

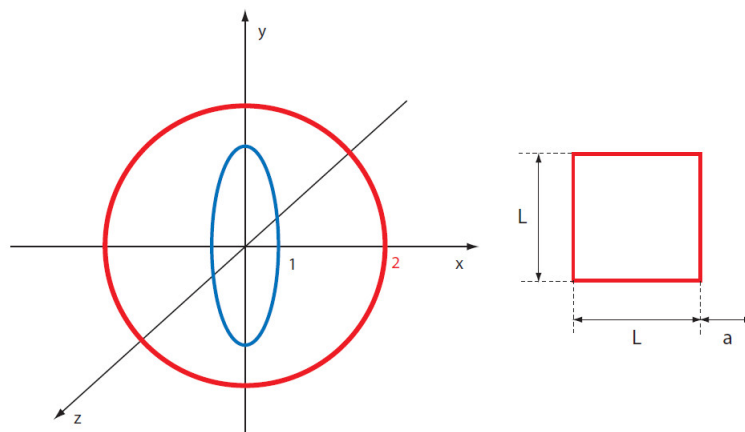
Úloha 11. týden

Příklad k procvičení 11.1. Uvažujte zapojení z obrázku 1 b). Nejvzdálenější strana čtverce od vodiče je fixována a stává se tak osou otáčení čtverce. Zjistěte, jaký náboj proteče čtvercovou smyčkou, je-li její odpor R . Vodičem protéká proud I a smyčka se otočí o 180° .

$$\begin{aligned}U_I &= -\dot{\Phi}_B \\ R\dot{I} &= -\dot{\Phi}_B \\ R \int_0^Q dQ &= - \int_{\Phi_z}^{\Phi_k} d\Phi_B \\ Q &= \frac{\Phi_z - \Phi_k}{R}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int B \, dl &= \mu_0 I \\ B &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_z &= l \int_a^{L+a} B \, dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \ln \left| \frac{L+a}{a} \right| l \\ \Phi_k &= - \int_{L-a}^{L+a} B \, dr = \frac{-\mu_0 I l}{2\pi} \cdot \ln \left| \frac{2L+a}{L+a} \right| \\ Q &= \frac{\mu_0 I l}{2\pi R} \cdot \ln \left| \frac{2L+a}{a} \right|\end{aligned}$$



Obrázek 1: a) Dvě kolmé soustředné smyčky. b) Čtvercová smyčka a vodič.

Příklady k procvičení 11.2. Uvažujte kruhovou smyčku o poloměru R_1 . Na ose smyčky ve vzdálenosti $d \gg R_1$ se nachází druhá kruhová smyčka o poloměru $R_2 \gg R_1$. Osy smyček jsou totožné. Určete vzájemnou indukčnost.

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= (0, 0, z) \\
\vec{r} &= (R_1 \cos \varphi', R_1 \sin \varphi', 0) \\
d\vec{r} &= (R_1 \sin \varphi', R_1 \cos \varphi', 0) d\varphi' \\
(\vec{r} - \vec{r}') &= (-R_1 \cos \varphi', -R_1 \sin \varphi', z) \\
(\vec{r} - \vec{r}') &= (-R_1 \cos \varphi'_1 z, -R_1 \sin \varphi'_1 z, -R_1^2 \cos^2 \varphi' - R_1^2 \sin^2 \varphi') d\varphi'
\end{aligned}$$

$$B = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} d\vec{r} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} (-R_1 \cos \varphi, -R_1 \sin \varphi, -R_1^2) d\varphi'$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I R_1^2 z}{4\pi (R_1^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I R_1^2}{2|R_1^2 + z^2|^{3/2}}$$

$$\Phi_B = \int B_z ds = \frac{\mu_0 I R_1^2 \pi R_2^2}{2|R_1^2 + z^2|^{3/2}}$$

$$\Phi_B = MI \implies M = \frac{\Phi_B}{I}$$

$$M = \frac{\mu_0 R_1^2 \pi R_2^2}{2|R_1^2 + d^2|^{3/2}}$$

Příklady k procvičení 11.3. Uvažujte obvod s rezistorem R_1, R_2 zdrojem emn. \mathcal{E} a cívkou L (viz zapojení na obrázku 2 a)). Uvažujte, že na počátku je obvod zapojený po dostatečně dlouhou dobu. Poté spínač vypneme, jak je zakresleno v obrázku. Jaká náboj po vypnutí spínače proteče rezistorem R_2 ?

