Naposledy upraveno: 23. března 2020.

Úkol 9. týden

Příklad 9.1. Uvažujte vektorový potenciál ve tvaru $\vec{A} = e^{-kr^2}\vec{r}$, kde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ a $\vec{r} = (x, y, z)$. Vypočtěte vektor magnetické indukce $\vec{B}$.

$$\vec{A} = \mathrm{e}^{-kr^2}\vec{r}, \quad \text{kde } r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \text{ a } \vec{r} = (x, y, z)$$

$$\begin{aligned}
\vec{B} = \nabla \times \vec{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = \\
&= \left(z\mathrm{e}^{-kr^2} \cdot 2y - y\mathrm{e}^{-kr^2} \cdot 2z, x\mathrm{e}^{-kr^2} \cdot 2z - z\mathrm{e}^{-kr^2} \cdot 2x, y\mathrm{e}^{-kr^2} \cdot 2x - x\mathrm{e}^{-kr^2} \cdot 2y\right) = \\
&= e^{-kr^2}(2zy - 2yz, 2xz - 2zx, 2yz - 2xy) = (0, 0, 0) = \underline{\vec{0}}
\end{aligned}$$

Příklad 9.2. Uvažujte kruhovou proudovou smyčku o poloměru R, kterou protéká proud I (proud teče v matematicky kladném směru). Smyčka leží v rovině xy, tak, že její střed se nachází v bodě $(0, 0, 0)$. Vypočtěte vektorový potenciál na ose z. Pro výpočet použijte rovnici (1).

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}')\,\mathrm{d}V'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= (0, 0, z) \\
\vec{r}' &= (R\cos\varphi', R\sin\varphi', 0) \\
\mathrm{d}\vec{r}' &= (-R\sin\varphi', R\cos\varphi', 0)\ \mathrm{d}\varphi' \quad \varphi' \in (0, \pi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}I\,(-R\sin\varphi', R\cos\varphi', 0)\ \mathrm{d}\varphi'}{\left[R^2\cos^2\varphi' + R^2\cos^2\varphi' + z\right]^{1/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi} = \frac{(-R\sin\varphi', R\cos\varphi', 0)}{\left[R^2 + z^2\right]^{1/2}}\,\mathrm{d}\varphi' = \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi\left[R^2 + z^2\right]^{1/2}}\int_0^{2\pi}(-R\sin\varphi', R\cos\varphi', 0)\,\mathrm{d}\varphi' = \frac{\mu_0 I}{4\pi\left[R^2 + z^2\right]^{1/2}}\left[(R\cos\varphi', R\sin\varphi', 0)\right]_0^{2\pi} = \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi\left[R^2 + z^2\right]^{1/2}}(R - R, 0, 0) = \underline{\vec{0}}
\end{aligned}$$

Příklad 9.3. Uvažujte nekonečně dlouhý lineární vodič protékaný proudem I. Určete vektorový potenciál v jeho blízkosti. Proud směřuje ve směru osy z. Pro výpočet použijte rovnici (1).

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}V' &= \mathrm{d}S'\,\mathrm{d}r' \\
\vec{j}\,\mathrm{d}\vec{S} &= \mathrm{d}I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= (x, y, 0) \\
\vec{r'} &= (0, 0, z') \quad z' \in (-\infty, \infty) \\
\mathrm{d}r' &= (0, 0,\ \mathrm{d}z')
\end{aligned}$$

$$A_x = 0 \quad A_y = 0$$

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}z'}{[x^2+y^2+z^2]^{1/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\ln\left|z'+\sqrt{z'^2+x^2+y^2}\right|\right]_{-\infty=-a}^{\infty=a} \wedge \left(x^2+y^2=r^2\right) \implies$$

$$\implies A_z \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\ln\left|a+\sqrt{a^2+z^2}\right| - \ln\left|-a+\sqrt{a^2+r^2}\right|\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+r^2}}{-a+\sqrt{a^2+r^2}}\cdot\frac{a+\sqrt{a^2+r^2}}{a+\sqrt{a^2+r^2}}\right) =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+r^2}}{-a^2+a^2+r^2}\right) = \ln\frac{(a+\sqrt{a^2+r^2})^2}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln r^2 + \ln\left(a+\sqrt{a^2+r^2}\right)^2 \wedge a >> r \implies$$

$$\implies A_z = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln r^2 + \underbrace{\ln(2a)^2}_{k}$$

$$k = \nabla\cdot f \implies \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

$$f = -kz$$
$$A_\mathrm{z} = A'_\mathrm{z} + \nabla\cdot f$$
$$A'_\mathrm{z} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln r^2$$

$$\underline{A' = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln r^2(0,0,1)}$$

Příklad 9.4. Uvažujte čtvercovou vodivou smyčku o délce hrany a ležící v rovinně xy tak, že její střed se nachází v bodě $(0,0,0)$. Vypočtěte vektor magnetické indukce na ose z. Proud teče v matematicky kladném směru.

$$vvB = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathrm{d}I(\vec{r}-\vec{r}')\times\mathrm{d}r'}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3}$$

$$\vec{r} = (0,0,z)$$
$$\vec{r}' = (-\frac{a}{2}, y', 0)$$
$$\mathrm{d}\vec{r} = (0,\ \mathrm{d}y', 0)$$
$$y' \in (-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$$

