Lineární algebra

1997/1998

Jan Slovák

Obsah

Masarykova Universita
Brno

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

Úvodní poznámky

Tento text dávám k dispozici jako víceméně pracovní verzi mých příprav k přednáškám a nepovažuji jej za náhradu skutečné učebnice o předmětu. Pokrývá však celou odpřednášenou látku, někdy i podrobnosti, které na přednáškách nejsou uváděny. Na druhé straně je styl textu dosti hutný a stručný, a zřejmě obsahuje řadu nepříliš pečlivě propracovaných míst. Předpokládám, že studenti, kteří přednášky nenavštěvovali, budou muset často sáhnout po nějakých podrobnějších skriptech.

Protože vím, jak velké jsou rozdíly v kapacitě jednotlivých studentů, a protože nechci ani nudit ty schopnější, ani znemožnit další rozvoj těm méně schopným (resp. méně pracovitým), zmíním se o strukturaci textu a požadavcích ke zkoušce.

Snažím se vždy po základních definicích pojmů sdružit odvození jejich jednoduchých vlastností do několika vět (většinou s mnoha částmi). Jejich důkazy pak spočívají vesměs v pochopení definic, případně jednoduchých úvahách. Měly by být tedy zvládnutelné pro každého a budu se na ně ptát. Dále jsou v textu věty, které mají většinou své jméno (např. Laplaceova věta o rozvoji determinantu) a kompletní důkazy již bývají podstatně složitější. U nich lze očekávat pouze u dobrých studentů přehled o postupu důkazu a závislosti na jiných výsledcích. Slabší studenti uspějí se zvládnutím obsahů jejich tvrzení a možných aplikací. Zejména v těchto částech textu jsou odstavce označeny hvězdičkou. Chci tím naznačit zvýšenou potřebu pozornosti při čtení (nikoliv doporučené vynechání!).

Navíc se, zejména ke konci přednášky, vyskytují celé partie, které jsou adresovány těm schopnějším, vyznačím je většinou dvěmi hvězdičkami u příslušných odstavců, případně poznámkami pod čarou.

Na konci každé kapitoly připojím tzv. poznámky k přemýšlení. Jsou rozdílné složitosti, pro každého bude užitečné, když si na nich ověří stupeň pochopení předchozí teorie. Jejich složitost je také naznačena hvězdičkami. Úplně na konci textu jsou přiložena zadání cvičení. Časem je snad doplním o výsledky.

Vřele uvítám upozornění na nedokonalé či špatné části textu, případně návrhy na jeho vylepšení (nejlépe e-mailem na adresu `slovak@math.muni.cz`).

Jan Slovák

Část I. Vektorové prostory a soustavy lineárních rovnic

1. Skaláry, vektory, matice

V této kapitole rozšíříme běžně známé operace pro počítání s čísly na tzv. vektory a matice. Tím jednak získáme příklady pro později zavedené abstraktnější objekty, ale hlavně si připravíme technické prostředky pro práci s nimi.

1.1. Skaláry. Zformalizujeme vlastnosti číselných oborů jako např. celá čísla $\mathbb{Z}$, racionální čísla $\mathbb{Q}$, reálná $\mathbb{R}$, komplexní čísla $\mathbb{C}$. To znamená, že popíšeme explicitně ty vlastnosti, které budou potřebné pro odvozování celé teorie. Tím, že vždy budeme při důkazech používat pouze uvedené vlastnosti, bude celá teorie platná pro všechny objekty s uvedenými axiomy.[1]
Vlastnosti sčítání:

(KG1) $$(a+b)+c = a+(b+c),\ \text{pro všechny } a,b,c$$

(KG2) $$a+b = b+a,\ \text{pro všechny } a,b,c$$

(KG3) $$\text{existuje prvek } 0 \text{ takový, že pro všechny } a \text{ platí } a+0=a$$

(KG4) $$\text{pro všechny } a \text{ existuje prvek } (-a) \text{ takový, že platí } a+(-a)=0$$

Vlastnostem (KG1) – (KG4) říkáme vlastnosti *komutativní grupy.*
Vlastnosti násobení:

(O1) $$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c),\ \text{pro všechny } a,b,c$$

(O2) $$a\cdot b = b\cdot a,\ \text{pro všechny } a,b$$

(O3) $$\text{existuje prvek } 1 \text{ takový, že pro všechny } a \text{ platí } 1\cdot a = a$$

Distributivita:

(O4) $$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c,\ \text{pro všechny } a,b,c$$

Množiny s operacemi $+$, $\cdot$ a vlastnostmi (KG1)–(KG4), (O1)–(O4) se nazývají *komutativní okruhy.* Potřebujeme však zpravidla ještě další běžnou vlastnost čísel:

(P) $$\text{pro každý } a\neq 0 \text{ existuje prvek } a^{-1} \text{ takový, že platí, } a\cdot a^{-1}=1$$

Jestli naše objekty splňují navíc i (P), hovoříme o *poli* (často také o *komutativním tělese*).

[1] Zřejmě je při tom ale užitečné při sledování důkazů si představovat nějaký z dobře známých případů (např. reálná čísla).

Někdy se setkáme se slabší dodatečnou vlastností, např. $\mathbb{Z}$ nesplňuje (P), ale splňuje

(OI) $$a \cdot b = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{buď } a = 0 \text{ nebo } b = 0.$$

Hovoříme o *oboru integrity*.

Prvky nějaké množiny s operacemi + a · splňujícími výše uvedené vlastnosti (komutativní okruh, obor integrity, pole) budeme nazývat *skaláry*. Pokud nezdůrazníme něco jiného, půjde o pole.

1.2. Vektory nad polem skalárů. Symbolem $\mathbb{K}$ budeme nadále značit nějakou množinu skalárů. Pro potřeby této kapitoly, *vektorem* budeme rozumět uspořádanou n-tici skalárů, n budeme nazývat dimenzí. Sčítání vektorů definujeme po složkách (skaláry samozřejmě sčítat umíme). Násobení vektoru $u = (a_1, \dots, a_n)$ skalárem b definujeme tak, že každý prvek n-tice u vynásobíme skalárem b (skaláry v $\mathbb{K}$ násobit umíme).

Pro sčítání vektorů v $\mathbb{K}^n$ platí (KG1)–(KG4) s nulovým prvkem[2]$0 = (0, \dots, 0)$ v $\mathbb{K}^n$.

Vlastnosti operací s vektory:

Pro všechny vektory v, $w \in \mathbb{K}^n$ a skaláry $a \in \mathbb{K}$ platí

(V1) $$a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w$$

(V2) $$(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$$

(V3) $$a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v$$

(V4) $$1 \cdot v = v$$

1.3. Příklady. Pro kterékoliv pole skalárů $\mathbb{K}$ se snadno ověří právě sformulované vlastnosti (V1)–(V4) pro $\mathbb{K}^n$, protože při ověřování vždy používáme pouze vlastnosti skalárů uvedené výše. Tak můžeme uvažovat např. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{C}^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Jiný příklad pole skalárů je $Z_2 = \{0, 1\}$, $1 + 1 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$, $1^{-1} = 1$. Prvky $\mathbb{Z}_2$ lze chápat jako zbytkové třídy po dělení dvěma. Obecněji můžeme uvažovat okruh $\mathbb{Z}_k$ zbytkových tříd po dělení přirozeným číslem k. Snadno se ověří, že $\mathbb{Z}_k$ je polem právě když je k prvočíslo.

Všimněme si, že k ověření vlastností V1–V4 potřebujeme pro použité skaláry pouze vlastnosti okruhu. Vlastnost (P) však bude podstatná později.[3]

1.4. Matice nad skaláry. Maticí typu m/n nad skaláry $\mathbb{K}$ rozumíme obdélníkové schéma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

[2]Používáme pro nulový prvek stejný symbol jako pro nulový prvek skalárů. Podobně budeme pro sčítání a násobení používat stále stejný symbol. Navíc nebudeme většinou používat pro vektory žádné speciální značení, budu však důsledně pro skaláry používat písmena ze začátku abecedy, pro vektory spíše od konce. Čím dřív se s tím posluchač smíří tím lépe.

[3]Část naší teorie lze odvodit i pro skaláry tvořící okruh, hovoříme o tzv. *modulech*. Např. $\mathbb{Z}^n$ je tzv. volný modul nad $\mathbb{Z}$.

kde $a_{ij} \in \mathbb{K}$ pro všechny $1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$. Matici A s prvky a_{ij} značíme také $A = (a_{ij})$.

Vektory $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{K}^n$ nazýváme řádky matice A, $i = 1, \dots, m$, vektory $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}) \in \mathbb{K}^m$ nazýváme sloupce matice A, $j = 1, \dots, n$.

Množinu všech matic typu m/n nad $\mathbb{K}$ značíme $\mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{K})$.

Matici můžeme chápat jako zobrazení $A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to \mathbb{K}$. Matice typu $1/n$ nebo $n/1$ jsou vlastně vektory v $\mathbb{K}^n$. I obecné matice z $\mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{K})$ lze však chápat jako vektory v $\mathbb{K}^{m.n}$, prostě zapomeneme na řádkování.

Zejména tedy je definováno sčítání matic v $\mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{K})$ a násobení matic skaláry.

$$
\begin{gathered}
A + B = (a_{ij} + b_{ij}),\ \text{kde } A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \\
a.A = (a.a_{ij}),\ \text{kde } A = (a_{ij}),\ a \in \mathbb{K} \\
-A = (-a_{ij}) \text{ se nazývá } \textit{matice opačná} \text{ k matici } A \\
0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ se nazývá } \textit{nulová matice.}
\end{gathered}
$$

Zapomenutím řádkování tak získáme následující tvrzení:

1.5. Věta. *Předpisy pro $A+B$, $a.A$, $-A$, 0 zadávají na $\mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{K})$ operace sčítání a násobení skaláry splňující axiomy (V1)–(V4).* $\square$

1.6. Příklad. Matice lze vhodně využít pro zápis lineárních rovnic:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= y_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= y_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= y_m
\end{aligned}
$$

posloupnost $x_1, \dots, x_n$ lze chápat jako vektor proměnných, tj. sloupec $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, stejně tak $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$. Systém rovnic lze pak formálně psát ve tvaru $A.x = y$:

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}
$$

Původní rovnice nyní obdržíme tak, že vždy bereme řádky z A a sčítáme součiny odpovídajících komponent $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n$. Tím získáme i-tý prvek výsledného vektoru. Brzy odvodíme velice kalkul s maticemi, který nám umožní se systémy lineárních rovnic pracovat velice efektivně.

1.7. Součin matic. Pro libovolnou matici $A = (a_{ij})$ typu m/n nad okruhem[4] skalárů $\mathbb{K}$ a libovolnou matici $B = (b_{jk})$ typu n/q nad $\mathbb{K}$ definujeme jejich součin $C = A \cdot B = (c_{ik})$ jako matici typu m/q s prvky

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}, \text{ pro libovolné } 1 \le i \le m,\ 1 \le k \le q.$$

Například máme

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.8. Čtvercové matice. Je-li v matici stejný počet řádků a sloupců, hovoříme o *čtvercové matici*. Píšeme $\mathrm{Mat}_{mm}(\mathbb{K}) = \mathrm{Mat}_m(\mathbb{K})$. Matici

$$E = (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

nazýváme *jednotková matice*. Na $\mathrm{Mat}_m(\mathbb{K})$ je součin matic definován pro každé dvě matice, je tam tedy definována operace násobení:

$$\mathrm{Mat}_m(\mathbb{K}) \times \mathrm{Mat}_m(\mathbb{K}) \to \mathrm{Mat}_m(\mathbb{K})$$

Věta. *Pro libovolný okruh skalárů je na* $\mathrm{Mat}_m(\mathbb{K})$ *definována operace násobení. Splňuje vlastnosti (O1) a (O3) vzhledem k jednotkové matici* $E = \delta_{ij}$*. Dále spolu se sčítáním matic vyhovuje (O4). Obecně však neplatí (O2) ani (OI), zejména tedy neplatí (P).*

Důkaz. Asociativita násobení – (O1):

$$\begin{gathered} A = (a_{ij}) \text{ typu } m/n, \quad B = (b_{jk}) \text{ typu } n/p, \quad C = (c_{kl}) \text{ typu } p/q \\ A \cdot B = (\sum_j a_{ij}.b_{jk}), \quad B \cdot C = (\sum_k b_{jk}.c_{kl}) \\ (A \cdot B) \cdot C = (\sum_k (\sum_j a_{ij}.b_{jk}).c_{kl}) = \sum_{j,k} a_{ij}.b_{jk}.c_{kl} \\ A \cdot (B \cdot C) = (\sum_j a_{ij}.(\sum_k b_{jk}.c_{kl})) = \sum_{j,k} a_{ij}.b_{jk}.c_{kl} \end{gathered}$$

Jednotkový prvek – (O3):

$$A \cdot E = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = A = E \cdot A$$

[4]Čtenář, který se ještě nesmířil s abstrakcí okruhu, nechť přemýšlí v rámci číselných oborů. Potom okruhy skalárů zahrnují i celá čísla $\mathbb{Z}$ zatímco mezi poli jsou pouze $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$.

(O4) - distributivita: $A = (a_{ij})$ typu m/n, $B = (b_{jk})$ typu n/p, $C = (c_{jk})$ typu n/p, $D = (d_{kl})$ typu p/q

$$A \cdot (B + C) = (\sum_j a_{ij}(b_{jk} + c_{jk}) = ((\sum_j a_{ij}b_{jk}) + (\sum_j a_{ij}c_{jk})) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$(B + C) \cdot D = (\sum_k (b_{jk} + c_{jk})d_{kl}) = ((\sum_k b_{jk}d_{kl}) + (\sum_k c_{jk}d_{kl})) = B \cdot D + C \cdot D$$

Není komutativní: - dokážeme na příkladu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tím jsme získali zároveň protipříklad na platnost (O2) i (OI), zatím ale jen pro matice typu 2/2. Pro matice typu 1/1 ovšem oba axiomy samozřejmě platí, protože je mají samy skaláry a pro větší matice získáme protipříklady snadno tak, že právě uvedené matice umístíme do levého horního rohu příslušných čtvercových schémat a doplníme nulami. (Ověřte si sami!) □

V důkazu jsme vlastně pracovali s maticemi obecnějšího typu, dokázali jsme tedy příslušné vlastnosti obecněji:

1.9. Věta. *Násobení matic je asociativní a distributivní, tj.* $A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, *kdykoliv jsou tato násobení definována. Jednotková matice je neutrálním prvkem pro násobení zleva i zprava.* □

1.10. Inverzní matice. Nechť $B, A \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{K})$ jsou matice splňující $A \cdot B = B \cdot A = E$. Pak B se nazývá *matice inverzní* k matici A, píšeme $B = A^{-1}$. Matice, k níž existuje matice inverzní se nazývá *invertibilní matice*. Pokud A^{-1} a B^{-1} existují, pak existuje i $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$. Je totiž (díky právě dokázané asociativitě násobení) $(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A.B) = B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B = E$ a $(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = E$.

Příklad. Soustava rovnic z 1.6 se snadno vyjádří součinem matic

$$A.x = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Pokud existuje matice inverzní k matici A, pak lze násobit zleva A^{-1} a dostaneme $A^{-1} \cdot y = A^{-1} \cdot A \cdot x = E \cdot x = x$, tj. hledané řešení.

1.11. Definice. *Řádkové elementární transformace* matic jsou

(1) záměna dvou řádků
(2) vynásobení vybraného řádku nenulovým skalárem
(3) přičtení řádku k jinému řádku

Analogicky, *sloupcové elementární transformace* matic jsou

(1') záměna dvou sloupců
(2') vynásobení vybraného sloupce nenulovým skalárem
(3') přičtení sloupce k jinému sloupci

1.12. Věta (Gausova eliminace). *Nenulovou matici nad $\mathbb{K}$ lze konečně mnoha elementárními řádkovými transformacemi převést na tzv. (řádkově) schodovitý tvar:*

(1) *Je-li $a_{ij} = 0$ a všechny předchozí prvky na i-tém řádku jsou také nulové, potom $a_{kj} = 0$ pro všechna $k \geq i$*
(2) *je-li $a_{(i-1)j}$ první nenulový prvek na $(i-1)$-vém řádku, pak $a_{ij} = 0$.*

Důkaz. Matice v řádkově schodovitém tvaru vypadá takto

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j} & \dots & \dots & \dots & a_{1m} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{lp} & \dots \\ \vdots & & & & & & & \end{pmatrix}$$

a matice může, ale nemusí, končit několika nulovými řádky. K převodu libovolné matice můžeme použít jednoduchý algoritmus:

(1) Záměnou řádků docílíme, že v prvním řádku bude v prvním nenulovém sloupci nenulový prvek, nechť je to j-tý sloupec.
(2) Pro $i = 2, \dots$, vynásobením prvního řádku prvkem a_{ij}, i-tého řádku prvkem a_{1j} a odečtením vynulujeme prvek a_{ij} na i-tém řádku.
(3) Opakovanou aplikací bodů (1) a (2), vždy pro zbytek řádků a sloupců v získané matici dospějeme po konečném počtu kroků k požadovanému tvaru. $\square$

Všimněme si, že jsme v důkazu používali pouze vlastností okruhu skalárů. Uvedený postup je právě obvyklá eliminace proměnných v systémech lineárních rovnic. Pro řešení systémů rovnic má ale uvedený postup rozumný smysl jen, když mezi skaláry neexistují dělitelé nuly. Pokud tvoří skaláry pole, pak můžeme navíc ze schodovitého tvaru snadno spočíst řešení (případně ověřit jeho neexistenci), promyslete si např. pečlivě rozdíl mezi $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1.13. Lemma. *Elementární řádkové (resp. sloupcové) transformace odpovídají vynásobením zleva (resp. zprava) následujícími maticemi:*

(1) *Přehození i-tého a j-tého řádku (resp. sloupce)*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & & & \\ 0 & \ddots & & & & & \\ \vdots & & 0 & \dots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \dots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

(2) *Vynásobení i-tého řádku (resp. sloupce) skalárem a:*

$$\begin{array}{cl}\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & a & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

(3) *Sečtení i-tého řádku (resp. sloupce) s j-tým:*

$$\begin{array}{rc} \begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ i \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ 0 & \ddots & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & & & \\ & & j & & & & \end{array} \end{array}$$

Důkaz. Ověří se přímým výpočtem. $\square$

1.14. Věta. *Nechť $\mathbb{K}$ je pole skalárů. Pro každou matici $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{K})$ existují invertibilní matice $P \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{K})$, $Q \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ takové, že matice $P.A$ je v řádkově schodovitém tvaru a*

$$P \cdot A \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \end{pmatrix}$$

* **Důkaz.** Aplikací Gaussovy eliminace upravíme A do schodovitého tvaru. Přitom všechny její kroky jsou elementární řádkové transformace. Podle předchozí věty existují tedy matice $P_1, \dots, P_k$, které tyto elementární transformace realizují násobením zleva. Přímým ověřením zjistíme, že nad polem $\mathbb{K}$ jsou všechny P_i invertibilní, tj. i jejich součin je invertibilní a $(P_k \cdot P_{k-1} \cdots (P_1 \cdot A) \cdots) = (P_k \cdot P_{k-i} \cdots P_1) \cdot A$ je ve schodovitém tvaru. Označme

$$P = P_k \cdots P_1 \ , \ P^{-1} = P_1^{-1} \cdots P_k^{-1}.$$

Přehozením pojmu řádek a sloupec lze odvodit (a tedy hlavně aplikovat) větu 1.12 na sloupce matice A a uvést ji sloupcovými elementárními transformacemi na tzv. *sloupcově schodovitý tvar*. Protože však již vycházíme z řádkově schodovitého tvaru, získáme až na násobky řádků invertibilními skaláry právě požadovaný tvar. Zbývá tedy již jen vynásobit příslušné nenulové řádky inverzními prvky v $\mathbb{K}$. $\square$

* **1.15. Algoritmus pro výpočet inverzní matice.** Nechť $\mathbb{K}$ je pole a $A \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{K})$ čtvercová matice. Podle 1.14 lze najít invertibilní matici $P \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{K})$ takovou, že $P \cdot A$ bude v řádkově schodovitém tvaru. Přitom může (ale nemusí) být jeden nebo více posledních řádků nulových.

* Jestliže má existovat inverzní matice k A, pak existuje i inverzní matice k $P \cdot A$. Jestliže však je poslední řádek v $P \cdot A$ nulový, bude nulový i poslední řádek v $P \cdot A \cdot B$ pro jakoukoliv matici $B \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{K})$. Existence takového nulového řádku ve výsledku (řádkové) Gaussovy eliminace tedy vylučuje existenci A^{-1}.

* Předpokládejme nyní, že A^{-1} existuje. Podle předchozího, nalezneme řádkově schodovitý tvar bez nulového řádku, tzn. že diagonální prvky v $P \cdot A$ jsou nenulové. Pak ovšem pokračováním eliminace od pravého dolního rohu zpět získáme jistě jednotkovou matici. Jinými slovy, najdeme další invertibilní matici P' tak, že $P' \cdot P \cdot A = E$. Výměnou řádkových a sloupcových transformací lze za předpokladu existence A^{-1} stejným postupem najít Q takovou, že $A \cdot Q = E$. Odtud $(P' \cdot P) = (P' \cdot P) \cdot E = (P' \cdot P) \cdot (A \cdot Q) = (P' \cdot P \cdot A) \cdot Q = Q$. To ale znamená, že jsme nalezli hledanou inverzní matici k A.

Prakticky tedy můžeme postupovat tak, že vedle sebe napíšeme původní matici A a jednotkovou matici E, matici A upravujeme řádkovými elementárními úpravami nejprve na schodovitý tvar, potom tzv. zpětnou eliminací na diagonální matici a v té násobíme řádky inverzními prvky z $\mathbb{K}$. Tytéž úpravy postupně prováděné s E vedou právě k matici $P' \cdot P$ z předchozích úvah, tedy z ní získáme právě hledanou inverzi. Pokud tento algoritmus narazí na vynulování celého řádku v původní matici, znamená to, že matice inverzní neexistuje.

Poznámky k přemýšlení

1. Komplexní čísla lze chápat jako dvojice reálných čísel. To dává realizaci $\mathbb{C}$ jako množiny reálných vektorů. Rozmyslete si to!

2. V textu jsme stručně zmínili tzv. zbytkové třídy celých čísel. Definujeme je takto: pro přirozené $k \geq 2$ je $\mathbb{Z}_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$ přičemž sčítání a násobení se definuje tak, že se provede příslušná operace v $\mathbb{Z}$ a za výsledek se vezme zbytek po dělení k. Např. v $\mathbb{Z}_3$ je $2.2 = 1$, tzn. $2^{-1} = 2$. $\mathbb{Z}_k$ má vždy vlastnosti (KG1) – (KG4) a (O1) – (O4), tvoří tedy vždy okruh. Pro k prvočíselné jde navíc o pole, jinak to není ani obor integrity. Prověřte tyto vlastnosti a promyslete si důkaz věty 1.8 pro matice nad skaláry $\mathbb{Z}_k$.

* **3.** Lze také potkat skaláry, které mají všechny vlastnosti pole až na komutativitu násobení. Takovými (nenulovými) skaláry lze úspěšně dělit, promyslete si ale, jaké potíže okamžitě nastanou třeba s elementárními řádkovými úpravami (např. násobit řádky zprava i zleva nejde pomocí elementárních matic!). Standardním příkladem jsou tzv. kvaterniony $\mathbb{H}$, které lze definovat jako reálné vektory z $\mathbb{R}^4$ s násobením definovaným takto: pro $1 := (1,0,0,0)$, $i := (0,1,0,0)$, $j := (0,0,1,0)$, $k := (0,0,0,1)$ klademe $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i.j = k = -j.i$, $j.k = i = -k.j$, $k.i = j = -i.k$, 1 je jednotka pro násobení.

* **4.** Zadefinujte kvaterniony $\mathbb{H}$ jako $\mathbb{C}^2$ s vhodně definou operací násobení. (Návod: podobně jako u definice $\mathbb{C}$ jako dvojčlenů $a + b.i$ pišme $q = w + z.j$ a definujme

$j^2 = -1$, $z.j = j.\bar{z}$ pro komlexní z, tzn. j komutuje s komplexními čísly až na konjugaci. Pak $(a + b.j).(c + d.j) = ac + b\bar{d} + (ad + b\bar{c}).j$.)

* **5.** Pokud existuje k matici A matice inverzní A^{-1}, pak je systém rovnic $A.x = y$ vždy řešitelný (s řešením $x = A^{-1}.y$). Jak to funguje nad $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_k$? Spočtěte si A^{-1} k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}$.

6. Najděte analogie k známým vzorcům pro mocniny dvojčlenů (pro skaláry $(a + b)^n = \sum_k \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$) platné pro čtvercové matice – pozor na nekomutativnost násobení.

* **7.** Matice lze samozřejmě definovat nad libovolným okruhem (i s děliteli nuly). Rozvažte si pořádně, jak dalece pak funguje Gausova eliminace. Specielně si rozmyslete jaké hrůzy se dějí třeba v $\mathrm{Mat}_2(\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}))$, tj. uvažujte matice typu 4/4 jako matice typu 2/2 jejichž prvky jsou reálné matice typu 2/2.

* **8.** Rozmyslete si, co lze z důkazu věty 1.14 provést i pro matice nad libovolným komutativním oborem integrity (Návod: řádkovými elementárními transformacemi lze ještě stále získat schodovitý tvar, poté lze sloupcovými transformacemi vynulovat i zbytky řádků za prvním nenulovým, to co zbude nemusí však mít inverzní prvky. Pro celočíselné skaláry lze ale v každém případě dosáhnout, aby prvek na prvním řádku dělil ten na druhém, druhý zase ten na třetím atd.)

2. Vektorové prostory a lineární zobrazení

2.1. Definice. *Vektorovým prostorem* V nad polem[5] skalárů $\mathbb{K}$ rozumíme množinu spolu s operací sčítání, pro kterou platí axiomy (KG1)–(KG4), a s násobením skaláry, pro které platí axiomy (V1)–(V4).

Připomeňme si pro jistotu tyto axiomy:

(KG1) $$(u + v) + w = u + (v + w),\ \forall u, v, w \in V$$
(KG2) $$u + v = v + u, \quad \forall u, v \in V$$
(KG3) $$\exists 0 \in V,\ v + 0 = v,\ \forall v \in V$$
(KG4) $$\exists (-v) \in V,\ v + (-v) = 0,\ \forall v \in V$$
(V1) $$a.(v + w) = a.v + a.w\ \forall a \in \mathbb{K}, v, w \in V$$
(V2) $$(a + b).v = a.v + b.v\ \forall a, b \in \mathbb{K},\ v \in V$$
(V3) $$a.(b.v) = (a.b).v\ \forall a, b \in \mathbb{K}, v \in V$$
(V4) $$1.v = v,\ \forall v \in v$$

Značení. Často se zavádí pro různé objekty různé typy písma pro symboly, kterými je označujeme. Např. pro vektory se užívají tučná písmena ($\mathbf{v}$), nebo podtržená ($\underline{v}$), nebo "opruhovaná" ($\bar{v}$), případně se šipkou ($\vec{v}$) apod. My budeme vesměs používat jen velmi jednoduchou konvenci: skaláry budou označovány znaky z počátku

[5] V podstatě postačí, když si čtenář bude vždy představovat pod $\mathbb{K}$ buď reálná čísla $\mathbb{R}$ nebo komplexní $\mathbb{C}$, časem se seznámí i s jinými poli skalárů, např. zbytkovými třídami.

abecedy, tj. $a, b, c, \ldots$, zatímco pro vektory budeme užívat znaky z konce, u, v, w, x, y, z. Přitom ještě navíc většinou x, y, z budou opravdu n-tice skalárů.

Pro úplnost výčtu, písmena z prostředka, např. i, j, k, l budou nejčastěji označovat indexy výrazů.

2.2. Věta. *Nechť V je vektorový prostor nad polem skalárů $\mathbb{K}$, $a, b, a_i \in \mathbb{K}$, $u, v, u_j \in V$. Potom*

(1) $a \cdot u = 0$ *právě když* $a = 0$ *nebo* $u = 0$
(2) $(-1) \cdot u = -u$
(3) $a \cdot (u - v) = a \cdot u - a \cdot v$
(4) $(a - b) \cdot u = a \cdot u - b \cdot u$
(5) $\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^m u_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \cdot u_j$.

Důkaz. $(a+0) \cdot u \overset{(V2)}{=} a \cdot u + 0 \cdot u = a \cdot u$ což podle axiomu (KG4) zaručuje $0 \cdot u = 0$. Nyní $u + (-1) \cdot u \overset{(V2)}{=} (1 + (-1)) \cdot u = 0 \cdot u = 0$ a odtud $-u = (-1) \cdot u$.

Dále $a \cdot (u + (-1) \cdot v) \overset{(V2)(V3)}{=} a \cdot u + (-a) \cdot v = a \cdot u - a \cdot v$ což dokazuje (3). Platí $(a - b) \cdot u \overset{(V3)(V2)}{=} a \cdot u + (-b) \cdot u = a \cdot u - b \cdot u$ a tím je ověřeno (4). Vztah (5) plyne indukcí z (V2) a (V1).

Zbývá (1): $a \cdot 0 = a \cdot (u - u) = a \cdot u - a \cdot u = 0$, což spolu s prvním tvrzením tohoto důkazu ukazuje jednu implikaci. K opačné implikaci poprvé potřebujeme axiom pole pro skaláry a axiom (V4) pro vektorové prostory: je-li $p \cdot u = 0$ a $p \neq 0$, pak $u = 1 \cdot u = (p^{-1} \cdot p) \cdot u = p^{-1} \cdot 0 = 0$. □

2.3. Definice. Množina vektorů $M \subset V$ ve vektorovém prostoru V nad $\mathbb{K}$ se nazývá *lineárně nezávislá* jestliže pro každou k-tici vektorů $v_1, \ldots, v_k \in M$ a každé skaláry $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ platí:

$$a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_k \cdot v_k = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0.$$

Posloupnost vektorů $v_1, \ldots, v_k$ nazveme *lineárně nezávislou* jestliže $v_1, \ldots, v_k$ jsou po dvou různé a $\{v_1, \ldots, v_k\}$ je lineárně nezávislá. Výrazy tvaru $a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_k \cdot v_k$ nazýváme *lineární kombinace* vektorů $v_1, \ldots, v_k$.

Množina M vektorů je *lineárně závislá*, jestliže není lineárně nezávislá. Přímo z definice pak vyplývá, že neprázdná podmnožina M vektorů ve vektorovém prostoru nad polem skalárů $\mathbb{K}$ je závislá právě, když je jeden z jejích vektorů vyjádřitelný jako lineární kombinace ostatních.

2.4. Věta. *Nechť V je vektorový prostor. Každá podmnožina lineárně nezávislé množiny M je lineárně nezávislá. $M \subset V$ je lineárně nezávislá právě tehdy, když každá konečná podmnožina v M je lineárně nezávislá.*

Důkaz. Plyne okamžitě z definice lineární nezávislosti. □

2.5. Příklady.

1. $\mathbb{R}^m$ se sčítáním a násobením po složkách je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, ale také vektorový prostor nad $\mathbb{Q}$. Např. pro $m = 2$, vektory $(1, 0), (0, 1) \in \mathbb{R}^2$ jsou lineárně nezávislé, protože z $a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1) = (0, 0)$ plyne $a = b = 0$. Dále, vektory $(1, 0), (\sqrt{2}, 0) \in \mathbb{R}^2$ jsou lineárně závislé nad $\mathbb{R}$; $\sqrt{2} \cdot (1, 0) = (\sqrt{2}, 0)$, ovšem nad $\mathbb{Q}$ jsou lineárně nezávislé!

2. Polynomy stupně nejvýše m tvoří vektorový prostor $\mathbb{R}_m[x]$. Polynomy můžeme chápat jako zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a sčítání a násobení skaláry definujeme takto: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x)$.

3. Úplně analogicky jako u polynomů můžeme definovat strukturu vektorového prostoru na množině všech zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, množině spojitých zobrazení, množině diferencovatelných zobrazení, polynomech všech stupňů, atd.

2.6. Definice. Podmnožina $M \subset V$ se nazývá *vektorovým podprostorem* jestliže spolu se zúženými operacemi sčítání a násobení skaláry je sama vektorovým prostorem. Tzn. požadujeme

$$\forall a, b \in \mathbb{K},\ \forall v, w \in M,\ a \cdot v + b \cdot w \in M.$$

2.7. Věta. *Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $I \neq \emptyset$ libovolná množina a nechť W_i, $i \in I$, jsou vektorové podprostory ve V. Pak jejich průnik $\cap_{i \in I} W_i \subset V$ je vektorový podprostor. Zejména pro každou množinu $M \subset V$ je množina*

$$\langle M \rangle := \bigcap_{\substack{M \subset W \\ W \subset V \text{ je podprostor}}} W$$

vektorový podprostor. Platí pro něj:

(1) $\langle M \rangle = \{a_1 \cdot u_1 + \cdots + a_k \cdot u_k; k \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{K}, u_j \in M, j = 1, \ldots, k\}$
(2) $M = \langle M \rangle$ *právě když M je vektorový podprostor*
(3) *jestliže $N \subset M$ pak $\langle N \rangle \subset \langle M \rangle$ je vektorový podprostor*
(4) $\langle \emptyset \rangle = \{0\} \subset V$, *triviální podprostor.*

Důkaz. Podmínka v definici 2.6 obsahuje pouze univerzální kvantifikátory, proto je jistě průnik podprostorů opět podprostor. Snadno to ověříme i přímo: Nechť $a, b \in \mathbb{K}$, $u, v \in \cap_{i \in I} W_i$. Pak pro všechny $i \in I$, $a \cdot u + b \cdot v \in W_i$, to ale znamená, že $a \cdot u + b \cdot v \in \cap_{i \in I} W_i$.

(1) Platí $\{a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k\} \subset \langle M \rangle$ a zároveň je to vektorový podprostor (ověřte!), který obsahuje M. (2) plyne z (1) a definice vektorového podprostoru. (3): Nejmenší vektorový podprostor je $\{0\}$ (zdůvodněte!). $\square$

Říkáme, že M *generuje* $\langle M \rangle$, nebo že prvky M jsou *generátory* podprostoru $\langle M \rangle$.

2.8. Definice. Nechť V_i, $i \in I$, jsou podprostory ve V. Pak $\langle \cup_{i \in I} V_i \rangle$ nazýváme *součtem podprostorů* V_i. Značíme $\sum_{i \in I} V_i$. Zejména pro $V_1, \ldots, V_k \subset V$,

$$V_1 + \cdots + V_k = \langle V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k \rangle.$$

2.9. Věta. *Pro podprostory $V_1, \ldots, V_k \subset V$ platí:*

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_k = \{v_1 + \cdots + v_k;\ v_i \in V_i, i = 1, \ldots, k\}.$$

Důkaz. Podle věty 2.7.(1), lze každý prvek v uvažovaném součtu podprostorů vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů z podprostorů V_i. Protože však je sčítání vektorů komutativní, lze k sobě poskládat členy patřící do stejného podprostoru, což dává právě požadovaný výraz. $\square$

2.10. Definice. Podmnožina $M \subset V$ se nazývá *báze vektorového prostoru* V, jestliže $\langle M\rangle = V$ a M je lineárně nezávislá. Vektorový prostor, který má konečnou bázi nazýváme *konečněrozměrný*, mohutnost[6] báze nazýváme *dimenzí* V. Nemá-li V konečnou bázi, říkáme, že V je *nekonečněrozměrný*. Píšeme $\dim V = k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, případně $k = \infty$. Bázi k-rozměrného prostoru budeme obvykle zapisovat jako k-tici $\underline{v} = (v_1, \dots, v_k)$ bázových vektorů.[7]

2.11. Věta. *Z libovolné konečné množiny generátorů vektorového prostoru V lze vybrat bázi.*

Důkaz. Tvrzení ukážeme indukcí přes počet generátorů k.