$$\mathcal{E} = R_1 I_0 \implies I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R_1}$$

$$-L \frac{dI}{dt} = R_2 I$$

$$\int \frac{dI}{IR_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \cdot \ln I = \frac{-t}{L} + k$$

$$I = e^{-\frac{tR_2}{L} \cdot C} \quad \wedge \quad (t = 0 \implies I = I_0)$$

$$I_0 = C \implies I = e^{-\frac{tR_2}{L}} \cdot I_0$$

$$Q = \int_0^\infty I dt = \int_0^\infty \frac{\mathcal{E}}{R_1} e^{-\frac{tR_2}{L}} dt = \left[\frac{\mathcal{E}}{R_1} e^{-\frac{tR_2}{L}} \left(-\frac{L}{R_2} \right) \right]_0^\infty = -\frac{\mathcal{E}}{R_1} \cdot \frac{L}{R_1} \cdot (0 - 1) = \frac{\mathcal{E}L}{R_1 R_2}$$

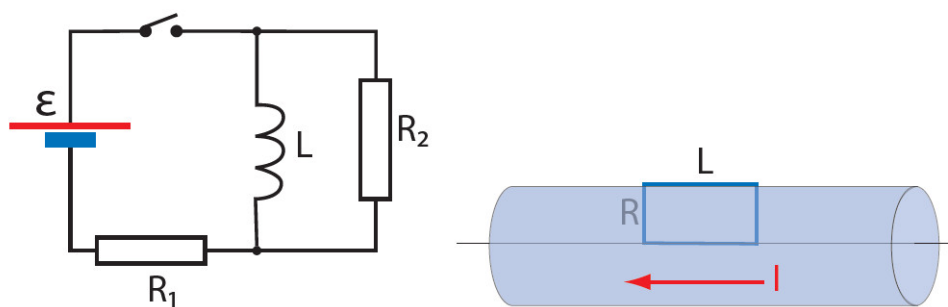
Příklady k procvičení 11.4. Uvažujte nekonečně dlouhý vodič válcového tvaru o poloměru R , kterým protéká proud I . Hustota proudu ve vodiči je homogenní. Jaký je magnetický tok obdélníkem o stranách R a L (viz 2 b)).

$$I = \int \vec{j} d\vec{s} = j\pi r^2 \quad \wedge \quad B = \frac{\mu_0 j r}{2}$$

$$\oint \vec{B} d\vec{r} = \mu_0 I$$

$$B 2\pi r = \mu_0 j \pi r^2$$

$$\Phi_B = \int B ds = \int_0^R \int_0^L \frac{\mu_0 j r}{2} dl dl = \frac{\mu_0 j L}{2} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R = \frac{\mu_0 j L R^2}{4} = \frac{\mu_0 I L}{4\pi}$$



Obrázek 2: a) Obvod s cívkou a rezistory. b) Drátek ve vodiči.

Příklady k procvičení 11.5. Uvažujte dvě nekonečně velké rovnoběžné desky, rovnoběžné s rovinou yz , procházející body $x = \pm a$. Těmito deskami protéká proud ve směru $\pm z$ (jednou v kladném a druhou v záporném směru). Délková hustota proudu je i (proud je $I = iL$). Mezi deskami se nachází vodivá kruhová smyčka o poloměru R (viz obrázek 3)

$$\oint \vec{B} d\vec{r} = \mu_0 I$$

$$\oint B dr = 2BL = \mu_0 I$$

$$2BL = \mu_0 I$$

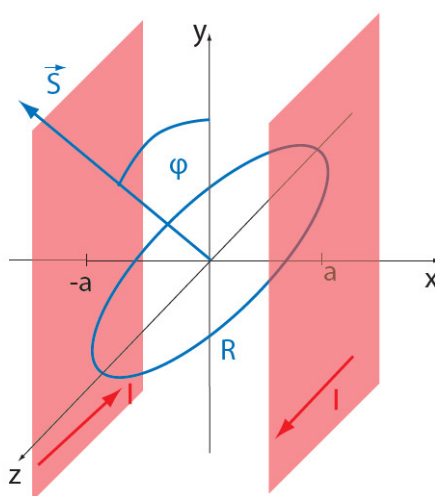
$$B = \frac{\mu_0 I}{2L}$$

$$B = \frac{\mu_0 i L}{2L} = \frac{\mu_0 i}{2}$$

$$B_c = \mu_0 i$$

$$B_c = \|\vec{B}\|$$

$$\Phi = \oint \vec{B} d\vec{s} = B_c S \cos \varphi = \underline{\mu_0 i \pi R^2 \cdot \cos \varphi}$$



Obrázek 3: Vodivá smyčka mezi proudovými deskami.