Naposledy upraveno: 22. února 2020.

Úkol 4. týden

Příklad 4.1. Vypočtěte potenciál uvnitř a vně homogenně nabité koule o náboji Q a o poloměru R. Zakreslete do grafů velikost elektrické intenzity a potenciál v závislosti na radiální vzdálenosti, ověřte spojitost obou funkcí na rozhraní.

$$\oiint_{\partial(V)} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \implies E \cdot S = \frac{Q}{\varepsilon_0} \implies E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

$$E_{\mathrm{OUT}} = \frac{\varrho\frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0 4\pi r^2} = \frac{\frac{\varrho R^3}{3}}{\varepsilon_0 r^2} = \underline{\frac{\varrho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}}$$

$$E_{\mathrm{IN}} = \frac{\varrho\frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0 4\pi r^2} = \underline{\frac{\varrho r}{3\varepsilon_0}}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathrm{OUT}} &= -\int_\infty^{\vec{r}} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} = -\int_\infty^r \frac{\varrho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r = -\frac{\varrho R^3}{3\varepsilon_0}\int_\infty^r \frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r = \\ &= -\frac{\varrho R^3}{3\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_\infty^r = -\frac{\varrho R^3}{3\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right) = \frac{\varrho R^3}{3\varepsilon_0 r} = \underline{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}\end{aligned}$$

$$\varphi_{\mathrm{IN}} = -\int \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} = -\frac{\varrho}{3\varepsilon_0}\int_R^r r\,\mathrm{d}r = -\frac{\varrho}{3\varepsilon_0}\left[\frac{r^2}{2}\right]_R^r + k = -\frac{\varrho}{3\varepsilon_0}\left[\frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2}\right] + k = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left[R^2 - r^2\right] + k$$

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathrm{OUT}}(r = R) &= \varphi_{\mathrm{IN}}(r = R) \\ \frac{\varrho R^3}{3\varepsilon_0 R} &= \frac{\varrho}{3\varepsilon_0}\left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{2}\right] + k \\ \frac{\varrho R^2}{3\varepsilon_0 R} &= k\end{aligned}$$

$$\varphi_{\mathrm{IN}} = \frac{\varrho}{3\varepsilon_0}\left[\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right] + \frac{\varrho R^2}{3\varepsilon_0} = \frac{\varrho}{3\varepsilon_0}\left[\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2} + R^2\right] = \frac{\varrho}{3\varepsilon_0}\left[\frac{3}{2}R^2 - \frac{r^2}{2}\right] = \underline{\frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right)}$$

Příklad 4.2. Vypočtěte potenciál ze zadání příkladu 4.3. a nakreslete si závislosti elektrické intenzity a potenciálu na radiální vzdálenosti do grafu a ověřte spojitost funkcí na rozhraní $r = R$. Uvažujte v bodě $\varphi(r = 0) = 0$

$$E_{\mathrm{IN}} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} = \frac{\varrho\pi r^2 r}{\varepsilon_0 2\pi r r} = \underline{\frac{\varrho r}{2\varepsilon_0}}$$

$$E_{\mathrm{OUT}} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} = \frac{\varrho\pi R^2 r}{\varepsilon_0 2\pi r \cdot r} = \underline{\frac{\varrho R^2}{2\varepsilon_0 r}}$$

$$\varphi_{\mathrm{IN}} = -\int_\infty^{\vec{r}} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} = -\int_\infty^r \frac{\varrho r}{2\varepsilon_0}\,\mathrm{d}r = -\frac{\varrho}{2\varepsilon_0}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^r = \underline{-\frac{\varrho r^2}{4\varepsilon_0}}$$

$$\varphi_{\mathrm{OUT}} = -\int_\infty^{\vec{r}} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} = -\int_R^r \frac{\varrho r^2}{2\varepsilon_0 r}\,\mathrm{d}r = -\frac{\varrho R^2}{2\varepsilon_0}\int_R^r \frac{1}{r}\,\mathrm{d}r = -\frac{\varrho R^2}{2\varepsilon_0}\left[\ln r\right]_R^r + k = \frac{\varrho R^2}{2\varepsilon_0}\left[\ln R - \ln r\right] + k$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\mathrm{IN}}(r = R) &= \varphi_{\mathrm{OUT}}(r = R) \\
-\frac{\varrho R^2}{4\varepsilon_0} &= \frac{\varrho R^2}{2\varepsilon_0} \ln\frac{R}{R} + k \\
-\frac{\varrho R^2}{4\varepsilon_0} &= k
\end{aligned}
$$

$$
\varphi_{\mathrm{OUT}} = \frac{\varrho R^2}{2\varepsilon_0} \ln\frac{R}{r} - \frac{\varrho R^2}{4\varepsilon_0} = \underline{\frac{\varrho R^2}{2\varepsilon_0}\left(\ln\frac{R}{r} - \frac{1}{2}\right)}
$$

Příklad 4.3. Uvažujte nekonečně velkou vertikálně posazenou nebitou desku o hustotě náboje σ. Deska se nachází v tíhovém poli s tíhovým zrychlením g. V blízkosti desky visí nabitá kulička o velikosti náboje Q a hmotnosti m. Délka závěsu je l. Vypočtěte vychýlení závěsu oproti vektoru tíhového pole.