Nejprve uvažme $k = 1$, $V = \langle\{v\}\rangle$, kde $v \neq 0$ protože $\{v\}$ je lineárně nezávislá množina vektorů. Pak je ovšem $\{v\}$ je zároveň báze V.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $k = n$, a uvažme $V = \langle v_1, \dots, v_{n+1}\rangle$. Jsou-li $v_1, \dots, v_{n+1}$ lineárně nezávislé, pak tvoří bázi. V opačném případě existuje index i takový, že $v_i = a_1v_1 + \dots + a_{i-1}v_{i-1} + a_{i+1}v_{i+1} + \dots + a_{n+1}v_{n+1}$. Pak ovšem $V = \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{n+1}\rangle$ a již umíme vybrat bázi (podle indukčního předpokladu). □

2.12. Steinitzova věta o výměně. *Nechť $(v_1, \dots, v_n)$ je báze vektorového prostoru V nad polem $\mathbb{K}$. Nechť $u_1, \dots, u_k$ jsou lineárně nezávislé vektory. Potom $k \leq n$ a mezi vektory $v_1, \dots, v_n$ existuje $(n-k)$ vektorů $v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-k}}$ takových, že $(u_1, \dots, u_k, v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-k}})$ tvoří bázi V.*

* **Důkaz.** Ukážeme napřed zdánlivě daleko jednodušší tvrzení:

* *Nechť $(v_1, \dots, v_n)$ je báze V. Pro libovolný nenulový vektor $u \in V$ existuje i, $1 \leq i \leq n$, takové, že $(u, v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$ je opět báze V.*

* Předpokládejme, že $u = a_1 \cdot v_1 + \dots + a_n \cdot v_n$ a $a_i \neq 0$ pro jisté i. Pak

$$v_i = \frac{1}{a_i}\big(u - (a_1 \cdot v_1 + \dots + a_{i-1} \cdot v_{i-1} + a_{i+1} \cdot v_{i+1} + \dots + a_n \cdot v_n)\big).$$

Odtud již plyne $\langle u, v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\rangle = V$ a jistě je to báze, protože vektory $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$ jsou jistě nezávislé, takže kdyby to byly lineárně závislé vektory, pak by u bylo jejich lineární kombinací, ale odtud už vyplývá $V = \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\rangle$, což není možné. Tím je naše pomocné tvrzení dokázané.

* Nyní již stačí postupně přidávat $u_1, u_2, \dots,$ vždy výměnou za vhodné v_i. Je třeba pouze ověřit, že takové v_i vždy bude existovat. Předpokládejme tedy, že již máme umístěné $u_1, \dots, u_l$. Pak u_{l+1} se jistě vyjádří jako lineární kombinace těchto vektorů a zbylých v_j. Pokud by pouze koeficienty u $u_1, \dots, u_l$ byly nenulové, znamenalo by to, že již samy vektory $u_1, \dots, u_{l+1}$ byly lineárně závislé, což je ve sporu s našimi předpoklady.

* Pro každé $k \leq n$ tak po k krocích získáme požadovanou bázi. Pokud by $k > n$, pak již v n-tém kroku obdržíme bázi vybranou z těchto vektorů, což znamená, že nemohou být lineárně nezávislé. □

---

[6] Všimněme si, že triviální podprostor je generován prázdnou množinou, která je "prázdnou" bazí. Má tedy triviální podprostor dimenzi nulovou.

[7] Opět jde především o zavedení konvence. U konečně rozměrných podprostorů budeme vždy uvažovat bázi včetně zadaného pořadí prvků. Viz. diskuse o souřadnicích vektorů vzhledem k bázi.

2.13. Důsledky.

(1) Každé dvě báze konečněrozměrného vektorového prostoru mají stejný počet vektorů, tzn. že naše definice dimenze nezávisí na volbě báze.
(2) Má-li V konečnou bázi, lze každou lineárně nezávislou množinu doplnit do báze.
(3) Báze konečněrozměrných vektorových prostorů jsou právě maximální lineárně nezávislé množiny
(4) Báze prostoru s konečnou dimenzí jsou právě minimální množiny generátorů

2.14. Příklady.

(1) $\mathbb{K}^n$ má (jako vektorový prostor nad $\mathbb{K}$) dimenzi n, bazí je např. n-tice vektorů
$$((1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0)\dots,(0,\dots,0,1)).$$
Tuto bázi nazýváme *standardní báze v* $\mathbb{K}^n$.
(2) $\mathbb{C}$ jako vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ má dimenzi 2, bázi tvoří např. čísla 1 a i.
(3) $\mathbb{K}_m[x]$, prostor polynomů stupně nejvýše m má dimenzi $m+1$, bazí je např. posloupnost $1,x,x^2,\dots,x^m$. Vektorový prostor všech polynomů $\mathbb{K}[x]$ má dimenzi ∞, umíme však ještě stále najít bázi (i když s nekonečně mnoha prvky): $1,x,x^2,\dots$.
(4) Vektorový prostor všech zobrazení $\{f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$ má také dimenzi ∞, tento prostor už ale nemá spočetnou bázi.

2.15. Věta. *Nechť $W, W_1, W_2 \subset V$ jsou podprostory v prostoru konečné dimenze. Pak platí*

(1) $\dim W \le \dim V$
(2) $V = W$ *právě když* $\dim V = \dim W$
(3) $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1+W_2) + \dim(W_1\cap W_2)$.

Důkaz. Tvrzení (1) a (2) plynou z definice dimenze a ze Steinitzovy věty o výměně, protože báze je vždy lineárně nezávislá množina.

* Zbývající tvrzení jistě platí, pokud je dimenze jednoho z prostorů nulová. Předpokládejme tedy $\dim W_1 = r \neq 0$, $\dim W_2 = s \neq 0$ a nechť $(w_1,\dots,w_t)$ je báze $W_1\cap W_2$ (nebo prázdná množina, pokud je průnik triviální). Podle předchozí věty lze tuto bázi doplnit na bázi $(w_1,\dots,w_t,u_{t+1},\dots,u_r)$ pro W_1 a bázi $(w_1,\dots,w_t,v_{t+1},\dots,v_s)$ pro W_2. Vektory $w_1,\dots,w_t,u_{t+1},\dots,u_r,v_{t+1},\dots,v_s$ jistě generují W_1+W_2. Ukážeme, že jsou přitom lineárně nezávislé. Nechť
$$a_1\cdot w_1+\dots+a_t\cdot w_t+b_{t+1}\cdot u_{t+1}+\dots+b_r\cdot u_r+c_{t+1}\cdot v_{t+1}+\dots+c_s\cdot v_s=0$$
Pak $-(c_{t+1}\cdot v_{t+1}+\dots+c_s\cdot v_s)=a_1\cdot w_1+\dots+a_t\cdot w_t+b_{t+1}\cdot u_{t+1}+\dots+b_r\cdot u_r$ musí patřit do $W_2\cap W_1$. To ale má za následek, že $b_{t+1}=\dots=b_r=0$. Pak ovšem i $a_1\cdot w_1+\dots+a_t\cdot w_t+c_{t+1}\cdot v_{t+1}+\dots+c_s\cdot v_s=0$ a protože příslušné vektory tvoří bázi W_2, jsou všechny koeficienty nulové. Tvrzení (3) se nyní ověří přímým počítáním generátorů. □

2.16. Věta. *Množina $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ je báze právě, když každý vektor $v \in V$ lze právě jediným způsobem vyjádřit jako lineární kombinaci $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$.*

Důkaz. $V = \langle\{v_1, \dots, v_n\}\rangle$, proto taková lineární kombinace vždy existuje. Předpokládejme $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n = b_1v_1 + \dots + b_nv_n$. Potom $0 = (a_1 - b_1) \cdot v_1 + \dots + (a_n - b_n) \cdot v_n$ a proto $a_i = b_i$ pro všechna $i = 1, \dots, n$. □

2.17. Definice. Koeficienty jediné lineární kombinace vyjadřující daný vektor $v \in V$ ve zvolené bázi $(v_1, \dots, v_n)$ se nazývají *souřadnice vektoru v* v této bázi.

2.18. Důsledek. Zvolme bázi $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ prostoru V. Přiřazení, které vektoru $u = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$ přiřadí jeho souřadnice v bázi $\underline{v}$, budeme značit stejným symbolem $\underline{v}\colon V \to \mathbb{K}^n$. Má tyto vlastnosti:[8]

(1) $\underline{v}(u + w) = \underline{v}(u) + \underline{v}(w)$; $\forall u, w \in V$
(2) $\underline{v}(a \cdot u) = a \cdot \underline{v}(u)$; $\forall a \in \mathbb{K}, \forall u \in V$.

2.19. Definice. Nechť V a W jsou vektorové prostory nad týmž polem skalárů $\mathbb{K}$. Zobrazení $f\colon V \to W$ se nazývá *lineární zobrazení (homomorfismus)* jestliže platí:

(1) $f(u + v) = f(u) + f(v)$, $\forall u, v \in V$
(2) $f(a \cdot u) = a \cdot f(u)$, $\forall a \in \mathbb{K}$, $\forall u \in V$.

2.20. Věta. *Nechť $f\colon V \to W$ je lineární zobrazení. Pro všechny $u, u_1, \dots, u_k \in V$, $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$ platí:*

(1) $f(0) = 0$
(2) $f(-u) = -f(u)$
(3) $f(a_1 \cdot u_1 + \dots + a_k \cdot u_k) = a_1 \cdot f(u_1) + \dots + a_k \cdot f(u_k)$
(4) *pro každý vektorový podprostor $V_1 \subset V$ je jeho obraz $f(V_1)$ vektorový podprostor ve W.*
(5) *Pro každý podprostor $W_1 \subset W$ je množina $f^{-1}(W_1) = \{v \in V;\ f(v) \in W_1\}$ vektorový podprostor ve V.*

Důkaz. Počítejme (s využitím axiomů a definic a již dokázaných výsledků – vyhledejte pečlivě odkazy!):
$f(0) = f(u - u) = f((1 - 1) \cdot u) = 0 \cdot f(u) = 0$.
$f(-u) = f((-1) \cdot u) = (-1) \cdot f(u) = -f(u)$.
Vlastnost (3) se ověří snadno indukcí z definičního vztahu 2.19.
Z (3) nyní plyne, že $\langle f(V_1)\rangle = f(V_1)$, je to tedy vektorový podprostor.
Je-li naopak $f(u) \in W_1$ a $f(v) \in W_1$, pak pro libovolné skaláry bude i $f(a\cdot u+b\cdot v) = a \cdot f(u) + b \cdot f(v) \in W_1$. □

2.21. Definice. Nechť $f\colon V \to W$ je lineární zobrazení. Vektorový podprostor $\operatorname{Im} f := f(V) \subset W$ se nazývá *obrazem V* při zobrazení f. Vektorový podprostor $\operatorname{Ker} f := f^{-1}(\{0\}) \subset V$ se nazývá *jádro lineárního zobrazení f*. Lineární zobrazení, které je bijekcí nazýváme *izomorfismus*.

---

[8] Všimněme si, že operace na levých a pravých stranách těchto rovnic nejsou totožné, naopak, jde o operace na různých vektorových prostorech! Při této příležitosti se také můžeme zamyslet nad obecným případem báze M (možná nekonečněrozměrného) prostoru V. Báze pak nemusí být spočetná, pořád ale ještě můžeme definovat zobrazení $\underline{M}\colon V \to \mathbb{K}^M$ (tj. souřadnice vektoru jsou zobrazení z M do $\mathbb{K}$).

2.22. Věta.

(1) *Složení $g \circ f\colon V \to Z$ dvou lineárních zobrazení $f\colon V \to W$ a $g\colon W \to Z$ je opět lineární zobrazení.*
(2) *Lineární zobrazení $f\colon V \to W$ je izomorfismus právě když* $\operatorname{Im} f = W$ *a* $\operatorname{Ker} f = \{0\} \subset V$. *Inverzní zobrazení k izomorfismu je opět izomorfismus.*
(3) *Pro podprostory V_1, V_2 a lineární zobrazení $f\colon V \to W$ platí $f(V_1 + V_2) = f(V_1) + f(V_2)$, $f(V_1 \cap V_2) \subset f(V_1) \cap f(V_2)$.*

Důkaz. Ověření prvního tvrzení je snadné cvičení. Pro druhé si uvědomme, že je-li f lineární bijekce, pak $w = f^{-1}(au+bv)$ právě, když $f(w) = f(a\cdot f^{-1}(u)+b\cdot f^{-1}(v))$. Je tedy inverze k lineární bijekci opět lineární zobrazení. Dále, f je surjektivní právě, když $\operatorname{Im} f = W$ a pokud $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, pak $f(u) = f(v)$ zaručuje $f(u-v) = 0$, tj. $u = v$. Je tedy v tom případě f injektivní.

Poslední tvrzení se dokáže snadno přímo z definic. Najděte si protipříklad, že v dokazované inkluzi opravdu nemusí nastat rovnost! $\square$

2.23. Důsledky.

(1) Zobrazení "přiřazení souřadnic" $\underline{u}\colon V \to \mathbb{K}^n$ dané libovolně zvolenou bází $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ vektorového prostoru V je izomorfismus.
(2) Dva konečněrozměrné vektorové prostory jsou izomorfní právě když mají stejnou dimenzi.
(3) Složení dvou izomorfismů je izomorfismus.

* **2.24. Souřadný tvar lineárních zobrazení.** Nechť V, W jsou vektorové prostory nad $\mathbb{K}$, $\dim V = n$, $\dim W = m$ a nechť $f : V \to W$ je lineární zobrazení. Pro každou volbu bází $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ na V, $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ na W, máme k dispozici příslušná přiřazení souřadnic:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\underline{u}", "\simeq"'] & W \arrow[d, "\underline{v}"', "\simeq"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, dashed, "f_{\underline{u},\underline{v}}"] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

Přitom je každé lineární zobrazení jednoznačně určeno svými hodnotami na libovolné množině generátorů, zejména tedy na bázi $\underline{u}$. Označme

$$\begin{aligned} f(u_1) &= a_{11} \cdot v_1 + a_{21} \cdot v_2 + \dots + a_{m1} v_m \\ f(u_2) &= a_{12} \cdot v_1 + a_{22} \cdot v_2 + \dots + a_{m2} v_m \\ &\ \vdots \\ f(u_n) &= a_{1n} \cdot v_1 + a_{2n} \cdot v_2 + \dots + a_{mn} v_m \end{aligned}$$

tj. skaláry a_{ij} tvoří matici A, kde sloupce jsou souřadnice hodnot zobrazení f na bázových vektorech. Pro obecný vektor $u = b_1 \cdot u_1 + \dots + b_n \cdot u_n$ spočteme

$$\begin{aligned} f(u) &= b_1 \cdot f(u_1) + \dots + b_n \cdot f(u_n) \\ &= b_1(a_{11}v_1 + \dots + a_{m1}v_m) + \dots + b_n(a_{1n}v_1 + \dots + a_{mn}v_m) \\ &= (b_1a_{11} + \dots + b_na_{1n}) \cdot v_1 + \dots + (b_1a_{m1} + \dots + b_na_{mn}) \cdot v_m \end{aligned}$$

Pomocí násobení matic lze nyní velice snadno a přehledně zapsat hodnoty zobrazení $f_{\underline{u},\underline{v}}(w)$ definovaného jednoznačně předchozím diagramem. Připomeňme si, že vektory v $\mathbb{K}^k$ chápeme jako sloupce, tj. matice typu $k/1$

$$f_{\underline{u},\underline{v}}(\underline{u}(w)) = \underline{v}(f(w)) = A \cdot \underline{u}(w).$$

Matici A nazýváme *maticí zobrazení* f v bázích $\underline{u}$, $\underline{v}$. Naopak, každá volba matice A typu m/n zadává jednoznačně lineární zobrazení $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. Máme-li tedy zvoleny báze prostorů V a W, odpovídá každé volbě matice typu m/n lineární zobrazení $V \to W$.

* Nyní snadno vidíme, jak se skládají souřadná vyjádření lineárních zobrazení. Uvažme ještě další vektorový prostor Z nad $\mathbb{K}$ dimenze k s bází $\underline{w}$, lineární zobrazení $g\colon W \to Z$ a označme příslušnou matici $g_{\underline{v},\underline{w}}$.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\underline{u}", "\simeq"'] & W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\underline{v}"', "\simeq"] & Z \arrow[d, "\underline{w}"', "\simeq"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, dashed, "f_{\underline{u},\underline{v}}"] & \mathbb{K}^m \arrow[r, dashed, "g_{\underline{v},\underline{w}}"] & \mathbb{K}^k
\end{tikzcd}$$

$$g_{\underline{v},\underline{w}} \circ f_{\underline{u},\underline{v}}(x) = B \cdot (A \cdot x) = (B \cdot A) \cdot x = (g \circ f)_{\underline{u},\underline{w}}(x)$$

pro všechny $x \in \mathbb{K}^n$. Všimněte si, že isomorfismy odpovídají právě invertibilním maticím (ověřte si podrobně!).

* Ve speciálním případě lineárního zobrazení $f\colon V \to V$ vyjadřujeme zpravidla f pomocí jedné báze $\underline{u}$ prostoru V.

* **2.25. Záměny bází.** Uvažme vektorový prostor V a dvě báze $\underline{u}$, $\underline{v}$ na V. Pro identické zobrazení $\mathrm{id}_V\colon V \to V$ musí podle předchozího existovat matice A, která vyjadřuje toto lineární zobrazení ve zvolených bázích.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "\underline{u}", "\simeq"'] & V \arrow[d, "\underline{v}"', "\simeq"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, dashed, "(\mathrm{id}_{\mathrm{V}})_{\underline{u},\underline{v}}"] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

Tuto matici nazýváme *matice přechodu* od báze $\underline{u}$ k bázi $\underline{v}$. Podle definice matice zobrazení ji získáme tak, že souřadnice vektorů báze $\underline{u}$ v bázi $\underline{v}$ napíšeme do sloupců matice.

* Význam matice přechodu je v tom, že známe-li souřadnice x vektoru v bázi $\underline{u}$, pak jeho souřadnice v bázi $\underline{v}$ se obdrží vynásobením sloupce x maticí přechodu (zleva).

* Protože inverzní zobrazení k identickému je opět totéž identické zobrazení, je matice přechodu vždy invertibilní a její inverze je právě matice přechodu opačným směrem, tj. od báze $\underline{v}$ k bázi $\underline{u}$.

2.26. Důsledky. Nechť V a W jsou konečněrozměrné vektorové prostory nad týmž polem skalárů $\mathbb{K}$.

(1) $A, B \in \mathrm{Mat}_{mn}(K)$ jsou maticemi téhož zobrazení $f\colon V \to W$ v různých bazích, právě když existují invertibilní matice P a Q takové, že $B = P \cdot A \cdot Q$

(2) Ve vhodně zvolených bazích mají všechna lineární zobrazení matici (tj. souřadný tvar)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(tzn. prvních několik souřadnic se kopíruje, zbytek se zapomíná, a vše případně doplníme nulami).

(3) Pro libovolné lineární zobrazení $f : V \to W$ platí: $\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(V)$

(4) $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ jsou maticemi téhož zobrazení $f : V \to V$ v různých bazích na V, právě když existuje invertibilní matice P taková, že $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$

Důkaz. (1) Tvrzení plyne přímo z vyjádření $f = \mathrm{id}_W \circ f \circ \mathrm{id}_V$ v souřadnicích pro zvolené báze, viz. předchozí diagramy.

(2) je přímým důsledkem (1) a Věty 1.13.

(3) je okamžitě vidět, má-li zobrazení ve vybraných bazích matici uvedenou v (2).

(4) je speciálním případem (1), protože v tomto případě musíme nejdříve přejít od nové báze k staré (násobení maticí P), pak aplikovat původní matici zobrazení f a nakonec se vrátit do nové báze (násobení inverzní maticí P^{-1}). $\square$

2.27. Definice. Matice A, $B \in \mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{K})$ se nazývají *ekvivalentní*, jestliže existují invertibilní matice P, Q takové, že $B = PAQ$.

Matice A, $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ se nazývají *podobné*, jestliže existuje invertibilní matice P taková, že $B = P^{-1}AP$.

2.28. Příklady.

1. Projekce roviny xy do osy x je lineární zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Ve standardní bázi má matici $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Otočení roviny proti směru hodinových ručiček o úhel α je lineární zobrazení s maticí $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ ve standardní bázi. Zvolíme-li dvě vhodné báze na $\mathbb{R}^2$, pak získáme vyjádření tohoto zobrazení jednotkovou maticí. Nelze však najít jednu bázi $\underline{u}$ na $\mathbb{R}^2$ ve které by toto zobrazení mělo diagonální matici, najděte jednoduchý (geometrický) důvod!

2.29. Definice. Nechť f a g jsou lineární zobrazení z V do W. Jejich součet $f + g : V \to W$ je definován vztahem $(f + g)(u) = f(u) + g(u)$, $u \in V$. Pro každé $a \in K$ definujeme $(a \cdot f) : V \to W$, $(a \cdot f)(u) = a \cdot f(u)$. Množinu všech lineárních zobrazení $V \to W$ značíme $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Na množině $\mathrm{Hom}(V, V)$ je navíc definováno skládání zobrazení, které spolu se sčítáním splňuje všechny vlastnosti okruhu.

2.30. Věta. *Nechť V, W jsou konečněrozměrné vektorové prostory nad polem skalárů $\mathbb{K}$ s bázemi $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ ve V a $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ v W. Dále nechť $f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ a nechť A, B jsou matice f a g v bazích $\underline{u}$ a $\underline{v}$. Pak matice $A + B$ je matice součtu $(f + g)$ a matice $a \cdot A$ je matice násobku $a \cdot f$.*

Důkaz. Plyne okamžitě z definice matice zobrazení a vlastností násobení matic. Propočítejte si podrobně! □

2.31. Důsledek. *Nechť V je konečněrozměrný vektorový prostor nad polem skalárů $\mathbb{K}$. Každá volba báze $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ na V zadává isomorfismus okruhu lineárních zobrazení* $\mathrm{Hom}(V, V)$ *a okruhu* $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ *převádějící zobrazení na jejich matice.*

Poznámky k přemýšlení

1. Promyslete si důsledně, co říkají důležité výsledky této kapitoly (např. 2.2, 2.4, 2.11, 2.12, 2.13, 2.15, 2.16) pro konkrétní příklady vektorových prostorů z 2.5.

2. Promyslete si, ve kterém místě důkazu Steinitzovy věty o výměně se využije invertibilnost všech nenulových skalárů. (Pokud existují neinvertibilní nenulové, věta obecně neplatí!)

3. Specifikujte si větu 2.15 pro možné podprostory v $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

4. Napište si souřadná vyjádření (tj. matice v standardní bázi) pro všechna běžná lineární zobrazení v rovině, např. zrcadlení vzhledem k přímce, symetrie vzhledem k bodu, roztažení ve směru os, otočení o daný úhel, projekce do dané přímky procházející počátkem. Podobně i pro $\mathbb{R}^3$.

5. K předchozímu problému zkuste najít bázi (případně báze) v rovině tak, aby matice zvoleného zobrazení byla co nejjednodušší.

* **6.** Pomocí důsledku 2.26 ukažte, že lineární zobrazení $P\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je projekcí na lineární podprostor právě, když $P^2 = P$. Zkuste sformulovat a dokázat analogické tvrzení obecně.

* **7.** Dokažte tvrzení z 2.26.(2) přímo použitím Steinitzovy věty při konstrukci vhodných bazí na definičním oboruu i oboru hodnot $f\colon V \to W$.

* **8.** Promyslete si, jak budou vypadat vektorové prostory nad $\mathbb{Z}_p$, viz. problém 2 z kapitoly 1. Diskutujte zejména závislost na p.

* **9.** V prostoru $\mathrm{Hom}(V, W)$ je pro každou volbu bazí ve V a W indukována báze (je určena použitím kanonické báze prostoru matic – tj. matic $A_{ij} = (a_{kl})$ kde $a_{ij} = 1$ a všechny ostatní jsou nulové). Jak se tyto báze změní, změníme-li původní báze V a W?

3. Matice a determinanty

V této kapitole výjmečně nebudeme požadovat aby $\mathbb{K}$ bylo pole. Potřebné vlastnosti skalárů budeme upřesňovat podle potřeby.

3.1. Definice. Bijektivní zobrazení množiny X na sebe se nazývá *permutace množiny X*. Skládání zobrazení definuje na množině všech permutací na množině X strukturu grupy, tj. platí axiomy (KG1), (KG3), (KG4) (všimněte si, že komutativita je vynechána). Má-li množina X n prvků, hovoříme o *symetrické grupě* stupně n.

Permutace σ množiny $X = \{1, 2, \dots, n\}$ lze zapsat pomocí výsledného pořadí ve formě tabulky: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$. Prvek $x \in X$ se nazývá samodružným bodem permutace σ, je-li $\sigma(x) = x$. Permutace σ taková, že existují právě dva různé prvky $x, y \in X$ s $\sigma(x) = y$ a $\sigma(z) = z$ pro všechna ostatní $z \in X$ se nazývá *transpozice*, značíme ji (x, y).

3.2. Věta. *Každá permutace konečné množiny je součinem transpozic.*

Důkaz. Na X definujeme relaci $\sim$ takto: $a \sim b$ právě, když existuje $k \in \mathbb{Z}$ s vlastností $b = \sigma^k(a)$, kde pro $k > 0$ je $\sigma^k(a) = \sigma(\dots\sigma(\sigma(a))\dots)$, tj. k-krát aplikovaná σ, $\sigma^0(a) = a$ a pro záporná k klademe $\sigma^k = (\sigma^{-1})^{-k}$. Zde σ^{-1} je inverzní zobrazení k σ, tj. $\sigma^{-1}(\sigma(a)) = a$.

Relace $\sim$ splňuje:

(1) $a \sim a$, protože $\sigma^0(a) = a$ (reflexivita)
(2) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$, protože $\sigma^k(a) = b$ právě, když $a = \sigma^{-k}(b)$ (symetrie)
(3) $a \sim b \ \wedge \ b \sim c \Rightarrow a \sim c$, protože $\sigma^k \circ \sigma^l = \sigma^{k+l}$ (tranzitivita).

Množina X se tedy rozpadá na třídy ekvivalence $\sim$, uvažme jednu takovou třídu obsahující $a \in X$. Celé X je konečná množina, jistě tedy platí $\sigma^p(a) = \sigma^q(a)$ pro jistá $p < q$, uvažujme $0 \le p < q$ nejmenší možná s touto vlastností. Pokud je $p = 0$, pak $\sigma^q(a) = a$, pro libovolné p je $\sigma^p(a) = \sigma(\sigma^{p-1}(a)) = \sigma(\sigma^{(q-1)}(a))$. Protože ale q a p byly zvoleny minimální, je také $\sigma^q(a) = a$. Pro každé $b \sim a$ je b jedním z prvků $\{a, \sigma(a), \dots, \sigma^{q-1}(a)\} \subset X$ a tato množina je právě třídou rozkladu obsahující a. Zúžení permutace σ k této podmnožině zapíšeme jako složení transpozic

$$(a, \sigma^{q-1}(a)) \circ (a, \sigma^{q-2}(a)) \circ \dots \circ (a, \sigma(a)).$$

Diskutované zúžení permutace σ rozšíříme na permutaci celé X tak, že všechny ostatní body (mimo uvažovanou třídu ekvivalence) budou samodružné. Je-li celý rozklad na třídy ekvivalence $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$, pak se původní permutace σ vyjádří jako složení r permutací σ_i odpovídajících jednotlivým třídám. Každá z nich je již vyjádřena jako součin transpozic a věta je dokázána. $\square$

Permutacím σ_i z předchozího důkazu říkáme *cyklus*. Někdy se cyklem chápe pouze permutace σ na množině $\{a_1, \dots, a_k\}$ tvaru $\sigma(a_j) = a_{j+1}$, $j = 1, \dots, k-1$, $\sigma(a_k) = a_1$. Délkou takového cyklu rozumíme počet k permutovaných prvků. V naší definici připouštíme navíc existenci samodružných prvků, délkou však rozumíme opět pouze počet prvků, které samodružné nejsou.

3.3. Důsledek. *Každá permutace σ konečné množiny je součinem cyklů.* $\square$

3.4. Definice. Dvojice prvků $a, b \in X = \{1, \dots, n\}$ tvoří *inverzi v permutaci σ*, je-li $a < b$ a $\sigma(a) > \sigma(b)$. Permutace σ se nazývá *sudá* (resp. *lichá*), obsahuje-li sudý (resp. lichý) počet inverzí.

Parita permutace σ je $(-1)^{\text{počet inverzí}}$. Značíme ji $\operatorname{sgn}(\sigma)$.

3.5. Věta. *Na množině $X = \{1, 2, \dots, n\}$ je právě $n!$ různých permutací. Tyto lze seřadit do posloupnosti tak, že každé dvě po sobě jdoucí se liší právě jednou transpozicí. Lze při tom začít libovolnou permutací.*

Důkaz. Provedeme indukci přes počet prvků množiny X. Pro jednoprvkovou množinu tvrzení platí, protože na ní existuje právě jedna permutace.

Předpokládejme že tvrzení platí pro všechny množiny s $n-1$ prvky a uvažme permutaci $\sigma(1) = a_1, \dots, \sigma(n) = a_n$. Podle indukčního předpokladu, všechny permutace, které mají na posledním místě a_n, dostaneme z tohoto pořadí postupným prováděním transpozic. Přitom jich bude $(n-1)!$. V posledním z nich prohodíme $\sigma(n) = a_n$ za některý z prvků, který dosud nebyl na posledním místě a znovu uspořádáme všechny permutace s tímto vybraným prvkem na posledním místě do posloupnosti s požadovanými vlastnostmi. Po n-násobné aplikaci tohoto postupu získáme $n!$ zaručeně různých permutací, tzn. všechny, právě předepsaným způsobem. Všimněte si, že důležitou částí postupu je možnost začít s libovolnou z permutací. □

3.6. Věta. *Provedení libovolné transpozice změní paritu permutace. Každé pořadí čísel $\{1, 2, \dots, n\}$ lze získat postupnými transpozicemi sousedních prvků.*

Důkaz. Nechť je v pořadí $(a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ r inverzí. Pak je v pořadí $(a_1, \dots, a_{i+1}, a_i, \dots, a_n)$ buď $r-1$ nebo $r+1$ inverzí. Každou transpozici (a_i, a_j) lze přitom získat postupným provedením $(j-i)+(j-i-1) = 2(j-i)-1$ transpozic sousedních prvků. Proto se provedením libovolné transpozice parita permutace změní. Navíc víme z předchozí věty, že všechny permutace lze získat prováděním transpozic, lze je tedy získat i prováděním transpozic sousedních prvků. □

3.7. Důsledek. *Na množině $X = \{1, \dots, n\}$, $n > 1$, je právě $\frac{1}{2}n!$ sudých a $\frac{1}{2}n!$ lichých permutací. Pro permutace $\sigma, \eta\colon X \to X$ platí* $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \eta) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\eta)$, $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$. □

3.8. Definice. [9] Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice v $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{K})$. *Determinant matice A* je skalár $\det A = |A|$ definovaný vztahem

$$|A| = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

kde Σ_n je množina všech možných permutací na $\{1, \dots, n\}$. Každý z výrazů $\operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ nazýváme *člen determinantu* $|A|$.

3.9. Příklady. Je-li $n = 1$, pak $|a_{11}| = a_{11} \in \mathbb{K}$.
Pro $n = 2$ dostáváme $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

[9]Determinant lze také zavést prostřednictvím relativně jednoduchých geometrických úvah souvisejících s objemem rovnoběžnostěnů (v obecných dimensích n). Stručně řečeno, rovnoběžnostěn zadáváme ve standardních souřadnicích na $\mathbb{K}^n$ sloupci matice A deteminant $\det\colon \operatorname{Mat}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ je jediné takové zobrazení, až na skalární násobek. (Požadujeme totiž, aby byl objem "lineární v každém sloupci" a aby měnil znaménko při záměně dvou sloupců. Navíc nesmí záležet na volbě souřadnic.)

Podobně pro $n = 3$ spočteme

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Tomuto vzorci se říká *Saarusovo pravidlo.*

3.10. Definice. Nechť $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{K})$, potom matice $A^T = (a'_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{nm}(\mathbb{K})$ s prvky $a'_{ij} = a_{ji}$ se nazývá *matice transponovaná* k matici A.

Matice $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{K})$ s vlastností $A = A^T$ se nazývá *symetrická.* Jestliže platí $A = -A^T$, pak se A nazývá *antisymetrická matice.*

3.11. Věta. *Nechť* $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$.

(1) $|A^T| = |A|$
(2) *Je-li jeden řádek v* A *tvořen nulovými prvky z* $\mathbb{K}$, *pak* $|A| = 0$
(3) *Jestliže matice* B *vznikla z* A *výměnou dvou řádků, pak* $|A| = -|B|$
(4) *Jestliže matice* B *vznikla z* A *vynásobením řádku skalárem* $a \in \mathbb{K}$, *pak* $|B| = a|A|$
(5) *Jsou-li prvky* k*-tého řádku v* A *tvaru* $a_{kj} = c_{kj} + b_{kj}$ *a všechny ostatní řádky v maticích* A, B, C *jsou stejné, pak* $|A| = |B| + |C|$.

Důkaz. (1) Členy determinantů $|A|$ a $|A^T|$ jsou v bijektivní korespondenci. Členu $\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ přitom odpovídá člen

$$\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1} \cdot a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} = \mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdot a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)},$$

přičemž musíme ověřit, že je tento člen opatřen správným znaménkem. Podle 3.7 je však parita σ a σ^{-1} stejná, jde tedy opravdu o člen $|A^T|$ a první tvrzení je dokázáno.

(2) Plyne přímo z definice determinantu, protože všechny jeho členy budou nulové.

(3) Ve všech členech $|A|$ dojde u permutací k přidání jedné transpozice, tvrzení tedy plyne z 3.6.

(4) Vyplývá přímo z definice, protože členy determinantu $|B|$ jsou členy $|A|$ vynásobené skalárem a.

