Naposledy upraveno: 22. února 2020.

Úkol 5. týden

Příklad 5.1. Vypočtěte kapacitu kondenzátoru tvořeného dvěma kruhovými deskami o poloměru R. Kruhy jsou planparalelní a jejich středy leží na ose z, kladný v bodě $-a$ a záporný v bodě a. Uvažujte, že pro kruhy platí $a \gg R$. Dále uvažujte, že plošná hustota náboje σ na deskách je konstantní (požadavek konstantního σ je v reálném případě obtížně splnitelný).

$$C = \frac{Q}{U} \qquad U = \Delta\varphi \qquad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\mathrm{d}Q}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

Nejdříve vypočteme potenciál na ose z od jediného kruhu. Bez újmy na obecnosti (BÚNO) můžeme posunout kruh do bodu $(0,0,0)$.

$$\begin{aligned}
\varphi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma r'\,\mathrm{d}\varphi'\,\mathrm{d}r'}{(r'^2\cos^2\varphi' + r'\sin^2\varphi' + z^2)^{1/2}} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{r'}{[r'^2 + z'^2]^{1/2}}\,\mathrm{d}\varphi'\,\mathrm{d}r' = \\
&= \frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2}\int_0^R \frac{r'}{[r'^2+z^2]^{1/2}}\,\mathrm{d}r' = \left|\begin{matrix} u = r'^2 + z^2 \\ \mathrm{d}u = 2r'\,\mathrm{d}r' \end{matrix}\right| = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_\alpha^\beta \frac{r'}{u^{1/2}}\frac{\mathrm{d}r}{2r'} = \\
&= \frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^{1/2}} = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\left[2u^{1/2}\right]_{(1)}^{(2)} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[(r'^2+z^2)^{1/2}\right]_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[(R^2+z^2)^{1/2} - z\right]
\end{aligned}$$

$$\varphi_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}R \;\wedge\; \varphi_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+4a^2} - 2a\right)$$

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+4a^2} - 2a - R\right) \\
U = 2\cdot\Delta\varphi &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+4a^2} - 2a - R\right)
\end{aligned}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q\varepsilon_0}{\sigma\left(\sqrt{R^2+4a^2} - 2a - R\right)} = \underline{\frac{-S\varepsilon_0}{\sqrt{R^2+4a^2} - 2a - R}}$$

Příklad 5.2. Uvažujte homogenně nabitý (plošná hustota náboje je σ) tenký kruh o poloměru R. Jaká e kapacita kruhu oproti nekonečnu?

$$\begin{aligned}
C &= \frac{Q}{U} \\
\varphi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int \frac{\mathrm{d}Q'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}Q' &= \sigma r'\,\mathrm{d}\varphi'\,\mathrm{d}r' \\
\vec{r} &= (0,0,z) \\
\vec{r}' &= (r'\cos\varphi', r'\sin\varphi', 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{r'\sigma}{\left[r'^2\cos^2\varphi' + r'^2\sin^2\varphi' + z^2\right]^{1/2}}\,\mathrm{d}\varphi'\,\mathrm{d}r' = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi'\int_0^R \frac{r'}{\left[r'^2+z^2\right]^{1/2}}\,\mathrm{d}r' = \\
&= \frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r'}{\left[r'^2+z^2\right]^{1/2}}\,\mathrm{d}r' = \left\|\begin{matrix} u = r'^2 + z^2 \\ \mathrm{d}u = 2r'\,\mathrm{d}r' \end{matrix}\right\| = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{r'}{u^{1/2}}\frac{\mathrm{d}u}{r'} = \frac{1\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{1}{u^{1/2}}\,\mathrm{d}u = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\left[2u^{1/2}\right] = \\
&= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{r'^2+z^2}\right]_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2} - z\right)
\end{aligned}$$

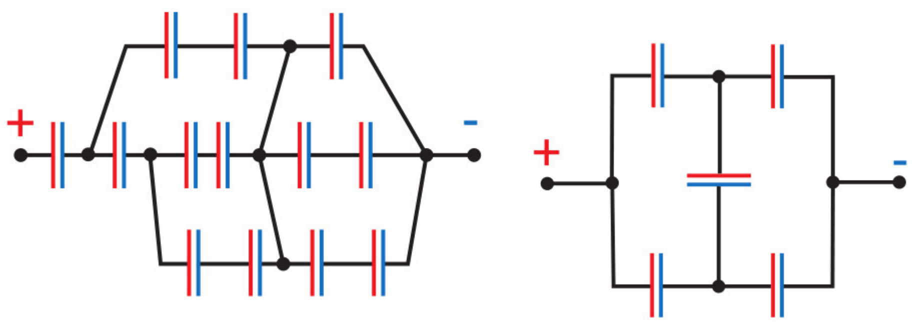
$$\varphi 1(z=0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} R$$
$$\varphi(z=\infty) = 0$$

$$\Delta\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} R$$
$$Q = S \cdot \sigma = \pi R^2 \sigma$$
$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2Q\varepsilon_0}{\sigma R} = \frac{2\pi R^2 \sigma \varepsilon_0}{\sigma R} = \underline{2\pi R \varepsilon_0}$$

Příklad 5.3. Vypočtěte zapojení kondenzátorů z prvního obrázku 1, kde každý kondenzátor má kapacitu C.

