Naposledy upraveno: 22. února 2020.

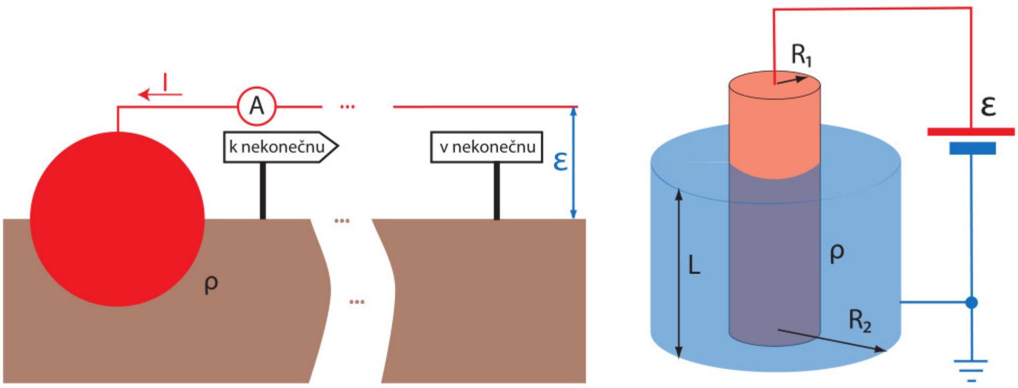
Úkol 7. týden

Příklad 7.1. Uvažujte vodivou kouli o poloměru R do půlky zahrabanou do země. Koule je udržována na konstantním emn. $\mathcal{E}$ (viz obrázek 1 a)). Určete proud protékající koulí, víte-li, že rezistivita půdy, ve které je koule zahrabána, je konstantní ρ.

$$I = \frac{\mathbb{E}}{R}; \qquad R = \frac{l}{s}\rho$$
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}}{\frac{\rho}{2\pi R_2}} = \frac{\mathcal{E} 2\pi R_1}{\rho}$$
$$R = \rho \int_{R_1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{2\pi r^2} = \frac{\rho}{2\pi} \int_{R_1}^{\infty} \frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{\rho}{2\pi}\left[-r^{-1}\right]_{R_1}^{\infty} = \frac{\rho}{2\pi}\frac{1}{R_1}$$

Příklad 7.2. Uvažujte nádobu, která je naplněna vodivým roztokem o rezistivitě ρ. Nádoba má válcovitý tvar o poloměru R_2 a výšce L. Vnitřní povrch válce (nikoli podstava) je vodivý a uzemněný (viz obrázek 1 b)). Středem nádoby prochází vodivý drát o poloměru R_1 napojený na konstantní emn. $\mathcal{E}$. Určete proud protékající roztokem.

$$I = \frac{\mathbb{E}}{R}; \qquad R = \frac{l}{s}\rho$$
$$R = \rho \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mathrm{d}r}{2\pi r L} = \frac{\rho}{2\pi L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r}\,\mathrm{d}r = \frac{\rho}{2\pi L}\left[\ln r\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{\rho}{2\pi L} \cdot \ln\left|\frac{R_2}{R_1}\right|$$
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \underline{\frac{\mathcal{E} \cdot 2\pi L}{\rho \ln\left|\frac{R_2}{R_1}\right|}}$$



Obrázek 1: a) Koule z poloviny zasazená ve vodivém prostředí. b) Vodivý roztok ve válcové nádobě.