(5) V každém členu $|A|$ je právě jeden součinitel z k-tého řádku matice A. Protože platí distributivní zákon pro násobení a sčítání v $\mathbb{K}$, vyplývá tvrzení přímo z definičního vztahu pro determinanty. $\square$

Poznámka. Všimněme si závažného důsledku prvního tvrzení věty, $|A| = |A^T|$. Zaručuje totiž, že kdykoliv se nám podaří dokázat nějaké tvrzení o determinantech formulované s využitím řádků příslušné matice, pak analogické tvrzení platí i pro sloupce. V dalším proto budeme většinou tvrzení formulovat a dokazovat pro řádky, používat budeme ale bez zábran i odpovídající tvrzení pro sloupce. Např. hned následující věta platí zároveň i pro přičítání lineárních kombinací ostatních sloupců k vybranému.

3.12. Věta. *Determinant $|A|$ se nezmění, přičteme-li k libovolnému řádku A lineární kombinaci ostatních řádků.*

Důkaz. Jsou-li v A dva stejné řádky, je $|A| = 0$ (uvědomme si, že jsou v determinanty vždy dva sčítance stejné až na znaménko). Je tedy podle 3.11.(5) možné přičíst k vybranému řádku libovolný jiný řádek, aniž by se zmněnila hodnota determinantu. Vzhledem k 3.11.(4), lze přičíst i skalární násobek libovolného jiného řádku. □

3.13. Poznámka. Determinant matice v (řádkovém) schodovitém tvaru je $|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$. Předchozí věta tedy poskytuje velice efektivní metodu výpočtu determinantů pomocí tzv. Gaussovy eliminační metody, viz. 1.12.

3.14. Definice. Nechť $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{K})$ a $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m$, $1 \le j_1 < \ldots < j_l \le n$ nechť jsou přirozená čísla. Pak matici

$$M = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_l} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \dots & a_{i_k j_l} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{kl}(\mathbb{K})$$

nazýváme *submaticí matice* A určenou řádky $i_1, \dots, i_k$ a sloupci $j_1, \dots, j_l$. Zbývajícími $(m-k)$ řádky a $(n-l)$ sloupci je určena matice $M^* \in \mathrm{Mat}_{(m-k)(n-l)}(\mathbb{K})$, která se nazývá *doplňková submatice* k M v A. Při $k = l$ je definován $|M|$, který nazýváme *subdeterminant* nebo *minor* řádu k matice A. Je-li $m = n$, pak při $k = l$ je i M^* čtvercová a $|M^*|$ se nazývá *doplněk* minoru $|M|$, nebo *doplňkový minor* k submatici M v matici A. Skalár

$$(-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_l} \cdot |M^*|$$

se nazývá *algebraický doplněk* k minoru $|M|$. Submatice tvořené prvními k řádky a sloupci se nazývají *hlavní submatice*, jejich determinanty *hlavní minory* matice A. Při speciální volbě $k = l = 1$, $m = n$ hovoříme o *algebraickém doplňku* A_{ij} prvku a_{ij} matice A.

3.15. Lemma. *Nechť $A \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{K})$ a $|M|$ je její minor řádu $k < m$. Pak součin libovolného členu $|M|$ s libovolným členem jeho algebraického doplňku je členem $|A|$.*

* **Důkaz.** Pokud je $|M|$ hlavní minor matice A, plyne tvrzení přímo z definice determinantu.

* Nechť je matice M určena řádky $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ a sloupci $j_1 < \dots < j_k$. Pak pomocí $(i_1 - 1) + \dots + (i_k - k)$ výměn sousedních řádků a $(j_1 - 1) + \dots + (j_k - k)$ výměn sousedních sloupců v A převedeme submatici M na hlavní submatici a doplňková matice přitom přejde právě na doplňkovou matici. Celá matice A přejde přitom v matici B, pro kterou platí podle 3.11.(1), 3.11.(3) a definice determinantu $|B| = (-1)^\alpha |A|$, kde $\alpha = \sum_{h=1}^k (i_h - j_h) - 2(1 + \dots + k)$. □

3.16. Laplaceova věta. *Nechť* $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ *a nechť je pevně zvoleno* k *jejích řádků. Pak* $|A|$ *je součet všech* $\binom{n}{k}$ *součinů* $(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_l} \cdot |M| \cdot |M^*|$ *minorů řádu* k *vybraných ze zvolených řádků, s jejich algebraickými doplňky.*

* **Důkaz.** Jak víme, $|A|$ obsahuje právě $n!$ různých členů, právě jeden pro každou permutaci. (Členy jsou různé jako polynomy v prvcích matice A, přitom lze pro každý z členů zvolit matici A takovou, že pouze tento člen bude nenulový.) Podaří-li se nám ukázat, že uvažované součiny obsahují právě $n!$ různých členů z $|A|$, bude tvrzení věty dokázáno.

* Ze zvolených k řádků lze vybrat $\binom{n}{k}$ minorů M a podle předchozího lematu je každý z $k!(n-k)!$ členů v součinech $|M|$ s jejich algebraickými doplňky členem $|A|$. Přitom pro různé výběry M nemůžeme nikdy obdržet stejné členy a jednotlivé členy v $(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_l} \cdot |M| \cdot |M^*|$ jsou také po dvou různé. Celkem tedy máme právě požadovaný počet $k!(n-k)!\binom{n}{k} = n!$ členů. □

3.17. Praktický výpočet. Předchozí věta převádí výpočet $|A|$ na výpočet determinantů nižšího stupně. Této metodě výpočtu se říká *Laplaceův rozvoj* podle zvolených řádků či sloupců. Např. rozvoj podle i-tého řádku nebo i-tého sloupce:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} A_{ji}$$

kde A_{ij} označuje algebraický doplněk k prvku (minoru stupně 1) a_{ij}. Při praktickém počítání determinantů bývá výhodné kombinovat Laplaceův rozvoj s přímou metodou přičítání lineárních kombinací řádků či sloupců.

3.18. Cauchyova věta. *Nechť* $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ *jsou matice v* $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$. *Pak* $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

* **Důkaz.** Použijeme dvakrát Laplaceův rozvoj na vhodné matice. Uvažme nejprve (blokovou) matici $H \in \mathrm{Mat}_{2n}(\mathbb{K})$

$$H = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 \\ -1 & & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & -1 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Laplaceovým rozvojem podle prvních n řádků obdržíme právě $|H| = |A| \cdot |B|$.

* Nyní nejprve budeme k posledním n sloupcům postupně přičítat lineární kombinace prvních n sloupců tak, abychom obdrželi (blokovou) matici s nulami v pravém dolním rohu:

$$K = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & \dots & c_{nn} \\ -1 & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & -1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Prvky submatice nahoře vpravo přitom musí splňovat

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

neboli jde právě o prvky součinu $A \cdot B$ a $|K| = |H|$. Přitom rozvojem podle posledních n sloupců dostáváme

$$|K| = (-1)^{n+1+\cdots+2n}|A \cdot B| = (-1)^{2n\cdot(n+1)} \cdot |A \cdot B| = |A \cdot B|. \quad \square$$

3.19. Důsledek.

(1) Protože pro jednotkovou matici platí vždy $|E| = 1$, je pro každou invertibilní matici vždy $|A|$ invertibilní skalár a platí $|A|^{-1} = |A^{-1}|$.

(2) Jak jsme viděli již v 2.26, dvě matice $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ jsou maticemi téhož zobrazení $f\colon V \to V$ v různých bazích právě, když existuje invertibilní matice P, pro kterou platí $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$. Odtud plyne $|A| = |P| \cdot |B| \cdot |P^{-1}| = |B| \cdot |P \cdot P^{-1}| = |B|$. Má tedy determinant matice zobrazení hodnotu nezávislou na naší volbě báze.[10]

3.20. Definice. Nechť $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$. Matici $A^* = (a^*_{ij})$, kde $a^*_{ij} = A_{ji}$ jsou algebraické doplňky k prvkům a_{ji} v A, nazýváme *algebraicky adjungovaná matice* k matici A.

3.21. Věta. *Pro každou matici $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ platí $AA^* = A^*A = |A| \cdot E$. Zejména*

(1) *A^{-1} existuje v $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ právě, když $|A|^{-1}$ existuje v $\mathbb{K}$*

(2) *Pokud existuje A^{-1}, pak platí $A^{-1} = |A|^{-1} \cdot A^*$*

* **Důkaz.** Jak jsme již zmínili, Cauchyova věta ukazuje, že z existence A^{-1} vyplývá invertibilita $|A| \in \mathbb{K}$. Předpokládejme naopak, že $|A|$ je invertibilní skalár. Spočteme přímým výpočtem $A \cdot A^* = (c_{ij})$:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a^*_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}.$$

Pokud $i = j$ je to právě Laplaceův rozvoj $|A|$ podle i-tého řádku. Pokud $i \neq j$ jde o rozvoj determinantu matice v níž je i-tý a j-tý řádek stejný a proto je $c_{ij} = 0$. Odtud plyne $A \cdot A^* = |A| \cdot E$, ale již v 1.15 jsme odvodili, že z rovnosti $A \cdot B = E$ plyne i $B \cdot A = E$. (Pokud tomu někdo dá přednost, může zopakovat předešlý výpočet pro $A^* \cdot A$.) $\square$

Úmluva. Ve všech předchozích úvahách v této kapitole jsme uvažovali obecný okruh skalárů $\mathbb{K}$. Nyní již až do konce kapitoly budeme předpokládat že $\mathbb{K}$ je pole.

3.22. Definice. Nechť $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{K})$, a $\mathbb{K}$ je pole. *Hodností matice* nazýváme maximální počet jejích nezávislých řádků. Čtvercová matice $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ se nazývá *regulární*, je-li její hodnost n, v opačném případě ji nazýváme *singulární*. Hodnost matice A značíme $h(A)$.

---

[10] Můžeme proto přímo hovořit o determinantu lineárního endomorfismu. Později uvidíme, že se jedná o (vždy konstantní) poměr mezi objemy rovnoběžnostěnů a jejich obrazů v daném automorfismu f. To samozřejmě geometricky vysvětluje platnost Cauchyovy věty.

3.23. Věta. *Nechť* $\mathbb{K}$ *je pole.*

(1) *Hodnost libovolné nenulové matice* $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{K})$ *je rovna maximálnímu řádu nenulového minoru v* A.
(2) $h(A)$ *je rovna maximálnímu počtu lineárně nezávislých sloupců.*
(3) $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ *je regulární právě, když* $|A| \neq 0$.

Důkaz. (1) Protože je A nenulová, existuje v ní nenulový minor $|M|$ maximálního stupně $k \leq \min\{m, n\}$. Vhodným přeskládáním řádků a slouců matice A dosáhneme toho, že tento minor je hlavním minorem. Přitom přeskládání řádků nemění množinu řádků matice A, přeskládání sloupců vlastně znamená aplikaci isomorfismu, který "přejmenovává" prvky standardní báze $\mathbb{K}^m$, jistě tedy nemění počet lineárně nezávislých řádků.

Bez újmy na obecnosti tedy přímo předpokládejme, že $|M|$ je nenulový hlavní minor maximálního stupně k. Podle věty 3.12 musí být prvních k řádků v A lineárně nezávislých, tzn. $h(A) \geq k$. Uvažme nyní libovolné $i > k$, $1 \leq j \leq n$ a minor

$$|D_{ij}| := \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{kj} \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & a_{ij} \end{vmatrix}$$

Protože je to minor stupně $k+1$, musí být $|D_{ij}| = 0$. Rozkladem tohoto determinantu podle posledního sloupce, dostaneme

$$0 = a_{ij} \cdot |M| + \sum_{s=1}^{k} a_{sj} \cdot B_{sj}$$

kde B_{sj} jsou algebraické doplňky prvků a_{sj} v matici D_{ij} a zřejmě nezávisí na volbě j. Protože $|M| \neq 0$ podle předpokladu, dostali jsme i-tý řádek jako lineární kombinaci prvních k řádků pro libovolné $i > k$ a první tvrzení je dokázáno.

Vlastnosti (2) i (3) plynou okamžitě z (1). □

3.24. Důsledky.

(1) *Z definice hodnosti vyplývá, že hodnost matice* A *lineárního zobrazení* $f\colon V \to W$ *(v libovolných bazích) je rovna dimenzi obrazu* $\mathrm{Im}\, f$. (Dimenze obrazu je rovna počtu lineárně nezávislých sloupců v A, ta je ale rovna hodnosti.)
(2) *Zobrazení mezi vektorovými prostory stejné dimenze je isomorfismus právě, když jeho matice* A *v některých (tedy libovolných) bazích splňuje* $|A| \neq 0$.

3.25. Věta. *Nechť* $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{Mat}_{np}(\mathbb{K})$. *Potom*

$$h(A \cdot B) \leq \min\{h(A), h(B)\}$$

zejména při $m = n = p$ *je* $A \cdot B$ *regulární právě, když* A *i* B *jsou regulární. Při násobení regulární maticí* B *platí pro hodnost součinu* $h(A \cdot B) == h(A)$, *pro regulární* A *je* $h(A \cdot B) = h(B)$.

Důkaz. Protože dimenze obrazu lineárního zobrazení nemůže být nikdy větší než dimenze definičního oboru, je první tvrzení zcela zřejmé. Regulární matice je maticí isomorfismu, odtud plyne zbývající tvrzení. □

3.26. Výpočet hodnosti.

(1) hodnost matice se nemění elementárními transformacemi
(2) hodnost matice v řádkovém schodovitém tvaru je rovna počtu nenulových řádků (analogicky pro sloupce)
(3) dvě matice v $\mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{K})$ jsou maticemi téhož zobrazení v různých bazích ve V a W, právě když mají stejnou hodnost.
(4) z postupu v důkazu věty 3.23 plyne metoda pro výpočet $h(A)$ tzv. *metodou vroubení.* Spočívá v tom, že ke zvolenému $|M| \neq 0$ přidáváme sloupec a řádek z matice a pokud takto dostaneme samé nulové minory, je $h(A)$ rovna řádu $|M|$.

3.27. Poznámka. Shrňme si závěrem některé vlastnosti diskutovaných operací s maticemi nad okruhem skalárů. Zvolme libovolně $B, A \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{K})$.

(1) A^{-1} a B^{-1} existují právě, když existuje $(B \cdot A)^{-1}$ a přitom platí $(B \cdot A)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$, $B^{-1} \cdot A^{-1} = (A \cdot B)^{-1}$
(2) $(A^T)^T = A$, $(A^{-1})^{-1} = A$
(3) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
(4) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
(5) $|A^T| = |A|$
(6) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ kdykoliv $|A|$ je invertibilní v $\mathbb{K}$
(7) pro $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ a matici $\bar{A}$ komplexně sdruženou k A platí $\overline{|A|} = |\bar{A}|$.

Poznámky k přemýšlení

* **1.** Definice determinantu a příklady 3.9 zůstávají v platnosti pro libovolné matice nad skaláry, které umíme sčítat a násobit, viz. definice okruhů. Pro prakticky všechny další úvahy však potřebujeme další vlastnosti skalárů, zejména komutativitu! Promyslete alespoň tyto příklady: $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$, $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_p$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}_\infty[x]$ – všechny polynomy s reálnými koeficienty, $\mathbb{K} = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.

* **2.** Uvědomte si podrobně, které vlastnosti $\mathbb{K}$ jsme využili v důkazu tvrzení 3.11 a 3.12, v důkazu Laplaceovy věty a Cauchyovy věty a jejich přímých důsledcích. Promyslete si podrobnosti.

* **3.** Uvědomte si rozdíl v teorii při vynechání předpokladu o invertibilitě všech nenulových skalárů (axiom pole). Např. pro $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ máme: je-li $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z})$, je rovnice $A.x = y$ řešitelná v $\mathbb{R}^n$ pro každé $y \in \mathbb{R}^n$ právě, když A je regulární a to je právě, když $|A| \neq 0$; pak snadno spočteme $|A|^{-1}$ a A^{-1}. V $\mathbb{Z}^n$ je tato rovnice řešitelná pro každé $y \in \mathbb{Z}^n$ právě, když $|A| = \pm 1$. Pouze v tomto případě totiž existuje A^{-1}.

* Zejména A by mohlo obecně být "regulární" podle naší definice, ale příslušné zobrazení nemusí být izomorfismus!

* Např. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2$, tedy A^{-1} neexistuje v $\mathbb{Z}^2$. Všimněte si, že $A.(a,b)^T = (a + 2b, 2a + 6b)$ a $A(\mathbb{Z}^2) \neq \mathbb{Z}^2$, přitom ale řádky matice nejsou lineárně závislé.

* **4.** Hodnost matice a vlastnosti tohoto pojmu jsme studovali pouze pro matice nad poli skalárů. Přemýšlejte, do jaké míry má smysl pojem lineární závislosti resp.

nezávislosti pro obecnější skaláry. Např. $2, 3 \in \mathbb{Z}$ jsou lineárně závislé v $\mathbb{Z}^1$ ve smyslu naší definice, nelze však jeden z nich vyjádřit pomocí druhého. Promyslete si, kde se taková vlastnost odráží v důkazu věty 3.23.

* **5.** U vektorů nad komutativními skaláry, které netvoří pole nemá smysl pojem dimenze tak, jak jsme jej definovali, viz. předchozí problém, kde např. $\mathbb{Z}^1 = \langle 1 \rangle$. Proto nemá smysl přemýšlet o 3.24.(1). Přitom 3.24.(2) zůstává plně v platnosti, když změníme podmínku $|A| \neq 0$ na podmínku $|A|$ je invertibilní v $\mathbb{K}$.

4. Systémy lineárních rovnic

4.1. Definice. *Lineární rovnicí* o n neznámých $x_1, \dots , x_n$ nad skaláry $\mathbb{K}$ rozumíme rovnici tvaru $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$, kde $a_1, \dots , a_n \in \mathbb{K}$ jsou *koeficienty*, $b \in \mathbb{K}$ je *absolutní člen*.

Je-li dáno $m \geq 1$ lineárních rovnic o neznámých $x_1, \dots, x_n$ nad týmiž skaláry $\mathbb{K}$, $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i$; $i = 1, \dots, m$, hovoříme o *systému lineárních rovnic* nad $\mathbb{K}$. Matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazýváme *matice soustavy.* Matici

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

nazýváme *rozšířenou maticí soustavy.*

Řešením soustavy rozumíme n-tici $(u_1, \dots , u_n) \in \mathbb{K}^n$, která po dosazení $x_i = u_i$ změní rovnice na identity. Pro $b = (b_1, \dots , b_m)^T$, $x = (x_1, \dots , x_n)^T$, $u = (u_1, \dots , u_n)^T$ tedy řešení $x = u$ převádí systém lineárních rovnic na rovnost $A{\cdot}u = b$ vyjádřenou pomocí násobení matic.

Soustava je *řešitelná*, resp. *neřešitelná*, pokud existuje, resp. neexistuje, alespoň jedno řešení. Soustava se nazývá *určená*, resp. *nedourčená*, je-li řešitelná a má jedno, resp. více než jedno, řešení.

Dvě soustavy se nazývají *ekvivalentní*, jestliže mají stejné množiny řešení.

4.2. Poznámky. Výraz $A \cdot x = b$ lze číst takto: A je matice zobrazení $A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $b \in \mathbb{K}^m$. Řešením jsou ty vektory, které se zobrazí na b.

Každá elementární řádková transformace vede k ekvivalentní soustavě. Zejména následující úpravy nemění řešení soustavy rovnic:

(1) záměna rovnic
(2) vynásobení libovolné rovnice prvkem z $\mathbb{K}$
(3) přičtení libovolné lineární kombinace ostatních rovnic

Naopak, elementární sloupcové transformace k ekvivalentním soustavám nevedou, protože se "míchají" proměnné mezi sebou (např. vyměnění sloupců má za následek přejmenování proměnných).

4.3. Gaussova eliminace. Ekvivalentními (řádkovými) úpravami lze tedy převést rozšířenou matici A' soustavy na (řádkový) schodovitý tvar. Soustavu pak již snadno dořešíme postupným zpětným dosazováním zdola.

Přitom mohou nastat tři rozdílné případy. Předpokládejme pro jednoduchost, že $\mathbb{K}$ je pole.

(1) ve získaném schodovitém tvaru je v posledním nenulovém řádku jediný nenulový prvek a to v posledním sloupci (absolutní členy). Soustava pak *nemá řešení*.
(2) ve fázi zpětného dosazování je v právě diskutovaném řádku právě jedna dosud nespočtená hodnota proměnné. Výpočet pak pokračuje *spočtením této proměnné*.
(3) ve fázi zpětného dosazování je v právě diskutovaném řádku více než jedna dosud nespočtená hodnota proměnné. V tom případě zvolíme jednu z těchto proměnných, ostatní prohlásíme za *volné proměnné*. Hodnoty volných proměnných chápeme jako nezávislé parametry a zbývající hodnotu vybrané proměnné spočteme v závislosti na těchto parametrech.

Tímto postupem vyřešíme po konečném počtu úkonů libovolný konečný systém lineárních rovnic nad polem skalárů. V každém kroku zpětného dosazování přitom vlastně řešíme jednu lineární rovnici pro jednu proměnnou s nenulovým koeficientem u proměnné. Pokud skaláry netvoří pole, mohou nastat navíc komplikace s výpočty hodnot proměnných zadaných těmito rovnicemi v jedné proměnné.[11]

V dalším se budeme zabývat podrobnějším popisem řešitelnosti a vlastností systémů lineárních rovnic.

4.4. Frobeniova věta. *Nechť $\mathbb{K}$ je pole. Soustava lineárních rovnic má řešení právě, když je hodnost matice soustavy rovna hodnosti rozšířené matice soustavy.*

Důkaz. Nechť je u řešením soustavy $A \cdot x = b$, tj. opravdu platí $A \cdot u = b$. Pak je b lineární kombinací sloupců matice A a odtud plyne $h(A') = h(A)$. Je-li naopak $h(A) = h(A')$, pak je b lineární kombinací sloupců v A, ale to je právě tvrzení, že $b = A.(u_1, \dots, u_n)^T$ pro vhodné skaláry u_i, neboli systém rovnic $A \cdot x = b$ má řešení. □

4.5. Věta. *Nechť $\mathbb{K}$ je pole. Soustava $A \cdot x = b$, $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{K})$, je nedourčená právě, když je řešitelná a počet neznámých je větší než $h(A)$ a je určená právě když je řešitelná a počet neznámých je roven $h(A)$.*

Důkaz. Hodnost matice soustavy nemůže být nikdy větší než počet proměnných, tj. n. Předpokládejme nejprve $h(A) = n$. Pak $m \geq n$, ale nejvýše m rovnic (řádků v A) může být lineárně nezávislých. Protože ty závislé můžeme vynechat, lze přímo předpokládat, že $m = n = h(A)$. V tomto případě ovšem existuje inverze A^{-1} a tedy existuje právě jedno řešení uvažovaného systému, $u = A^{-1} \cdot b$. Naopak, jestliže existuje právě jedno řešení u soustavy, pak i soustava rovnic $A \cdot x = 0$ je určená. Skutečně, pokud by existovalo nenulové řešení v, tj. $A \cdot v = 0$, pak i $A \cdot (u + v) = A \cdot u + A \cdot v = b$ je dalším řešením původního systému. Odtud ale

[11] Metoda se zdá být numericky zcela triviální, počítačová implementace má však vážná úskalí, protože se obtížně ošetřují možná dělení velmi malými čísly. V důsledku toho se obtížně odhadují numerické chyby vzniklé při výpočtu.

plyne, že jediným řešením systému $A \cdot x = 0$ je nulový vektor a tedy sloupce v A jsou lineárně nezávislé. Tím je dokázáno druhé tvrzení.

Zbývá tedy případ $h(A) < n$. Vyberme maximální počet $h(A)$ lineárně nezávislých řádků v A a ostatní (závislé) rovnice zapomeňme. Provedením Gaussovy eliminace jistě získáme (řádkový) schodovitý tvar, kde v některém z řádků bude nutno určit hodnoty několika proměnných. Přesněji, při zpětném dosazování získáme právě $n - h(A)$ volných proměnných. Dosazením různých hodnot za tyto volné proměnné získáme různá řešení, je tedy původní systém nedourčený. Naopak, jestliže existuje více řešení daného systému $A \cdot x = 0$, zvolme dvě různá řešení $u, v \in \mathbb{K}^n$. Pak ale $A.(u - v) = 0$ a $(u - v) \neq 0$, takže sloupce v A jsou lineárně závislé. Odtud již plyne $h(A) < n$. □

4.6. V důkazu jsme získali ještě i dodatečnou informaci o množině všech řešení systému lineárních rovnic. Vrátíme se k této otázce podrobněji. Nejprve zavedeme potřebné značení.

Lineární rovnice $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ se nazývá *homogenní*, jestliže $b = 0$, *nehomogenní* pro $b \neq 0$. Soustava $A \cdot x = b$ je *homogenní*, jestliže vektor absolutních členů je nulový, tj. $b = 0$, a je *nehomogenní*, je-li $b \neq 0$.

Pro soustavu $A \cdot x = b$ nazýváme příslušnou homogenní soustavu $A \cdot x = 0$ *zhomogenizovanou* soustavou.

4.7. Věta. *Nechť $\mathbb{K}$ je pole. Pro každou homogenní soustavu $A \cdot x = 0$, $A \in Mat_{mn}(\mathbb{K})$ platí*

(1) *má vždy nulové řešení $x = 0$*
(2) *množina všech řešení je vektorový podprostor $U \subset \mathbb{K}^n$, $\dim U = n - h(A)$ je rovna počtu volných proměnných.*

Důkaz. První tvrzení je triviální – nulový vektor splňuje $A \cdot 0 = 0$ pro každou matici A. Předpokládejme, že $u, v \in \mathbb{K}^n$ jsou dvě řešení, tj. $A \cdot u = A \cdot v = 0$. Pro $a, b \in \mathbb{K}$ je

$$A \cdot (au + bv) = p \cdot A \cdot u + b \cdot A \cdot v = 0$$

a proto je $U \subset \mathbb{K}^n$ vektorový podprostor. Všechny vektory v U jsou zadány volbou $k = n - h(A)$ hodnot volných proměnných. Zadáním k-tic volných proměnných $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$ jistě získáme lineárně nezávislé generátory podprostoru všech řešení. □

4.8. Definice. Báze podprostoru $U \subset \mathbb{K}^n$ všech řešení homogenní soustavy rovnic $A \cdot x = 0$, $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{K})$, se nazývá *fundamentální soustava řešení.*

4.9. Poznámky. (1) Řešení soustavy $A \cdot x = 0$ je vlastně hledání jádra příslušného zobrazení. (Odtud již také plyne, že řešení homogenního systému vždy tvoří podprostor.) Dimenze jádra se často nazývá *defekt zobrazení*, podobně $n - h(A)$ je *defekt matice A*.

(2) Naopak každý vektorový podprostor je jádrem vhodného zobrazení. Zkonstruujme jeden takový systém. Je-li $U \subset \mathbb{K}^n$ a $(u_1, \dots, u_l)$ je báze U, můžeme ji doplnit na bázi $(u_1, \dots, u_l, v_1, \dots, v_{n-l})$ celého $\mathbb{K}^n$. Každému $x \in \mathbb{K}^n$ přiřadíme jeho $n - l$ souřadnic u prvků $(v_1, \dots, v_{n-l})$. Tím získáme zobrazení $A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^{n-l}$ jehož jádrem je právě podprostor U.

4.10. Věta. *Nechť $A \cdot x = b$ je systém lineárních rovnic, $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{K})$ a $\mathbb{K}$ je pole. Pak platí*

(1) *součet libovolného řešení soustavy $A \cdot x = 0$ a libovolného řešení soustavy $A \cdot x = b$ je řešením soustavy $A \cdot x = b$.*
(2) *rozdíl dvou libovolných řešení soustavy $A \cdot x = b$ je řešením zhomogenizované soustavy $A \cdot x = 0$*

Důkaz. Ověří se přímým výpočtem. □

Nyní uvedeme obecnou metodu výpočtu řešení soustav lineárních rovnic, která funguje pro všechny komutativní okruhy skalárů.

4.11. Cramerovo pravidlo. *Nechť je dána soustava lineárních rovnic $A \cdot x = b$, $A \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{K})$ a nechť $|A|^{-1} \in \mathbb{K}$ existuje. Pak daná soustava má právě jedno řešení $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ a platí $x_i = |A|^{-1} \cdot |A_i|$, kde matice A_i vznikla z A nahrazením i-tého sloupce sloupcem absolutních členů.*

* **Důkaz.** Protože $|A|$ je invertibilní skalár, existuje v $\mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{K})$ inverzní matice A^{-1}. Proto má soustava právě jedno řešení. Toto řešení lze navíc přímo spočíst:

$$x = A^{-1} \cdot b = |A|^{-1} \cdot (A^* \cdot b)$$

a odtud plyne vztah pro i-tou komponentu vektoru x

$$x_i = |A|^{-1} \sum_j (A_{ji} b_j)$$

kde A_{ji} je prvek v i-tém řádku a j-tém, sloupci algebraicky adjungované matice A^*. To je ale právě Laplaceův rozvoj matice A_i podle i-tého sloupce. □

4.12. Poznámka. Řešení systémů lineárních rovnic pomocí eliminace proměnných je jednoduché, bez podstatných numerických problémů, jen je třeba dát pozor na správnou volbu volných proměnných.

Cramerovo pravidlo je většinou daleko náročnější na výpočet, protože představuje výpočet mnoha determinantů. Na druhé straně často potřebujeme spočíst jen několik málo souřadnic řešení (např. při hledání průniků podprostorů). Navíc má velký teoretický význam (už proto, že je to symbolická formule pro řešení, se kterou se dá dále pracovat).

Poznámky k přemýšlení

* **1.** Pro libovolné matice $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ platí slabší verze Cramerova pravidla (bez požadavku invertibility): *Je-li $A.p = 0$ pro $p \in \mathbb{K}^n$, pak $|A|.p_i = 0$ v $\mathbb{K}$ pro všechny komponenty vektoru p.* Dokažte! (Všimněte si, že $A.p = 0$ sebou nese lineární závislost sloupců.)

* **2.** Výsledky této kapitoly lze rozšířit na tzv. maticové rovnice $A.X = B$, kde $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{Mat}_{mp}(\mathbb{K})$ a řešení X se hledá v $\mathrm{Mat}_{np}(\mathbb{K})$.

* Zejména platí $A.X = B$ je řešitelné právě, když hodnost rozšířené matice je rovna hodnosti matice A, a Cramerovo pravidlo lze formálně psát ve tvaru $x_{ij} = \frac{|A_{i,j}|}{|A|}$. Sformulujte přesně a dokažte!

5. Geometrie endomorfismů a kanonické tvary

V celé kapitole bude $\mathbb{K}$ pole skalárů. Představujme si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Připomeňme, že endomorfismem rozumíme libovolné lineární zobrazení $V \to V$.

5.1. Definice. Nechť $\varphi : V \to V$ je lineární zobrazení vektorového prostoru V do sebe. Podprostor $U \subset V$ se nazývá *invariantní podprostor* (vzhledem k φ), jestliže $\varphi(U) \subset U$.

5.2. Definice. Nechť $V_1, V_2, W \subset V$ jsou vektorové podprostory ve vektorovém prostoru V. Řekneme, že W je *přímým součtem* podprostorů V_1 a V_2, jestliže $V_1 + V_2 = W$ a $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Pro přímý součet[12] budeme užívat označení $W = V_1 \oplus V_2$. Obecněji, pro libovolný konečný počet vektorových podprostorů $V_i \subset V$, $i = 1, \dots, k$, splňujících pro všechna i $V_i \cap (V_1 + \dots + V_{i-1} + V_{i+1} + \dots + V_k) = \{0\}$ říkáme, že jejich součet je přímý a píšeme $V \supset W = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$.

Jsou-li $(u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots v_m)$ báze V_1, V_2 a jejich součet je přímý, $W = V_1 \oplus V_2$, pak $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots v_m)$ je báze W. Analogicky získáme báze přímých součtů konečně mnoha podprostorů.

5.3. Věta. *Jsou-li $V_1, V_2 \subset V$ podprostory, $\dim V < \infty$, pak $V = V_1 \oplus V_2$ právě, když $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ a $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim V$.*

Důkaz. Pokud je $V = \langle V_1 \cup V_2 \rangle$, pak $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim V + \dim(V_1 \cap V_2)$. $\square$

Zřejmě také platí, že $V = V_1 \oplus V_2$ právě, když $V = V_1 + V_2$ a součet jejich dimenzí je roven dimenzi V. Analogické tvrzení platí pro libovolný konečný počet podprostorů: $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ právě, když $V = V_1 + \dots + V_k$ a zároveň $\dim V_1 + \dots + \dim V_k = \dim V$. Všimněte si také, že věta o existenci báze v konečněrozměrných prostorech říká, že každý vektorový prostor dimenze m je přímým součtem m jednorozměrných podprostorů.

5.4. Lemma. *Nechť $\varphi, \psi : V \to V$ jsou lineární zobrazení a nechť $U \subset V$ je invariantní podprostor vzhledem k φ i ψ. Pak U je invariantní vzhledem k libovolné lineární kombinaci $a \cdot \varphi + b \cdot \psi$, $a, b \in \mathbb{K}$.*

Důkaz. Pro $u \in U$ máme $(a\cdot\varphi+b\cdot\psi)(u) = (a\cdot\varphi)(u)+(b\cdot\psi)(u) = a\cdot\varphi(u)+b\cdot\psi(u) \in U$. $\square$

5.5. Věta. *Nechť $\varphi : V \to V$ je endomorfismus, $\dim V = m$. Pak platí*

(1) *Ve V existuje invariantní podprostor dimenze n právě, když existuje báze V, ve které má φ matici tvaru $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, s bloky $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{K}), B \in \mathrm{Mat}_{n,m-n}(\mathbb{K}), C \in \mathrm{Mat}_{m-n,m-n}(\mathbb{K})$.*

(2) *$V = V_1 \oplus V_2$ je součtem dvou invariantních podprostorů právě, když má φ ve vhodné bázi matici tvaru $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, s bloky $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{K}), C \in \mathrm{Mat}_{m-n,m-n}(\mathbb{K})$.*

[12] Většinou se definuje obecně přímý součet dvou vektorových prostorů V, W jako množina $V \times W$ spolu s operacemi sčítání a násobení skaláry po složkách. Náš případ přímého součtu podprostorů s nulovým průnikem pak je (až na isomorfismus) speciálním případem.

Důkaz. Nechť $U \subset V$ je invariantní podprostor vzhledem k φ, $\dim U = n$. Zvolme bázi $(u_1, \dots, u_n)$ pro U a doplňme ji libovolně na bázi V. Protože $\varphi(U) \subset U$, je matice φ v této bázi v požadovaném tvaru. Naopak, jestliže má φ v nějaké bázi požadovaný tvar, pak jistě je podprostor dimenze n generovaný prvními n prvky této báze invariantní.

Podobně se dokáže i druhé tvrzení. Jsou-li $V_1, V_2 \subset V$ invariantní podprostory a $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, $V_1 + V_2 = V$, pak existují báze $(u_1, \dots, u_n)$ pro V_1 a báze$(v_1, \dots, v_{m-n})$ pro V_2 takové, že $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_{m-n})$ je báze V. V této bázi má V požadovaný tvar matice. Naopak, má-li zobrazení v jisté bázi požadovaný blokově diagonální tvar, pak je V přímým součtem invariantních podprostorů generovaných prvními n a posledními $m - n$ vektory této báze. □

5.6. Definice. O maticích z prvního tvrzení předchozí věty říkáme, že jsou *polorozpadlé*, matice z druhého tvrzení jsou *rozpadlé*. Obecněji, polorozpadlou maticí rozumíme blokově horní trojúhelníkovou matici, rozpadlá matice je blokově diagonální.

