Naposledy upraveno: 23. března 2020.

Úkol 10. týden

Příklad 10.1. Uvažujte magnetický dipól v obdobném tvaru jako elektrický dipól

$$\vec{B} = K\left\langle \frac{(x-a,y,z)}{\left[(x-a)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}} - \frac{(x+a,y,z)}{\left[(x+a)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}} \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
\phi_{\mathrm{B}} &= \int_{-\infty}^{\infty} K\left(\frac{(x-a,y,z)}{\left[(x-a)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}} - \frac{(x+a,y,z)}{\left[(x+a)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = K\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-2a}{\left[a^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \\
&= \left\| \begin{array}{c} y = r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{array} \right\| = K\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} = \frac{2a}{\left[a^2+r^2\right]^{3/2}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = -2aK2\pi\int_0^{\infty}\frac{r}{\left[a^2+r^2\right]^{3/2}}\,\mathrm{d}r = \left\| \begin{array}{c} t = a^2+r^2 \\ \mathrm{d}t = 2r\,\mathrm{d}r \end{array} \right\| = \\
&= -4aK\pi\int_0^{\infty}\frac{t}{t^{3/2}}\frac{\mathrm{d}t}{2r} = -2aK\pi\left[-2t^{-1/2}\right]_0^{\infty} = 4aK\pi\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+r^2}}\right]_0^{\infty} = 4K\pi a\left(-\frac{1}{a}\right) = \underline{-4K\pi}
\end{aligned}$$

Příklad 10.2. Uvažujte elektrické pole ve tvaru $\vec{E} = \frac{k}{\rho^2}(y,-x,z)$, kde $\rho^2 = x^2+y^2$. Určete vektor magnetické indukce.

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\times\vec{E} &= \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{kz}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-kx}{x^2+y^2}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{ky}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{kz}{x^2+y^2}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-kx}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{ky}{x^2+y^2}\right)\right) = \\
&= \left(-\frac{2kzy}{\rho^4}, \frac{2kxz}{\rho^4}, -\left(\frac{k(x^2+y^2)-2ky^2}{\rho^4}\right) - \left(\frac{k(x^2+y^2)-2ky^2}{\rho^4}\right)\right) = \\
&= \left(-\frac{2kzy}{\rho^4}, \frac{2kxz}{\rho^4}, \frac{-k\rho+2kx^2-k\rho+2ky^2}{\rho^4}\right) = \frac{2kz}{\rho^4}(-y,x,0)
\end{aligned}$$

$$\vec{B} = \int\dot{\vec{B}}\,\mathrm{d}t = \int -\frac{2kz}{\rho^4}(-y,x,0)\,\mathrm{d}t = \frac{2kzt}{\rho^4}(y,-x,0) + \vec{c}(\vec{r}); \qquad \nabla\cdot\vec{c}(\vec{r}) = 0$$

Příklad 10.3. Uvažujte skalární a vektorový potenciál v následujícím tvaru $\varphi = \frac{A_0}{2}\left(\frac{3}{k} - 2r^2\right)e^{-k(r^2+c^2t^2)}$, $\vec{A} = A_0\vec{r}te^{-k(r^2+c^2t^2)}$. Ukažte, zdali platí Lorenzova kalibrační podmínka.
Lorentzova kalibrační podmínka má tvar

$$\nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = A_0te^{kc^2t^2}\cdot e^{-kr^2}(1-2x^2k+1-2y^2k+1-2z^2k) = A_0t\mathrm{e}^{-k(r^2+c^2t^2)}(-2kr^2+3)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{A_0}{2}\left(\frac{3}{4}-2r^2\right)\cdot\mathrm{e}^{-k(r^2+c^2t^2)}\cdot(-2c^2tk)$$

$$\begin{aligned}
&A_0t\mathrm{e}^{-k(r^2+c^2t^2)}(-2kr^2+3) + \frac{1}{c^2}\cdot\frac{A_0}{2}\left(\frac{3}{4}-2r^2\right)\cdot\mathrm{e}^{-k(r^2+c^2t^2)}\cdot(-2c^2+k) = \\
&= A_0\cdot\mathrm{e}^{-k(r^2+c^2t^2)}\left(t\left(-2kr^2+3\right) + \left(\frac{3}{4}-2r^2\right)\cdot(-tk)\right) = A_0\cdot\mathrm{e}^{-k(r^2+c^2t^2)}\left(-2kt+3t-3t+2tkr^2\right) = 0
\end{aligned}$$

Lorentzova kalibrační podmínka tedy platí.