Příklad 7.3. Uvažujte sériově zapojenou soustavu – zdroj emn. $\mathcal{E}$, rezistor R a kondenzátor C. Obvod je uzavřen do smyčky (viz první z obrázků 2)

$$U = RI \qquad C = \frac{Q}{U_C} \qquad I = \dot{Q} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

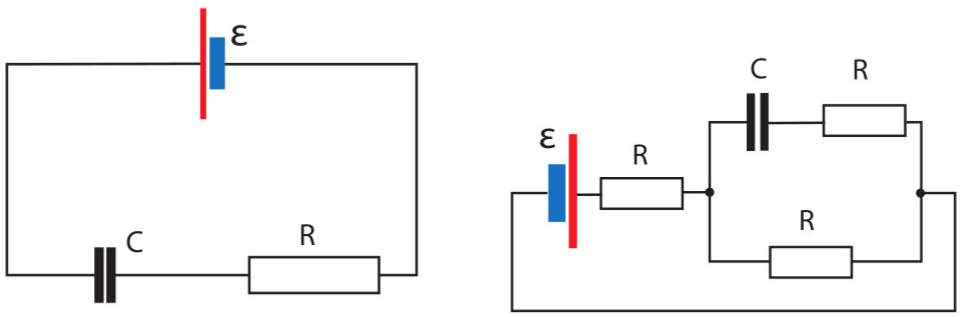
$$
\begin{aligned}
\mathcal{E} &= U_C + U_R \\
\mathcal{E} &= \frac{Q}{C} + RI \\
\mathcal{E} &= \frac{Q}{C} + R \cdot \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \\
\mathcal{E} - \frac{Q}{C} &= R \cdot \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \\
\int \mathrm{d}t &= \int \frac{R}{\frac{\mathcal{E}C - Q}{C}} \, \mathrm{d}Q \\
\frac{t}{RC} + k &= -\ln \mathcal{E}C - Q \\
\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \cdot \overline{k} &= \mathcal{E}C - Q \\
Q &= \mathcal{E}C - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \cdot \overline{k}
\end{aligned}
$$

Z podmínek

$$
t = 0 \implies Q = 0 \implies \overline{k} = C\mathcal{E}
$$

Dostáváme

$$
\begin{aligned}
Q &= \underline{C\mathcal{E}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right)} \\
I = \dot{Q} &= \underline{\frac{\mathcal{E}}{R} \cdot \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)}
\end{aligned}
$$



Obrázek 2: Zapojení rezistorů a kondenzátorů.

Příklad 7.4. Uvažujte zapojení z druhého obrázku 2. Všechny rezistory mají stejný odpor R. Elektromotorické napětí zdroje uvažujte $\mathcal{E}$, kapacitu kondenzátoru uvažujte C. Na počátku je kondenzátor vybitý. Vypočtěte celkový proud v obvodu v závislosti na čase.

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \\
I &= I_1 + I_2 \\
\mathcal{E} &= RI + \frac{Q}{C} + RI_1 \\
\mathcal{E} &= RI + RI_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E} &= 2RI_1 + RI_2 + \frac{Q}{C} \\
\mathcal{E} &= RI_1 + 2RI_2 \implies I_2 = \frac{\mathcal{E} - RI_1}{2R}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{E} = 2RI_1 + \frac{\mathcal{E} - \mathcal{R}\mathcal{I}_\infty}{2} + \frac{Q}{C} \\
&2\mathcal{E} = 4RI_1 + \mathcal{E} - RI_1 + \frac{2Q}{C} \\
&3RI_1 = \mathcal{E} - \frac{2Q}{C} \\
&I_1 = \frac{\mathcal{E}}{3R} - \frac{2Q}{3RC} \\
&\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathcal{E}}{3R} - \frac{2Q}{3RC} \\
&\int \frac{\mathrm{d}Q}{\frac{\mathcal{E}}{3R} - \frac{2Q}{\ni\mathcal{R}\mathcal{C}}} = \int \mathrm{d}t \\
&3RC \int \frac{1}{\mathcal{E}C - 2Q}\,\mathrm{d}Q = t + K \\
&3RC \ln|\mathcal{E}C - 2Q| = \frac{-2t}{3RC} - \frac{2k}{3RC} \\
&\ln|\mathcal{E}C - 2Q| = \frac{-2t}{3RC} - \frac{-2k}{3RC} \\
&\exp\left(-\frac{2t}{3RC}\right) \cdot \overline{k} = \mathcal{E}C - 2Q \\
&Q = \frac{\mathcal{E}C}{2} - \frac{\exp\left(-\frac{2t}{3RC} \cdot \overline{k}\right)}{2}
\end{aligned}
$$