Jestliže má zobrazení $\varphi\colon V \to V$ jednorozměrný invariantní podprostor, pak jeho zúžení k tomuto podprostoru musí být násobení vhodně zvoleným skalárem. Naše další úsilí bude směřovat k nalezení rozkladů na takové podprostory, podmínek za kterých existují, případně co lze o zobrazení říci, pokud neexistují. Je zcela zřejmé, že celý prostor V je přímým součtem jednorozměrných invariantních podprostorů právě tehdy, když existuje jeho báze, v níž má zobrazení φ diagonální matici. Vlastnosti vektorů takové báze jsou zachyceny v následující definici.

5.7. Definice. Nechť $\varphi : V \to V$ je lineární zobrazení. *Vlastní vektor* zobrazení φ je nenulový vektor $v \in V$ splňující $\varphi(v) = a \cdot v$ pro vhodný skalár $a \in \mathbb{K}$. Příslušný skalár nazýváme *vlastní hodnotou* zobrazení φ (příslušný k vlastnímu vektoru v). Často se také pro a používá název *vlastní číslo* zobrazení φ, někdy i název *charakteristické číslo*.

Následující věta dává (překvapivě snadný) popis všech vlastních hodnot lineárních zobrazení. Zaveďme nejprve potřebné značení. Pro danou čtvercovou matici $A \in \operatorname{Mat}_n \mathbb{K}$ nazýváme matici $A - \lambda E$ s volným parametrem $\lambda \in \mathbb{K}$ *charakteristickou maticí* matice A. Determinant $|A - \lambda E| \in \mathbb{K}_n[\lambda]$ chápaný jako polynom stupně n v proměnné λ nazýváme *charakteristický polynom* matice A.

5.8. Věta. *Nechť $\varphi\colon V \to V$ je lineární zobrazení, A jeho matice v jisté bázi V. Potom platí:*

(1) *Vlastní vektory zobrazení φ s vlastní hodnotou $a \in \mathbb{K}$ vyplní právě vektorový podprostor $\operatorname{Ker}(\varphi - a \cdot \mathrm{id}_V) \subset V$, mimo nulový vektor, a tento podprostor je invariantní podprostor ve V.*
(2) *Vlastní hodnoty φ jsou právě kořeny charakteristického polymu $|A - \lambda E|$ v $\mathbb{K}$ a tyto nezávisí na volbě báze (a tedy matice zobrazení φ) ve V.*

Důkaz. Ověříme obě tvrzení zároveň. Nechť A, B jsou matice zobrazení φ ve dvou bázích prostoru V. Je-li $\varphi(v) = a \cdot v$, $v \neq 0$, pak $(\varphi - a \cdot \mathrm{id}_V)(v) = 0$, tzn. systém lineárních rovnic s maticí $A - a \cdot E$ má netriviální řešení a tedy je tato matice singulární, což je ekvivalentní podmínce $|A - a \cdot E| = 0$. Odtud plyne, že každá vlastní hodnota je kořenem polynomu $|A - \lambda \cdot E| \in \mathbb{K}_{\dim V}[\lambda]$. Je-li naopak a kořenem, je příslušná matice singulární a proto existuje vlastní vektor s vlastní hodnotou a. Prostor všech vlastních vektorů příslušných k vlastní hodnotě $a \in \mathbb{K}$, doplněný o nulový vektor, je jádrem zobrazení $(\varphi - a \cdot \mathrm{id}_V)$ a je to tedy vektorový podprostor. (Jeho souřadné vyjádření se získá vyřešením systému lineárních rovnic s maticí $A - a \cdot E$.) Je-li $\varphi(v) = a \cdot v$, pak $\varphi(a \cdot v) = a \cdot (a \cdot v)$, odtud plyne invariantnost podprostorů vlastních vektorů.

Matice A a B zobrazení φ v různých bazích jsou v relaci $A = P^{-1}BP$ pro vhodnou invertibilní matici P, platí tedy $|A - \lambda \cdot E| = |P^{-1} \cdot B \cdot P - \lambda \cdot P^{-1}EP| = |P^{-1}(B - \lambda \cdot E)P| = |P|^{-1}|B - \lambda \cdot E||P| = |B - \lambda \cdot E|$, díky komutativitě $\mathbb{K}$ a Cauchyově větě. □

5.9. Definice. Nechť $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$. Polynom $|A - \lambda E| \in \mathbb{K}_n[\lambda]$ nazýváme *charakteristický polynom matice* A. Kořeny tohoto polynomu nazýváme *charakteristická čísla matice* A, často také *vlastní hodnoty matice* A. Je-li A matice zobrazení φ v jisté bázi, pak $|A - \lambda E|$ nazýváme *charakteristický polynom zobrazení* φ.

5.10. Důsledek. Protože je charakteristický polynom zobrazení $\varphi\colon V \to V$ nezávislý na volbě báze V, $\dim V = n$, jsou i jeho koeficienty u jednotlivých mocnin proměnné λ skaláry vyjadřující vlastnosti zobrazení φ. Zejména je snadné vyjádřit koeficienty u nejvyšších a nejnižších mocnin:

$$|A - \lambda \cdot E| = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1}(a_{11} + \dots + a_{nn}) \cdot \lambda^{n-1} + \dots + |A| \cdot \lambda^0$$

Součet diagonálních členů matice se nazývá *stopa matice*, značíme ji TrA, *stopa zobrazení* je definována jako stopa jeho matice v libovolné bázi.

5.11. Věta. *Vlastní vektory lineárního zobrazení $\varphi\colon V \to V$ příslušné různým vlastním hodnotám jsou lineárně nezávislé.*

Důkaz. Nechť $a_1, \dots, a_k$ jsou různé vlastní hodnoty zobrazení φ a $u_1, \dots, u_k$ vlastní vektory s těmito vlastními hodnotami. Důkaz provedeme indukcí přes počet lineárně nezávislých vektorů mezi zvolenými. Předpokládejme, že $u_1, \dots, u_l$ jsou lineárně nezávislé a $u_{l+1} = \sum_i c_i u_i$ je jejich lineární kombinací. Alespoň $l = 1$ lze zvolit, protože vlastní vektory jsou nenulové. Pak ovšem $a_{l+1} \cdot u_{l+1} = \sum_{i=1}^{l} a_{l+1} \cdot c_i \cdot u_i$, tj.

$$\varphi(u_{l+1}) = \sum_{i=1}^{l} a_{l+1} \cdot c_i \cdot u_i = \sum_{i=1}^{l} c_i \cdot \varphi(u_i) = \sum_{i=1}^{l} c_i \cdot a_i \cdot u_i.$$

Odečtením dostáváme $0 = \sum_{i=1}^{l}(a_{l+1} - a_i) \cdot c_i \cdot u_i$, všechny rozdíly vlastních hodnot jsou nenulové a alespoň jeden koeficient c_i je nenulový. To je spor s předpokládanou nezávislostí $u_1, \dots, u_l$. □

5.12. Důsledek. *Jestliže existuje n navzájem různých kořenů a_i charakteristického polynomu zobrazení $\varphi : V \to V$, $\dim V = n$, pak existuje rozklad V na přímý součet vlastních podprostorů dimenze 1. To znamená, že existuje báze V složená výhradně z vlastních vektorů a v této bázi má φ diagonální matici. Příslušnou bázi (vyjádřenou v souřadnicích vzhledem k libovolně zvolené bázi V) obdržíme řešením n systémů homogenních lineárních rovnic o n neznámých s maticemi $(A - a_i \cdot E)$, kde A je matice φ ve zvolené bázi.*

5.13. Příklady.

1. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, s maticí $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ v standardní bázi.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1,$$

s kořeny $\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = -1$. Vlastní vektory s vlastní hodnotou $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

fundamentální systém řešení tohoto sytému rovnic (tj. báze prostoru vlastních vektorů s vlastní hodnotou $\lambda = 1$) je

$$u_1 = (0, 1, 0), \quad u_2 = (1, 0, 1).$$

Podobně pro $\lambda = -1$ dostáváme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_3 = (-1, 0, 1).$$

V bázi u_1, u_2, u_3 (všimněte si, že u_3 musí být lineárně nezávislý na zbylých dvou díky předchozí větě a u_1, u_2 vyšly jako dvě nezávislá řešení) má φ diagonální matici $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Celý prostor $\mathbb{R}^3$ je přímým součtem vlastních podprostorů, $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$, $\dim V_1 = 2$, $\dim V_2 = 1$. Tento rozklad je dán jednoznačně a vypovídá mnoho o geometrických vlastnostech zobrazení φ. Vlastní podprostor V_1 je navíc přímým součtem jednorozměrných vlastních podprostorů, které lze však zvolit mnoha různými způsoby (tento rozklad nemá tedy již žádný "invariantní" význam).

2. Zvolme zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané ve standardní bázi maticí $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, tj. otočení roviny o $\pi/2$ v kladném směru. Příslušný charakteristický polynom je $\lambda^2 + 1$, nemá tedy žádné reálné kořeny. Proto neexistují žádné vlastní vektory.

Pokud ovšem uvažujeme zobrazení $\varphi\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ dané stejnou maticí, pak ve vektorovém prostoru $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{C}$ najdeme vlastní vektory příslušné dvěma vlastním hodnotám $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, a celý prostor $\mathbb{C}^2$ je přímým součtem dvou jednorozměrných podprostorů vlastních vektorů.

3. Uvažme lineární zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ definované derivováním polynomů, tj. $\varphi(1) = 0$, $\varphi(x) = 1$, $\varphi(x^2) = 2x$ a φ má v standardní bázi matici

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Charakteristický polynom $|A - \lambda \cdot E| = -\lambda^3$, existuje tedy pouze jediná vlastní hodnota, $\lambda = 0$. Spočtěme vlastní vektory:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Prostor vlastních vektorů je tedy jednorozměrný, generovaný konstantním polynomem 1.

5.14. Definice. *Spektrum lineárního zobrazení* $\varphi\colon V \to V$ je posloupnost kořenů charakteristického polynomu zobrazení φ, včetně násobností. *Algebraickou násobností* vlastní hodnoty rozumíme její násobnost jako kořenu charakteristického polynomu, *geometrická násobnost* vlastní hodnoty je dimenze příslušného podprostoru vlastních vektorů.

5.15. Definice. Lineární zobrazení $\varphi\colon V \to V$ se nazývá *nilpotentní*, jestliže existuje celé číslo $k \geq 1$ takové, že iterované zobrazení φ^k je identicky nulové. Nejmenší číslo k s touto vlastností se nazývá *stupněm nilpotentnosti* zobrazení φ. $\varphi\colon V \to V$ se nazývá *cyklické*, jestliže existuje báze $u_1, \dots, u_n$ prostoru V taková, že $\varphi(u_1) = 0$ a $\varphi(u_i) = u_{i-1}$ pro všechna $i = 2, \dots, n$. Jinými slovy, matice φ v této bázi je tvaru $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$.

Poznámka. Je-li $\varphi(v) = a \cdot v$, pak pro každé přirozené k $\varphi^k(v) = a^k \cdot v$. Zejména tedy může spektrum nilpotentního zobrazení obsahovat pouze nulový skalár (a ten tam vždy je).

Přímo z definice plyne, že každé cyklické zobrazení je nilpotentní, navíc je jeho stupeň nilpotentnosti roven dimenzi prostoru V. Operátor derivování na polynomech definovaný v předchozím příkladu je příkladem cyklického zobrazení.

Na příkladech jsme viděli, že vlastní podprostory popisují dostatečně geometrické vlastnosti jen některých lineárních zobrazení. Zavedeme nyní jemnější nástroj, tzv. kořenové podprostory.[13]

* **5.16. Definice.** Nenulový vektor $u \in V$ se nazývá *kořenovým vektorem* lineárního zobrazení $\varphi : V \to V$, jestliže existuje $a \in \mathbb{K}$ a celé číslo $k > 0$ takové, že $(\varphi - a \cdot \mathrm{id}_V)^k(u) = 0$, tj. k-tá iterace uvedeného zobrazení zobrazuje u na nulu. Množinu všech kořenových vektorů příslušných k pevnému skaláru λ doplněnou o nulový vektor nazýváme *kořenovým prostorem* příslušným ke skaláru $\lambda \in \mathbb{K}$, značíme $\mathcal{R}_\lambda$.

* Je-li u kořenový vektor a k z definice je vybráno nejmenší možné, pak $(\varphi - a \cdot \mathrm{id}_V)^{k-1}(u)$ je vlastní vektor s vlastní hodnotou a. Je tedy $\mathcal{R}_\lambda = \{0\}$ pro všechny skaláry λ, které neleží ve spektru zobrazení φ.

[13] Kořenové prostory jsou zajímavé a důležité samy o sobě, nám teď poslouží na cestě k tzv. Jordanovým kanonickým tvarům matic. Pokud čtenář již nyní tápe a bude mít potíže vstřebat abstrakci faktorových prostorů, doporučuji zatím přeskočit až k definici 5.26, přečíst formulaci vět o kanonickém tvaru a pokračovat až příští kapitolou. Přijde tím ovšem o obzvlášt pěkné výsledky.

* **5.17. Lemma.** *Nechť $\varphi\colon V \to V$ je lineární zobrazení. Platí*

(1) *Pro každé $\lambda \in \mathbb{K}$ je $\mathcal{R}_\lambda \subset V$ vektorový podprostor.*
(2) *Pro každé $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ je $\mathcal{R}_\lambda$ invariantní vzhledem k lineárnímu zobrazení $(\varphi - \mu \cdot \mathrm{id}_V)$, zejména tedy je $\mathcal{R}_\lambda$ invariantní vzhledem k φ.*
(3) *Je-li $\mu \neq \lambda$, pak $(\varphi - \mu \cdot \mathrm{id}_V)|_{\mathcal{R}_\lambda}$ je invertibilní.*
(4) *Zobrazení $(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)|_{\mathcal{R}_\lambda}$ je nilpotentní.*

** **Důkaz.** (1) Ověření vlastností vektorového podprostoru ponechávám čtenáři.

** (2) Předpokládejme, že $(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^k(u) = 0$ a uvažme $v = (\varphi - \mu \cdot \mathrm{id}_V)(u)$. Pak

$$\begin{aligned}(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^k(v) &= (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^k((\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) + (\lambda - \mu) \cdot \mathrm{id}_V)(u)\\ &= (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^{k+1}(u) + (\lambda - \mu) \cdot (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^k(u)\\ &= 0\end{aligned}$$

** (3) Je-li $u \in \mathrm{Ker}(\varphi - \mu \cdot \mathrm{id}_V)|_{\mathcal{R}_\lambda}$, pak

$$(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)(u) = (\varphi - \mu \cdot \mathrm{id}_V)(u) + (\mu - \lambda) \cdot u = (\mu - \lambda) \cdot u$$

Odtud $0 = (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^k(u) = (\mu - \lambda)^k \cdot u$ a je tedy nutně $u = 0$ pro $\lambda \neq \mu$.

** (4) Zvolme bázi $e_1, \dots, e_p$ podprostoru $\mathcal{R}_\lambda$. Protože podle definice existují čísla k_i taková, že $(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^{k_i}(e_i) = 0$, je nutně celé zobrazení $(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)|_{\mathcal{R}_\lambda}$ nilpotentní. □

* Našim dalším cílem je ukázat, že dimenze kořenových prostorů je vždy rovna algebraické násobnosti příslušných vlastních čísel. Nejprve však zavedeme šikovné technické nástroje.

* **5.18. Definice.** Nechť $U \subset V$ je vektorový podprostor. Na množině všech vektorů ve V definujeme ekvivalenci takto: $v_1 \sim v_2$ právě tehdy, když $v_1 - v_2 \in U$. (Ověřte si axiomy ekvivalence!). Množina V/U tříd této ekvivalence, spolu s operacemi definovanými pomocí reprezentantů, tj. $[v] + [w] = [v + w]$, $a \cdot [u] = [a \cdot u]$, tvoří vektorový prostor, který nazýváme *faktorový vektorový prostor* prostoru V podle podprostoru U. (Ověřte si korektnost definice operací a platnost všech axiomů vektorového prostoru!)

* Třídy (vektory) ve faktorovém prostoru V/U budeme často označovat jako formální součet jednoho reprezentanta se všemi vektory podprostoru U, např. $u + U \in V/U$, $u \in V$. Nulový vektor ve V/U je právě třída $0 + U$, tj. vektor $u \in V$ reprezentuje nulový vektor ve V/U právě, když je $u \in U$.

* Jako jednoduché příklady si rozmyslete $V/\{0\} \cong V$, $V/V \cong \{0\}$ a faktorový prostor roviny $\mathbb{R}^2$ podle libovolného jednorozměrného podprostoru (každý jednorozměrný podprostor $U \subset \mathbb{R}^2$ je přímka procházející počátkem, třídy ekvivalence jsou rovnoběžky s touto přímkou).

* **5.19. Lemma.** *Nechť $U \subset V$ je vektorový podprostor a $u_1, \dots, u_n$ je taková báze V, že $u_1, \dots, u_k$ je báze U. Pak $\dim V/U = n - k$ a $u_{k+1} + U, \dots, u_n + U$ je báze V/U.*

* **Důkaz.** Protože $V = \langle u_1, \dots, u_n\rangle$, je i $V/U = \langle u_1 + U, \dots, u_n + U\rangle$. Přitom ale je prvních k generátorů nulových, takže je $V/U = \langle u_{k+1} + U, \dots, u_n + U\rangle$.

Předpokládejme, že $a_{k+1} \cdot (u_{k+1} + U) + \cdots + a_n \cdot (u_n + U) = (a_{k+1} \cdot u_{k+1} + \cdots + a_n \cdot u_n) + U = 0 \in V/U$. To je ale ekvivalentní příslušnosti lineární kombinace vektorů $u_{k+1}, \dots, u_n$ do podprostoru U. Protože U je generováno zbylými vektory, je nutně tato kombinace nulová, tj. všechny koeficienty a_i jsou nulové. □

* **5.20. Věta.** *Nechť $U \subset V$ je invariantní podprostor vzhledem k lineárnímu zobrazení $\varphi : V \to V$ a nechť $u_1, \dots, u_n$ je taková báze V, že prvních k vektorů této báze je bazí U. V této bázi má φ polorozpadlou matici $A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$. Platí*

1. *Zobrazení φ indukuje lineární zobrazení $\varphi_{V/U} : V/U \to V/U$, $\varphi_{V/U}(v+U) = \varphi(v) + U$ s maticí D v indukované bázi $u_{k+1} + U, \dots, u_n + U$ na V/U.*
2. *Charakteristický polynom $\varphi_{V/U}$ dělí charakteristický polynom φ.*

** **Důkaz.** Matice φ ve zvolené bázi je polorozpadlá, viz. 5.5. Pro $v, w \in V$, $u \in U$, $a \in \mathbb{K}$ máme $\varphi(v + u) \in \varphi(v) + U$ (protože U je invariantní), $(\varphi(v) + U) + (\varphi(w) + U) = \varphi(v + w) + U$ a $a \cdot (\varphi(v) + U) = a \cdot \varphi(v) + U = \varphi(a \cdot v) + U$ (protože φ je lineární), je tedy zobrazení $\varphi_{V/U}$ dobře definované a lineární. Navíc je přímo z definice matice zobrazení patrné, že matice $\varphi_{V/U}$ v indukované bázi na V/U je právě matice D (při počítání obrazů bázových prvků nám koeficienty z matice C přispívají pouze do třídy U). Charakteristický polynom indukovaného zobrazení $\varphi_{V/U}$ je tedy $|D - \lambda \cdot E|$, zatímco charakteristický polynom původního zobrazení φ je $|A - \lambda \cdot E| = |B - \lambda \cdot E||D - \lambda \cdot E|$. □

* **5.21. Důsledek.** *Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ dimenze n a nechť $\varphi : V \to V$ je lineární zobrazení, jehož spektrum obsahuje n prvků (tj. všechny kořeny charakteristického polynomu leží v $\mathbb{K}$). Pak existuje posloupnost invariantních podprostorů $\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$ s dimenzemi $\dim V_i = i$. V bázi $u_1, \dots, u_n$ prostoru V takové, že $V_i = \langle u_1, \dots, u_i \rangle$, má φ horní trojúhelníkovou matici: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$, kde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ je posloupnost prvků spektra.*

** **Důkaz.** Konstrukci podprostorů V_i provedeme induktivně. Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou prvky ve spektru zobrazení φ, tzn. charakteristický polynom zobrazení φ je tvaru $(\lambda - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n)$. Zvolme $V_0 = \{0\}$, $V_1 = \langle u_1 \rangle$, kde u_1 je libovolný vlastní vektor s vlastní hodnotou λ_1. Podle předešlé věty je charakteristický polynom zobrazení φ_{V/V_1} tvaru $(\lambda - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n)$. Předpokládejme, že jsme již sestrojili lineárně nezávislé vektory $u_1, \dots, u_k$ a invariantní podprostory $V_i = \langle u_1, \dots, u_i \rangle$, $i = 1, \dots, k < n$, takové, že charakteristický polynom φ_{V/V_k} je tvaru $(\lambda - \lambda_{k+1}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n)$ a $\varphi(u_i) \in (\lambda_i \cdot u_i + V_{i-1})$ pro všechna $i = 1, \dots, k$.

** Zejména tedy existuje vlastní vektor $u_{k+1} + V_k \in V/V_k$ zobrazení φ_{V/V_k} s vlastní hodnotou λ_{k+1}. Uvažme nyní prostor $V_{k+1} = \langle u_1, \dots, u_{k+1} \rangle$. Kdyby byl vektor u_{k+1} lineární kombinací vektorů $u_1, \dots, u_k$, znamenalo by to, že $u_{k+1} + V_k$ je nulová třída v V/V_k, to ale není možné. Je proto $\dim V_{k+1} = k + 1$. Zbývá studovat indukované zobrazení $\varphi_{V/V_{k+1}}$. Charakteristický polynom tohoto zobrazení je stupně $n - k - 1$ a dělí charakteristický polynom zobrazení φ. Přitom doplněním vektorů $u_1, \dots, u_{k+1}$ do báze V dostaneme polorozpadlou matici zobrazení φ s horní trojúhelníkovou submaticí B v horním levém rohu, jejíž diagonální prvky jsou právě skaláry $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$. Proto mají kořeny charakteristického polynomu indukovaného zobrazení požadované vlastnosti. $\square$

* **5.22. Poznámky.** Pokud existuje rozklad celého prostoru V na přímý součet vlastních podprostorů, existuje báze z vlastních podprostorů a předchozí věta vlastně neříká vůbec nic zajímavého. Její síla ovšem spočívá v tom, že jediným jejím předpokladem je existence $\dim V$ kořenů charakteristického polynomu (včetně násobností). To je ovšem zaručeno, je-li pole $\mathbb{K}$ algebraicky uzavřené, např. pro komplexní čísla $\mathbb{C}$. Přímým důsledkem pak jsou zajímavá tvrzení o determinantu a stopě zobrazení: *jsou vždy součinem, resp. součtem prvků ve spektru.*

* Tuto skutečnost můžeme použít i pro všechny reálné matice. Můžeme je totiž vždy považovat za komplexní, spočítat potřebné, a protože determinant i stopa jsou algebraické výrazy v prvcích matice, výsledkem budou právě hledané reálné hodnoty.

* **5.23. Věta.** *Nechť $\varphi\colon V \to V$ je lineární. Součet kořenových prostorů*

$$\mathcal{R}_{\lambda_1}, \dots, \mathcal{R}_{\lambda_k}$$

příslušných různým vlastním hodnotám $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ je přímý. Navíc je pro každou vlastní hodnotu λ dimenze podprostoru $\mathcal{R}_\lambda$ rovna její algebraické násobnosti.

** **Důkaz.** Důkaz provedeme indukcí přes počet k kořenových prostorů. Předpokládejme, že tvrzení vždy platí pro méně než k prostorů a že pro vektory $u_1 \in \mathcal{R}_{\lambda_1}, \dots, u_k \in \mathcal{R}_{\lambda_k}$ platí $u_1 + \dots + u_k = 0$. Pro vhodné j pak $(\varphi - \lambda_k \cdot \mathrm{id}_V)^j(u_k) = 0$ a zároveň jsou $y_i = (\varphi - \lambda_k \cdot \mathrm{id}_V)^j(u_i)$ nenulové vektory v $\mathcal{R}_{\lambda_i}$, $i = 1, \dots, k-1$, pokud u_i jsou nenulové, viz. předchozí věta. Přitom ale

$$y_1 + \dots + y_{k-1} = \sum_{i=1}^{k} (\varphi - \lambda_k \cdot \mathrm{id}_V)^j(u_i) = 0$$

a tedy podle indukčního předpokladu jsou všechny y_i nulové. Pak ovšem i $u_k = 0$ a lineární nezávislost je dokázána.

** Zbývá ukázat, že dimenze každého kořenového prostoru $\mathcal{R}_\lambda$ je rovna algebraické násobnosti kořenu λ charakteristického polynomu. Nechť tedy je λ vlastní hodnota φ, označme $\bar{\varphi}$ zúžení $\varphi|_{\mathcal{R}_\lambda}$ a $\psi\colon V/\mathcal{R}_\lambda \to V/\mathcal{R}_\lambda$ nechť je zobrazení indukované φ na faktorovém prostoru. Předpokládejme, že dimenze $\mathcal{R}_\lambda$ je menší než násobnost kořenu λ charakteristického polynomu. Podle věty 5.20 to znamená, že λ je i vlastní hodnotou zobrazení ψ. Nechť $(v + \mathcal{R}_\lambda) \in V/\mathcal{R}_\lambda$ je příslušný vlastní vektor, tj. $\psi(v + \mathcal{R}_\lambda) = \lambda \cdot (v + \mathcal{R}_\lambda)$ což podle definice značí $v \notin \mathcal{R}_\lambda$ a $\varphi(v) = \lambda \cdot v + w$ pro vhodné $w \in \mathcal{R}_\lambda$. Máme tedy $w = (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)(v)$ a $(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^j(w) = 0$ pro vhodné j. Celkem tedy $(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^{j+1}(v) = 0$ což je ve sporu s volbou $v \notin \mathcal{R}_\lambda$. Tím jsme dokázali, že dimenze $\mathcal{R}_\lambda$ je rovna násobnosti kořene λ charakteristického polynomu φ. $\square$

* **5.24. Důsledek.** *Pro každé lineární zobrazení $\varphi : V \to V$, jehož celé spektrum je v $\mathbb{K}$, je $V = \mathcal{R}_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{R}_{\lambda_n}$ přímým součtem kořenových podprostorů. Zvolíme-li vhodně báze těchto podprostorů, pak φ má v této bázi blokově diagonální tvar s*

horními trojúhelníkovými maticemi v blocích a vlastními hodnotami λ_i na diagonále.

* Nyní již máme skoro vše připraveno pro diskusi kanonických tvarů matic. Zbývá jen vyjasnit vztah mezi cyklickými a nilpotentními zobrazeními a poskládat dohromady již připravené výsledky.

* **5.25. Věta.** *Nechť $\varphi\colon V \to V$ je nilpotentní lineární zobrazení. Pak existuje rozklad V na přímý součet podprostorů $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ takových, že zúžení φ na kterýkoliv z nich je cyklické.*

** **Důkaz.** Ověření je docela jednoduché a spočívá v konstrukci takové báze prostoru V, že akce zobrazení φ na bázových vektorech přímo ukazuje rozklad na cyklická zobrazení. Postup bude ale poněkud zdlouhavý.

** Nechť k je stupeň nilpotentnosti zobrazení φ a označme $P_i = \operatorname{Im}(\varphi^i)$, $i = 0, \dots, k$, tzn.

$$\{0\} = P_k \subset P_{k-1} \subset \dots \subset P_1 \subset P_0 = V.$$

** Vyberme libovolnou bázi $e_1^{k-1}, \dots, e_{p_{k-1}}^{k-1}$ prostoru P_{k-1}, kde $p_{k-1} > 0$ je dimenze P_{k-1}. Z definice plyne, že $P_{k-1} \subset \operatorname{Ker} \varphi$, tj. vždy $\varphi(e_j^{k-1}) = 0$.

** Předpokládejme, že $P_{k-1} \neq V$. Protože $P_{k-1} = \varphi(P_{k-2})$, nutně existují v P_{k-2} vektory e_j^{k-2}, $j = 1, \dots, p_{k-1}$, takové, že $\varphi(e_j^{k-2}) = e_j^{k-1}$. Předpokládejme

$$a_1 e_1^{k-1} + \dots + a_{p_{k-1}} e_{p_{k-1}}^{k-1} + b_1 e_1^{k-2} + \dots + b_{p_{k-1}} e_{p_{k-1}}^{k-2} = 0.$$

Aplikací zobrazení φ na tuto lineární kombinaci získáme $b_1 e_1^{k-1} + \dots + b_{p_{k-1}} e_{p_{k-1}}^{k-1} = 0$, proto jsou všechny $b_j = 0$. Pak ale i $a_j = 0$, protože se jedná o kombinaci bázových vektorů. Celkem jsme tedy ověřili lineární nezávislost všech $2p_{k-1}$ zvolených vektorů. Doplňme je do báze

$$\begin{aligned} &e_1^{k-1}, \dots, e_{p_{k-1}}^{k-1} \\ &e_1^{k-2}, \dots, e_{p_{k-1}}^{k-2}, e_{p_{k-1}+1}^{k-2}, \dots, e_{p_{k-2}}^{k-2} \end{aligned} \tag{1}$$

prostoru P_{k-2}. Navíc jsou obrazy přidaných bázových prvků v P_{k-1}, nutně tedy musejí být lineárními kombinacemi bázových prvků $e_1^{k-1}, \dots, e_{p_{k-1}}^{k-1}$. Můžeme proto zaměnit zvolené vektory $e_{p_{k-1}+1}^{k-2}, \dots, e_{p_{k-2}}^{k-2}$ vektory $e_j^{k-2} - \varphi(e_j^{k-2})$. Tím docílíme, že doplněné vektory do báze P_{k-2} patří do jádra zobrazení φ. Předpokládejme to přímo o zvolené bázi (1).

** Předpokládejme dále, že již máme sestrojenu bázi podprostoru $P_{k-\ell}$ takovou, že ji můžeme poskládat do schématu

$$\begin{aligned} &e_1^{k-1}, \dots, e_{p_{k-1}}^{k-1} \\ &e_1^{k-2}, \dots, e_{p_{k-1}}^{k-2}, e_{p_{k-1}+1}^{k-2}, \dots, e_{p_{k-2}}^{k-2} \\ &e_1^{k-3}, \dots, e_{p_{k-1}}^{k-3}, e_{p_{k-1}+1}^{k-3}, \dots, e_{p_{k-2}}^{k-3}, e_{p_{k-2}+1}^{k-3}, \dots, e_{p_{k-3}}^{k-3} \\ &\vdots \\ &e_1^{k-\ell}, \dots, e_{p_{k-1}}^{k-\ell}, e_{p_{k-1}+1}^{k-\ell}, \dots, e_{p_{k-2}}^{k-\ell}, e_{p_{k-2}+1}^{k-\ell}, \dots, e_{p_{k-3}}^{k-\ell}, \dots e_{p_{k-\ell}}^{k-\ell} \end{aligned} \tag{2}$$

kde hodnota zobrazení φ na libovolném bázovém vektoru se nachází nad ním, nebo je nulová, pokud nad zvoleným vektorem báze již nic není. Pokud je $P_{k-\ell} \neq V$, opět musí existovat vektory $e_1^{k-\ell-1}, \dots, e_{p_{k-\ell}}^{k-\ell-1}$, které se zobrazují na $e_1^{k-\ell}, \dots, e_{p_{k-\ell}}^{k-\ell}$ a můžeme je doplnit do báze P_{k-l-1}, řekněme vektory $e_{p_{k-\ell}+1}^{k-\ell-1}, \dots, e_{p_{k-\ell-1}}^{k-\ell-1}$. Přitom postupným odečítáním hodnot iterací zobrazení φ na těchto vektorech dosáhneme opět toho, že doplněné vektory do báze $P_{k-\ell-1}$ budou ležet v jádru φ a analogicky jako výše ověříme, že skutečně dostaneme bázi $P_{k-\ell-1}$.

** Po k krocích získáme bázi celého V, která má vlastnosti uvedené pro bázi (2) prostoru $P_{k-\ell}$. Jednotlivé sloupce výsledného schématu pak generují hledané podprostory V_i a navíc jsme přímo našli báze těchto podprostorů ukazující, že příslušná zúžení φ jsou cyklická zobrazení. $\square$

5.26. Definice. Matice $J_k(\lambda) \in \mathrm{Mat}_k(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$, tvaru

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

se nazývá *Jordanův blok* řádu k příslušný vlastní hodnotě λ.

O matici J říkáme, že je v *Jordanově kanonickém tvaru*, je-li blokově diagonální s Jordanovými bloky na diagonále.

5.27. Věta (o Jordanově kanonickém tvaru). *Nechť zobrazení $\varphi\colon V \to V$ má celé spektrum v $\mathbb{K}$. Pak existuje báze V, ve které má φ matici J v Jordanově kanonickém tvaru. Tato matice je navíc určena jednoznačně, až na pořadí Jordanových bloků na diagonále.*

Ekvivalentně lze tuto větu zformulovat takto:

5.28. Věta (o Jordanově kanonickém tvaru). *Nechť $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ má n kořenů charakteristického polynomu (včetně násobností). Pak existuje invertibilní matice P taková, že $J = P^{-1}AP$ je v Jordanově kanonickém tvaru. Matice J je přitom určena jednoznačně až na pořadí Jordanových bloků na diagonále.*

5.29. Důsledek. *Nechť $\mathbb{K}$ je algebraicky uzavřené pole (tj. každý nekonstantní polynom nad $\mathbb{K}$ má kořen). Pak dvě matice $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ jsou maticemi téhož zobrazení $V \to V$ n-rozměrného vektorového prostoru nad $\mathbb{K}$ právě, když jsou podobné se stejným Jordanovým kanonickým tvarem J.*

** **Důkaz vět 5.27 a 5.28.** Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou všechny různé vlastní hodnoty zobrazení φ. Z předpokladů věty 5.27 plyne, že $V = \mathcal{R}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{R}_{\lambda_k}$. Zobrazení $\varphi_i = (\varphi|_{\mathcal{R}_{\lambda_i}} - \lambda_i \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{R}_{\lambda_i}})$ jsou nilpotentní a proto je podle věty 5.25 každý z kořenových prostorů přímým součtem

$$\mathcal{R}_{\lambda_i} = P_{1,\lambda_i} \oplus \cdots \oplus P_{j_i,\lambda_i}$$

prostorů na nichž je zúžení zobrazení $\varphi - \lambda_i \cdot \mathrm{id}_V$ cyklické. Matice těchto zúžených zobrazení na $P_{r,s}$ jsou Jordanovy bloky příslušné k nulové vlastní hodnotě, zúžené zobrazení $\varphi|_{P_{r,s}}$ má proto za matici Jordanův blok s vlastní hodnotou λ_i.