Příklad 10.4. Uvažujte skalární a vektorový potenciál ve tvaru $\varphi = 0$, $\vec{A} = (A_0 \sin(kz - \omega t))$. Vypočtěte hustotu náboje, vektory elektrické intenzity, magnetické indukce a hustotu proudu. Dále zkontrolujte platnost bez-zdrojových Maxwellových rovnic.

$$\vec{E} = -\nabla \cdot \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}
E_{\mathrm{x}} &= 0 - A_0 \cos(kz - wt)w = A_0 \cos kz - \omega t \\
E_{\mathrm{y}} &= 0 \\
E_{\mathrm{z}} &= 0 \\
\vec{E} &= \underline{(A_0 \cos kz - \omega t, 0, 0)}
\end{aligned}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \underline{(A_0 \cos(kz - \omega t), 0, 0)}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \implies \underline{\rho = 0}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \mu_0 \varepsilon_0 \\
\nabla \times \vec{B} &= (0 + A_0 k^2 \sin kz - \omega t), 0, 0)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = (-A_0 \omega \sin(kz - \omega t)(-\omega), 0, 0) = (A_0 \omega^2 \sin(kz - \omega t), 0, 0)$$

$$\begin{aligned}
\vec{j} &= \frac{\nabla \times \vec{B}}{\mu_0} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \varepsilon_0 = \frac{A_0 k^2 \sin(kz - \omega t), 0, 0}{\mu_0} - (\varepsilon_0 (A_0 \omega^2 \sin(kz - \omega t), 0, 0)) = \\
&= \underline{A_0 k^2 \sin(kz - \omega t) \left(\frac{k^2}{\mu_0} - \varepsilon_0 \omega^2, 0, 0 \right)}
\end{aligned}$$

Zřejmě platí:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Dále ověříme jestli platí

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{E} &= (0, -A_0 \omega \sin(kz - \omega t), 0) \\
\frac{\partial B}{\partial t} &= (0, -A_0 k \omega \sin kz - \omega t, 0)
\end{aligned}$$

Čímž jsme ověřili pravou i levou stranu rovnice.

Příklad 10.5. Určete elektrostatickou energii $\mathcal{E}$ koule o poloměru R s homogenním rozložením náboje.

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{4}{3} \pi R^3 \varrho \\
\varrho &= \frac{3Q}{4 \pi R^3}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{E} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 \,\mathrm{d}V$$
$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} = \frac{\varrho V}{\varepsilon_0 S}$$

$$E_\mathrm{u} = \frac{\varrho\frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0 4\pi r^2} = \frac{\varrho r}{3\varepsilon_0}$$
$$E_\mathrm{v} = \frac{\varrho\frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0 4\pi r^2} = \frac{\varrho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

$$\mathcal{E}_\mathrm{u} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{\varrho^2 r^2}{9\varepsilon_0^2} r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = \frac{\varepsilon_0\varrho^2}{18\varepsilon_0}4\pi\frac{R^5}{5} = \frac{2\varrho^2 R^5\pi}{45\varepsilon_0}$$

$$\mathcal{E}_\mathrm{v} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{\rho^2 R^6}{9\varepsilon_0^2 r^4} r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = \frac{4\pi\rho^2 R^6}{18\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{R}\right) = \frac{24\pi\rho^2 R^5}{18\varepsilon_0} = \frac{2\pi\rho^2 R^5}{9\varepsilon_0}$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_\mathrm{u} + \mathcal{E}_\mathrm{v} = \frac{2\varrho^2 R^5\pi}{45\varepsilon_0} + \frac{2\pi\rho^2 R^5}{9\varepsilon_0} = \frac{2\pi\rho^2 R^5}{9\varepsilon_0}\left(\frac{1}{5}+1\right) = \frac{2\pi\rho^2 R^5}{9\varepsilon_0}\frac{6}{5} = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{45\varepsilon_0}$$

Pakliže uvážíme celkový náboj koule jako:

$$Q = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$$
$$Q^2 = \frac{16}{9}\pi^2\rho^2 R^6$$

Dostáváme pro celkovou energii $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} = \frac{9Q^2}{15\cdot 4\pi R\varepsilon_0} = \underline{\frac{3Q^2}{20\pi R\varepsilon_0}}$$