

Základní vztahy pro elektřinu a magnetismus

Jan Beran
UČO: 460846

21. února 2019

Toto je předběžná verze. Pakliže najdete jakoukoli chybu, či něco co chybí, nebo by se dalo něco přidat, kontaktujte mě na [✉ 460846@mail.muni.cz](mailto:460846@mail.muni.cz) nebo kdekoli mě najdete.

1 Matematika

1.1 Vektorová analýza

Diferenciální operátor nabla.

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (1)$$

Diferenciální Laplaceův operátor - Laplace

$$\nabla^2 = \text{div grad} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

Gradient skalárního pole

$$\text{grad } F = \vec{\nabla} \cdot F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = \vec{V} \quad (3)$$

Divergence vektorového pole

$$\text{div } \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \right) = S \quad (4)$$

Rotace vektorového pole

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{V} \quad (5)$$

Laplace působící na skalární funkci F

$$\nabla^2 F = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right) \quad (6)$$

Laplace působící na vektorovou funkci (pole) $\vec{V}$

$$\nabla^2 \vec{V} = \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) \quad (7)$$

$$\nabla^2 \vec{V} = \left(\frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial z^2} \right) \quad (8)$$

Identity:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F} \quad (9)$$

Křivkový integrál prvního druhu:

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) \, ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \, dt \quad (10)$$

Křivkový integrál druhého druhu:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{V} \, dx = \int_{t_1}^{t_2} (V_x(t), V_y(t), V_z(t)) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \, dt \quad (11)$$

Gaussova věta

$$\oiint_S \vec{A} \, d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \, dV \quad (12)$$

Stokesova věta

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \, d\vec{r} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{A} \, dS \quad (13)$$

1.2 Souřadnice

Jacobiho matice při transformaci z kartézských souřadnic x, y, z do nových souřadnic a, b, c :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{pmatrix} \quad (14)$$

1.2.1 Sférické souřadnice

Převod z kartézských do sférických (kulových) souřadnic.

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \sin \theta \cos \alpha \\ y &= r \cdot \sin \theta \sin \alpha \\ z &= r \cdot \cos \theta \end{aligned}$$

Infinitezimální objem a povrch.

$$\begin{aligned} dV &= r^2 \sin \theta \, dr \, d\alpha \, d\theta \\ dS &= r^2 \sin \theta \, d\alpha \, d\theta \end{aligned}$$

Jakobián.

$$|J| = r^2 \sin \theta$$

1.2.2 Válcové souřadnice

Převod z kartézských do válcových (cylindrických) souřadnic.

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \alpha \\ y &= r \cdot \sin \alpha \\ z &= z \end{aligned}$$

Infinitezimální objem a povrch.

$$\begin{aligned} dV &= r \, dr \, d\alpha \, dz \\ dS &= r \, dr \, d\alpha \end{aligned}$$

Jakobián

$$|J| = r$$

1.2.3 Polární souřadnice

Převod z kartézských do polárních souřadnic.

$$x = r \cdot \cos \alpha$$

$$y = r \cdot \sin \alpha$$

Infinitezimální povrch a délka.

$$dS = r \, dr \, d\alpha$$

$$dl = r \, d\alpha$$

Jakobián

$$|J| = r$$

1.3 Integrály

Ve jmenovateli je $(x^2 + a^2)^{1/2}$

1. $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{1/2}} = \ln|x + (x^2 + a^2)^{1/2}| + C$
2. $\int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{1/2}} = (x^2 + a^2)^{1/2} + C$
3. $\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^{1/2}} = \frac{x}{2}(x^2 + a^2)^{1/2} - \frac{a^2}{2} \ln|x + (x^2 + a^2)^{1/2}| + C$
4. $\int \frac{x^3 dx}{(x^2 + a^2)^{1/2}} = \frac{(x^2 + a^2)^{3/2}}{3} - a^2(x^2 + a^2)^{1/2}$
5. $\int \frac{dx}{x(x^2 + a^2)^{1/2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + (x^2 + a^2)^{1/2}}{x} \right|$
6. $\int \frac{dx}{x^2(x^2 + a^2)^{1/2}} = -\frac{(x^2 + a^2)^{1/2}}{a^2 x}$
7. $\int \frac{dx}{x^3(x^2 + a^2)^{1/2}} = -\frac{(x^2 + a^2)^{1/2}}{2a^2 x^2} + \frac{1}{2a^3} \ln \left| \frac{a + (x^2 + a^2)^{1/2}}{x} \right|$

Ve jmenovateli je $(x^2 + a^2)^{3/2}$

1. $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2 + a^2)^{1/2}}$
2. $\int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$
3. $\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{x}{(x^2 + a^2)^{1/2}} + \ln|x + (x^2 + a^2)^{1/2}| + C$
4. $\int \frac{x^3 dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = (x^2 + a^2)^{1/2} + \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$

2 Mechanika

Gravitační síla

$$\vec{F}_g = \kappa \cdot \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad (15)$$