** Z důkazu první věty zbývá dokázat tvrzení o jednoznačnosti. Protože diagonální hodnoty λ_i jsou dány jako kořeny charakteristického polynomu, je jejich jednoznačnost zřejmá. Vyjádříme rozměry jednotlivých Jordanových bloků prostřednictvím hodností $r_k(\lambda_i)$ zobrazení $(\varphi - \lambda_i \cdot \mathrm{id}_V)^k$. Tím bude jasné, že až na pořadí jsou bloky jednoznačně určeny. Naopak, přehození bloků odpovídá přečíslování vektorů báze, lze je tedy získat v libovolném pořadí.

** Je-li ψ cyklický operátor na n-rozměrném prostoru, pak defekt iterovaného zobrazení ψ^k je k pro $0 \le k \le n$ a je n pro všechna $k \ge n$. Odtud plyne, že pokud matice J zobrazení φ obsahuje $d_k(\lambda)$ Jordanových bloků řádu k s vlastní hodnotou λ, pak defekt matice $(J - \lambda \cdot E)^\ell$ je

$$d_1(\lambda) + 2d_2(\lambda) + \dots \ell d_\ell(\lambda) + \ell d_{\ell+1}(\lambda) + \dots$$

Odtud spočítáme

$$\begin{aligned} n - r_\ell(\lambda) &= d_1(\lambda) + 2d_2(\lambda) + \dots + \ell d_\ell(\lambda) + \ell d_{\ell+1}(\lambda) + \dots \\ d_k(\lambda) &= r_{k-1}(\lambda) - 2r_k(\lambda) + r_{k+1}(\lambda) \end{aligned}$$

(kde poslední řádek vznikne kombinací předchozího pro hodnoty $\ell = k-1, k, k+1$).

** Věta 5.28 plyne okamžitě z předchozí, jestliže místo matice A budeme uvažovat jí určené zobrazení $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$. Naopak, z platnosti této věty o maticích plyne ihned předchozí tvrzení o zobrazeních, viz. 2.26. □

* **5.30. Poznámka.** Důkaz věty o existenci Jordanova kanonického tvaru byl sice konstruktivní, nedává nám ale opravdu šikovný algoritmický postup pro jejich hledání. V dodatku 12 bude podána algebraická metoda podobná Gaussově eliminaci, která pro danou matici najde její kanonický tvar. Nyní shrneme již odvozený postup explicitního výpočtu báze, v níž má dané zobrazení $\varphi\colon V \to V$ matici v kanonickém Jordanově tvaru.

(1) Najdeme kořeny charakteristického polynomu.
(2) Jestliže jich je méně než $n = \dim V$, včetně násobností, kanonický tvar neexistuje.
(3) Je-li n lineárně nezávislých vlastních vektorů, získáme bázi V z vlastních vektorů a v ní má φ diagonální matici.
(4) Nechť λ je vlastní hodnota s geometrickou násobností menší než algebraickou a $v_1, \dots, v_k$ nechť jsou příslušné vlastní vektory. To by měly být vektory na horním okraji schématu z důkazu věty 5.25, je ovšem nutné najít vhodnou bázi aplikacemi iterací $\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V$. Zároveň přitom zjistíme ve kterém řádku se vektory nacházejí a najdeme lineárně nezávislá řešení w_i rovnic $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})(x) = v_i$ z řádků pod nimi. Postup opakujeme iterativně (tj. pro w_i atd.). Najdeme tak "řetízky" bázových vektorů zadávajících podprostory, kde $\varphi - \lambda\,\mathrm{id}$ je cyklické.

Postup je praktický pro matice, kde násobnosti vlastních hodnot jsou malé, nebo aspoň diskutované stupně nilpotentnosti jsou malé. Např. pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dostaneme dvourozměrný podprostor vlastních vektorů $\langle(1,0,0),(0,1,0)\rangle$. Potřebujeme proto najít řešení rovnic $(A-2E)x=(a,b,0)^T$ pro vhodné konstanty a,b. Tento systém je ovšem řešitelný pouze pro $a=b$ a jedno z možných řešení je $v=(0,0,1)$, $a=b=1$. Celá hledaná báze pak je $(1,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,0,0)$. Všimněme si, že jsme měli spoustu voleb a bazí s požadovanými vlastnostmi je tedy mnoho.

Problémy k přemýšlení

1. Ukažte, že přímý součet $V=V_1\oplus V_2$ má následující vlastnosti:

a) Existují vložení $i_1\colon V_1\to V$, $i_2\colon V_2\to V$, $v_1\mapsto(v_1,0)$, $v_2\mapsto(0,v_2)$ taková, že pro každá dvě lineární zobrazení $f\colon V_1\to W$, $g\colon V_2\to W$ existuje právě jedno lineární zobrazení $h\colon V\to W$ splňující $h\circ i_1=f$, $h\circ i_2=g$. (Kategoriální vlastnost součtu).

b) Existují projekce $j_1\colon V\to V_1$, $j_2\colon V\to V_2$, $(v_1,v_2)\mapsto v_1$, $(v_1,v_2)\mapsto v_2$ taková, že pro každá dvě lineární zobrazení $f\colon W\to V_1$, $g\colon W\to V_2$ existuje právě jedno lineární zobrazení $h\colon W\to V$ splňující $j_1\circ h=f$, $j_2\circ h=g$. (Kategoriální vlastnost součinu).

Namalujte si diagramy! Sformulujte a dokažte podobná tvrzení pro obecné konečné přímé součty.

2. Ukažte, že pro každé lineární zobrazení $\varphi\colon V\to W$ je na faktorovém prostoru $V/(\ker\varphi)$ indukováno injektivní zobrazení $\bar\varphi\colon V/(\ker\varphi)\to W$ a tedy je $V/(\ker\varphi)$ isomorfní obrazu $\mathrm{Im}\varphi\subset W$.

Dále můžeme symbolicky psát

$$0\longrightarrow\ker\varphi\xrightarrow{\;i\;}V\xrightarrow{\;\varphi\;}W\xrightarrow{\;j\;}W/(\mathrm{Im}\varphi)\longrightarrow 0$$

kde i je vložení, j je projekce $u\mapsto[u]$. Přitom každá dvě po sobě jdoucí zobrazení mají tu vlastnost, že jádro druhého je rovno obrazu prvého. Jde o příklad tzv. exaktní posloupnosti.

3. Uvědomte si, že úvahy v odstavcích 5.7–5.12 jsou platné i pro konečná pole, např. $\mathbb{Z}_2$. Přitom se může snadno stát, že všechny prvky pole $\mathbb{K}$ jsou vlastní hodnoty. Např. polynom $\lambda^2+\lambda$ je nulový pro oba prvky v $\mathbb{Z}_2$. Najděte příslušnou matici a vše promyslete!

4. Nechť $T\colon V\to V$ je lineární zobrazení a platí

$$T(u_1)=u_2,\ T(u_2)=u_3,\dots,\ T(u_k)=0$$

pro nenulové vektory $u_1,\dots,u_k$. Pak $u_1,\dots,u_k$ jsou lineárně nezávislé. Dokažte!

5. Pro každý okruh R můžeme uvažovat polynomy $R[\lambda]$ v proměnné λ. Zejména můžeme hovořit o hodnotě polynomu $f(\lambda)$ nad skaláry $\mathbb{K}$ v matici $A\in\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$. (Využije se vnoření $\mathbb{K}\to\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$, $a\mapsto aE$.) Ukažte, pro každou invertibilní matici P je $f(A)=f(P^{-1}AP)$, můžeme tedy také hovořit o hodnotě polynomu v zobrazení $\varphi\colon V\to V$. Přitom $f(\varphi)\colon V\to V$ je opět lineární.[14]

[14] Více o tom v dodatku 12

Část II. Prostory se skalárním součinem a analytická geometrie

6. Afinní prostory

Nyní se budeme zabývat jednoduchými aplikacemi předchozí teorie v analytické geometrii. Přesněji řečeno, budeme diskutovat axiomaticky založený výklad rovinné a prostorové geometrie, zatím bez pojmu velikosti. K tzv. metrickým úlohám se vrátíme později.

V celé kapitole budeme pro názornost pracovat pouze nad reálnými skaláry $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Výklad bude (jako obvykle) stručný, velice podrobně je celá tématika zpracována ve skriptech [P. Horák, J. Janyška, Analytická geometrie, MU 1997]. Pro komplexní skaláry skoro vše funguje naprosto analogicky (až na pojmy jako poměr, orientace, atd.).

6.1. Definice. Standardním n-rozměrným *afinním prostorem* $\mathcal{A}_n$ se *zaměřením* $V = \mathbb{R}^n$ rozumíme množinu $P = \mathbb{R}^n$ spolu se zobrazením $P \times V \to P$ daným $(A, v) = \big((p_1, \dots, p_n), (v_1, \dots, v_n)\big) \mapsto A + v = (p_1 + v_1, \dots, p_n + v_n)$.

Všimněme si, že platí

(1) $A + 0 = A$ pro všechny body $A \in P$ a nulový vektor $0 \in V$
(2) $A + (v + w) = (A + v) + w$ pro všechny vektory $v, w \in V$, $A \in P$
(3) pro každé dva body $A, B \in P$ existuje právě jeden vektor $v \in P$ takový, že $A + v = B$. Značíme jej $\vec{AB}$ nebo $B - A$.

Běžně budeme užívat značení $A \in \mathcal{A}_n$ místo $A \in P$, tj. nerozlišujeme mezi afinním prostorem a jeho nosnou množinou.

Přívlastek *standardní* jsme užili, protože ve formálním axiomatickém přístupu k analytické geometrii lze pracovat s libovolným vektorovým prostorem V nad libovolnými skaláry $\mathbb{K}$ a definice afinního prostoru se zaměřením V pak obsahuje právě předchozí tři vlastnosti jako axiomy.

6.2. Definice. Afinním prostorem $\mathcal{A}$ se zaměřením V rozumíme množinu *bodů* P, spolu se zobrazením $P \times V \to P$, $(A, v) \mapsto A + v$, splňující 6.1.(1)–(3). Opět nebudeme zpravidla rozlišovat $\mathcal{A}$ a P v označení. Pro libovolný vektor $v \in V$ je tak definována *translace* $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ jako zúžené zobrazení $P \simeq P \times \{v\} \to P$. *Dimenzí* afinního prostoru $\mathcal{A}$ rozumíme dimenzi jeho zaměření.

V případě standardního afinního prostoru $\mathcal{A}_n$ se zdá být možná zbytečné rozlišovat množinu P od zaměření V. Právě to ale je podstatné pro pochopení geometrie v $\mathbb{R}^n$: Geometrické objekty jako např. přímky, body, roviny, apod., jsou nezávislé na námi zaváděné vektorové struktuře na množině $\mathbb{R}^n$, pro práci s nimi bývá však technicky užitečné tuto strukturu uvažovat. Navíc obecné postupy umožní velmi lehce diskutovat "rovinnou geometrii" pro dvourozměrné podprostory, tj. roviny, ve vícerozměrných prostorech, "prostorovou" pro třírozměrné, atd., aniž bychom museli přímo manipulovat k-ticemi souřadnic.

Nejjednoduššími příklady obecných afinních prostorů jsou afinní podprostory v $\mathcal{A}_n$ ve smyslu následující definice 6.4.

6.3. Z axiomů okamžitě plyne pro libovolné body A, B, C v afinním prostoru $\mathcal{A}$

$$A - A = 0 \in V \tag{1}$$

$$\vec{BA} = -\vec{AB} \tag{2}$$

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}. \tag{3}$$

Dále si všimněme, že volba jednoho pevného bodu $A_0 \in \mathcal{A}$ nám určuje bijekci mezi V a $\mathcal{A}$. Při volbě pevné báze $\underline{u}$ ve V dostáváme tedy pro každý bod $A \in \mathcal{A}$ jednoznačné vyjádření

$$A = A_0 + x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n.$$

Hovoříme o *afinní soustavě souřadnic* $(A_0; u_1, \dots , u_n)$ dané *počátkem afinní souřadné soustavy* A_0 a bazí zaměření $\underline{u}$. Hovoříme také o *afinním repéru* $(A_0, \underline{u})$.

Jsou tedy afinní souřadnice bodu A v soustavě $(A_0, \underline{u})$ souřadnicemi vektoru $A - A_0$ v bázi $\underline{u}$ zaměření V.

6.4. Definice. Neprázdná podmnožina $\mathcal{Q} \subset \mathcal{A}$ afinního prostoru $\mathcal{A}$ se zaměřením V se nazývá *afinní podprostor* v $\mathcal{A}$, je-li podmnožina $W = \{B - A; A, B \in \mathcal{Q}\} \subset V$ vektorovým podprostorem a pro libovolné $A \in \mathcal{Q}$, $v \in W$ je $A + v \in \mathcal{Q}$.

Pro libovolnou množinu bodů $M \subset \mathcal{A}$ v afinním prostoru se zaměřením V definujeme vektorový podprostor

$$Z(M) = \langle\{B - A; B, A \in M\}\rangle \subset V.$$

Zejména je $V = Z(\mathcal{A})$ a každý afinní podprostor $\mathcal{Q} \subset \mathcal{A}$ splňuje sám axiomy afinního prostoru se zaměřením $Z(\mathcal{Q})$.

Přímo z definic je zřejmé, že průnik libovolné množiny afinních podprostorů je opět afinní podprostor, pokud je neprázdný.

Afinní podprostor $\langle M\rangle$ v $\mathcal{A}$ *generovaný* neprázdnou podmnožinou $M \subset \mathcal{A}$ je průnikem všech afinních podprostorů, které obsahují všechny body podmnožiny M.

Přímo z definic plyne, že pro kterýkoliv bod $A_0 \in M$ je $\langle M\rangle = \{A_0 + v; v \in Z(M) \subset Z(\mathcal{A})\}$, tj. vezmeme vektorový podprostor $Z(M)$ v zaměření generovaný všemi rozdíly bodů z M a ten pak přičteme k libovolnému z nich. Hovoříme také o *afinním obalu* množiny bodů M v $\mathcal{A}$.

Naopak, kdykoliv zvolíme podprostor U v zaměření $Z(\mathcal{A})$ a jeden pevný bod $A \in \mathcal{A}$, pak podmnožina $A + U$ vzniklá všemi možnými součty bodu A s vektory v U je afinní podprostor.

6.5. Příklady.

1. Jednorozměrný (standardní) afinní prostor je množina všech bodů reálné přímky $\mathcal{A}_1$. Její zaměření je jednorozměrný vektorový prostor $\mathbb{R}$ (a nosná množina také $\mathbb{R}$). Afinní souřadnice dostaneme volbou počátku a měřítka (tj. báze ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}$). Všechny vlastní afinní podprostory jsou 0-rozměrné, jsou to právě všechny body reálné přímky R.

2. Dvourozměrný (standardní) afinní prostor je množina všech bodů prostoru $\mathcal{A}_2$ se zaměřením $\mathbb{R}^2$. (Nosnou množinou je $\mathbb{R}^2$.) Afinní souřadnice dostaneme volbou počátku a dvou nezávislých vektorů (směrů a měřítek). Vlastní afinní podprostory jsou pak všechny body a přímky v rovině (0-rozměrné a 1-rozměrné). Přímky přitom jednoznačně zadáme jejich jedním bodem a zaměřením (tzv. parametrický popis přímky).

3. Trojrozměrný (standardní) afinní prostor je množina všech bodů prostoru $\mathcal{A}_3$ se zaměřením $\mathbb{R}^3$. Afinní souřadnice dostaneme volbou počátku a tří nezávislých vektorů (směrů a měřítek). Vlastní afinní podprostory jsou pak všechny body, přímky a roviny (0-rozměrné, 1-rozměrné a 2-rozměrné).

6.6. Transformace souřadnic. Dvě libovolně zvolené afinní soustavy souřadnic $(A_0, \underline{u})$, $(B_0, \underline{v})$ se obecně liší posunutím počátku o vektor $(B_0 - A_0)$ a jinou bazí zaměření. Transformační rovnice tedy vyčteme ze vztahu pro obecný bod $X \in \mathcal{A}$

$$X = B_0 + x_1' v_1 + \cdots + x_n' v_n = B_0 + (A_0 - B_0) + x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n.$$

Označme $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ sloupec souřadnic vektoru $(A_0 - B_0)$ v bázi $\underline{v}$ a $M = (a_{ij})$ buď matice vyjadřující bázi $\underline{u}$ prostřednictvím báze $\underline{v}$. Potom

$$\begin{aligned} x_1' &= y_1 + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= y_n + a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

tj. maticově $x' = y + Mx$.

6.7. Věta. *Nechť $(A_0; \underline{u})$ je afinní souřadný systém v n-rozměrném afinním prostoru $\mathcal{A}$. Afinní podprostory dimenze k v $\mathcal{A}$, vyjádřené v daných souřadnicích, jsou právě množiny řešení řešitelných systémů $n - k$ lineárně nezávislých lineárních rovnic v n proměnných.*

Důkaz. Uvažme řešitelný systém $n - k$ lineárně nezávislých rovnic $\alpha_i(x) = b_i$, $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n - k$. Nechť $A = (a_1, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ je libovolné pevně zvolené řešení tohoto (nehomogenního) systému rovnic a dále nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je vektorový podprostor všech řešení zhomogenizovaného systému $\alpha_i(x) = 0$. Pak dimenze U je k a podmnožina všech řešení daného systému je tvaru $\{B; B = A + (y_1, \dots, y_n)^T, y = (y_1, \dots, y_n)^T \in U\} \subset \mathbb{R}^n$, viz. 4.7 a 4.10. Příslušný afinní podprostor je tím popsán ve výchozích souřadnicích $(A_0; \underline{u})$.

Naopak, uvažme nějaký afinní podprostor $\mathcal{Q} \subset \mathcal{A}_n$ a zvolme nějaký jeho bod A za počátek afinního souřadného systému $(A, \underline{u})$. Protože $\mathcal{Q} = A + Z(\mathcal{Q})$ a každý vektorový podprostor dimenze k v n-rozměrném $\mathbb{R}^n$ je dán jako řešení homogenního systému $n - k$ nezávislých rovnic (viz. 4.9), je popis zvoleného afinního podprostoru ve vybraném souřadném systému $(A_0; \underline{u})$ dán systémem lineárních rovnic, který z již získaného homogenního systému dostaneme příslušnou transformací souřadnic. $\square$

6.8. Afinní kombinace bodů. Nechť $A_0, \dots, A_k$ jsou body v afinním prostoru $\mathcal{A}$. Jejich afinní obal $\langle\{A_0, \dots, A_k\}\rangle$ můžeme zapsat jako $\{A_0 + t_1(A_1 - A_0) + \dots + t_k(A_k - A_0); t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}\}$ a v libovolných afinních souřadnicích (tj. A_i je vyjádřen sloupcem skalárů) můžeme tutéž množinu zapsat jako

$$\langle A_0, \dots, A_k\rangle = \{t_0A_0 + t_1A_1 + \dots + t_kA_k; t_i \in \mathbb{R}, \textstyle\sum_{i=0}^{k} t_i = 1\}.$$

Obecně výrazy $t_0A_0 + t_1A_1 + \dots + t_kA_k$ s koeficienty splňujícícmi $\sum_{i=0}^{k} t_i = 1$ rozumíme body $A_0 + \sum_{i=1}^{k} t_i(A_i - A_0)$ a nazýváme je *afinní kombinace bodů*.

Afinní podprostor generovaný body $A_0, \dots, A_k$ je tedy roven množině všech afinních kombinací svých generátorů.

Body $A_0, \dots, A_k$ jsou v *obecné poloze*, jestliže generují k-rozměný podprostor. Z definic je vidět, že to nastane právě, když pro kterýkoliv z nich jsou vektory určené rozdíly ostatních od něj lineárně nezávislé.

Všimněme si také, že zadání posloupnosti $\dim \mathcal{A}$ bodů v obecné poloze je ekvivalentní zadání afinního repéru.

6.9. Definice. Nechť $\mathcal{Q} = A + Z(\mathcal{Q})$ je afinní podprostor v $\mathcal{A}_n$ a $(u_1, \dots, u_k)$ je báze $Z(\mathcal{Q}) \subset \mathbb{R}^n$. Pak vyjádření podprostoru

$$\mathcal{Q} = \{A + t_1u_1 + \dots + t_ku_k; t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

nazýváme *parametrický popis* podprostoru $\mathcal{Q}$. Jeho zadání systémem rovnic je *implicitní popis* podprostoru $\mathcal{Q}$.

Zadání podprostoru jako množiny afinních kombinací bodů v obecné poloze je ekvivalentní parametrickému popisu.

6.10. Příklady standardních úloh.
(1) K podprostoru zadanému implicitně nalézt parametrický popis a naopak:
Nalezením partikulárního řešení nehomogenního systému a fundamentálního řešení zhomogenizovaného systému rovnic získáme (v souřadnicích, ve kterých byly rovnice zadány) právě hledaný parametrický popis. Naopak, zapíšeme-li parametrický popis v souřadnicích, můžeme volné parametry $t_1, \dots, t_k$ vyeliminovat a získáme právě rovnice zadávající daný podprostor implicitně.
(2) Nalézt podprostor (a zadat jej implicitně či parametricky) generovaný několika podprostory $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_s$ (obecně různých dimenzí, např. v R_3 nalézt rovinu danou bodem a přímkou, třemi body apod.):
Výsledný podprostor $\mathcal{Q}$ je vždy určen jedním pevně zvoleným bodem A_i v každém z nich a součtem všech zaměření. Např.

$$\mathcal{Q} = A_1 + (Z(\{A_1, \dots, A_k\}) + Z(\mathcal{Q}_1) + \dots + Z(\mathcal{Q}_s)).$$

Pokud jsou podprostory zadány implicitně, je zapotřebí je nejdříve převést na parametrický tvar nebo použít další data, viz. např. 6.15, 6.18.
(3) Nalézt průnik podprostorů $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_s$:
Pokud jsou zadány v implicitním tvaru, stačí sjednotit všechny rovnice do jednoho systému (a vynechat lineárně závislé). Pokud je vzniklý systém neřešitelný, je průnik prázdný, jinak získáme implicitní popis afinního podprostoru, který je hledaným průnikem.

Pokud máme dány parametrické tvary, můžeme také hledat přímo společné body jako řešení vhodných rovnic, podobně jako při hledání průniků vektorových podprostorů. Získáme tak přímo opět parametrický popis. Pokud je podprostorů více než dva, musíme průnik hledat postupně.

Máme-li jeden prostor zadaný parametricky a ostatní implicitně, stačí dosadit parametrizované souřadnice a řešit výsledný systém rovnic.

(4) Nalezení příčky mimoběžek p, q v $\mathcal{A}_3$ procházející daným bodem nebo mající předem daný směr (tj. zaměření):
Příčkou rozumíme přímku, která má neprázdný průnik s oběmi mimoběžkami. Výsledná příčka r tedy bude jednorozměrným afinním podprostorem. Pokud máme zadán jeho bod $A \in r$, pak afinní podprostor generovaný p a A je buď přímka ($A \in p$) nebo rovina ($A \notin p$). V prvém případě máme nekonečně mnoho řešení, jedno pro každý bod z q, v druhém stačí najít průnik B roviny $\langle p \cup A\rangle$ s q a $r = \langle\{A, B\}\rangle$. Pokud je průnik prázdný, úloha nemá řešení, v případě že $q \subset \langle p \cup A\rangle$, máme opět nekonečně mnoho řešení, a pokud je průnik jednoprvkový, dostáváme právě jedno řešení.

Máme-li dán směr $u \in \mathbb{R}^n$, tj. zaměření r, pak uvažujeme opět podprostor $\mathcal{Q}$ generovaný p a zaměřením $Z(p) + \langle u\rangle \subset \mathbb{R}^n$. Opět, pokud $q \subset \mathcal{Q}$, máme nekonečně mnoho řešení, jinak uvážíme průnik $\mathcal{Q}$ s q a úlohu dokončíme stejně jako v předchozím případě.

Řešení mnoha dalších standardních geometrických úloh spočívá v používání výše uvedených kroků.

6.11. Orientace. V běžných úlohách elementární analytické geometrie často hovoříme o orientovaných přímkách, úsečkách, trojúhelnících, atd. V našem přístupu zavedeme pojem orientace obecně pro všechny afinní prostory.

Ve skutečnosti se jedná o pojem spjatý s vektorovými prostory. Řekneme, že dvě báze $\underline{u}$, $\underline{v}$ vektorového prostoru V zadávají stejnou orientaci, jestliže zobrazení $\varphi\colon V \to V$ zadané vztahy $\varphi(u_i) = v_i$ má kladný determinant. Přesněji, *orientace* vektorového prostoru V je třída ekvivalence všech bazí V, které zadávají stejnou orientaci v předchozím smyslu (dokažte si, že se skutečně jedná o relaci ekvivalence – např. tranzitivnost plyne z Cauchyovy věty o determinantu součinu matic).

Je-li dána orientace V (tj. třída bazí s maticemi přechodu s kladným determinantem), pak řekneme, že báze $\underline{u}'$ je kompatibilní s danou orientací V, jestliže $\underline{u}'$ patří do definující třídy. Přímo z definice je jasné (vzpomeňte Cauchyovu větu), že pro každý vektorový prostor kladné konečné dimenze existují právě dvě orientace.

Orientací afinního prostoru $\mathcal{A}$ rozumíme orientaci jeho zaměření $Z(A)$.

6.12. Příklady. Zadání orientace v $\mathcal{A}_1$ znamená výběr nenulového vektoru v jeho zaměření $\mathbb{R}$, až na měřítko. Orientace afinní přímky je tedy totéž jako volba jednoho ze dvou jejích přirozených uspořádání. Na orientované přímce tedy zejména můžeme hovořit o tom, jestli je bod A *před* nebo *za* bodem B.

V rovině $\mathcal{A}_2$ zvolme bázi jejího zaměření $\mathbb{R}^2$ tak, aby oba vektory báze měly jednotkovou velikost. (Změna velikostí bázových vektorů vede na diagonální matici přechodu s kladnými hodnotami na diagonále.) Označme si je $u_1 = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, $u_2 = (\cos\psi, \sin\psi)$. Matice přechodu od standardní báze má tedy tyto vektory ve sloupcích. Její determinant je roven

$$\cos\varphi \sin\psi - \cos\psi \sin\varphi = \sin(\psi - \varphi).$$

Okamžitě je tedy vidět, že naše báze je kompatibilní s orientací danou standardní bazí právě, když je zachováno pořadí jejích vektorů ve smyslu rotace proti hodinovým ručkám. Tak bývá definována orientace roviny v elementárním přístupu.

6.13. Vzájemná poloha podprostorů. Dva podprostory $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ v afinním prostoru $\mathcal{A}$ jsou *rovnoběžné*, je-li $Z(\mathcal{Q}) \subset Z(\mathcal{R})$ nebo $Z(\mathcal{R}) \subset Z(\mathcal{Q})$; značíme $\mathcal{Q} \parallel \mathcal{R}$. Řekneme, že jsou *mimoběžné*, jestliže nejsou rovnoběžné (tj. $\mathcal{Q} \nparallel \mathcal{R}$) a jejich průnik je prázdný (tj. $\mathcal{R} \cap \mathcal{Q} = \emptyset$). Zbývající možnost (tj. $\mathcal{R} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$ a $\mathcal{R} \nparallel \mathcal{Q}$) určuje podprostory *různoběžné*.

O vzájemné poloze podprostorů lze dokázat řadu obecných tvrzení, uveďme alespoň následující

6.14. Lemma. *Nechť $\mathcal{Q}$ je nadrovina v afinním prostoru $\mathcal{A}$, $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ libovolný podprostor. Pak buď $\mathcal{Q} \parallel \mathcal{R}$ nebo jsou tyto podprostory různoběžné. Zejména každé dva mimoběžné podprostory mají dimenze nejvýše $n-2$, kde $n = \dim \mathcal{A}$.*

Důkaz. Nechť je nadrovina $\mathcal{Q}$ dána rovnicí $\alpha(x) = 0$ v jistých afinních souřadnicích na $\mathcal{A}$. Tj. všechny body $\mathcal{Q}$ jsou dány rovnicí

$$\alpha(x) = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0.$$

Pokud $\mathcal{R}$ není rovnoběžný podprostor, pak $Z(\mathcal{R})$ obsahuje vektor $u \notin Z(\mathcal{Q})$. Pro libovolný bod $A \in \mathcal{R}$ nyní zkoumejme průnik přímky p s parametrickým popisem $A+tu$ s nadrovinou $\mathcal{Q}$. V souřadnicích to znamená dosadit prametrický popis bodů přímky p do rovnice $\alpha(x) = 0$. Přitom vznikne lineární rovnice pro parametr t tvaru $c_0 + c_1 t = 0$ s $c_1 \neq 0$ (protože c_1 bude nulové právě, když $u \in Z(\mathcal{Q})$). Průnikem p a $\mathcal{Q}$ tedy bude vždy právě jeden bod. $\square$

Všimněme si, že z předchozího důkazu je vidět, že pokud $\mathcal{Q} \nparallel \mathcal{R}$, pak je $\dim(\mathcal{Q} \cap \mathcal{R}) = \dim \mathcal{R} - 1$.

6.15. Svazky nadrovin. Často je užitečné umět jednoduše manipulovat s množinami objektů ve speciálních vzájemných polohách, např. množinou všech přímek v $\mathcal{A}_2$ procházejících daným bodem.

Nechť $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$, $\dim \mathcal{A} = n$, $\dim \mathcal{R} = n-2$. *Svazek nadrovin s osou* $\mathcal{R}$ (také svazek nadrovin 1. druhu) je množina všech nadrovin obsahujících $\mathcal{R}$. Množinu všech nadrovin ze zadaným společným zaměřením (tj. všech rovnoběžných nadrovin k jedné dané) nazýváme *svazek nadrovin 2. druhu.*

V $\mathcal{A}_2$ pak hovoříme o *svazku přímek* (1. nebo 2. druhu) Jeho osou, pokud existuje, je jediný bod $\mathcal{R} = \{S\}$.

V $\mathcal{A}_3$ pak máme svazky rovin a jejich osy jsou přímky.

Protože dvě nadroviny v $\mathcal{A}_n$ jsou vždy buď rovnoběžné nebo mají $(n-2)$-rozměrný průnik, každé dvě různé nadroviny $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ určují svazek nadrovin.

6.16. Lemma. *Nechť $\alpha(x) = 0$ a $\beta(x) = 0$ jsou rovnice dvou různých nadrovin v $\mathcal{A}$ (v libovolně zvolených souřadnicích). Pak jimi určený svazek nadrovin má souřadné vyjádření*

$$\lambda_1 \alpha(x) + \lambda_2 \beta(x) = 0 \tag{1}$$

pro libovolné dvojice reálných čísel (λ_1, λ_2), *pro které je (1) po dosazení stále lineární rovnicí v proměnných* $x_1, \dots, x_n$.

Důkaz. Nechť $\mathcal{Q}$ je nadrovina zadaná rovnicí (1) pro jistou volbu λ_1, λ_2 (všimněme si, že parametry jsou dány jednoznačně až na společný násobek). Pokud jsou určující nadroviny $\mathcal{Q}_1$ a $\mathcal{Q}_2$ rovnoběžné, jsou homogenní lineární části jejich rovnic lineárně závislé a stejně tomu bude i pro $\mathcal{Q}$. Má tedy $\mathcal{Q}$ opět stejné zaměření jako $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$. Pokud jsou $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$ různoběžné, pak body jejich průniku vyhovují i rovnici (1) a proto $\mathcal{Q}$ patří do jimi definovaného svazku.

Naopak, nechť $\mathcal{Q}$ patří do svazku zadaného $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$. Jde-li o svazek 1. druhu, pak to znamená, že její rovnice $\gamma(x) = 0$ musí být lineárně závislá na rovnicích $\alpha(x) = 0$, $\beta(x) = 0$, tj. má tvar (1) pro vhodné λ_1, λ_2. Jde-li o svazek druhého druhu, pak rovnice všech v něm obsažených nadrovin je tvaru

$$\alpha(x) + c = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n + c = 0 \tag{2}$$

(tak vypadají všechny rovnice se stejnou homogenní lineární částí, jako má α). Každou takovou rovnici ovšem můžeme zapsat ve tvaru (1). □

Způsob parametrizace svazku nadrovin 2. druhu uvedený v (2) je většinou výhodnější pro praktické účely.

6.17. Důsledek. *Tři různé nadroviny zadané rovnicemi* $\alpha(x) = 0$, $\beta(x) = 0$, $\gamma(x) = 0$ *patří do téhož svazku právě, když jejich koeficienty, zapsané po řadě do řádků matice* M *splňují* $h(M) = 2$. *Zejména v* $\mathcal{A}_2$ *patří tři různé přímky do téhož svazku právě, když*

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

Důkaz. Plyne z předchozí věty a základních vlastností systémů lineárních rovnic. □

6.18. Trsy rovin. Pojem svazku můžeme snadno zobecňovat volbou osy jiné dimenze, případně jinými dimenzemi podprostorů. Uvedeme si alespoň případ nadrovin v $\mathcal{A}_3$ sdílejících daný bod, resp. daný směr. *Trs rovin* v $\mathcal{A}_3$ se středem $S \in \mathcal{A}_3$ je množina všech rovin procházejících bodem S (trsy *1. druhu*). Trsy rovin *2. druhu* jsou množiny rovin rovnoběžných s danou přímkou.

6.19. Lemma. *Libovolné tři roviny, které nepatří do jednoho svazku rovin, zadávají trs. Jsou-li* $\alpha(x)$ $\beta(x)$, $\gamma(x)$ *jejich rovnice, pak obecná rovnice roviny z tohoto trsu je*

$$\lambda_1\alpha(x) + \lambda_2\beta(x) + \lambda_3\gamma(x) = 0 \tag{1}$$

pro libovolné parametry λ_1, λ_2, λ_3, *pro něž je (1) systémem lineárních rovnic*

Důkaz. Tvrzení se dokáže analogicky jako podobné lemma pro svazky nadrovin, viz. 6.16. □

Jako důsledek opět dostáváme, že čtyři roviny, z nichž žádné tři nepatří do stejného svazku, patří stejnému trsu právě, když determinant čtyřrozměrné matice sestavené z koeficientů jejich rovnic je nulový.

6.20. Poznámka. Svazky rovin se objevují např. v implicitním popisu přímek v $\mathcal{A}_3$. Přímka je zadána dvěmi rovnicemi, tj. jako průnik dvou rovin určujících svazek. Z takového popisu okamžitě dostáváme obecnou rovnici svazku všech rovin procházejících danou přímkou a tu můžeme výhodně použít třeba při hledání příčky mimoběžek p, q procházející daným bodem A. (Příčku najdeme opět jako osu svazku zadaného rovinami $\langle p, A\rangle$, a $\langle q, A\rangle$.)

6.21. I když nemáme definován pojem velikosti, můžeme hovořit o poměrech velikostí. Základem pro takové úvahy může být následující definice.

Pro libovolné tři různé body C, A, B na afinní přímce $p \subset \mathcal{A}$ definujeme *dělicí poměr* $(C; A, B)$ bodu C vzhledem k (A, B) jako reálné číslo λ splňující $C - A = \lambda(C - B)$.

