',z') = (r'\cos\varphi', r'\sin\varphi', 0)\\ &\varphi' \in (0,2\pi) \qquad r' \in (0,R)\\ &\mathrm{d}Q = \sigma r'\mathrm{d}\varphi'\mathrm{d}r'\end{aligned}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{\sigma r'\mathrm{d}\varphi'\mathrm{d}r'}{(r'^2\cos^2\varphi'+r'^2\sin^2\varphi'+z^2)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{\sigma r'\mathrm{d}\varphi'\mathrm{d}r'}{(r'^2+z^2)^{1/2}} =$$
$$= \frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\frac{r'\mathrm{d}r'}{(r'^2+z^2)^{1/2}} = \left\|\begin{array}{l} t=r'^2+z^2 \\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r'}=2r'\end{array}\right\| = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0 2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^{1/2}} = \frac{2\pi\sigma}{8\pi\varepsilon_0}\left[2t^{1/2}\right] = \frac{4\pi\sigma}{8\pi\varepsilon_0}\left[(r'^2+z^2)^{1/2}\right]_0^R =$$
$$= \frac{4\pi\sigma}{8\pi\varepsilon_0}(\sqrt{R^2+z^2}-z) = \underline{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2+z^2}-|z|)}$$

Příklad 3.3 Uvažujte tlustou sférickou slupku o vnitřním a vnějším poloměru R_1 a R_2. Slupka je homogenně nabitá hustotou náboje ϱ. Vypočtěte potenciál v libovolném bodě r. Potenciál v nekonečné vzdálenosti od středu slupky uvažujte jako nulový. Nakreslete do grafu závislost velikosti intenzity a potenciálu na radiální vzdálenosti.

a) Vně vrstvy:

$$E_{vne} = \frac{\varrho(R_2^3-R_1^3)}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

$$\phi = -\int_{\infty}^{r}\frac{\varrho(R_1^3-R_1^3)}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r = -\frac{\varrho(R_2^3-R_1^3)}{3\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{z}\right]_{\infty}^{r} = \underline{\frac{\varrho(R_2^3-R_1^3)}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r}}$$

b) Uvnitř vrstvy:

$$E_u = \frac{\varrho}{3\varepsilon_0}\left(r-\frac{R_1^3}{r^2}\right)$$
$$E_{vne} = \frac{\varrho(R_2^3-R_1^3)}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

$$\begin{aligned}
\varphi &= -\int_{\infty}^{R_2} \frac{\varrho(b^3-a^2)}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r - \int_{R_2}^{r}\left(r-\frac{R_1^3}{r^2}\right)\mathrm{d}r = \frac{\varrho(R_2^3-R_1^3)}{3\varepsilon_0 r} - \frac{\varrho}{3\varepsilon_0}\int_{R_2}^{r}\left(r-\frac{R_1^3}{r^2}\right)\mathrm{d}r = \\
&= \frac{\varrho(R_2^3-R_1^3)}{3\varepsilon R_2} - \frac{\varrho}{3\varepsilon_0}\left(\int_{R_2}^{r} r\mathrm{d}r - \int_{R_2}^{r}\frac{R_1^3}{R_2}\right) = \frac{\varrho(R_2^3-R_1^3)}{3\varepsilon_0 R_2} - \frac{\varrho}{3\varepsilon_0}\left(\left[\frac{r^2}{2}\right]_{R_2}^{r} + \left[\frac{R_1^3}{r}\right]_{R_2}^{r}\right) = \\
&= \frac{\varrho(R_2^3-R_1^3)}{3\varepsilon_0 R_2} - \frac{\varrho}{3\varepsilon_0}\left[\frac{r^2}{2} - \frac{R_2^2}{2} + \frac{R_1^3}{r} - \frac{R_1^3}{R_2}\right] = \\
&= \frac{\varrho R_2^3}{3\varepsilon_0 R_2} - \frac{\varrho R_1^3}{3\varepsilon_0 R_2} - \frac{\varrho r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{\varrho R_2^2}{6\varepsilon_0} - \frac{\varrho R_1^3}{3\varepsilon_0 r} + \frac{\varrho R_1^3}{3\varepsilon_0 R_2} = \frac{\varrho R_2^2}{3\varepsilon_0} - \frac{\varrho r^2}{6\varepsilon_0} = \\
&= \frac{\varrho R_2^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\varrho r^2}{6\varepsilon_0} - \frac{\varrho R_1^3}{3\varepsilon_0 r} = \underline{\frac{\varrho}{2\varepsilon_0}\left(R_2^2 - \frac{r^2}{3} - \frac{2R_1^3}{3r}\right)}
\end{aligned}$$

c) Uvnitř duté části:

$r = R_1$

$$\varphi = \frac{\varrho R_2^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\varrho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{R_1^2}{2} + \frac{R-1^3}{1}\right) = \frac{\varrho R_2^2}{2\varepsilon_0} - \frac{R_2^2}{2\varepsilon_0}\left(\frac{R_1^2}{2} + R_1^2\right) = \frac{\varrho R_2^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\varrho}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{3R_1^2}{2} = \frac{\varrho R_2^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\varrho R_1^2}{2\varepsilon_0} = \underline{\frac{\varrho}{2\varepsilon_0}\left(R_2^2 - R_1^2\right)}$$