Kapacitu dvou sériově zapojených kondenzátorů o kapacitě C označíme C_A. Kapacitu dvou sériově zapojených kondenzátorů o kapacitě C_A označme C_B. Kapacitu jednoho kondenzátoru o kapacitě C_A a druhého kondenzátoru o kapacitě C_B, které jsou zapojeny sériově označme C_C. Kapacitu dvou paralelně zapojených kondenzátorů, které mají kapacitu C_B označme C_D. Kapacitu jednoho kondenzátoru o kapacitě C a druhého kondenzátoru o kapacitě C_D, které jsou zapojeny sériově označme C_E. Kapacitu jednoho kondenzátoru o kapacitě C_C a druhého kondenzátoru o kapacitě C_E, které jsou zapojeny paralelně označme C_F. A konečně kapacitu jednoho kondenzátoru o kapacitě C a druhého kondenzátoru o kapacitě C_F, které jsou zapojeny sériově označme C_{all}. Potom dostáváme

$$\frac{1}{C_A} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} \implies C_A = \frac{C}{2}$$
$$\frac{1}{C_B} = \frac{1}{C_A} + \frac{1}{C_A} \implies C_B = \frac{C}{4}$$
$$\frac{1}{C_C} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C_A} \implies C_C = \frac{C}{3}$$
$$C_D = 2C_B = \frac{C}{2}$$
$$\frac{1}{C_E} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C_D} \implies C_E = \frac{C}{3}$$
$$C_F = C_C + C_E = \frac{2C}{3}$$
$$\frac{1}{C_{\text{all}}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C_F} = \frac{1}{C} + \frac{3}{2C} = \frac{5}{2C} \implies C_{\text{all}} = \frac{2C}{5}$$

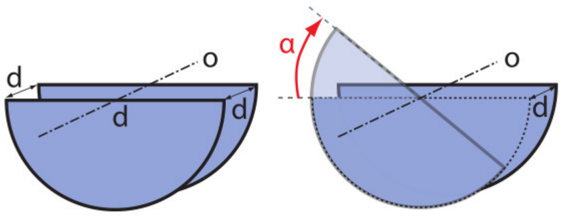


Obrázek 1: Zapojení kondenzátorů.

Příklad 5.4. Uvažujte zapojení z druhého obrázku 1. Jaké má zapojení celkovou kapacitu, je-li kapacita všech kondenzátorů rovna C?

Jediná věc, co si musíme uvědomit, že fakt, že na prostředním kondenzátoru není napětí. Tím dostáváme zapojení bez onoho prostředního kondenzátoru. Kapacitu dvou sériově zapojených kondenzátorů o kapacitě C označíme C_A. Celkovou kapacitu označme C_{all}. Dostáváme:

$$\frac{1}{C_A} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} \implies C_A = \frac{C}{2}$$
$$\underline{C_{\text{all}} = C_A + C_A = C}$$



Obrázek 2: Polokruhový kondenzátor.

Příklad 5.5. Uvažujte kondenzátor tvořený dvěma polokruhovými disky o poloměru R. Diky se mohou vůči sobě otáčet kolem osy (osy kruhů, které doplňují polokruhy) - viz obrázek 2. Na desky kondenzátoru je přivedeno konstantní napětí U. Určete velikost momentu síly, pokud disky vychýlíte o úhel α. Uvažujte $R \gg d$, kde d je vzdálenost disků.

$$M = \frac{\partial E}{\partial \alpha}$$
$$E = \frac{1}{2} C U^2$$

$$u = k\alpha + q$$
$$1 = 0 + q \implies q = 1$$
$$0 = k\pi + 1 \implies k = -\frac{1}{\pi}$$
$$u = -\frac{1}{\pi}\alpha + 1$$

$$C = \varepsilon_0 \cdot \frac{S}{d} \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right)$$

$$E = \frac{1}{CU^2} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{U^2 \pi R^2}{2d}\left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2 U^2}{4\alpha}\left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right)$$
$$M = -\frac{\partial E}{\partial \alpha} = \underline{\frac{\varepsilon_0 R^2 U^2}{4d}}$$