Úkol 6. týden

Příklad 6.1. Uvažujte kondenzátor tvořený dvěma soustřednými kulovými plochami o poloměrech R_1 a R_2 nabitými nábojem Q. Mezera mezi kondenzátory je vyplněna dielektrikem. Určete kapacitu takového kondenzátoru.

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\int \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r}}$$

$$\int \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{R1}^{R2} \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r 4\pi^2}\,\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\int_{R1}^{R2}\frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

$$C = \frac{Q4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{Q\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}} = \underline{\frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1 R_2}{R_2-R_1}}$$

Příklad 6.2. Uvažujte deskový kondenzátor (vzdálenost desek d) o tvaru čtverce s délkou hrany a částečně ponořeného do kapaliny o permitivitě ε_r a hustotě ϱ. Kondenzátor je ponořená do kapaliny dle obrázku 1. Určete jak vysoko vystoupá hladina kapaliny, je-li kondenzátor připojen na zdroj elektromotorického napětí $\mathcal{E}$. Zanedbejte vliv povrchového napětí kapaliny.

$$-F_y\frac{\partial E}{\partial y}; \qquad E = \frac{1}{2}CU^2; \qquad C = \frac{Q}{U}; \qquad C = C_1 + C_2$$

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot S}{\alpha} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r ah}{\alpha}$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{\alpha} = \frac{\varepsilon_0 a(a-h)}{\alpha}$$

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r ah}{\alpha} + \frac{\varepsilon_0 a(a-h)}{\alpha} = \frac{\varepsilon_0 a}{\alpha}\left(\varepsilon_r h + a - h\right)$$

$$E = \frac{1}{2}U^2\frac{\varepsilon_0 a}{\alpha}\left(\varepsilon_r h + a - h\right)$$

$$-F_y = \frac{\partial E}{\partial h} = \frac{U^2\varepsilon_0 a\varepsilon_r}{2\alpha} - \frac{U^2\varepsilon_0 a}{2\alpha} = \frac{U^2\varepsilon_0 a}{2\alpha}\left(\varepsilon_r - 1\right)$$

$$-F_y = F_g; \qquad \frac{U^2\varepsilon_0 a\left(\varepsilon_r-1\right)}{2\alpha} = mg; \qquad m = \varrho V = \varrho a\alpha h$$

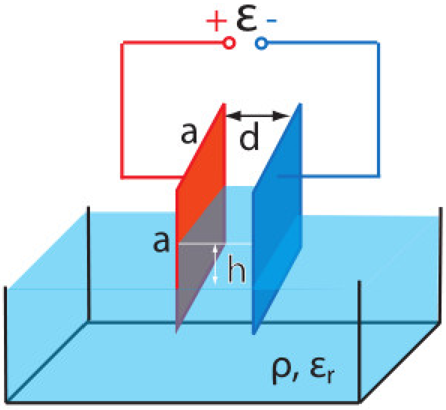
$$\frac{U^2\varepsilon_0 a(\varepsilon_r-1)}{2\alpha} = \varrho a\alpha h g \implies h = \frac{U^2\varepsilon_0 a(\varepsilon_r-1)}{2\alpha^2\varrho g a} = \underline{\frac{\mathcal{E}\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)}{2\alpha^2\varrho g}}$$

Příklad 6.3. Uvažujte válcový kondenzátor se souosými válci o vnitřním poloměru R_1 a vnějším poloměru R_2. Rozdíl poloměrů je mnohem menší, jak délka kondenzátoru l. Kondenzátor je svisle ponořen do kapaliny o permitivitě ε_r a hustotě ϱ. Určete, jak vysoko dovnitř kondenzátoru vystoupá hladina kapaliny, je-li napětí na deskách kondenzátoru U. Zanedbejte vliv povrchového napětí kapaliny.

$$-F_y\frac{\partial E}{\partial y}; \qquad E = \frac{1}{2}CU^2; \qquad C = \frac{Q}{U}; \qquad C = C_1 + C_2; \qquad U = \int \vec{R}\,\mathrm{d}\vec{r}$$

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} = \frac{\sigma 2\pi R_1 l}{\varepsilon_0 2\pi r l} = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0 r}$$

$$U = \int E\,\mathrm{d}r = \int_{R_1}^{R^2}\frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0}\ln\left|\frac{R_2}{R_1}\right|$$



Obrázek 1: Deskový kondenzátor ponořený v dielektrické kapalině.

$$C_1 = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma 2\pi R_1 l_1}{\frac{\sigma R_1 \ln\left|\frac{R_2}{R_1}\right|}{\varepsilon_0\varepsilon_r}} = \frac{\sigma 2\pi R_1 l_1 \varepsilon_0\varepsilon_r}{\sigma R_1 \ln\left|\frac{R_2}{R_1}\right|} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l_1}{\ln\left|\frac{R_2}{R_1}\right|}$$

$$C_2 = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma 2\pi R_1 (l - l_1)}{\frac{\sigma R_1 \ln\left|\frac{R_2}{R_1}\right|}{\varepsilon_0}} = \frac{1\pi\varepsilon_0 (l - l_1)}{\ln\left|\frac{R_2}{R_1}\right|}$$