Intenzity můžeme spočítat také pomocí *Gaussovy věty.*

a) Vně vrstvy:

$$\begin{aligned}
&\oiint_{\partial(O)} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \\
&E4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \implies E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2} \\
&Q = V\cdot\varrho = \frac{4}{3}\pi\left(R_2^3 - R_1^3\right)\cdot\varrho \\
&E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\frac{4}{3}\pi(R_2^2-R_1^2)\varrho}{r^2} = \underline{\frac{(R_2^3-R_1^3)\varrho}{3\varepsilon_0 r^2}}
\end{aligned}$$

b) Uvnitř vrstvy:

$$\begin{aligned}
&\oiint_{\partial(O)} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \\
&E4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \implies E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2} \\
&Q = V\cdot\varrho = \frac{4}{3}\pi\left(r^3 - R_1^3\right)\cdot\varrho \\
&E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\frac{4}{3}\pi(r^3-R_1^2)\varrho}{r^2} = \underline{\frac{(r^3-R_1^3)\varrho}{3\varepsilon_0 r^2}}
\end{aligned}$$

c) Uvnitř dutiny není náboj $\implies E = 0$.

Příklad 3.4. Uvažujte dva bodové náboje o různé velikosti náboje a znaménku. V nekonečné vzdálenosti od nábojů uvažujte nulový potenciál. Dokažte, že ekvipotenciální plocha (ta, co není v nekonečné vzdálenosti) pro potenciál $\varphi = 0$ je kulová plocha.

$$
\begin{aligned}
&\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_Q\|} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_q\|} = 0 \\
&\frac{Q}{[(x-x')^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{[x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} = 0 \\
&\frac{Q}{[(x-x')^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} = \frac{q}{[x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} \\
&\frac{Q^2}{(x-x')^2 + y^2 + z^2} = \frac{q^2}{x^2 + y^2 + z^2} \\
&Q^2(x^2 + y^2 + z^2) = q^2((x-x')^2 + y^2 + z^2) \\
&Q^2x^2 + Q^2 + y^2 + Q^2z^2 = q^2x^2 - 2q^2xx' + q^2x'^2 + q^2y^2 + q^2z^2 \\
&x^2(Q^2 - q^2) + y^2(Q^2 - q^2) + z^2(Q^2 - q^2) = -2q^2xx' + q^2x'^2 \\
&x^2 + y^2 + z^2 = -\frac{2q^2xx'}{(Q^2 - q^2)} + \frac{q^2x'^2}{(Q^2 - q^2)} \\
&x^2 + \frac{2q^2xx'}{(Q^2 - q^2)} + y^2 + z^2 = \frac{q^2x'^2}{(Q^2 - q^2)} \\
&\left(x + \frac{q^2x'}{(Q^2 - q^2)}\right)^2 + y^2 + z^2 - \frac{q^4x'^2}{(Q^2 - q^2)^2} = \frac{q^2x'^2}{(Q^2 - q^2)} \\
&\left(x + \frac{q^2x'}{(Q^2 + q^2)}\right)^2 + y^2 + z^2 = \underbrace{\frac{q^4x'^2}{(Q^2 - q^2)^2} + \frac{q^2x'^2}{(Q^2 - q^2)}}_{R^2}
\end{aligned}
$$

Příklad 3.5. Uvažujte potenciál ve tvaru $\varphi = ke^{-cr^2}$, kde $r^2 = x^2 + y^2z^2$. Určete vektor elektrické intenzity a hustotu náboje.

Spočteme vektor elektrické intenzity $\vec{E}$ pomocí skutečnosti, že elektrická intenzita je v elektrostatice záporný gradient elektrického potenciálu.

$$
\begin{aligned}
&\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = -\left(ke^{-cr^2}(-2cx), ke^{-cr^2}(-2cy), ke^{-cr^2}(-2cz)\right) = \\
&= ke^{-cr^2}2c(x, y, z) = \underline{2cke^{-cr^2}\vec{r} = \vec{E}}
\end{aligned}
$$

Nyní pomocí Gaussova zákona spočteme hustotu náboje.

$$
\begin{aligned}
&\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \\
&\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\varphi}{\varepsilon_0} \\
&\vec{\nabla}\vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\varphi = -\frac{\varphi}{\varepsilon_0} \\
&\vec{\nabla}^2\varphi = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\varrho = -\varepsilon_0\vec{\nabla}^2\varphi = -\varepsilon_0\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) = -\varepsilon_0 2ck\left(\frac{\partial xe^{-cr^2}}{\partial x} + \frac{\partial ye^{-cr^2}}{\partial y} + \frac{\partial ze^{-cr^2}}{\partial z}\right) = \\
&= -\varepsilon_0 2ck\left(e^{-cr^2} + xe^{cr^2}(-2cx) + e^{-cr^2} + ye^{-cr^2}(-2yc) + e^{-cr^2} + ze^{-cr^2}(-2cz)\right) = \\
&= -2\varepsilon_0 cke^{-cr^2}\left(1 - 2cx^2 + 1 - 2cy^2 + 1 - 2cz^2\right) = 2\varepsilon_0 cke^{-cr^2}\left(3 - 2c(x^2 + y^2 + z^2)\right) = \\
&= \underline{\varepsilon_0 cke^{-cr^2}(3 - 2cr^2)}
\end{aligned}
$$