Zejména je tedy dělicí poměr λ lehce spočítatelný v libovolných souřadnicích jako poměr $\lambda = (c_i - a_i)/(c_i - b_i)$ pro vhodné i. (Musíme vybrat index s nenulovým rozdílem $c_i - b_i$.) Zjevně také dělicí poměr zadává pro pevně zvolené body (A, B) bijekci $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to p \setminus \{A, B\}$. (Je vidět přímo pro jednorozměrný $\mathcal{A}$, vhodná volba souřadnic ale obecný případ redukuje na tento.)

6.22. Poznámky. Dělicí poměr samozřejmě závisí na volbě pořadí C, A, B. Je-li $(C; A, B) = \lambda$, pak se snadno ověří vztahy $(C; B, A) = 1/\lambda$, $(B; A, C) = 1 - \lambda$, $(A; C, B) = \lambda/(\lambda - 1)$, atd.

Přímo z definice je také vidět, že bod C je mezi body A a B právě, když $(C; A, B) < 0$. Všechny takové body tvoří spolu s $\{A, B\}$ *úsečku* $[A, B]$. Bod C je na opačné straně od A než B právě, když $0 < (C; A, B) < 1$ a je na stejné straně od A jako B právě když $(C; A, B) > 1$. Speciálním případem je hodnota $(C; A, B) = -1$. Takový bod nazýváme *střed dvojice* (A, B).

Bod C s dělicím poměrem λ vzhledem k (A, B) je vždy afinní kombinací

$$C = \frac{1}{1 - \lambda} A - \frac{\lambda}{1 - \lambda} B$$

zejména je střed vždy $S = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$.

Pěknou ukázkou použití našeho formalismu je odvození běžného tvrzení, že všechny přímky protínající tři rovnoběžné roviny v $\mathcal{A}_3$ je protínají se stejnými dělícími poměry průsečíků. Můžeme obecně zvolit tři různé rovnoběžné nadroviny $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$, $\mathcal{Q}_3$ v $\mathcal{A}_n$ a dvě libovolné, s nimi různoběžné, přímky p, q. Zvolme si afinní repér $(A, \underline{u})$ takový, že vektory $u_1, \dots, u_{n-1}$ generují zaměření našich nadrovin. Pak jejich rovnice jsou $x_n = a_i$, $i = 1, 2, 3$, pro tři různé hodnoty $a_i \in \mathbb{R}$. Dosazením parametrických popisů přímek p, q do těchto rovnic zjistíme, že poslední souřadnice průsečíků $p \cap \mathcal{Q}_i$, $q \cap \mathcal{Q}_i$ jsou shodně rovny a_i. Zejména jsou jejich rozdíly nenulové a určují ten stejný dělicí poměr.

V souřadnicích se také snadno vidí, že pro libovolné čtyři body $A, B, C, D \in \mathcal{A}$ platí $B - A = C - D$ (tj. jsou to vrcholy rovnoběžníku v jisté rovině) právě, když $\frac{1}{2}(A + C) = \frac{1}{2}(B + D)$ (tj. jejich úhlopříčky se půlí).

6.23. Poloprostory. Uvažme nadrovinu $\mathcal{Q}$ v n-rozměrném afinním prostoru $\mathcal{A}$. Otevřeným *poloprostorem* $\mathcal{P}_1$ vyťatým nadrovinou $\mathcal{Q}$ a obsahujícím bod $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{Q}$ rozumíme množinu všech bodů $B \in \mathcal{A}$ takových, že úsečka $[A, B]$ neprotíná $\mathcal{Q}$.

Zvolme afinní repér $(A_0, \underline{u})$ tak, aby $A_0 \in \mathcal{Q}$ a $u_1, \dots, u_{n-1}$ byla báze $Z(\mathcal{Q})$. Pro libovolné dva body $A, B \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{Q}$ pak mají jejich poslední souřadnice stejné znaménko právě, když úsečka $[A, B]$ neprotíná $\mathcal{Q}$. Odtud vyplývá, že každá nadrovina definuje právě dva poloprostory. Říkáme že *odděluje* jejich body.

Poloprostory na přímce jsou *polopřímky* (oddělované bodem), v rovině jsou to *poloroviny* (oddělované přímkou).

Pohodlně se poloprostory vyjádří prostřednictvím parametrických i implicitních popisů. Je-li $\mathcal{Q}$ dána rovnicí $\alpha(x) = 0$ a poloprostor $\mathcal{P}$ je určen bodem A, pak je $\mathcal{P}$ množinou všech bodů, jejichž souřadnice dají po dosazení do levé strany rovnice $\alpha(x) = 0$ hodnotu se stejným znaménkem jako A. Je-li $\mathcal{Q}$ zadáno body $A_1, \dots, A_n$ v obecné poloze, pak také body $A, A_1, \dots, A_n$ jsou v obecné poloze a (otevřený) poloprostor $\mathcal{P}$ obsahující A je množina afinních kombinací

$$\{t_0 A + t_1 A_1 + \dots + t_n A_n;\ \textstyle\sum_{i=0}^n t_i = 1,\ t_0 > 0\}$$

Obecně nemáme dánu žádnou význačnou volbu jednoho z poloprostorů vyťatých nadrovinou. Je-li ovšem zadána orientace na celém afinním prostoru $\mathcal{A}$ i na zvolené nadrovině $\mathcal{Q}$, pak máme určený také *pravý poloprostor* a *levý poloprostor* vyťatý $\mathcal{P}$. Pravý je zadán např. volbou bodů $A, A_1, \dots, A_n$ jako výše a přitom tak, aby příslušný repér byl kompatibilní s orientací. (Ověřte si, že je to korektní definice.)

6.24. Poznámka. Nechť p_1 a p_1 jsou různoběžné přímky v afinní rovině. Označme V jejich průsečík a zvolme bod $A \notin p \cup q$. Průnik polorovin $\mathcal{P}_1$ a $\mathcal{P}_2$ obsahujících A a vyťatých po řadě p_1 a p_2 nazýváme *úhel*[15] s *vrcholem* V a *rameny* $\mathcal{P}_2 \cap p_1$, $\mathcal{P}_1 \cap p_2$. Přímo z definice je zřejmé, že pro libovolné body A_1, A_2 patřící po řadě ramenům úhlu má celý úhel jednoduché parametrické vyjádření

$$\{t_0 V + t_1 A_1 + t_2 A_2;\ t_0 + t_1 + t_2 = 1,\ t_1 \geq 0,\ t_2 \geq 0\}.$$

6.25. Konvexní množiny. Podmnožina $M \subset \mathcal{A}$ se nazývá *konvexní množina*, jestliže pro její libovolné dva body $A, B \in M$ je celá úsečka $[A, B]$ obsažena v M.

Zjevně jsou následující podmnožiny konvexní: prázdná podmnožina, afinní podprostory, úsečky, polopřímky, poloprostory, úhly v dvojrozměrných podprostorech, atd.

Přímo z definice také plyne, že průnik libovolného systému konvexních množin je opět konvexní. Průnik všech konvexních množin obsahujících danou množinu M nazýváme *konvexní obal* $\mathcal{K}(M)$ množiny M.

6.26. Věta. *Konvexní obal libovolné podmnožiny $M \subset \mathcal{A}$ je*

$$\mathcal{K}(M) = \{t_1 A_1 + \dots + t_s A_s;\ \textstyle\sum_{i=1}^s t_i = 1,\ t_i \geq 0\}$$

Důkaz. Označme S množinu všech afinních kombinací na pravé straně dokazované rovnosti. Nejprve ověříme, že je S konvexní. Zvolme tedy dvě sady parametrů t_i, $i = 1, .., s_1$, t'_j, $j = 1, \dots, s_2$ s požadovanými vlastnosti. Bez újmy na obecnosti

[15] Stejně se většinou označuje úhel i jeho velikost. Zde máme na mysli skutečně množinu bodů roviny.

můžeme zjevně předpokládat, že $s_1 = s_2$ a že v obou kombinacích vystupují stejné body z M (jinak prostě přidáme sčítance s nulovými koeficienty). Uvažme libovolný bod úsečky zadané takto získanými body:

$$\varepsilon(t_1A_1 + \dots + t_sA_s) + (1-\varepsilon)(t'_1A_1 + \dots + t'_sA_s),\ 0 \le \varepsilon \le 1.$$

Zřejmě jsou opět všechny v S.

Zbývá ukázat, že konvexní obal bodů $A_1, \dots, A_s$ nemůže být menší než S. Samotné body A_i odpovídají volbě parametrů $t_j = 0$ pro všechny $j \ne i$ a $t_i = 1$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny množiny s nejvýše $s-1$ body. To znamená, že konvexní obal bodů $A_1, \dots, A_{s-1}$ je (podle předpokladu) tvořen právě těmi kombinacemi z pravé strany dokazované rovnosti, kde $t_s = 0$. Uvažme nyní libovolný bod $A = t_1A_1 + \dots + t_sA_s \in S$, $t_s \ne 1$, a afinní kombinace

$$\varepsilon(t_1A_1 + \dots + t_{s-1}A_{s-1}) + (1-\varepsilon(1-t_s))A_s,\ 0 \le \varepsilon \le \tfrac{1}{1-t_s}.$$

Jde o úsečku s krajními body určenými parametry $\varepsilon = 0$ (bod A_s) a $\varepsilon = 1/(1-t_s)$ (bod v konvexním obalu bodů $A_1, \dots, A_{s-1}$). Bod A je vnitřím bodem této úsečky s parametrem $\varepsilon = 1$. $\square$

6.27. Příklady.

Zjevné příklady konvexních množin jsou například poloprostory.

Konvexní obaly konečných množin bodů se nazývají *konvexní mnohostěny.* Jsou-li definující body $A_0, \dots, A_k$ konvexního mnohostěnu v obecné poloze, hovoříme o k-rozměrném *simplexu.* V případě simplexu je vyjádření jeho bodů ve tvaru afinní kombinace definujících vrcholů jednoznačné.

Nechť $u_1, \dots, u_k$, jsou libovolné vektory v zaměření $\mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{A}_n$ je libovolný bod. *Rovnoběžnostěn* $\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) \subset \mathcal{A}_n$ je množina

$$\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) = \{A + c_1u_1 + \dots + c_ku_k; 0 \le c_i \le 1, i = 1, \dots, k\}.$$

Jsou-li vektory $u_1, \dots, u_k$ nezávislé, hovoříme o k-rozměrném rovnoběžnostěnu $\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) \subset \mathcal{A}_n$. Z definice je zřejmé, že rovnoběžnostěny jsou konvexní. Ve skutečnosti jde o konvexní obaly jejich vrcholů.

6.28. Afinní zobrazení. Zobrazení $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ mezi afinními prostory nazýváme *afinní zobrazení,* jestliže existuje lineání zobrazení $\varphi\colon Z(\mathcal{A}) \to Z(\mathcal{B})$ takové, že pro všechny $A \in \mathcal{A}$, $v \in Z(\mathcal{A})$ platí

$$f(A+v) = f(A) + \varphi(v).$$

Zobrazení f a φ jsou jednoznačně zadána touto vlastností a libovolně zvolenými obrazy $(\dim \mathcal{A} + 1)$ bodů v obecné poloze.

Pro libovolnou afinní kombinaci bodů $t_0A_0 + \dots + t_sA_s \in \mathcal{A}$ pak dostaneme

$$\begin{aligned} f(t_0A_0 + \dots + t_sA_s) &= f(A_0) + t_1\varphi(A_1 - A_0) + \dots + t_s\varphi(A_s - A_0) \\ &= t_0f(A_0) + t_1f(A_1) + \dots + t_sf(A_s). \end{aligned}$$

Naopak, pokud pro nějaké zobrazení platí, že zachovává afinní kombinace, můžeme číst předchozí výpočet v opačném pořadí a zjistíme, se jedná o afinní zobrazení.

Můžeme proto ekvivalentně definovat afinní zobrazení jako ta, která zachovávají afinní kombinace bodů.

Volbou afinních souřadnic $(A_0, \underline{u})$ na $\mathcal{A}$ a $(B_0, \underline{v})$ na $\mathcal{B}$ dostáváme souřadné vyjádření afinního zobrazení $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Přímo z definice je zřejmé, že stačí vyjádřit obraz počátku souřadnic v $\mathcal{A}$ v souřadnicích na $\mathcal{B}$, tj. vyjádřit vektor $f(A_0) - B_0$ v bázi $\underline{v}$ a vše ostaní je pak určeno násobením maticí zobrazení φ ve zvolených bazích a přičtením výsledku.

Poznámky k přemýšlení

Budou uvedeny společne s úlohami na metrické vlastnosti za kapitolou 9

7. Euklidovské a unitární vektorové prostory

V celé této kapitole bude V buď reálný nebo komplexní vektorový prostor, tj. pole skalárů je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Hned v motivační úvodní kapitole jsme zobecnili operaci sčítání a operace násobení vybraným skalárem z čísel na vektory. Násobení skalárů většinou chápeme jako operaci přiřazující dvojici skalárů třetí skalár. Takto chápanou ji teď zobecníme na vektory: každé dvojici vektorů přiřadíme skalár.

7.1. Definice. Vektorový prostor V nad $\mathbb{K}$ nazveme *unitární prostor*, jestliže je definováno zobrazení $V \times V \to \mathbb{K}$, $(u, v) \mapsto u \cdot v$, splňující pro všechny vektory $u, v, w \in V$ a skaláry $a \in \mathbb{K}$

(1) $u \cdot v = \overline{v \cdot u}$ (zde pruh značí komplexní konjugaci je-li $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, identické zobrazení pro reálné skaláry)
(2) $(au) \cdot v = a(u \cdot v)$
(3) $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$
(4) je-li $u \neq 0$, pak $u \cdot u > 0$ (zejména je výraz reálný)

Takové zobrazení nazýváme *skalární součin* na V. Pro reálné unitární prostory se používá název *euklidovské prostory*, termín unitární prostor bývá v literatuře často vyhražen pouze pro komplexní prostory.

Přímo z definice plynou následující jednoduché vlastnosti skalárních součinů:

7.2. Lemma. *Pro všechny vektory ve V a skaláry v $\mathbb{K}$ platí*

(1) $u \cdot u \in \mathbb{R}$
(2) $u \cdot (av) = \bar{a}(u \cdot v)$
(3) $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$
(4) $u \cdot 0 = 0 \cdot u = 0$
(5) $(\sum_i a_i u_i) \cdot (\sum_j b_j v_j) = \sum_{i,j} a_i \bar{b}_j (u_i \cdot v_j)$
(6) $u \cdot u = 0$ *právě tehdy, když* $u = 0$

7.3. Příklady.
(1) Na $\mathbb{R}^n$ definujme $(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ a dostáváme zobrazení zjevně splňující všechny požadované vlastnosti. Prostor $\mathbb{R}^n$ s tímto skalárním součinem budeme nazývat *standardní euklidovský prostor* v dimenzi n. V

maticové symbolice (tj. vektory jsou sloupce skalárů x, y) dostáváme skalární součin jako součin matic $x \cdot y = x^T y$.
(2) Podobně, na $\mathbb{C}^n$ definujme $(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = x_1\bar{y}_1 + \dots + x_n\bar{y}_n$. Díky konjugování souřadnic druhého argumentu toto zobrazení splňuje všechny požadované vlastnosti. Prostor $\mathbb{C}^n$ s tímto skalárním součinem budeme nazývat *standardní unitární prostor* v dimenzi n. Maticově sklární součin vyjádříme jako $x \cdot y = x^T \bar{y}$.
(3) Na $\mathbb{R}_n[x]$ definujeme skalární součin polynomů např. vztahem

$$f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Z elementárních vlastností určitého integrálu vyplývá, že jde skutečně o skalární součin. Uvidíme, že díky konečnosti dimenze příslušného vektorového prostoru musí mít tento skalární součin shodné vlastnosti s předchozím příkladem.

7.4. Definice. Vektory $u, v \in V$ v unitárním prostoru V se nazývají *ortogonální* (*kolmé*), jestliže $u \cdot v = 0$. Ortogonálnost vektorů značíme $u \perp v$.

Vektory $u_1, \dots, u_k$ tvoří *ortogonální systém vektorů* jestliže jsou po dvou ortogonální, tj. $u_i \perp u_j$, $1 \le i, j \le k$. Ortogonální systém vektorů, který je bazí nazýváme *ortogonální bazí.*

7.5. Věta. *(Grammův–Schmidtův ortogonalizační proces)*
Nechť $(u_1, \dots, u_k)$ je lineárně nezávislá k-tice vektorů unitárního prostoru V. Pak existuje ortogonální systém vektorů $(v_1, \dots, v_k)$ takový, že $v_i \in \langle u_1, \dots, u_i \rangle$, $i = 1, \dots, k$. Získáme je následující procedurou:

(1) *Z nezávislosti vektorů u_i plyne $u_1 \neq 0$. Položíme $v_1 = u_1$.*
(2)-(k) *Máme-li již vektory $v_1, \dots, v_\ell$ potřebných vlastností klademe*

$$v_{\ell+1} = u_{\ell+1} + a_1 v_1 + \dots + a_\ell v_\ell, \quad a_i = -\frac{u_{\ell+1} \cdot v_i}{v_i \cdot v_i}$$

Důkaz. V ℓ-tém kroku chceme, aby pro $v_{\ell+1} = u_{\ell+1} + a_1 v_1 + \dots + a_\ell v_\ell$ platilo $v_{\ell+1} \cdot v_i = 0$, $i = 1, \dots, \ell$. Odtud plyne

$$0 = (u_{\ell+1} + a_1 v_1 + \dots + a_\ell v_\ell) \cdot v_i = u_{\ell+1} \cdot v_i + a_i(v_i \cdot v_i)$$

a je vidět, že vektory s požadovanými vlastnostmi jsou určeny jednoznačně až na násobek.

7.6. Definice. Podmnožiny A, B unitárního prostoru V se nazývají *ortogonální* (*kolmé*), jestliže pro všechny vektory $u \in A$, $v \in B$ platí $u \perp v$. Píšeme $A \perp B$.

Unitární podprostory v unitárním prostoru V jsou právě vektorové podprostory spolu se zúžením operace skalárního součinu. (V případě reálných prostorů hovoříme o *euklidovských podprostorech.*) Součet $V_1 + \dots + V_k \subset V$ unitárních podprostorů se nazývá ortogonální (kolmý), je-li $V_i \perp V_j$ pro všechny dvojice i, j.

Podmnožina $A^\perp := \{u \in V; \{u\} \perp A\}$ se nazývá *ortogonální doplněk* podmnožiny $A \subset V$.

7.7. Definice. Nechť V je unitární prostor. Pro každý $v \in V$ nazýváme (reálný) skalár $\sqrt{v \cdot v}$ *velikostí vektoru* v, hovoříme také o *normě* $\|v\|$. Vektor se nazývá *normovaný*, je-li $\|v\| = 1$. *Ortonormální báze* unitárního prostoru V je ortogonální báze složená z normovaných vektorů.

7.8. Lemma. *Pro každý vektor v v unitárním prostoru a skalár $a \in \mathbb{K}$ platí*

(1) $\|v\| \geq 0$
(2) $\|v\| = 0$ *právě, když* $v = 0$
(3) $\|a\, v\| = |a|\, \|v\|$
(4) *je-li $v \neq 0$, pak vektor $\frac{v}{\|v\|}$ je normovaný.*

Důkaz. Vše plyne přímo z vlastností skalárního součinu. Ukážeme např. (3):

$$\|a\, v\| = \sqrt{(av) \cdot (av)} = \sqrt{a\bar{a}\, v \cdot v} = \sqrt{|a|^2\, \|v\|^2} \qquad \square$$

Následující věta shrnuje elementární vlastnosti unitárních prostorů.

7.9. Věta. *Nechť V je konečněrozměrný unitární prostor dimenze n. Platí*

(1) *Ve V existuje ortonormální báze.*
(2) *Každý systém nenulových ortogonálních vektorů ve V je lineárně nezávislý a lze jej doplnit do ortogonální báze.*
(3) *Pro každý systém lineárně nezávislých vektorů $(u_1, \dots, u_k)$ existuje ortonormální báze $(v_1, \dots, v_n)$ taková, že $\langle v_1, \dots, v_i \rangle = \langle u_1, \dots, u_i \rangle$, $1 \leq i \leq k$.*
(4) *Je-li $(u_1, \dots, u_n)$ ortonormální báze V, pak souřadnice každého vektoru $u \in V$ jsou vyjádřeny vztahem*

$$u = (u \cdot u_1)u_1 + \dots + (u \cdot u_n)u_n.$$

(5) *V libovolné ortonormální bázi má skalární součin souřadný tvar*

$$u \cdot v = x \cdot y = x_1\bar{y}_1 + \dots + x_n\bar{y}_n$$

kde x a y jsou sloupce souřadnic vektorů u a v ve zvolené bázi.
(6) *Ortogonální součet unitárních podprostorů $V_1 + \dots + V_k$ ve V je vždy přímý součet.*
(7) *Je-li $A \subset V$ libovolná podmnožina, pak $A^\perp \subset V$ je vektorový (tedy i unitární) podprostor a $(A^\perp)^\perp \subset V$ je právě podprostor generovaný A. Navíc platí $V = \langle A \rangle \oplus A^\perp$.*
(8) *V je ortogonálním součtem n jednorozměrných unitárních podprostorů.*

Důkaz. Všechna tvrzení jsou skutečně jednoduchými důsledky definic:
(1),(2),(3): Daný systém vektorů nejprve doplníme do libovolné báze $(u_1, \dots, u_n)$ vektorového prostoru V a spustíme na ni Grammovu-Schmidtovu ortogonalizaci. Tak získáme ortogonální bázi s vlastnostmi požadovanými v (3), viz. 7.5. Přitom ale z algoritmu Grammovy-Schmidtovy ortogonalizace vyplývá, že pokud již původních k vektorů tvořilo ortogonální systém vektorů, pak v průběhu ortogonalizace zůstanou nezměněny. Dokázali jsme tedy (2) i (1).

(4): Nechť $u = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n$. Pak

$$u \cdot u_i = a_1(u_1 \cdot u_i) + \cdots + a_n(u_n \cdot u_i) = a_i\|u_i\|^2 = a_i$$

(5): Podobně se spočte pro $u = x_1u_1 + \cdots + x_nu_n$, $v = y_1u_1 + \cdots + y_nu_n$ (viz. 7.2)

$$u \cdot v = (x_1u_1 + \cdots + x_nu_n) \cdot (y_1u_1 + \cdots + y_nu_n) = x_1\bar{y}_1 + \cdots + x_n\bar{y}_n.$$

(6): Potřebujeme ukázat, že pro libovolnou dvojici V_i, V_j ze zadaných podprostorů je jejich průnik triviální. Je-li však $u \in V_i$ a zároveň $u \in V_j$, pak je $u \perp u$, tj. $u \cdot u = 0$. To je ale možné pouze pro nulový vektor $u \in V$.
(7): Nechť $u, v \in A^\perp$. Pak $(au + bv) \cdot w = 0$ pro všechny $w \in A$, $a, b \in \mathbb{K}$ (z distributivity skalárního součinu). Tím jsme ověřili, že $A^\perp$ je unitární podprostor ve V. Nechť $(v_1, \dots, v_k)$ je nějaká báze $\langle A \rangle$, vybraná z prvků A, $(u_1, \dots, u_k)$ ortonormální báze vzniklá z Grammovy Schmidtovy ortogonalizace $(v_1, \dots, v_k)$. Doplňme ji na ortonormální bázi celého V (obojí existuje podle již dokázaných částí věty). Protože se jedná o ortogonální bázi, je nutně $\langle u_{k+1}, \dots, u_n \rangle = \langle u_1, \dots, u_k \rangle^\perp = A^\perp$ a $A \subset \langle u_{k+1}, \dots, u_n \rangle^\perp$ (plyne z vyjádření souřadnic v ortonormální bázi). Je-li $u \perp \langle u_{k+1}, \dots, u_n \rangle$, pak u je nutně lineární kombinací vektorů $u_1, \dots, u_k$, to je ale právě tehdy, když je lineární kombinací vektorů $v_1, \dots, v_k$, což je ekvivalentní s příslušností u do $\langle A \rangle$.
(8): Je pouze ekvivalentní formulací existence ortonormální báze. □

V další větě uvedeme důležité vlastnosti normy.

7.10. Věta. *Pro každé vektory u, v v unitárním prostoru platí*

(1) $\|u + v\| \le \|u\| + \|v\|$ *(trojúhelníková nerovnost). Přitom rovnost nastane právě, když jsou u a v lineárně závislé.*
(2) $|u \cdot v| \le \|u\|\,\|v\|$ *(Cauchyova nerovnost). Přitom rovnost nastane právě, když jsou u a v lineárně závislé.*
(3) *pro každý ortonormální systém vektorů $(e_1, \dots, e_k)$ platí* $\|u\|^2 \ge |u \cdot e_1|^2 + \cdots + |u \cdot e_k|^2$ *(Besselova nerovnost).*
(4) *Pro ortonormální systém vektorů $(e_1, \dots, e_k)$ je $u \in \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ právě když* $\|u\|^2 = |u \cdot e_1|^2 + \cdots + |u \cdot e_k|^2$ *(Parsevalova rovnost).*
(5) *Pro ortonormální systém vektorů $(e_1, \dots, e_k)$ a $u \in V$ je vektor*

$$w = (u \cdot e_1)e_1 + \cdots + (u \cdot e_k)e_k$$

jediným vektorem, který minimalizuje velikost $\|u - v\|$ pro všechny $v \in \langle e_1, \dots, e_k \rangle$.

Důkaz. Všechny důkazy spočívají v podstatě v přímých výpočtech:
(2): Definujme vektor $w := u - \frac{u \cdot v}{v \cdot v} v$, tzn. $w \perp v$ a počítejme

$$0 \le \|w\|^2 = \|u\|^2 - \frac{(\overline{u \cdot v})}{\|v\|^2}(u \cdot v) - \frac{u \cdot v}{\|v\|^2}(v \cdot u) + \frac{(u \cdot v)(\overline{u \cdot v})}{\|v\|^4}\|v\|^2$$
$$0 \le \|w\|^2\|v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - 2(u \cdot v)(\overline{u \cdot v}) + (u \cdot v)(\overline{u \cdot v})$$

Odtud již přímo plyne, že $\|u\|^2\|v\|^2 \geq |u \cdot v|^2$ a rovnost nastane právě tehdy, když $w = 0$, tj. když jsou u a v lineárně závislé.
(1): Opět stačí počítat

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + u\cdot v + v \cdot u = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\operatorname{Re}(u\cdot v) \\ &\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2|u\cdot v| \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2 \end{aligned}$$

Protože se přitom jedná o kladná reálná čísla, je opravdu $\|u+v\| \leq \|u\|+\|v\|$. Navíc, při rovnosti musí nastat rovnost ve všech předchozích nerovnostech, to však je ekvivalentní podmínce, že u a v jsou lineárně závislé (podle předchozí části důkazu).
(3), (4): Nechť $(e_1, \dots , e_k)$ je ortonormální systém vektorů. Doplníme jej do ortonormální báze $(e_1, \dots , e_n)$ (to vždy jde podle předchozí věty). Pak, opět podle předchozí věty, je pro každý vektor $u \in V$

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(u\cdot e_i)(\overline{u \cdot e_i}) = \sum_{i=1}^{n}|u\cdot e_i|^2 \geq \sum_{i=1}^{k}|u\cdot e_i|^2$$

To je ale právě dokazovaná Besselova nerovnost. Přitom rovnost může nastat právě tehdy, když $u \cdot e_i = 0$ pro všechny $i > k$, a to dokazuje Parsevalovu rovnost.
(5): Zvolme libovolný $v \in \langle e_1, \dots , e_k\rangle$ a doplňme daný ortonormální systém na ortonormální bázi $(e_1, \dots , e_n)$. Nechť $(u_1, \dots , u_n)$ a $(x_1, \dots , x_k, 0, \dots , 0)$ jsou souřadnice u a v v této bázi. Pak

$$\|u-v\|^2 = |u_1 - x_1|^2 + \dots + |u_k - x_k|^2 + |u_{k+1}|^2 + \dots + |u_n|^2$$

a tento výraz je zjevně minimalizován při volbě $x_1 = u_1, \dots , x_k = u_k$. □

7.11. Definice. Homomorfismus $\varphi\colon V \to W$ unitárních prostorů se nazývá *unitární zobrazení*, jestliže platí pro všechny vektory $u, v \in V$, $u \cdot v = \varphi(u)\cdot\varphi(v)$.[16] *Unitární isomorfismus* je bijektivní unitární zobrazení. V případě euklidovských prostorů se častěji používá název *ortogonální zobrazení*, *ortogonální isomorfismus*.

7.12. Věta. *Každý konečněrozměrný unitární prostor dimneze n je unitárně isomorfní s $\mathbb{K}^n$ se standardním skalárním součinem (viz. příklad 7.3). Každé unitární zobrazení $\varphi\colon V \to W$ mezi unitárními prostory je prosté.*

Důkaz. Ve větě 7.9 jsme ověřili existenci ortonormální báze na V a vyjádřili jsme skalární součin pomocí souřadnic v takové bázi. Odtud okamžitě vyplývá, že zobrazení přiřazení souřadnic $V \to \mathbb{K}^n$ je pro libovolnou ortonormální bázi unitární isomorfismus.

Předpokládejme $\varphi(u) = \varphi(v)$. To je ekvivalentní rovnosti $0 = \|\varphi(u) - \varphi(v)\| = \|u - v\|$, protože je φ unitární. Proto $u = v$. □

[16]Všimněte si, že tečka značí na pravé a levé straně rovnosti různé skalární součiny, nalevo ve V, napravo v W.

7.13. Věta. *Nechť $\varphi\colon V \to W$ je lineární zobrazení unitárních prostorů. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(1) *φ je unitární.*
(2) *$\|u\| = \|\varphi(u)\|$ pro všechny $u \in V$.*
(3) *pro každou ortonormální bázi $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$ na V je i $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ ortonormální báze na W.*

Důkaz. (1) ⇒ (2): $\|u\|^2 = u \cdot u = \varphi(u) \cdot \varphi(u) = \|\varphi(u)\|^2$.
(2) ⇒ (3): Velikosti se zachovávají, je třeba ještě ukázat, $\varphi(e_i) \perp \varphi(e_j)$ pro libovolné indexy i, j. Počítejme

$$\begin{aligned}\|\varphi(e_i + e_j)\|^2 &= \|\varphi(e_i)\|^2 + \|\varphi(e_j)\|^2 + \varphi(e_i) \cdot \varphi(e_j) + \varphi(e_j) \cdot \varphi(e_i)\\ &= \|e_i\|^2 + \|e_j\|^2 + e_i \cdot e_j + e_j \cdot e_i\end{aligned}$$

Odtud plyne, že reálná část skalárního součinu je zachovávána: $\mathrm{Re}(\varphi(e_i) \cdot \varphi(e_j)) = \mathrm{Re}(e_i \cdot e_j)$, zejména pro euklidovské prostory je již potřebné dokázáno. Stejný výpočet pro $\|\varphi(e_i + i)\varphi(e_j))\|^2$ vede i k rovnosti imaginárních částí.
(3) ⇒ (1): Víme, že je zachováván skalární součin všech bázových prvků. Pak ovšem pro všechny vektory dostáváme:

$$\begin{aligned}\varphi(a_1e_1 + \dots + a_ne_n) \cdot \varphi(b_1e_1 + \dots + b_ne_n) &= \sum_{i,j} a_i\bar{b}_j\varphi(e_i)\varphi(e_j)\\ &= \sum_{i,j} a_i\bar{b}_j(e_i \cdot e_j) = (a_1e_1 + \dots + a_ne_n) \cdot (b_1e_1 + \dots + b_ne_n) \qquad \square\end{aligned}$$

Z předchozí věty plyne, že každý unitární endomorfismus $V \to V$ je bijekce, hovoříme také o *unitární transformaci*.

7.14. Věta. *Nechť $\varphi\colon V \to V$ je lineární zobrazení (endomorfismus) unitárního prostoru V. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(1) *φ je unitární transformace*
(2) *φ je lineární isomorfismus a pro každé $u, v \in V$ platí $\varphi(u) \cdot v = u \cdot \varphi^{-1}(v)$*
(3) *matice A zobrazení φ v libovolné ortonormální bázi splňuje $A^{-1} = \bar{A}^T$ (pro euklidovské prostory to znamená $A^{-1} = A^T$)*
(4) *matice A zobrazení φ v některé ortonormální bázi splňuje $A^{-1} = \bar{A}^T$*
(5) *řádky matice A zobrazení φ v ortonormální bázi tvoří ortonormální bázi prostoru $\mathbb{K}^n$ se standardním skalárním součinem*
(6) *sloupce matice A zobrazení φ v ortonormální bázi tvoří ortonormální bázi prostoru $\mathbb{K}^n$ se standardním skalárním součinem*

* **Důkaz.** (1) ⇒ (2): Zobrazení φ je prosté, proto musí být i na. Platí přitom $\varphi(u) \cdot v = \varphi(u) \cdot \varphi(\varphi^{-1}(v)) = u \cdot \varphi^{-1}(v)$.
* (2) ⇒ (3): Standardní skalární součin je v $\mathbb{K}^n$ vždy dán pro sloupce x, y skalárů výrazem $x \cdot y = x^T E \bar{y}$, kde E je jednotková matice. Vlastnost (2) tedy znamená, že matice A zobrazení φ je invertibilní a platí $(Ax)^T \bar{y} = x^T \overline{A^{-1}y}$. To znamená $\bar{x}^T(\bar{A}^T y - A^{-1}y) = 0$ pro všechny $x \in \mathbb{K}^n$. Zejména dosazením výrazu v závorce za x zjistíme, že to je možné pouze při $\bar{A}^T = A^{-1}$.

* (3) $\Leftrightarrow$ (4): Je-li $\bar{A}^T = A^{-1}$ v některé ortonormální bázi, pak to zaručuje platnost podmínky (2) ($\varphi(u) \cdot v = (Ax)^T E \bar{y} = x^T E \overline{A^{-1} y} = u \cdot \varphi^{-1}(v)$) a tedy i (3).

* (4) $\Rightarrow$ (5) Dokazované tvrzení je vyjádřeno prostřednictvím matice A zobrazení φ vztahem $A\bar{A}^T = E$, to je ale zaručeno podmínkou (4).

* (5) $\Rightarrow$ (6): Protože pro determinant platí $|\bar{A}^T A| = |E| = |A\bar{A}^T| = |A||\overline{A}| = 1$, existuje inverzní matice A^{-1}. Přitom je $A\bar{A}^T A = A$, proto i $\bar{A}^T A = E$ což vyjadřuje právě (6).

* (6) $\Rightarrow$ (1): Ve vybrané ortonormální bázi je

$$\varphi(u) \cdot \varphi(v) = (Ax)^T \overline{(Ay)} = xA^T \bar{A} \bar{y} = x^T \bar{E} \bar{y} = x^T \bar{y}$$

kde x a y jsou sloupce souřadnic vektorů u a v. Tím je zaručeno zachovávání skalárního součinu. □

* **7.15. Poznámky.** Matice $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ s vlastností $A^{-1} = \bar{A}^T$ z předchozí věty se nazývají *unitární matice* pro komplexní skaláry, v případě $\mathbb{R}$ hovoříme o *ortogonálních maticích*. Z definiční vlastnosti plyne, že součin unitárních (resp. ortogonálních) matic je unitární (resp. ortogonální), stejně pro inverze. Unitární matice tedy tvoří podgrupu $U(n) \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, ortogonální matice tvoří podgrupu $O(n) \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.