A protože

$$
\begin{aligned}
&t = 0; \qquad Q = 0; \overline{k} = \mathcal{E}C \\
&Q = \frac{\mathcal{E}C}{2} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{2t}{3RC}\right)\right)
\end{aligned}
$$

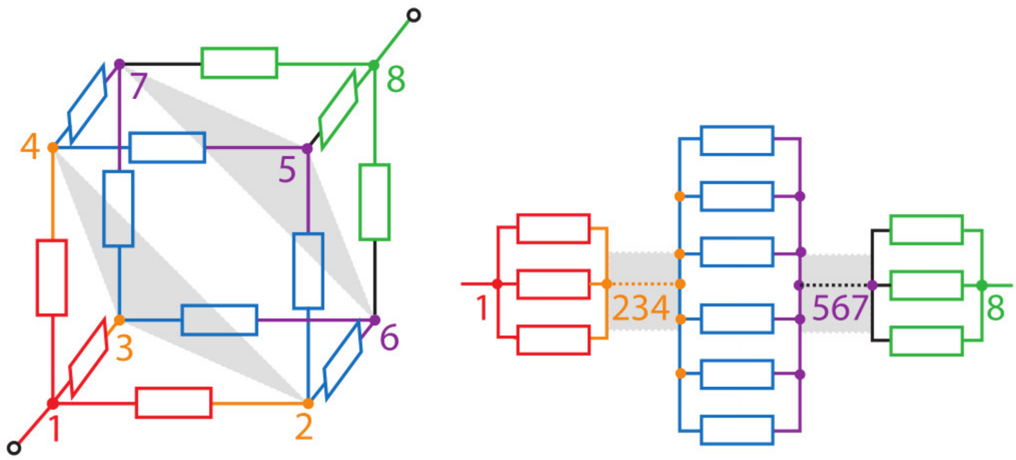
Dostáváme

$$
\begin{aligned}
&I_1 = -\frac{\mathcal{E}C}{2} \cdot \exp\left(-\frac{2t}{3RC}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3RC}\right) = \frac{\mathcal{E} \cdot \exp\left(-\frac{2t}{3RC}\right)}{3R} \\
&I_2 = \frac{\mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}\cdot\exp\left(\frac{\in\sqcup}{\ni\mathcal{R}\mathcal{C}}\right)}{3}}{2R} = \frac{3\mathcal{E} - \mathcal{E} \cdot \exp\left(-\frac{2t}{3RC}\right)}{6R} \\
&I = I_1 + I_2 = \frac{\mathcal{E} \cdot \exp\left(-\frac{2t}{3RC}\right)}{3R} + \frac{3\mathcal{E} - \mathcal{E} \cdot \exp\left(-\frac{2t}{3RC}\right)}{6R} = \underline{\frac{\mathcal{E}}{6R}\left(3 + \exp\left(-\frac{2t}{3RC}\right)\right)}
\end{aligned}
$$

Příklad 7.5. Uvažujte zapojení z obrázku 3 s tím rezistory zaměňte s kondenzátory o kapacitě C. Vypočtěte celkovou kapacitu zapojení.

Označme kapacitu tří paralelně zapojených kondenzátorů o kapacitě C jako C_1 a kapacitu šesti paralelně zapojených kondenzátorů jako C_2. Celkovou kapacitu označme C_{all}. Dostáváme

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{C_{\mathrm{all}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_1} \\
&\frac{1}{C_{\mathrm{all}}} = \frac{2}{3C} + \frac{1}{6C} = \frac{5}{6C} \\
&C = \underline{\frac{6}{5}C}
\end{aligned}
$$



Obrázek 3: a) Rezistory zapojené do tvaru krychle. b) Zapojení rezistorů se stejným výsledným odporem jako zapojení krychle.