$$
\begin{aligned}
F_e &= QE \\
E &= \frac{Q'}{\varepsilon_0 S} = \frac{\sigma' S}{\varepsilon_0 2S} = \frac{\sigma' Q}{2\varepsilon_0} \\
F_g &= mg
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{tg}\alpha = \frac{F_e}{F_g} = \frac{\frac{\sigma Q}{2\varepsilon_0}}{mg} = \underline{\frac{\sigma Q}{2\varepsilon_0 mg}}
$$

Příklad 4.4. Jaké elektrické pole vzniká v okolí vodivé nabité slupky se středem v bodě $(0, 0, 0)$, v jejíž dutině je uložen bodový náboj Q s polohovým vektorem $(0, 0, z_1)$? Náboje neleží uprostřed kulové slupky. Kulová slupka má vnitřní a vnější poloměr R_1 a R_2. Intenzitu vyjádřete pro libovolné $\vec{r}$, tedy uvnitř dutiny a uvnitř kulové slupky.

$$
\begin{aligned}
E_{\mathrm{OUT}} &= \frac{Q}{\varepsilon_0 S} = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \\
\vec{E}_{\mathrm{OUT}} &= \frac{Q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 \|\vec{r}\|^3}
\end{aligned}
$$

$$
a = \frac{Q^2 x_0}{Q^2 - q^2} - x_0 = x_0\left(\frac{Q^2}{Q^2 - q^2} - 1\right) = x_0 \frac{q^2}{Q^2 - q^2}
$$

$$
R = \frac{Q x_0 q}{Q^2 - q^2}
$$

$$
\begin{aligned}
b &= a + x_0 \\
a &= x_0 \frac{q^2}{Q^2 - q^2} \implies x_0 = \frac{a}{q^2}(Q^2 - q^2)
\end{aligned}
$$

$$
R = \frac{Q x_0 q}{Q^2 - q^2}
$$

$$
R = \frac{Q\frac{a}{q^2}(Q^2 - q^2)q}{q^2(Q^2 - q^2)} = \frac{Qa}{q} \implies Q = \frac{Rq}{a}
$$

$$
x_0 = \frac{a}{q^2}\left(\frac{R^2 q^2}{a^2} - q^2\right) = a\left(\frac{R^2}{a^2} - 1\right) \implies x_0 = \frac{R^2}{a} - a
$$

$$
\vec{E} = \underline{\frac{q(x + a, y, z)}{4\pi\varepsilon_0((x + a)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{\frac{Rq}{a}\left(a + \frac{R^2}{a}, y, z\right)}{4\pi\varepsilon_0\left(\left(x + \frac{R^2}{a}\right) + y^2 + z^2\right)^{3/2}}}
$$

Příklad 4.5. Určete potenciál v blízkosti a uvnitř nabité koule o poloměru R. Hustota náboje je dána $\varrho = kr$, kde r je radiální vzdálenost od středu koule. Potenciál v nekonečnu uvažujte jako nulový.

$$Q = \iiint\limits_V \varrho \, \mathrm{d}V = \iiint\limits_V kr \, \mathrm{d}V = k \int\limits_0^r \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} r^3 \sin\theta \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r = 2\pi k \int\limits_0^r \int\limits_0^\pi r^3 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r =$$
$$= 2\pi k \int\limits_0^r r^3 \left[-\cos\theta\right]_0^\pi \, \mathrm{d}r = 4\pi k \int\limits_0^r r^3 \, \mathrm{d}r = 4\pi k \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^r = \underline{r^4 k\pi}$$

$$E_{\mathrm{IN}} = \frac{r^4 k\pi}{\varepsilon_0 4\pi r^2} = \underline{\frac{kr^2}{4\varepsilon_0}}$$
$$E_{OUT} = \frac{R^4 k\pi}{\varepsilon_0 4\pi r^2} = \underline{\frac{kR^4}{4\varepsilon_0 r^2}}$$

$$\varphi_{\mathrm{OUT}} = -\int E_{OUT} \, \mathrm{d}r = -\int_\infty^r \frac{kR^4}{4\varepsilon_0 r^2} \, \mathrm{d}r = -\frac{R^4 k}{4\varepsilon_0} \int_\infty^r \frac{1}{r^2} \, \mathrm{d}r = -\frac{kR^4}{4\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r}\right]_\infty^r = \underline{\frac{kR^4}{4\varepsilon_0} \frac{1}{r}}$$

$$\varphi_{\mathrm{IN}} = -\int E_{\mathrm{IN}} \, \mathrm{d}r = -\int_R^r \frac{kr^2}{4\varepsilon_0} \, \mathrm{d}r = -\frac{k}{4\varepsilon_0} \int_R^r r^2 \, \mathrm{d}r = -\frac{k}{4\varepsilon_0} \left[\frac{r^3}{3}\right]_R^r + C =$$
$$= -\frac{k}{4\varepsilon_0} \left[\frac{r^3}{3} - \frac{R^3}{3}\right] + C = \frac{k}{4\varepsilon_0} \left[\frac{R^3}{3} - \frac{r^3}{3}\right] + C$$

$$\varphi_{\mathrm{OUT}}(r = R) = \varphi_{IN}(r = R)$$
$$\frac{kR^4}{4\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R} = \frac{k}{4\varepsilon_0} \left[\frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{3}\right] + C$$
$$C = \frac{kR^3}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$\varphi_{\mathrm{IN}} = \underline{\frac{k}{4\varepsilon_0} \left(\frac{R^3}{3} - \frac{r^3}{3}\right) + \frac{kR^3}{4\varepsilon_0}}$$