* Z přechozích úvah přímo vyplývá, že determinant unitární matice má vždy velikost rovnu jedné, v případě reálných skalárů pak determinant musí být ± 1 ($1 = \det(E) = \det(A\bar{A}^T) = \det(A)\overline{\det A} = |\det A|$). Dále, je-li $Ax = \lambda x$ pro unitární či ortogonální matici, pak $(Ax) \cdot (Ax) = x \cdot x = |\lambda|^2 (x \cdot x)$. Proto jsou vlastní hodnoty ortogonálních matic rovny ± 1, vlastní hodnoty unitárních matic jsou vždy komplexní jednotky.

7.16. Lemma. *Nechť je $\varphi \colon V \to V$ unitární zobrazení a $U \subset V$ je invariantní podprostor vzhledem k φ. Pak také jeho ortogonální doplněk $U^\perp$ je invariantní podprostor.*

Důkaz. Zvolme $u \in U$ a $v \in U^\perp$ libovolně. Protože je φ unitární, platí

$$\varphi(v) \cdot \varphi(\varphi^{-1}(u)) = v \cdot \varphi^{-1}(u).$$

Zúžení $\varphi_{|U}$ je také unitární, musí to tedy být bijekce, zejména je $\varphi^{-1}(u) \in U$. Pak ovšem $\varphi(v) \cdot u = 0$, protože $v \in U^\perp$. To znamená, že i $\varphi(v) \in U^\perp$. □

7.17. Věta. *Nechť $\varphi \colon V \to V$ je unitární zobrazení komplexních vektorových prostorů. Pak je V ortogonálním součtem jednorozměrných vlastních podprostorů.*

Důkaz. Tvrzení pro komplexní unitární prostory je přímým důsledkem předchozího lemmatu: Jistě existuje alespoň jeden vlastní vektor $v \in V$. Pak je zúžení φ na invariantní podprostor $\langle v \rangle^\perp$ opět unitární a jistě má opět nějaký vlastní vektor. Po n takovýchto krocích obdržíme hledanou ortogonální bázi z vlastních vektorů. Po vynormování vektorů získáme ortonormální bázi. □

V dalším ukážeme, že euklidovské prostory se pro každý ortogonální automorfismus $\varphi \colon V \to V$ ortogonálně rozkládají na součet jednorozměrných a dvourozměrných invariantních podprostorů takových, že jednorozměrné jsou generovány vlastními vektory a příslušné vlastní hodnoty jsou ± 1, zatímco zúžení φ na dvourozměrné je dáno rotacemi kolem počátku o vhodné úhly.

Pochopení a hlavně důkaz tohoto tvrzení bude vyžadovat zvládnutí tzv. komplexifikací reálných vektorových prostorů.

* **7.18. Komplexifikace.** Nechť V je reálný vektorový prostor. Jeho *komplexifikací* rozumíme vektorový prostor $V^{\mathbb{C}} = V \oplus iV$ nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$ s nosnou množinou $V \times V$ a operacemi

$$(a + ib) \cdot (x + iy) = (a \cdot x - b \cdot y) + i(a \cdot y + b \cdot x)$$
$$(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y').$$

Je-li $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ báze prostoru V, pak bázi $\underline{u}^{\mathbb{C}} = ((u_1 + i0), \dots, (u_n + i0))$ prostoru $V^{\mathbb{C}}$ nazýváme indukovanou bazí na komplexifikaci V. Pro každé lineární zobrazení $\varphi\colon V \to W$ reálných vektorových prostorů definujeme jeho komplexifikaci $\varphi^{\mathbb{C}}\colon V^{\mathbb{C}} \to W^{\mathbb{C}}$ vztahem

$$\varphi^{\mathbb{C}}(x + iy) = \varphi(x) + i\varphi(y).$$

Ponechávám na čtenáři ověření, že všechny tyto definice jsou korektní.

* **7.19. Lemma.** *Nechť V a W jsou reálné vektorové prostory s bazemi $\underline{u} = (u_1, \dots, u_m)$ a $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ a $\varphi\colon V \to W$ je lineární zobrazení s maticí $A \in \mathrm{Mat}_{nm}(\mathbb{R})$ v těchto bazích.*

(1) *komplexifikace $\varphi^{\mathbb{C}}\colon V^{\mathbb{C}} \to W^{\mathbb{C}}$ je lineární zobrazení a jeho matice v indukovaných bazích je opět A.*
(2) *$U \subset V$ je invariantní vzhledem k $\varphi\colon V \to V$ právě, když $U^{\mathbb{C}} \subset V^{\mathbb{C}}$ je invariantní vzhledem k $\varphi^{\mathbb{C}}$.*
(3) *$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ právě, když $V^{\mathbb{C}} = U_1^{\mathbb{C}} \oplus \dots \oplus U_k^{\mathbb{C}}$.*

* **Důkaz.** (1) Linearita se ověří přímým výpočtem a tvrzení o matici snadno plyne z definic.

* (2) a (3) se ověří snadno prostřednictvím vhodných bazí podprostorů. □

* **7.20.** V předchozím tvrzení jsme viděli, že zobrazení

$$\{\text{podprostory ve } V\} \to \{\text{podprostory ve } V^{\mathbb{C}}\}$$

dané komplexifikací má velice přehledné vlastnosti. Naopak, každý komplexní vektorový prostor můžeme chápat jako reálný (pomocí zúžení pole skalárů $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$). V opačném směru pak máme zobrazení

$$\mathrm{re}, \mathrm{im}\colon \{\text{podprostory ve } V^{\mathbb{C}}\} \to \{\text{podprostory ve } V\},$$

která jsou projekcemi na jednotlivé komponenty a jsou lineární nad $\mathbb{R}$. Opět nám přímé součty přechází na přímé součty.

* Uvažme lineární zobrazení $\varphi\colon V \to V$ na reálném vektorovém prostoru. Jeho charakteristický polynom $|A - \lambda E|$ je zároveň charakteristickým polynomem $\varphi^{\mathbb{C}}$ a má, včetně násobností, $n = \dim V$ (obecně komplexních) kořenů $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Budeme značit $Q_\lambda \subset V^{\mathbb{C}}$ vlastní podprostor příslušný vlastní hodnotě λ a $P_\lambda = \mathrm{re}(Q_\lambda) \subset V$.

* **7.21. Lemma.** *Nechť λ je kořen charakteristického polynomu lineárního zobrazení $\varphi\colon V \to V$.*

(1) *Je-li λ reálné, je P_λ podprostor vlastních vektorů ve V a $Q_\lambda = P_\lambda^{\mathbb{C}}$.*
(2) *Je-li $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, pak i $\bar\lambda$ je kořenem, platí $P_\lambda = P_{\bar\lambda}$ a $P_\lambda^{\mathbb{C}} = Q_\lambda \oplus Q_{\bar\lambda}$.*
(3) *Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ vlastní hodnoty po dvou splňující $\lambda_i \neq \lambda_j$, $\lambda_i \neq \bar\lambda_j$, pak součet podprostorů P_{λ_i} je přímý, $i = 1, \dots, k$.*

** **Důkaz.** (1) Podprostor Q_λ je generován fundamentálním systémem řešení lineárního systému rovnic s reálnými koeficienty, lze tedy najít jeho bázi s reálnými souřadnicemi. Proto je $P_\lambda = \mathrm{re}(Q_\lambda)$ řešením téhož systému rovnic.

** (2) Víme, že $\lambda \neq \bar\lambda$ jsou kořeny charakteristického polynomu. Protože původní matice má reálné koeficienty, jsou Q_λ a $Q_{\bar\lambda}$ prostory řešení dvou systémů rovnic s komplexně konjugovanými koeficienty. Odtud ale plyne, že $\overline{Q_\lambda} = Q_{\bar\lambda}$. Proto zjevně $Q_\lambda + Q_{\bar\lambda} = (\mathrm{re}(Q_\lambda) + \mathrm{im}(Q_\lambda))^{\mathbb{C}}$. Pak ovšem

$$\mathrm{re}(\mathrm{re}Q_\lambda + \mathrm{im}Q_\lambda)^{\mathbb{C}} = \mathrm{re}Q_\lambda + \mathrm{re}Q_{\bar\lambda} = \mathrm{re}Q_\lambda = P_\lambda$$

neboť $\mathrm{re}Q_\lambda = \mathrm{re}Q_{\bar\lambda}$. Celkem tedy $P_\lambda^{\mathbb{C}} = Q_\lambda \oplus Q_{\bar\lambda}$.

** (3) Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$, $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Potom

$$\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \bar\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_k, \bar\lambda_k$$

je $2k - r$ různých vlastních hodnot zobrazení $\varphi^{\mathbb{C}}$. Proto $Q_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus Q_{\lambda_r} \oplus (Q_{\lambda_{r+1}} \oplus Q_{\bar\lambda_{r+1}}) \oplus \dots \oplus (Q_{\lambda_k} \oplus Q_{\bar\lambda_k})$ je přímý součet podprostorů ve $V^{\mathbb{C}}$. $\square$

* **7.22. Věta.** *Nechť $\varphi\colon V \to V$ je lineární zobrazení na reálném vektorovém prostoru. Předpokládejme, že všechny vlastní hodnoty jeho komplexifikace $\varphi^{\mathbb{C}}$ jsou různé, a označme e_{λ_i} generátory vlastních podprostorů $Q_{\lambda_i} \subset V^{\mathbb{C}}$. Pak*

(1) *reálným vlastním hodnotám λ odpovídají jednorozměrné vlastní podprostory P_λ.*
(2) *Dvojici různých, komplexně sdružených kořenů $\lambda, \bar\lambda$ odpovídá dvourozměrný podprostor $P_\lambda = P_{\bar\lambda}$ s generátory $x_\lambda = re(e_\lambda)$, $y_\lambda = im(e_\lambda)$.*
(3) *Označme $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$. Pak $\varphi(x_\lambda) = \alpha x_\lambda - \beta y_\lambda$, $\varphi(y_\lambda) = \alpha y_\lambda + \beta x_\lambda$, tzn. zúžení φ na P_λ odpovídá složení násobení skalárem $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ a otočení o úhel $\arccos(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}})$.*

Celkem má φ v této bázi blokově diagonální tvar s bloky řádů jedna a dva.

** **Důkaz.** Tvrzení této věty je přímým důsledkem předchozího lemmatu. $\square$

** Podobně bychom mohli zkoumat i obecný případ, kdy kompexní kořeny mohou mít násobnosti větší než jedna, situace se ale stává dosti nepřehlednou.

7.23. Věta. *Nechť $\varphi\colon V \to V$ je ortogonální zobrazení euklidovských vektorových prostorů. Pak V je ortogonálním součtem jednorozměrných a dvourozměrných invariantních podprostorů takových, že jednorozměrné jsou generovány vlastními vektory a příslušné vlastní hodnoty jsou ± 1, zatímco zúžení φ na dvourozměrné je dáno rotacemi kolem počátku o úhly zadané argumenty příslušných komplexně sdružených vlastních hodnot.*

Důkaz. Nechť je V euklidovský prostor. Potom se na jeho komplexifikaci $V^{\mathbb{C}}$ rozšíří skalární součin z V tak, že prohlásíme bázi indukovanou na $V^{\mathbb{C}}$ libovolně zvolenou ortonormální bazí na V za ortonormální. Vzhledem k tomuto skalárnímu součinu je ale komplexifikace $\varphi^{\mathbb{C}}$ také unitární (je dána stejnou reálnou maticí) a podle předchozí části důkazu se $V^{\mathbb{C}}$ rozpadá na ortogonální součet vlastních podprostorů. Nyní stačí aplikovat výsledky z 7.21, 7.22 a získáme tak dvourozměrné invariantní podprostory $P_\lambda \subset V$. Přitom je každý takový podprostor P_λ reálným podprostorem v součtu $Q_\lambda \oplus Q_{\bar\lambda}$ odpovídajících komplexních vlastních podprostorů. Protože se v komplexifikaci $V^{\mathbb{C}}$ jedná o ortogonální součet a zúžení skalárního součinu v $V^{\mathbb{C}}$ na reálné podprostory P_λ splývá s původním skalárním součinem na V, musí být získaný součet ortogonální. Protože vlastní hodnoty $\varphi^{\mathbb{C}}$ musí mít velikost 1, jsou zúžení na získané dvourozměrné invariantní podprostory opravdu rotace. □

7.24. Poznámky. Pro euklidovské prostory dimenze n stačí uvažovat rotace v dvourozměrných podprostorech a tzv. reflexe vzhledem k nadrovinám určeným $n-1$ nezávislými vektory. Skutečně, kterékoliv dva nezávislé vlastní vektory s vlastní hodnotou -1 odpovídají rotaci o π v příslušné rovině. Při liché násobnosti vlastní hodnoty -1 nám tedy zůstane právě jeden jednorozměrný vlastní podprostor a ve vhodné ortonormální bázi obdržíme dané ortogonální zobrazení jako složení uvedených typů zobrazení.

Např. každé ortogonální zobrazení v dimenzi tři lze ve vhodné bázi zapsat buď jako rotaci v rovině prvních dvou bázových vektorů nebo jako předchozí zobrazení složené s reflexí podle této roviny. Tuto bázi přitom dostaneme přímým výpočtem vlastních hodnot a vlastních vektorů nad komplexními skaláry.

Úplně závěrem ještě odvodíme zesílení věty 5.21 popisující obecné lineární zobrazení, které má dalekosáhlé důsledky. V dalším textu je ještě několikrát využijeme.

7.25. Věta (Schurova o ortogonální triangulovatelnosti). *Nechť $\varphi\colon V \to V$ je libovolné lineární zobrazení (reálného nebo komplexního) unitárního prostoru s $m = \dim V$ vlastními hodnotami (včetně násobonosti). Pak existuje ortonormální báze prostoru V taková, že φ v ní má horní trojúhelníkovou matici s vlastními čísly $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ na diagonále.*

** **Důkaz.** K důkazu stačí jen trochu upravit důkaz věty 5.21. V ní jsme konstruovali posloupnost invariantních podprostorů $\{0\} \subset V_1 \subset \cdots \subset V_m = V$ a bázi $\underline{u} = (u_1, \dots, u_m)$ takovou, že $V_i = \langle u_1, \dots, u_i \rangle$, $1 \le i \le m$. Přitom jsme postupovali induktivně tak, že po obdržení prvních k vektorů výsledné báze a příslušného invariantního podprostoru V_k jsme uvažovali indukované zobrazení φ_{V/V_k} na faktorovém prostoru V/V_k. Jeho charakteristický polynom přitom byl $(\lambda_{k+1} - \lambda) \dots (\lambda_m - \lambda)$ a jistě mělo vlastní vektor $u_{k+1} + V_k$. Další rozšíření již zkonstruované báze pak bylo $u_1, \dots, u_{k+1}$. Nyní ovšem můžeme v každém kroku využít skutečnosti, že vždy $V/V_k \simeq V_k^\perp$, $V_k^\perp \ni u \mapsto (u + V_k) \in V/V_k$, tj. v každé třídě rozkladu V/V_k existuje právě jeden vektor z $V_k^\perp$ (tuto vlastnost má faktorový prostor podle libovolného podprostoru v unitárním prostoru – pokud $u, v \in V_k^\perp$ jsou v jedné třídě, pak jejich rozdíl patří do $V_k \cap V_k^\perp$, tedy jsou stejné). Můžeme tedy jako reprezentanta u_{k+1} nalezené třídy (vlastního vektoru φ_{V/V_k}) zvolit právě vektor z $V_k^\perp$. Touto modifikací dojdeme k ortogonální bázi s požadovanou vlastností. Proto existuje i ortonormální. □

Problémy k přemýšlení

Budou uvedeny až společně s náměty v kapitole 8.

8. Formy a tensory

V celé této kapitole se opět zaměříme na reálné nebo komplexní skaláry, všechny výsledky, kde nebude zdůrazněno něco jiného však platí pro všechna pole s charakteristikou různou od 2.

8.1. Definice. *Lineární formou* na vektorovém prostoru V nad $\mathbb{K}$ rozumíme lineární zobrazení $\varphi\colon V \to \mathbb{K}$. Vektorový prostor všech lineárních forem na V nazýváme *duální vektorový prostor* k V a značíme jej V^*. Pro každé lineární zobrazení $\psi\colon V \to W$ vektorových prostorů definujeme *duální zobrazení* $\psi^*\colon W^* \to V^*$ vztahem $\psi^*(\alpha)(u) = \alpha(\psi(u))$ pro všechny lineární formy $\alpha \in W^*$ a vektory $u \in V$.

Pro každý vektorový prostor V definujeme operaci *vyčíslení* $\langle\ ,\ \rangle\colon V \times V^* \to \mathbb{K}$, $\langle u, \varphi\rangle = \varphi(u)$. Definici duálního zobrazení můžeme tedy psát $\langle \psi(u), \alpha\rangle = \langle u, \psi^*(\alpha)\rangle$, $u \in V$, $\alpha \in W^*$.

* **8.2. Duální báze.** Je-li $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ libovolná báze vektorového prostoru V, pak definujeme $\underline{u}^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$ vztahy $\langle u_i, u_i^*\rangle = 1$ a $\langle u_i, u_j^*\rangle = 0$ pro $i \neq j$. Tyto lineární formy jsou zjevně lineárně nezávislé (vyčíslete jejich lineární kombinaci na bázových vektorech u_i) a přitom generují celý duální prostor V^* (pro $\alpha \in V^*$ je $\alpha(a_1u_1 + \dots + a_nu_n) = a_1\alpha(u_1) + \dots + a_n\alpha(u_n) = (\alpha(u_1)u_1^* + \dots + \alpha(u_n)u_n^*)(a_1u_1 + \dots + a_nu_n)$). Nazýváme je *duální báze* k bázi $\underline{u}$.

* Následující věta dává do souvislosti lineární formy a systémy lineárních rovnic.

* **8.3. Věta.** *Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ jeho báze. Potom*

(1) *pro každé $\alpha \in V^*$ je matice $(\alpha(u_1), \dots, \alpha(u_n)) \in \mathrm{Mat}_{1n}(\mathbb{K})$ lineárního zobrazení α v bazích $\underline{u}$ na V a 1 na $\mathbb{K}$ zároveň n-ticí souřadnic α v duální bázi $\underline{u}^*$ na V^*.*

(2) *Pro nenulové formy $\alpha \in V^*$ je $\operatorname{Ker}\alpha \subset V$ podprostor dimenze $n-1$. Navíc $\operatorname{Ker}\alpha = \operatorname{Ker}\beta$ právě, když $\alpha = a\beta$ pro nenulový skalár a.*

(3) *Lineární forma α je lineární kombinací forem $\beta_1, \dots, \beta_k$ právě, když $\cap_i \operatorname{Ker}\beta_i \subset \operatorname{Ker}\alpha$.*

(4) *formy $\beta_1, \dots, \beta_k$ jsou lineárně nezávislé právě, když $\dim \cap_i \operatorname{Ker}\beta_i = n-k$.*

* **Důkaz.** (1): Již jsme ukázali při definici duální báze, že $\alpha = \alpha(u_1)u_1^* + \dots + \alpha(u_n)u_n^*$.

* (2), (3), (4): V libovolně zvolených souřadnicích je $\operatorname{Ker}\alpha$ dáno jednou homogenní rovnicí. Pokud je tato rovnice nenulová, je jeho dimenze $n-1$. Zbytek tvrzení (2) je speciálním případem (3). Je-li $\alpha = \sum_i a_i\beta_i$, pak jistě $\cap_i \operatorname{Ker}\beta_i \subset \operatorname{Ker}\alpha$. Naopak, $u \in \cap_i \operatorname{Ker}\beta_i$ znamená právě, že souřadnice u ve zvolené bázi tvoří řešení příslušného systému lineárních rovnic. Dimenze průniku je proto rovna rozdílu mezi dimenzí celého V a počtem nezávislých rovnic, což dokazuje (4). Pokud α není lineární kombinací $\beta_1, \dots, \beta_k$, pak je dimenze $\cap_i \operatorname{Ker}\beta_i \cap \operatorname{Ker}\alpha$ ostře menší než dimenze $\cap_i \operatorname{Ker}\beta_i$. Tím jsme ověřili (2) i (3). $\square$

* **8.4. Věta.** *Nechť V a W jsou vektorové prostory nad $\mathbb{K}$, $\underline{u}$ nechť je báze na V, $\underline{w}$ báze na W.*

(1) *Jsou-li $x = (x_1, \dots , x_n)^T \in \mathbb{K}^n$ souřadnice vektoru $v \in V$ v bázi $\underline{u}$, $y^T = (y_1, \dots , y_n) \in \mathbb{K}^n$ souřadnice formy α v duální bázi na V^*, pak vyčíslení $\langle v, \alpha\rangle$ je dáno násobením matic $y^T x$.*
(2) *Je-li $\underline{v}$ jiná báze na V a matice přechodu od $\underline{u}$ k $\underline{v}$ je P, pak matice přechodu od duální báze $\underline{v}^*$ k duální bázi $\underline{u}^*$ je P^T.*
(3) *Je-li $\varphi\colon V \to W$ lineární zobrazení s maticí A v bazích $\underline{u}$, $\underline{w}$, pak matice duálního zobrazení $\varphi^*\colon W^* \to V^*$ v duálních bazích je matice A^T.*

* **Důkaz.** (1): Máme $v = x_1u_1 + \dots + x_nu_n$ a $\alpha = y_1u_1^* + \dots + y_nu_n^*$, proto

$$\langle v, \alpha\rangle = \alpha(v) = y_1u_1^*(v) + \dots + y_nu_n^*(v) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n = y^T x.$$

* (3): Nechť dále $z \in \mathbb{K}^n$ jsou souřadnice formy $\beta \in W^*$ v duální bázi $\underline{w}^*$ na W^*. Pak

$$\langle v, \varphi^*(\beta)\rangle = \langle\varphi(v), \beta\rangle = z^T(Ax) = (z^T A)x = (A^T z)^T x$$

což jsme chtěli dokázat.

* (2): Jestliže speciálně zvolíme $V = W$ a $\varphi = \mathrm{id}_V$, pak i φ^* je identické zobrazení a dokazované tvrzení plyne z (3) $\square$

8.5. Definice. Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad $\mathbb{K}$. Zobrazení $f\colon U \times V \to W$ nazýváme *bilineární zobrazení*, jestliže pro libovolné $u_1, u_2 \in U$, $v_1, v_2 \in V$, $a, b \in \mathbb{K}$ platí

$$f(au_1 + bu_2, v_1) = a\, f(u_1, v_1) + b\, f(u_2, v_1)$$
$$f(u_1, av_1 + bv_2) = a\, f(u_1, v_1) + b\, f(u_1, v_2)$$

Jinak řečeno, $f\colon U \times V \to W$ je bilineární právě, když obě indukovaná zobrazení $\hat{f}\colon U \to \mathrm{Hom}(V, W)$, $\hat{f}\colon V \to \mathrm{Hom}(U, W)$ jsou lineární (pro pořádek bychom měli od sebe tato dvě zobrazení odlišovat značením, nebudeme to ale v dalším potřebovat). Přímo z definice tedy plyne, že hodnota bilineárního zobrazení f na lineárních kombinacích $u = a_1u_1 + \dots a_ku_k \in U$, $v = b_1v_1 + \dots b_\ell v_\ell \in V$ je

$$f(u, v) = \sum_{i,j} a_ib_jf(u_i, v_j)$$

zejména je pro každou dvojici bazí $\underline{u}$, $\underline{v}$ na U a V bilineární zobrazení f jednoznačně definováno libovolnou volbou hodnot $f(u_i, v_j) \in W$ na všech dvojicích bázových vektorů. Zvolíme-li tedy ještě bázi $\underline{w}$ na W, je každé takové f definováno libovolnou "třírozměrnou maticí" s prvky f_{ijk}, $f(u_i, v_j) = \sum_k f_{ijk}w_k$.

8.6. Definice. Bilineární zobrazení $f\colon U \times V \to \mathbb{K}$ se nazývá *bilineární forma* na U a V. Je-li $U = V$, hovoříme o bilineární formě $f\colon U \times U \to \mathbb{K}$ na U. Nechť $\underline{u} = (u_1, \dots , u_m)$, $\underline{v} = (v_1, \dots , v_n)$ jsou báze prostorů U a V. Matice $A = (a_{ij})$ s prvky $a_{ij} = f(u_i, v_j)$ se nazývá *matice bilineární formy* f v bazích $\underline{u}$, $\underline{v}$.

Bilineární forma f na U se nazývá *symetrická*, jestliže $f(u, v) = f(v, u)$ pro všechny $u, v \in U$, resp. *antisymetrická*, jestliže $f(u, v) = -f(v, u)$.

8.7. Věta. *Nechť U, V jsou vektorové prostory s bazemi $\underline{u} = (u_1, \dots, u_m)$, $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$, $f \colon U \times V \to \mathbb{K}$ nechť je bilineární forma s maticí A.*

(1) *Jsou-li $x \in \mathbb{K}^m$, $y \in \mathbb{K}^n$ souřadnice vektorů $u \in U$, $v \in V$ ve zvolených bazích, pak $f(u, v) = x^T Ay$.*
(2) *Vektorový prostor všech bilineárních forem $f \colon U \times V \to \mathbb{K}$ je isomorfní prostoru matic $\mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{K})$.*
(3) *Zobrazení $\hat{f} \colon U \to V^*$, $\hat{f}(u)(v) = f(u, v)$, je lineární zobrazení $U \to V^*$ s maticí A^T v bazích $\underline{u}$ a $\underline{v}^*$.*
(4) *Je-li S matice přechodu od $\underline{u}$ k $\underline{u}'$ a P matice přechodu od $\underline{v}$ k $\underline{v}'$, pak pro matici B formy f v nových bazích platí $A = S^T BP$, tj. $B = S^{-1T} AP^{-1}$.*
(5) *Je-li $U = V$, pak f je symetrická právě, když matice A je symetrická.*
(6) *Je-li $U = V$, pak f je antisymetrická právě, když matice A je antisymetrická. Při charakteristice pole $\mathbb{K}$ větší než dvě je to ekvivalentní podmínce $f(u, u) = 0$ pro všechny $u \in U$.*

Důkaz. (1): $f(\sum_i x_i u_i, \sum_j y_j v_j) = \sum_{ij} x_i y_j a_{ij} = x^T Ay$.

(2): Struktura vektorového prostoru na množině všech bilineárních forem je dána sčítáním a násobením skalárem na hodnotách forem v $\mathbb{K}$. Z předchozího souřadného vyjádření přímo plyne, že přiřazení matice formy zachovává tuto strukturu. Např. $(f + g)(u, v) = x^T Ay + x^T By = x^T (A + B)y$, kde A, B jsou matice forem f, g (ověřte si zbývající vlastnosti!).

(3): Že je $\hat{f}$ lineární již víme (přímo z definice). Z definice $A = (a_{ij})$ plyne $\hat{f}(u_i)(v_j) = a_{ij}$, tzn. $\hat{f}(u_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j^*$. Proto i-tý sloupec matice zobrazení $\hat{f}$ musí být i-tý řádek matice A. (Jinak: $\hat{f}$ se v souřadnicích napíše $x \mapsto (y \mapsto x^T Ay)$, tj. $x \mapsto (x^T A) = (A^T x)^T$.)

(4): Nechť x, x', y, y' jsou po řadě souřadnice v staré a nové bázi na U a V. Pak $x' = Sx$, $y' = Py$ a dostáváme

$$f(u, v) = x'^T By' = (Sx)^T BPy = x^T (S^T BP)y$$

(5): Forma f je symetrická právě, když $f(u, v) = f(v, u)$ pro všechny $u, v \in U$, ale to je právě, když $f(u_i, u_j) = f(u_j, u_i)$ pro všechny vektory báze.

(6): Zcela stejně jako (5). Navíc z antisymetričnosti okamžitě plyne $f(u, u) = -f(u, u)$, tj. $2f(u, u) = 0$ pro všechny $u \in U$. Naopak, z

$$0 = f(u + v, u + v) = f(u, u) + f(v, v) + f(u, v) + f(v, u) = f(u, v) + f(v, u)$$

pak vyplývá antisymetrie. □

8.8. Definice. *Hodností bilineární formy* $f \colon U \times V \to \mathbb{K}$ rozumíme hodnost matice A této formy v libovolně zvolených bazích na U a V, značíme $h(f)$. *Vrchol* symetrické bilineární formy $f \colon V \times V \to \mathbb{K}$ je definován jako jádro zobrazení $\hat{f} \colon V \to V^*$.

Podle tvrzení (3) předchozí věty je hodnost f rovna dimenzi obrazu lineárního zobrazení $\hat{f}$, proto nezávisí na volbě báze a je rovna právě počtu lineárně nezávislých sloupců v matici A. Vrchol symetrické formy f můžeme přímo definovat jako podprostor vektorů $v \in V$ splňujících $f(v, u) = 0$ pro všechny vektory $u \in V$. Zřejmě je součet hodnosti symetrické formy na V a dimenze jejího vrcholu roven dimenzi vektorového prostoru V.

8.9. Poznámky. Jestliže vhodně vybereme báze na U a V, pak dosáhneme pro každou předem zvolenou bilineární formu toho, že její matice je diagonální s $h(f)$ jedničkami a $\dim V - h(f)$ nulami na diagonále: Podle 1.14 vždy totiž existují invertibilní matice P, Q pro které je $B = PAQ$ v požadovaném tvaru. Stačí tedy použít matice přechodu P^{-1T} a Q^{-1}.

Pokud uvažujeme bilineární formu na V, pak nás samozřejmě více zajímá jaký tvar může mít její matice v jedné bázi $\underline{u}$ na V. Maticím B, $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$, pro které je $B = S^T AS$ s vhodnou invertibilní maticí S říkáme *kongruentní matice*. Víme tedy, že dvě matice jsou maticemi jedné a téže bilineární formy právě, když jsou kongruentní. Jedním z našich dalších cílů bude ukázat, že pro každou symetrickou matici lze najít diagonální matici s ní kongruentní.

Každou bilineární formu $f\colon V \times V \to \mathbb{K}$ můžeme vyjádřit jako

$$f(u, v) = \frac{1}{2}(f(u, v) + f(v, u)) + \frac{1}{2}(f(u, v) - f(v, u))$$

tj. f se rovná součtu symetrické a antisymetrické formy. Odpovídající matice v kterékoliv bázi jsou právě symetrizace $\frac{1}{2}(A + A^T)$ a antisymetrizace $\frac{1}{2}(A - A^T)$. Tuto skutečnost můžeme vyjádřit tvrzením, že vektorový prostor všech forem je přímým součtem symetrických a antisymetrických forem.

8.10. Definice. *Kvadratická forma* na vektorovém prostoru V je takové zobrazení $f\colon V \to \mathbb{K}$, že existuje symetrická bilineární forma $g\colon V \times V \to \mathbb{K}$ splňující $f(u) = g(u, u)$ pro všechny $u \in V$. Bilineární forma g se nazývá *polární forma* kvadratické formy f. *Hodností kvadratické formy* rozumíme hodnost její polární formy.

8.11. Věta. *Nechť $f\colon V \to \mathbb{K}$ je kvadratická forma.*

(1) *Pro každé $u \in V$, $a \in \mathbb{K}$ platí*

$$f(a\,u) = a^2 f(u)$$

(2) *polární forma g kvadratické formy f je jednoznačně určena a platí*

$$g(u, v) = \frac{1}{2}(f(u + v) - f(u) - f(v)).$$

(3) *Zobrazení $f\colon V \to \mathbb{K}$ je kvadratická forma právě když platí, že zobrazení definované v (2) je bilineární a $f(-u) = f(u)$ pro všechny $u \in V$.*

Důkaz. (1): $f(a\,u) = g(a\,u, a\,u) = a^2 g(u, u) = a^2 f(u)$.

(2): $f(u+v) = g(u+v, u+v) = g(u, u) + g(v, v) + 2g(u, v)$ protože je g symetrická. Odtud plyne i jednoznačnost polární formy g.

(3): Definujme g vztahem z (2). Pak g je jistě symetrické v u, v, stačí tedy předpokládat bilinearitu (pokud existuje polární forma k f, musí být dána tímto vztahem). Přitom z definice je $2g(u, -u) = f(u + (-u)) - f(u) - f(-u)$. Zejména pro $u = 0$ obdržíme (z bilinearity g), že $f(0) = 0$. Potom však předchozí rovnost dá $-2g(u, u) = -2f(u)$ □

K vyjádření dané kvadratické formy v souřadnicích vzhledem ke zvolené bázi na V použijeme matice příslušné polární formy. Tzn. pro $u = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n$

máme $f(u) = x^T Ax$ pro symetrickou matici A. Často zapisujeme formu f ve tvaru $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j$, hovoříme o *analytickém tvaru formy f*. Ukážeme nyní, že pro vhodnou bázi bude matice A diagonální, tj. pro příslušnou polární formu g bude platit $g(u_i, u_j) = 0$ při $i \neq j$. Takovou bázi nazýváme *polární báze* kvadratické formy f. Na následující větě je nejpodstatnější její důkaz, protože podává algoritmus, jak takovou polární bázi najít.

8.12. Věta (Lagrangeova). *Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ dimenze n, $f\colon V \to \mathbb{K}$ kvadratická forma. Pak na V existuje polární báze pro f.*

Důkaz. (1) Nechť A je matice f v bázi $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ na V a předpokládejme $a_{11} \neq 0$. Pak můžeme psát

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + \dots + a_{22} x_2^2 + \dots \\ &= a_{11}^{-1} (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n)^2 + \text{členy neobsahující } x_1 \end{aligned}$$

Provedeme tedy transformaci souřadnic (tj. změnu báze) tak, aby v nových souřadnicích bylo

$$x_1' = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n,\ x_2' = x_2, \dots, x_n' = x_n.$$

To odpovídá nové bázi (spočtěte si příslušnou matici přechodu!)

$$v_1 = a_{11}^{-1} u_1,\ v_2 = u_2 - a_{11}^{-1} a_{12} u_1, \dots, v_n = u_n - a_{11}^{-1} a_{1n} u_1$$

a tak jak lze očekávat, v nové bázi bude polární forma splňovat $g(v_1, v_i) = 0$ pro všechny $i > 0$ (přepočtěte!). Má tedy f v nových souřadnicích analytický tvar $a_{11}^{-1} {x_1'}^2 + h$, kde h je kvadratická forma nezávislá na proměnné x_1.

Z technických důvodů bývá (pro jisté teoretické úvahy) lepší zvolit v nové bázi $v_1 = u_1$, opět dostaneme výraz $f = f_1 + h$, kde f_1 závisí pouze na x_1', zatímco v h se x_1' nevyskytuje. Přitom pak $g(v_1, v_1) = a_{11}$.