$$C = C_1 + C_2 = \frac{2\pi\varepsilon_0 l_1}{\ln\left|\frac{R_2}{R_1}\right|} + \frac{2\pi\varepsilon_0 (l - l_1)}{\ln\left|\frac{R_2}{R_1}\right|} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left|\frac{R_2}{R_1}\right|}(\varepsilon_r l_1 + l - l_1)$$

$$E = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}U^2\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left|\frac{R_2}{R_1}\right|}(\varepsilon_r x + l - l_1) = \frac{U^2\pi\varepsilon_0}{\ln\left|\frac{R_2}{R_1}\right|}(\varepsilon_r l_1 + l - l_1)$$

$$-F_x = \frac{\partial E}{\partial l_1} = \frac{U^2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\left|\frac{R_2}{R_1}\right|} = \frac{U^2\pi\varepsilon_0}{\ln\left|\frac{R_2}{R_1}\right|}(\varepsilon_r - 1)$$

$$-F_x = F_g$$

$$\frac{U^2\pi\varepsilon_0}{\ln\left|\frac{R_2}{R_1}\right|}(\varepsilon_r - 1) = mg$$

$$m = \varrho V = \varrho(\pi R_2^2 x - \pi R_1^2 x) = \varrho\pi x(R_2^2 - R_1^2)$$

$$\frac{U^2\pi\varepsilon_0}{\ln\left|\frac{R_2}{R_1}\right|}(\varepsilon_r - 1) = g\varrho\pi x(R_2^2 - R_1^2)$$

$$x = \frac{U^2\pi\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{\ln\left|\frac{R_2}{R_1}\right|\varrho\pi g(R_2^2 - R_1^2)} = \underline{\frac{U^2\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{\varrho g(R_2^2 - R_1^2)\ln\left|\frac{R_2}{R_1}\right|}}$$

Příklad 6.4. Uvažujte desková kondenzátor, který je vyplněn dielektrikem, jehož permitivita se lineárně mění od desky k desce. Na povrchu desek uvažujte permitivitu ε_1 a ε_2. Vzdálenost desek je l a plocha S. Jaká je kapacita C kondenzátoru?

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon = kx + b \\
&x = 0 \wedge x = l \wedge \varepsilon_1 = b \wedge \varepsilon_2 = kl + \varepsilon_1 \\
&k = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{l} \\
&\varepsilon = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{l} x + \varepsilon_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&C = \frac{Q}{U}; \qquad U = \int E \,\mathrm{d}r \\
&E_1 = \frac{Q}{\varepsilon S_1} = \frac{Q}{\varepsilon 2S} \\
&E = 2E_1 = \frac{Q}{\varepsilon S} = \frac{Q}{\left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{l} x + \varepsilon_1\right) S} \\
&k = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{l}
\end{aligned}
$$

$$
U = \int E \,\mathrm{d}r = \int_0^l \frac{Q}{(kx + \varepsilon)S} \,\mathrm{d}x = \frac{Q}{S} \int_0^l \frac{1}{kx + \varepsilon_1} \,\mathrm{d}x = \left\| \begin{array}{c} u = kx + \varepsilon_1 \\ \mathrm{d}u = k \,\mathrm{d}x \end{array} \right\| = \frac{Q}{S} \int_0^l \frac{1}{u} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{Q}{Sk} \int_1^2 \frac{1}{u} \,\mathrm{d}u =
$$

$$
= \frac{Q}{Sk} \left[\ln |u|\right]_0^l = \frac{Q}{Sk} \left[\ln |kx + \varepsilon_1|\right]_0^l = \frac{Q}{Sk} \left(\ln |kl + \varepsilon_1| - \ln \varepsilon_1\right) = \frac{Q}{Sk} \ln \left| \frac{kl + \varepsilon_1}{\varepsilon_1} \right|
$$

$$
C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{Q \cdot \ln \left| \frac{kl + \varepsilon_1}{\varepsilon_1} \right|}{Sk}} = \dots = \underline{\frac{S(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\ln \left| \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right|}}
$$

Příklad 6.5. Uvažujte kulový kondenzátor (obě koule jsou soustředné) o vnitřním poloměru R_1 a vnějším poloměru R_2. Mezi slupkami je látka s permitivitou $\varepsilon = \alpha / r^2$, kde r je radiální vzdálenost od středu kuličky a α je konstanta. Určete kapacitu kondenzátoru C.

$$
\begin{aligned}
&C = \frac{Q}{U}; \qquad U = \int \vec{E} \,\mathrm{d}\vec{r} \\
&E = \frac{Q}{\varepsilon S} = \frac{\sigma 4\pi R_1^2}{\frac{\alpha}{r^2} 4\pi r^2} = \frac{\sigma R_1^2}{\alpha} \\
&U = \int E \,\mathrm{d}r = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma R_1^2}{\alpha} \,\mathrm{d}r = \frac{\sigma R_1^2}{\alpha} \left[r\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{\sigma R_1^2}{\alpha} (R_2 - R_1) \\
&C = \frac{Q}{\frac{\sigma R_1^2 (R_2 - R_1)}{\alpha}} = \frac{Q\alpha}{\sigma R_1^2 (R_2 - R_1)} = \frac{\sigma 4\pi R_1^2 \alpha}{\sigma R_1^2 (R_2 - R_1)} = \underline{\frac{4\pi\alpha}{R_2 - R_1}}
\end{aligned}
$$