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-a/2}^{a/2}\frac{\mathrm{d}I(\frac{a}{2},-y',0)\times(0,\mathrm{d}y',0)}{\left[\frac{a^2}{4}-y'^2+z^2\right]^{3/2}} = -\frac{I\mu_0}{4\pi}\int_{-a/2}^{a/2}\frac{(-z,0,\frac{a}{2})\,\mathrm{d}y'}{\left[\frac{a^2}{4}-y'^2+z^2\right]^{3/2}}$$

$$B_{1\mathrm{z}} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-a/2}^{a/2}\frac{\frac{a}{2}\,\mathrm{d}y'}{\left[\frac{a^2}{4}-y'^2+z^2\right]^{3/2}} = -\frac{a\mu_0}{8\pi}\int_{-a/2}^{a/2}\frac{\mathrm{d}y'}{\left[\frac{a^2}{4}-y'^2+z^2\right]^{3/2}} = -\frac{a\mu_0}{8\pi}\left[\frac{1}{\frac{a^2}{4}+z^2}\cdot\frac{y'}{\left[\frac{a^2}{4}-y'^2+z^2\right]^{3/2}}\right]_{-a/2}^{a/2} =$$

$$= -\frac{a\mu_0 I}{8\pi}\cdot\frac{1}{\frac{a^2}{4}+z^2}\cdot\frac{a}{\left[\frac{a^2}{2}+z^2\right]^{1/2}} = -\frac{\mu_0 I a^2}{\pi(a^2+4z^2)(2a^2+4z^2)^{1/2}}$$

$$\underline{B_\mathrm{z} = 4B_{1\mathrm{z}} = -\frac{4\mu_0 I a^2}{\pi(a^2+4z^2)(2a^2+4z^2)^{1/2}}}$$

Příklad 9.5. Uvažujte kruhový tenký disk o plošné hustotě náboje σ ležící v rovinně xy tak, že jeho střed se nachází v bodě $(0,0,0)$. Kruh rotuje úhlovou rychlostí ω kolem osy z. Vypočtěte vektor magnetické indukce na ose z. Disk rotuje v matematicky kladném směru.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j} \times (\vec{r} - \vec{r}\,') \, \mathrm{d}r'}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|^3}$$

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= (0,0,z) \\
\vec{r}\,' &= (x', y', 0) \\
\vec{\omega} &= (0,0,\omega z) \\
vvr - \vec{r}\,' &= (-x', y', z) \\
\vec{j} \times (\vec{r} - \vec{r'}) &= (x'z, y'z, y'^2 + x'^2) \\
\mathrm{d}V' &= r' \, \mathrm{d}r' \, \mathrm{d}\varphi' \, \mathrm{d}z'
\end{aligned}$$

$$r' \in [0, R] \quad z' \in (-\infty, \infty) \quad \varphi' \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{aligned}
x' &= r' \cdot \cos\varphi' \\
y' &= r' \sin\varphi' \\
z' &= z'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{j} &= \rho \vec{v} \\
\vec{v} &= \omega \times \vec{r}\,' \\
\vec{v} &= (-\omega z y', \omega z x', 0) \\
\vec{j} &= \delta(z') \cdot \sigma(-\omega z y', \omega z x', 0) = \sigma_z \delta(z')(-y', x', 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(r'z\cos\varphi', r'z\sin\varphi', r'^2\sin^2\varphi' + r'^2\cos\varphi')}{\left[r'^2\cos^2\varphi' + r'^2\sin^2\varphi' + z^2\right]^{3/2}} r' \, \mathrm{d}r' \, \mathrm{d}\varphi' \, \mathrm{d}z' \omega_z \delta(z') \sigma = \\
&= \frac{\mu_0 \omega_z \sigma}{4\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{(r'z\cos\varphi', r'z\sin\varphi', r'^2)r'}{[r'^2 + z^2]^{3/2}} \, \mathrm{d}\varphi' \, \mathrm{d}r' = \frac{\mu_0 \omega_z \sigma}{4\pi} \int_0^R \frac{1}{[r'^2 + z^2]^{3/2}} \left[r^2 \sin^2\varphi', r'^2 z \cos\varphi', \varphi' r'^3\right]_0^{2\pi} = \\
&= \frac{\mu_0 \omega_z \sigma}{4\pi} \int_0^R \frac{(0,0,2\pi r'^3)}{[r'^2 + z^2]^{3/2}} \, \mathrm{d}r' = \frac{\mu_0 \omega_z \sigma 2\pi}{2 \cdot 4 \cdot \pi} \int_0^R \frac{r'}{[r'^2 + z^2]^{3/2}} \, \mathrm{d}r' = \left\| \begin{array}{c} t = r'^2 + z^2 \\ \mathrm{d}t = 2r' \, \mathrm{d}r \end{array} \right\| = \frac{\mu_0 \omega_z \sigma}{2} \int_\alpha^\beta \frac{r'^3}{t^{3/2}} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{2r'} = \\
&= \frac{\mu_0 \omega_z \sigma}{4} \int_\alpha^\beta \frac{t - z^2}{t^{3/2}} \, \mathrm{d}t = \frac{\mu_0 \omega_z \sigma}{4} \left(\int_\alpha^\beta t^{-1/2} \, \mathrm{d}t - \int_\alpha^\beta \frac{z^2}{t^{3/2}} \, \mathrm{d}t \right) = \frac{\mu_0 \omega_z \sigma}{4} \left(2\sqrt{t} + 2z^3 - t^{-1/2} \right)_\alpha^\beta = \\
&= \frac{\mu_0 \omega_z \sigma}{2} \left(\sqrt{r'^2 + z^2} + \frac{z^2}{\sqrt{r'^2 + z^2}} \right)_0^R = \frac{\mu_0 \omega_z \sigma}{2} \left(\sqrt{R^2 + z^2} + \frac{z^2}{\sqrt{R^2 + z^2}} - z - \frac{z^2}{z} \right) = \underline{\frac{\mu_0 \omega_z \sigma}{2} \left(\frac{R^2 + 2z^2}{\sqrt{R^2 + z^2}} - 2z \right)}
\end{aligned}$$