Gravitační pole

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m} \quad (16)$$

Potenciální energie

$$\Delta E_p = - \int_a^b \vec{F}_g \cdot d\vec{r} \quad (17)$$

$$\vec{F} = - \text{grad } E_p = -\vec{\nabla} \cdot E_p \quad (18)$$

Gravitační potenciál

$$V_g = - \int_a^b \vec{g} \cdot d\vec{r} \quad (19)$$

Výkon

$$P = \frac{\partial W}{\partial t} \quad (20)$$

3 Elektřina a magnetismus

3.1 Síla (Coulombův zákon)

Uvažujme náboje Q_1 a Q_2 . Elektrická síla, kterou působí náboj Q_1 na Q_2 je

$$\vec{F}_1 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad (21)$$

Pro elektrickou sílu, kterou působí náboj Q_2 na Q_1 platí

$$\vec{F}_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad (22)$$

Vztah mezi silou $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$.

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad (23)$$

Princip superpozice nám dovoluje velmi jednoduše spočítat sílu, která působí na náboj, když je v jeho okolí nábojů více. Uvažujme náboje $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_N$. Sílu, kterou působí náboje $Q_2, Q_3, \dots, Q_N$ na náboj Q_1 můžeme vyjádřit jako

$$\vec{F}_1 = \sum_{k=1}^N \frac{Q_1 \cdot Q_k}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_k)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_k|^3} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{(Q_k \cdot \vec{r}_1 - \vec{r}_k)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_k|^3} \quad (24)$$

Elektrická síla pro bodový náboj

$$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (25)$$

3.2 Elektrická intenzita a potenciál

Elektrická intenzita.

$$\vec{E} = \frac{F_e}{Q_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (26)$$

Přesněji bychom mohli elektrickou intenzitu definovat jako

$$\vec{E} = \lim_{Q_1 \rightarrow 0} \frac{F_e}{Q_1} \quad (27)$$

Princip superpozice (diskrétní rozdělení)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (28)$$

Náboj vyjádřen pomocí hustoty náboje

$$dQ = \varrho(\vec{r}') dV' \quad (29)$$

$$dQ = \sigma(\vec{r}') dS' \quad (30)$$

$$dQ = \tau(\vec{r}') dl' \quad (31)$$

Elektrická intenzita obecného zdroje (spojité rozdělení)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') dQ}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (32)$$

Elektrický potenciál, kde $\vec{A}$ je počáteční bod (bod, kde je potenciál roven nule) a bod $\vec{r}$ je koncový bod.

$$\varphi = - \int_{\vec{A}}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (33)$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{dQ}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + K \quad (34)$$

Elektrická intenzita pro bodový náboj

$$\vec{F} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (35)$$

Dipólový moment

$$\vec{p} = Q \cdot \vec{l} \quad (36)$$

Silový moment, působící na dipól umístěný v homogenním elektrickém poli

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (37)$$

Potenciální energie dipólu

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (38)$$

3.3 Kondenzátor a kapacita

Kapacita kondenzátoru

$$C = \frac{Q}{U} \quad (39)$$

Kapacita deskového kondenzátoru

$$C = \frac{S \cdot \epsilon_0}{d} \quad (40)$$

Práce potřebná k přenesení náboje

$$dW = U dQ \quad (41)$$

3.4 Maxwellovy rovnice

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (42)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (43)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (44)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (45)$$

Pomocí Gaussovy a Stokesovi věty převedeme Maxwellovi rovnice z diferenciálního do integrálního tvaru.

$$\oiint \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (46)$$

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \quad (47)$$

$$\oiint \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad (48)$$

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} \quad (49)$$

3.5 Maxwellovi rovnice pro prostředí

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \varrho \quad (50)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (51)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (52)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (53)$$

Znovu pomocí Gaussovy a Stokesovi věty převedeme Maxwellovi rovnice na integrální tvar

$$\oiint \vec{D} \, d\vec{S} = Q \quad (54)$$

$$\oint \vec{E} \, d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \quad (55)$$

$$\oiint \vec{B} \, d\vec{S} = 0 \quad (56)$$

$$\oint \vec{H} \, d\vec{l} = I + \iint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \, d\vec{S} \quad (57)$$

3.6 Rovnice pro potenciály a další rovnice

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (58)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (59)$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (60)$$

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (61)$$

3.7 Magnetické pole

Magnetické pole v cívice, kde η je hustota závitů, N je počet závitů a a délka horizontální strany cívky.

$$B = \mu_0 I \eta, \quad \text{kde } \eta = \frac{N}{a} \quad (62)$$

Biotův-Savartův zákon (hustota proudu)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j} \times (\vec{r} - \vec{r}') \, dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (63)$$

Biotův-Savartův zákon (proud)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (64)$$

3.8 Obvody

Elektrický proud

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (65)$$

Proud z hustoty elektrického proudu

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (66)$$

Hustota proudu

$$\vec{j} = \varrho \vec{v} \quad (67)$$

Ohmův zákon

$$I = \frac{U}{R} \iff U = RI \quad (68)$$

Elektrická vodivost

$$G = \frac{1}{R} \quad (69)$$

Diferenciální Ohmův zákon¹

$$\vec{E} = \rho \vec{j} \quad (70)$$

1. Kirchhoffův zákon: Součet proudů do uzlu vtékajících se rovná součtu proudů z uzlu vytékajících.

$$\sum I_{in} = \sum I_{out} \quad (71)$$

2. Kirchhoffův zákon: Součet elektromotorických napětí (zkratka - emn.) na jednotlivých zdrojích v uzavřené smyčce se rovná součtu úbytku napětí na rezistorech.

$$\sum_j \varepsilon_j = \sum_i U_{iR} = I \sum_i R_i \quad (72)$$

Sériově zapojené rezistory

$$\sum_i R_i = R \quad (73)$$

Paralelně zapojené rezistory

$$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i} \quad (74)$$

Kapacita kondenzátorů zapojených do série

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{Q_i} \quad (75)$$

Kapacita kondenzátorů zapojených do paralelně

$$C = \sum_i Q_i \quad (76)$$

Úbytek napětí na cívce

$$U = -L \frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{d\phi_B}{dt} \quad (77)$$

Vlastní indukčnost dlouhého solenoidu

$$L = \frac{\mu_0 S N^2}{l} \quad (78)$$

Vzájemná indukčnost

$$U_1 = M \frac{\partial I_2}{\partial t}, \quad M = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\vec{r}_2 \cdot d\vec{r}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad (79)$$

¹Řecké písmo ϱ a ρ je to stejné „rhó“. Jen se v textu píše jinak, aby bylo jasné, že jde o rezistivitu a ne o hustotu náboje.

Rezistance

$$Z_R = R \quad (80)$$

Induktance

$$Z_L = i\omega L \quad (81)$$

Kapacitance

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} \quad (82)$$

3.9 Energie

Elektrostatická energie

$$E_p = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{\Omega} E^2 \, dV, \quad E_p = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \varphi \varrho \, dV \quad (83)$$

3.10 Konkrétní případy

V těchto příkladech vždy zkoumáme elektrické pole nebo intenzitu na ose z , pokud není řečeno jinak. Písmenem T budeme označovat místo, kde je elektrický potenciál roven nule.

3.10.1 Přímka

Elektrická intenzita

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 z} \quad (84)$$

Elektrický potenciál

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{T}{z} \quad (85)$$

3.10.2 Úsečka

Elektrická intenzita (nad středem úsečky), kde l je velikost úsečky

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 z} \cdot \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4z^2}} \quad (86)$$

3.11 Obruč

Elektrická intenzita

$$E = \frac{\tau R}{2\epsilon_0} \cdot \frac{z}{\sqrt{(z^2 + R^2)^3}} \quad (87)$$

Elektrický potenciál

$$\varphi = \frac{1}{2\epsilon_0} \cdot \frac{\tau R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \quad (88)$$

3.11.1 Rovina

Elektrická intenzita

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (89)$$

Elektrický potenciál

$$\varphi = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} |z| \quad (90)$$

3.11.2 Deska

Elektrická intenzita

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \quad (91)$$

Elektrický potenciál

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right) \quad (92)$$

3.11.3 Válec

Elektrická intenzita uvnitř válce

$$E_{in} = \frac{\rho z}{2\epsilon_0} \quad (93)$$

Elektrická intenzita vně válce

$$E_{out} = \frac{R^2 \rho}{2\epsilon_0 z} \quad (94)$$

Elektrický potenciál uvnitř válce

$$\varphi_{in} = \frac{\rho}{4\epsilon_0} \cdot (R^2 - z^2) \quad (95)$$

Elektrický potenciál vně válce

$$\varphi_{out} = \frac{\varrho R^2}{2\varepsilon_0} \ln \frac{R}{z} \quad (96)$$

3.12 Sféra

Elektrická uvnitř sféry je elektrické pole nulové, což plyne přímo z Gaussova zákona, protože uvnitř Gaussovy plochy bude nulový náboj.

$$E_{in} = 0 \quad (97)$$

Elektrická intenzita vně sféry

$$E_{out} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{Q}{z^2} = \frac{\varrho R^2}{3\varepsilon_0 z^2} \quad (98)$$

Elektrický potenciál uvnitř sféry

$$\varphi_{in} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \quad (99)$$

Elektrický potenciál vně sféry

$$\varphi_{out} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 z} \quad (100)$$

3.12.1 Koule

Elektrická uvnitř koule

$$E_{in} = \frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{\varrho z}{3\varepsilon_0} \quad (101)$$

Elektrická intenzita vně koule

$$E_{out} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{Q}{z^2} = \frac{\varrho R^3}{3\varepsilon_0 z^2} \quad (102)$$

3.12.2 Kondenzátory

Deskový kondenzátor se vzdáleností desek d a plochou plochou S

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \quad (103)$$

Válcový kondenzátor o délce l , vnitřním poloměru a a vnějším b

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(b/a)} \quad (104)$$

Izolovaná nabitá koule o poloměru R

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R \quad (105)$$

Kulový kondenzátor s vnitřním poloměrem a a vnějším b

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \cdot \frac{ab}{b-a} \quad (106)$$