(2) Předpokládejme, že po provedení kroku (1) dostaneme pro h matici (řádu o jedničku menšího) s koeficientem u ${x_2'}^2$ různým od nuly. Pak můžeme zopakovat přesně stejný postup a získáme vyjádření $f = f_1 + f_2 + h$, kde v h vystupují pouze proměnné s indexem větším než dvě. Tak můžeme postupovat tak dlouho, až buď provedeme $n-1$ kroků a získáme diagonální tvar, nebo v řekněme i-tém kroku bude prvek a_{ii} dosud získané matice nulový.

(3) Nastane-li poslední možnost, ale přitom existuje jiný prvek $a_{jj} \neq 0$ s $j > i$, pak stačí přehodit i-tý prvek báze s j-tým a pokračovat podle předešlého postupu.

(4) Předpokládejme, že jsme narazili na situaci $a_{jj} = 0$ pro všechny $j \geq i$. Pokud přitom neexistuje ani žádný jiný prvek $a_{jk} \neq 0$ s $j \geq i$, $k \geq i$, pak jsme již úplně hotovi neboť jsme již dosáhli diagonální matici. Předpokládejme, že $a_{jk} \neq 0$. Použijeme pak transformaci $v_j = u_j + u_k$, ostatní vektory báze ponecháme (tj. $x_k' = x_k - x_j$, ostatní zůstávají). Pak $h(v_j, v_j) = h(u_j, u_j) + h(u_k, u_k) + 2h(u_k, u_j) = 2a_{jk} \neq 0$ a můžeme pokračovat podle postupu v (1). $\square$

8.13. Důsledek. *Je-li f kvadratická forma hodnosti r na prostoru V, $\dim V \geq r$, pak existuje polární báze na V, ve které má f analytický tvar $f(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2$. Zejména je počet nenulových diagonálních prvků v matici v polární bázi roven hodnosti formy f.*

8.14. Příklad. Nechť $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+4x_2x_3+6x_3^2$. Její matice je $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. Podle bodu (1) algoritmu provedeme úpravy

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= \frac{1}{3}(3x_1+x_2)^2 + \frac{2}{3}x_2^2 + 4x_2x_3 + 6x_3^2 \\ &= \frac{1}{3}y_1^2 + \frac{3}{2}(\frac{2}{3}y_2 + 2y_3)^2 \\ &= \frac{1}{3}z_1^2 + \frac{3}{2}z_2^2 \end{aligned}$$

a vidíme, že forma má hodnost 2 a matice přechodu do příslušné polární báze $\underline{w}$ se získá posbíráním provedených transformací:

$$z_3 = y_3 = x_3,\ z_2 = \frac{2}{3}y_2 + 2y_3 = \frac{2}{3}x_2 + 2x_3,\ z_1 = y_1 = 3x_1 + x_2$$

Pokud by ale např. $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1x_3 + x_2^2$, tj. matice je $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, pak hned v prvním kroku můžeme přehodit proměnné: $y_1 = x_2$, $y_2 = x_1$, $y_3 = x_3$. Aplikace kroku (1) je pak triviální (nejsou tu žádné společné členy), pro další krok ale nastane situace z bodu (4). Zavedeme tedy transformaci $z_1 = y_1$, $z_2 = y_2$, $z_3 = y_3 - y_2$. Pak

$$f(x_1,x_2,x_3) = z_1^2 + 2z_2(z_3+z_2) = z_1^2 + \frac{1}{2}(2z_2+z_3)^2 - \frac{1}{2}z_3^2$$

Matici přechodu do příslušné polární báze opět dostaneme posbíráním jednotlivých transformací (tj. vynásobením jednotlivých dílčích matic přechodu).

* **8.15.** Všimněme si podrobněji, jak vypadají transformace použité v bodu (1) algoritmu z Lagrangeovy věty. Mají vždy horní trojúhelníkovou matici T a navíc, při použití technické modifikace zmíněné v důkazu má tato matice jedničky na diagonále:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{n2}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

Taková matice přechodu od $\underline{u}$ k $\underline{v}$ má několik pěkných vlastností. Zejména její hlavní submatice T_k tvořené prvními k řádky a sloupci jsou matice přechodu podprostorů $P_k = \langle u_1, \dots, u_k\rangle$ od báze $(u_1, \dots, u_k)$ k bázi $(v_1, \dots, v_k)$. Hlavní submatice A_k matice A formy f jsou maticemi zúžení formy f na P_k. Při přechodu od $\underline{u}$ k $\underline{v}$ daném maticí přechodu T jsou tedy matice A_k a A'_k zúžení na podprostory P_k ve vztahu $A_k = T_k^T A'_k (T_k)^{-1}$. Inverzní matice k horní trojúhelníkové s jedničkami na diagonále je přitom opět horní trojúhelníková s jedničkami na diagonále, můžeme tedy podobně vyjádřit i A' pomocí A. Podle Cauchyovy věty jsou tedy determinanty matic A_k a A'_k stejné. Celkem jsme tak dokázali velice užitečné tvrzení

* **Lemma.** *Nechť f kvadratická forma na V, $\dim V = n$, a nechť je $\underline{u}$ báze V taková, že při hledání polární báze algoritmem z Lagrangeovy věty není nikdy potřebné použít body (3) a (4). Pak je výsledkem analytické vyjádření*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_r x_r^2$$

kde r je hodnost formy f, $\lambda_1, \dots, \lambda_r \neq 0$ a pro hlavní submatice (původní) matice A kvadratické formy f platí $|A_k| = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k$, $k \leq r$. $\square$

* **8.16. Důsledek (Jacobiho věta).** *Nechť f je kvadratická forma hodnosti r na vektorovém prostoru V s maticí A v bázi $\underline{u}$. V Lagrangeově algoritmu není zapotřebí jiného kroku než doplnění čtverců právě, když pro hlavní submatice v A platí $|A_1| \neq 0, \dots, |A_r| \neq 0$. Pak existuje polární báze (a obdržíme ji výše odvozeným algoritmem), ve které má f analytické vyjádření*

$$f(x_1, \dots, x_n) = |A_1| x_1^2 + \frac{|A_2|}{|A_1|} x_2^2 + \dots + \frac{|A_r|}{|A_{r-1}|} x_r^2.$$

* **Důkaz.** Tvrzení vyplývá přímo z předchozího lemmatu, stačí si jen uvědomit, že při každé postupné transformaci se vždy další sloupec pod diagonálou v matici A vynuluje. Odtud již je jasné, že nenulovost hlavních minorů skutečně zaručí (díky tomu, že jejich hodnota se při transformacích nemění) nenulovost dalšího diagonálního členu v A. $\square$

8.17. Klasifikace pro $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Nechť V je komplexní vektorový prostor. Pro každou lineární formu $\varphi \in V^*$ můžeme definovat kvadratickou formu $u \mapsto (\varphi(u))^2 \in \mathbb{C}$. (Ověřte si, že jsou skutečně splněny podmínky 8.11.(3)!) Předchozí výsledky nám tedy pro komplexní skaláry dávají

Věta. *Pro každou nenulovou kvadratickou formu hodnosti r na komplexním vektorovém prostoru V existuje r nezávislých lineárních forem $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in V^*$ tak, že*

$$f(u) = (\varphi_1(u))^2 + \dots + (\varphi_r(u))^2.$$

Jinak řečeno, existuje polární báze, ve které má f analytické vyjádření

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_r^2.$$

Dvě symetrické matice A, $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ jsou kongruentní (jsou maticemi téže kvadratické formy v různých bazích) právě, když mají stejnou hodnost.

Důkaz. Podle obecné teorie vždy dosáhneme $f(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2$, $\lambda_i \neq 0$ v jisté bázi na V. Pak ovšem transformace $y_1 = \sqrt{\lambda_1} x_1, \dots, y_r = \sqrt{\lambda_r} x_r$, $y_{r+1} = x_{r+1}, \dots, y_n = x_n$ již vede na požadovaný tvar. Formy φ_i pak jsou právě formy z duální báze ve V^* k získané polární bázi.

Každou symetrickou matici lze tedy ztransformovat na kongruentní kanonický tvar – diagonální matici s právě r jedničkami a $n - r$ nulami na diagonále. $\square$

8.18. Klasifikace pro $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Pro reálné skaláry již nejsme schopni nadělat ze všech koeficientů jedničky, protože neumíme odmocnit záporná čísla. Proto budeme mít o něco více kanonických tvarů.

Věta (Zákon setrvačnosti). *Pro každou nenulovou kvadratickou formu hodnosti r na reálném vektorovém prostoru V existuje celé číslo $0 \leq p \leq r$ a r nezávislých lineárních forem $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in V^*$ takových, že*

$$f(u) = (\varphi_1(u))^2 + \dots + (\varphi_p(u))^2 - (\varphi_{p+1}(u))^2 - \dots - (\varphi_r(u))^2.$$

Jinak řečeno, existuje polární báze, ve které má f analytické vyjádření

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2.$$

Počet p kladných diagonálních koeficientů v matici dané kvadratické formy nezávisí na volbě polární báze.

Dvě symetrické matice A, $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ jsou kongruentní (jsou maticemi téže kvadratické formy v různých bazích) právě, když mají stejnou hodnost a když matice příslušných forem v polární bázi mají stejný počet kladných koeficientů.

Důkaz. Zcela analogicky jako pro komplexní případ obdržíme $f(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2$, $\lambda_i \neq 0$ v jisté bázi na V, předpokládejme navíc, že právě prvních p koeficientů λ_i je kladných. Pak transformace $y_1 = \sqrt{\lambda_1} x_1, \dots, y_p = \sqrt{\lambda_p} x_p$, $y_{p+1} = \sqrt{-\lambda_{p+1}} x_{p+1}, \dots, y_r = \sqrt{-\lambda_r} x_r$, $y_{r+1} = x_{r+1}, \dots, y_n = x_n$ již vede na požadovaný tvar. Formy φ_i pak jsou právě formy z duální báze ve V^* k získané polární bázi. Musíme ukázat, že p nezávisí na našem postupu. Přepokládejme, že se nám podařilo najít vyjádření téže f v polárních bazích $\underline{u}$, $\underline{v}$, tj.

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2 \\ f(y_1, \dots, y_n) &= y_1^2 + \dots + y_q^2 - y_{q+1}^2 - \dots - y_r^2 \end{aligned}$$

a označme $P = \langle u_1, \dots, u_p \rangle$, $Q = \langle v_{q+1}, \dots, v_n \rangle$. Pak pro každý $u \in P$ je $f(u) > 0$ zatímco pro $v \in Q$ je $f(v) \leq 0$. Nutně tedy platí $P \cap Q = \{0\}$ a proto $\dim P + \dim Q \leq n$. Odtud plyne $p + (n - q) \leq n$, tj. $p \leq q$. Opačnou volbou podprostorů však získáme i $q \leq p$.

Je tedy p nezávislé na volbě polární báze. Pak ovšem pro dvě matice se stejnou hodností a stejným počtem kladných koeficientů v diagonálním tvaru příslušné kvadratické formy získáme stejný kongruentní kanonický tvar. □

8.19. Definice. Nechť f je kvadratická forma na reálném vektorovém prostoru V. Číslo p z předchozí věty nazýváme *signaturou formy f*. Formu f nazýváme

(1) *positivně definitní*, je-li $f(u) > 0$ pro všechny $u \neq 0$
(2) *positivně semidefinitní*, je-li $f(u) \geq 0$ pro všechny $u \in V$
(3) *negativně definitní*, je-li $f(u) < 0$ pro všechny $u \neq 0$
(4) *negativně semidefinitní*, je-li $f(u) \leq 0$ pro všechny $u \in V$
(5) *indefinitní*, je-li $f(u) > 0$ a $f(v) < 0$ pro vhodné $u, v \in V$.

O reálné symetrické matici řekneme, že je positivně definitní, resp. positivně semidefinitní, negativně definitní, negativně semidefinitní, indefinitní, jestliže má tuto vlastnost jí definovaná kvadratická forma na $\mathbb{K}^n$. Signaturou symetrické matice rozumíme signaturu příslušné kvadratické formy.

8.20. Důsledek. *Reálná symetrická matice, resp. kvadratická forma na vektorovém prostoru dimenze n je*

(1) *indefinitní právě, když má nenulovou signaturu různou od hodnosti*
(2) *positivně definitní právě, když má hodnost i signaturu n*
(3) *positivně semidefinitní právě, když má stejnou hodnost i signaturu $r \leq n$*
(4) *negativně definitní právě, když má signaturu 0 a hodnost n*
(5) *negativně semidefinitní právě, když má signaturu 0 a hodnost $r \leq n$*

* **8.21. Důsledek (Sylvestrovo kritérium).** *Symetrická reálná matice A je positivně definitní právě, když jsou všechny její hlavní minory kladné.*

* *Symetrická reálná matice A je negativně definitní právě, když $(-1)^i|A_i| > 0$ pro všechny hlavní submatice A_i.*

* **Důkaz.** Jsou-li všechny hlavní minory kladné, pak podle Jacobiho věty (8.16) umíme najít polární bázi, ve které má daná kvadratická forma f tvar

$$f(x_1, \dots, x_n) = |A_1|x_1^2 + \frac{|A_2|}{|A_1|}x_2^2 + \dots + \frac{|A_r|}{|A_{r-1}|}x_r^2$$

Je tedy jistě f positivně definitní.

* Předpokládejme naopak, že forma f je positivně definitní. Pak pro vhodnou regulární matici P platí $A = P^T E P = P^T P$. Je tedy $|A| = |P|^2 > 0$. Nechť $\underline{u}$ je zvolená báze, ve které má forma f matici A. Zúžení f na podprostory $V_k = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$ je opět positivně definitní forma f_k jejíž maticí v bázi $u_1, \dots, u_k$ je hlavní submatice A_k. Proto je podle předchozí části důkazu také $|A_k| > 0$.

* Tvrzení o negativně definitních vyplývá z předchozího a skutečnosti, že A je positivně definitní právě, když $-A$ je negativně definitní. □

* **8.22. Definice.** *Hermiteovská forma* $f\colon V \times V \to \mathbb{C}$ na komplexním vektorovém prostoru V je zobrazení, které je lineární v prvním argumentu a $f(u, v) = \overline{f(v, u)}$. Komplexní matice A se nazývá *Hermiteovská*, je-li $A = \bar{A}^T$.

* **8.23. Věta.** *Nechť $f\colon V \times V \to \mathbb{C}$ je Hermiteovská forma.*

(1) *V libovolné bázi $\underline{u}$ na V je f dáno Hermiteovskou maticí $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = f(u_i, u_j)$ a v souřadnicích je f dáno $(x, y) \mapsto x^T A \bar{y}$.*
(2) *Transformací do nové báze prostřednictvím matice přechodu P, (tj. pro nové souřadnice $x' = Px$) získáme matici B formy f splňující $A = P^T B \bar{P}$.*

* **Důkaz.** Obě vlastnosti přímým výpočtem. □

Nyní budeme zkoumat vlastnosti bilineárních, Hermiteovských a kvadratických forem na unitárních prostorech. To znamená, že budeme opět hledat co nejjednodušší souřadné vyjádření, avšak pouze v ortonormálních bazích. Níže uvedená tvrzení jsou přímou aplikací výsledků o samoadjungovaných zobrazeních, které odvodíme až v kapitole 10. Nyní se tedy omezíme na formulaci tzv. *metrické klasifikace* symetrických bilineárních, resp. hermiteovských forem a uvedeme některé jejich důsledky.

8.24. Věta. *Každá symetrická bilineární forma f na euklidovském prostoru V, $\dim V = n$, má ve vhodné ortonormální bázi analytický tvar*

$$f(x,y) = \lambda_1 x_1 y_1 + \cdots + \lambda_n x_n y_n.$$

Každá hermiteovská forma f na komplexním unitárním prostoru V, $\dim V = n$, má ve vhodné ortonormální bázi tvar

$$f(z,w) = \lambda_1 z_1 \bar{w}_1 + \cdots + \lambda_n z_n \bar{w}_n.$$

Přitom v obou případech jsou koeficienty $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vždy reálné kořeny charakteristické rovnice $\det(Q - \lambda E) = 0$, kde Q je matice f v libovolné ortonormální bázi, a jsou určeny jednoznačně až na pořadí. Hledaná báze je pak určena vlastními vektory danými rovnicí $(Q - \lambda_i E)x_i = 0$.

Důkaz. Viz. odstavec 10.19

8.25. Důsledek. *Nechť f je kvadratická forma na euklidovském prostoru V. Pak má ve vhodné ortonormální bázi analytický tvar*

$$f(x) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2.$$

Hermiteovské kvadratické formy f na komplexním unitárním V (tj. $f(u) = g(u,u)$ pro hermiteovskou g) mají ve vhodné ortonormální bázi tvar

$$f(z) = \lambda_1 z_1 \bar{z}_1 + \cdots + \lambda_n z_n \bar{z}_n.$$

Přitom v obou případech jsou koeficienty $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vždy reálné kořeny charakteristické rovnice $\det(Q - \lambda E) = 0$, kde Q je matice f v libovolné ortonormální bázi, a jsou určeny jednoznačně až na pořadí. Hledaná báze je pak určena vlastními vektory danými rovnicí $(Q - \lambda_i E)x_i = 0$.

* **8.26. Důsledek.** *Nechť f je pozitivně definitní kvadratická forma, g libovolná další kvadratická forma na euklidovském prostoru V. Pak existuje báze V taková, že v ní mají f a g tvar:*

$$f(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$$
$$g(x) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$$

* **Důkaz.** Podle Lagrangeovy věty umíme najít takovou bázi, ve které má f požadovaný tvar (díky pozitivní definitnosti). Při libovolné následné změně báze pomocí ortogonální matice přechodu se ale již tento tvar f nebude měnit, můžeme ale přitom dosáhnout požadovaného tvaru pro g. □

Na závěr této kapitoly uvedeme lineární, bilineární a kvadratické formy do souvislosti s obecnějšími pojmy tensorové algebry.

* **8.27. Tensorový součin.** Nechť V a W jsou konečněrozměrné vektorové prostory nad stejným polem skalárů $\mathbb{K}$. Zvolme jejich báze $\underline{u} = (u_1, \dots, u_m)$, $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$. Uvažme nyní vektorový prostor Z všech (formálních) lineárních kombinací výrazů $w_{ij} = u_i \otimes v_j$, tzn.

$$Z = \{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(u_i \otimes v_j), c_{ij} \in \mathbb{K}\}$$

kde sčítání definujeme pomocí součtu koeficientů u stejných výrazů, násobení skalárem na všech koeficientech. Je tedy Z isomorfní standardnímu vektorovému prostoru $\mathbb{K}^{mn}$. Zjevně každé vektory $u \in V$, $v \in W$ určují také vektor $u \otimes v \in Z$ prostřednictvím svých souřadných vyjádření a dostáváme tak bilineární zobrazení $\iota\colon V \times W \to Z$. Navíc také každá konečná lineární kombinace takových prvků $u \otimes v \in Z$ je v Z a všechny jsou tohoto tvaru.

* Každé bilineární zobrazení $f\colon V \times W \to U$ můžeme nyní výhodně vyjádřit prostřednictvím jednoznačně definovaného lineárního zobrazení $\tilde{f}\colon Z \to U$ takto: Chceme dosáhnout $f = \tilde{f} \circ \iota$, proto na bázových vektorech $u_i \otimes v_j$ musí být $\tilde{f}(u_i \otimes v_j) = f(u_i, v_j)$. Tím je lineární zobrazení $\tilde{f}$ zadáno jednoznačně a platnost požadovaného vztahu $f = \tilde{f} \circ \iota$ je zřejmá. Takto konstruovaný vektorový prostor Z nazýváme *tensorový součin* vektorových prostorů V a W. Většinou jej značíme $V \otimes W$.

** **8.28.** Nedostatkem naší konstrukce prostoru Z je její explicitní závislost na volbě bazí. Samozřejmě volba jiných bazí $\underline{u}'$, $\underline{v}'$ pro V a W povede na výrazy $w'_{ij} = u'_i \otimes v'_j$, které opět můžeme chápat jako prvky Z. Závislosti na volbě bazí se lze zbavit např. tak, že zapomeneme, které báze $\underline{u}$, $\underline{v}$ jsme původně použili pro konstrukci Z, a ponecháme pouze transformační vztahy mezi takto vzniklými bázemi pro $V \otimes W$.

** Z hlediska čistých algebraických definic je přijatelnější následující obecná konstrukce: Nejprve zkonstrujeme nekonečněrozměrný prostor T všech konečných lineárních kombinací formálních výrazů $u \otimes v$. (Tzn., že T má nespočetnou bázi $\{u \otimes v; u \in V, v \in W\}$.) Pak definujeme vektorový podprostor $I \subset T$, generovaný všemi výrazy

$$a(u \otimes v) - (au) \otimes v,\ (au) \otimes v - u \otimes (av)$$
$$(u + u') \otimes v - u \otimes v - u' \otimes v$$
$$u \otimes (v + v') - u \otimes v - u \otimes v'$$

kde $a \in \mathbb{K}$, $u, u' \in V$, $v, v' \in W$ jsou libovolné. Tensorový součin $V \otimes W$ je pak definován jako faktorový prostor T/I. Takto definovaný vektorový prostor opět má tu vlastnost, že $V \times W$ je zobrazeno do T/I prostřednictvím bilineárního zobrazení

$$\iota\colon V \times W \to T/I, \qquad (u, v) \mapsto (u \otimes v \bmod I)$$

a každé bilineární zobrazení $f\colon V \times W \to U$ je jednoznačně vyjádřeno jako $f = \tilde{f} \circ \iota$, kde lineární $\tilde{f}$ je definováno vztahem (píšeme jakoby bylo definováno na T, ve skutečnosti ale výrazy jsou nulové na I)

$$\tilde{f}(u \otimes v) = f(u, v)$$

Aplikací této vlastnosti na kanonická bilinární vložení $V \times W$ do prostoru Z z 8.27 a do T/I dostáváme, že T/I je vždy isomorfní Z.

* **8.29. Dualita.** Vektory v tensorovém součinu $V^* \otimes W$ lze názorně chápat jako lineární zobrazení $V \to W$. Každý takový vektor je lineární kombinací výrazů $v^* \otimes w$, kde $v^* \in V^*$ je lineární forma na V a $w \in W$. Můžeme tedy definovat lineární zobrazení

$$\varphi_{u \otimes v} \colon V \to W, \qquad u \mapsto \langle u, v^* \rangle w$$

Podívejme se, jak vypadají matice takových zobrazení. V pevně zvolených bazích $\underline{u}$, $\underline{v}$ na V a W dostáváme

$$\varphi_{u_i \otimes v_j}(u_k) = \begin{cases} v_j & \text{pro } i = k \\ 0 & \text{pro } i \neq k. \end{cases}$$

To znamená, že matice $\varphi_{u_i \otimes v_j}$ obsahuje jedničku v i-tém sloupci na j-tém řádku a všude jinde nuly. Zejména tvoří tyto matice bázi prostoru $\mathrm{Mat}_{nm}(\mathbb{K})$ všech matic uvažovaného typu.

* Přímým důsledkem těchto skutečností je následující obecná věta:

* **8.30. Věta.** *Vektorový prostor všech lineárních zobrazení $\varphi \colon V \to W$ je přirozeně isomorfní tensorovému součinu $V^* \otimes W$. Tento isomorfismus je definován vztahem*

$$V^* \otimes W \ni v^* \otimes w \mapsto (u \mapsto \langle u, v^* \rangle w) \in \mathrm{Hom}(V, W)$$

* **8.31.** Aplikací předchozích úvah dostáváme například isomorfismy

$$\{\text{lineární formy na } V\} \simeq V^*$$
$$\{\text{bilineární formy na } V\} \simeq V^* \otimes V^*$$

Navíc přímo z definic je vidět, že duální prostor k tensorovému součinu je tensorovým součinem duálních prostorů. Např. pro $v \otimes w^* \in V \otimes W^*$ a $v^* \otimes w \in V^* \otimes W$ definujeme vyčíslení

$$\langle v^* \otimes w, v \otimes w^* \rangle = \langle v, v^* \rangle \langle w, w^* \rangle$$

a můžeme ztotožnit $(V^* \otimes W)^* = V \otimes W^*$.

* Všimněme si, že vyčíslením symetrických bilineárních forem z $(V^* \otimes V^*)$ na prvcích $v \otimes v \in V \otimes V$ dostáváme právě dříve studovaný vztah mezi kvadratickými formami a jejich polárními bilineárními formami.

* Další stručné informace o tensorech lze najít v dodatku 13.

Problémy k přemýšlení

Nejprve uvedu náměty týkající se předchozí kapitoly o skalárních součinech.

1. Modifikujte Lagrangeův algoritmus pro nalezení diagonálního tvaru hermiteovských forem a ukažte, že každou lze upravit do tvaru $f(x) = |x_1|^2 + \cdots + |x_r|^2$, kde r je hodnost formy f. (Návod: všimněte si, že diagonální členy hermiteovských matic jsou reálné a použijte souřadný tvar z věty 8.23.)

** **2.** Z definice 7.1 skalárního součinu můžeme vypustit axiom (4) a nahradit jej požadavkem regulárnosti (tj. z $g(u, v) = 0$ pro všechny $v \in V$ plyne $u = 0$). V případě reálných skalárů hovoříme o *pseudo-euklidovských vektorových prostorech.* Ukažte, že v případě komplexních skalárů nedostáváme nic nového, tj. vždy bude existovat unitární isomorfisums s $\mathbb{C}^n$ se standardním skalárním součinem. (Návod: použijte předchozí cvičení ke konstrukci ortonormální báze)

** **3.** Použijte klasifikaci reálných kvadratických forem (8.18) ke klasifikaci všech konečněrozměrných pseudo-euklidovských prostorů (až na ortogonální isomorfismus). (Návod: ověřte existenci ortogonální báze $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$ s $\|e_i\| = \pm 1$.)

** **4.** Ukažte, že v pseudo-euklidovských prostorech nemá velikost vektoru vlastnosti normy (viz. 7.10) a také ortogonální báze nemají některé důležité vlastnosti známé z euklidovských prostorů.

** **5.** Ukažte, že i pro pseudo-eklideovské prostory definuje skalární součin lineární isomorfismus s duálním vektorovým prostorem.

** **6.** Sformulujte a dokažte analogii vět 7.12 a 7.13 pro (pseudo-)ortogonální zobrazení. Ukažte, že (pseudo-)ortogonální transformace $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ tvoří grupu, značíme ji $O(p, q, \mathbb{R})$, kde p je signatura příslušné formy, $q = n - p$. Jedná se o grupu matic A splňujících $\mathbb{J} = A^T \mathbb{J} A$, kde $\mathbb{J}$ je diagonální matice s p jedničkami a q minus jedničkami na diagonále.

** **7.** Je možné také definovat tzv. *komplexní euklidovské prostory.* Prostě axiom (1) definice 8.1 nahradíme jeho reálnou verzí $u \cdot v = v \cdot u$. Transformace, které zachovávají takto definovaný skalární součin nazýváme *komplexní ortogonální matice.* Ukažte, že opět lze vždy najít ortonormální bázi, ve které má součin tvar $g(u, v) = \sum_i x_i y_i$. Komplexní ortogonální matice tvoří grupu $O(m, \mathbb{C})$ komplexních matic. Uvědomte si výrazný rozdíl mezi $U(m)$ a $O(m, \mathbb{C})$. (Např. $U(1) = \{e^{it}, 0 \le t < 2\pi\}$, $O(1, \mathbb{C}) = \{\pm 1\}$.)

Nyní se vraťme k obsahu této kapitoly.

* **8.** Ukažte, že pro vektorové prostory V s nekonečnou bazí nikdy netvoří lineární formy u_i^*, $i \in I$ duální k vektorům báze V bázi V^*. (Návod: formálně nekonečný součet $\sum_i u_i^*$ je dobře definovaná lineární forma ve V^*, nemůže však být v $\langle u_i^* \rangle$.)

* **9.** Ukažte, že duální prostor $(V^*)^*$ k duálnímu prostoru obsahuje vždy původní prostor V a $V \simeq (V^*)^*$ právě, když má V konečnou dimenzi. (Návod: $v \in V$ odpovídá formě, $\langle v, \ \rangle$, tj. $v(\varphi) = \varphi(v)$. Je-li dimenze nekonečná, je podle předchozího V^* podstatně větší než V, $(V^*)^*$ pak ještě větší. Naopak, máme-li konenčnou bázi, je ověření snadné.)

* **10.** Označme $i \colon V \to (V^*)^*$ vložení z předchozího problému. Pak pro každé lineární $\varphi \colon V \to V$ na konečněrozměrném V je $i^{-1} \circ (\varphi^*)^* \circ i = \varphi$.

* **11.** Pro nesymetrické bilineární formy můžeme definovat pravý a levý vrchol jako jádra dvou možných indukovaných zobrazení. Promyslete si v jakém budou vztahu.

* **12.** Přemýšlejte o možném rozšíření Sylvestrova kritéria (8.21) pro semidefinitní případy. (Návod: promyslete důsledně důkazy Lagrangeovy a Jacobiho věty.)

* **13.** Zkuste sformulovat a dokázat tvrzení podobná dokázaným větám pro reálné symetrické matice pro komplexní hermiteovské matice.

9. Bodové euklidovské prostory

Stejně jako v úvodní části analytické geometrie v kapitole 6. budeme pracovat pouze nad reálnými skaláry $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Budeme se zde snažit dokončit ucelený přehled základů analytické geometrie v tzv. bodových euklidovských prostorech.

9.1. Definice. Standardní *bodový euklidovský prostor* $\mathcal{E}_n$ je afinní prostor $\mathcal{A}_n$, jehož zaměření je standardní euklidovský prostor $\mathbb{R}^n$. *Kartézská souřadná soustava* je afinní souřadná soustava $(A_0; \underline{u})$ s ortonormální bazí $\underline{u}$. *Vzdálenost bodů* $A, B \in \mathcal{E}_n$ definujeme jako velikost vektoru $\|B - A\|$, budeme ji značit $\rho(A, B)$. *Euklidovské podprostory* v $\mathcal{E}_n$ jsou afinní podprostory jejichž zaměření uvažujeme spolu se zúženými skalárními součiny. *Vzdálenost podprostorů* $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2 \subset \mathcal{E}_n$ se definuje jako infimum vdáleností $\rho(A, B)$ dvojic bodů $A \in \mathcal{Q}_1$, $B \in \mathcal{Q}_2$. Značíme ji $\rho(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$. Podprostory $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$ jsou *kolmé*, jsou-li jejich zaměření vzájemně ortogonální, tj. $Z(\mathcal{Q}_1) \subset (Z(\mathcal{Q}_2))^\perp$ nebo $Z(\mathcal{Q}_2) \subset (Z(\mathcal{Q}_1))^\perp$.

Bodovým euklidovským prostorem $\mathcal{E}$ pak obecně rozumíme afinní prostor, jehož zaměření je euklidovský vektorový prostor. Pojem kartézské souřadné soustavy má opět jasný smysl. Každá volba takové souřadné soustavy ovšem zadává ztotožnění $\mathcal{E}$ se standardním prostorem $\mathcal{E}_n$. Proto se budeme v dalším, bez újmy na obecnosti, zabývat hlavně standardními euklidovskými prostory a jejich podprostory.

9.2. Věta. *Pro* $A, B, C \in \mathcal{E}_n$ *platí*

(1) $\rho(A, B) = \rho(B, A)$
(2) $\rho(A, B) = 0$ *právě, když* $A = B$
(3) $\rho(A, B) + \rho(B, C) \geq \rho(A, C)$
(4) *V každé kartézké souřadné soustavě* $(A_0; \underline{e})$ *mají body*

$$A = A_0 + a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n, \quad B = A_0 + b_1 e_1 + \cdots + b_n e_n$$

vzdálenost $\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2}$.
(5) *Vzdálenost bodu* $A \in \mathcal{E}_n$ *od podprostoru* $\mathcal{Q} \subset \mathcal{E}_n$ *je rovna velikosti kolmého průmětu vektoru* $A - B$ *do* $Z(\mathcal{Q})^\perp$ *pro libovolný* $B \in \mathcal{Q}$.

Důkaz. První tři vlastnosti vyplývají přímo z vlastností normy v unitárních vektorových prostorech, čtvrtá plyne přímo z vyjádření skalárního součinu v libovolné ortonormální bázi.

Zbývá vztah pro výpočet vzdálenosti $\rho(\{A\}, \mathcal{Q})$. Vektor $A - B$ se jednoznačně rozkládá na $A - B = u_1 + u_2$, $u_1 \in Z(\mathcal{Q})$, $u_2 \in Z(\mathcal{Q})^\perp$. Přitom u_2 nezávisí na volbě $B \in \mathcal{Q}$, $C = A + (-u_2) = B + u_1 \in \mathcal{Q}$ a $\|A - B\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 \geq \|u_2\|^2 = \|A - C\|$. Odtud již vyplývá, že infima je skutečně dosaženo, a to pro bod C. Vypočtená vzdálenost je skutečně $\|u_2\|$. $\square$

Stejně jako vzdálenost, i řada dalších geometrických pojmů jako odchylky, orientace, objem apod. je v bodových prostorech $\mathcal{E}_n$ zaváděna prostřednictvím vhodných pojmů ve vektorových euklidovských prostorech. Proto se nyní budeme chvíli věnovat opět reálným unitárním prostorům. Začneme s diskusí velikosti úhlů. Z Cauchyovy nerovnosti plyne $0 \leq \frac{|u \cdot v|}{\|u\|\|v\|} \leq 1$, má tedy smysl následující definice.

9.3. Definice. *Odchylka* $\varphi(u, v)$ *vektorů* $u, v \in V$ v reálném unitárním prostoru (tj. euklidovském vektorovém prostoru) je dána vztahem

$$\cos\varphi(u, v) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}, \quad 0 \le \varphi(u, v) \le 2\pi.$$

9.4. Poznámky. Ve standardním $\mathbb{R}^2$ pro (obvyklou) odchylku vektorů na jednotkové kružnici $u = (1, 0)$, $v = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ skutečně platí $\cos\varphi = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$. Protože odchylka je nezávislá na velikostech vektorů, platí stejný vztah i pro vektory $u = (x_1, 0)$, $v = (a\cos\varphi, a\sin\varphi)$. Protože vhodnou rotací dosáhneme toho, že jeden z dvojice vektorů má tvar $(x_1, 0)$, platí náš vztah zcela obecně v rovině. Ve vícerozměrných prostorech je odchylka dvou vektorů vždy měřena v rovině, kterou tyto vektory generují (nebo je nula), jistě tedy náš definiční vztah odpovídá zvyklostem ve všech dimenzích.

V libovolném reálném unitáním prostoru přímo z definic plyne

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2(u \cdot v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\| \cos\varphi(u, v)$$

což je tzv. kosinová věta.

Dále platí pro každou ortonormální bázi $\underline{e}$ a $u \in V$ vztah $\|u\|^2 = \sum_i |u \cdot e_i|^2$, tj.

$$1 = \sum_i (\cos\varphi(u, e_i))^2,$$

což je obvyklé tvrzení o směrových kosinech $\varphi(u, e_i)$ vektoru u.

* **9.5. Definice.** Nechť U_1, U_2 jsou podprostory v euklidovském prostoru V. *Odchylka podprostorů* U_1, U_2 je reálné číslo $\alpha = \varphi(U_1, U_2) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ splňující:

(1) Je-li $\dim U_1 = \dim U_2 = 1$, $U_1 = \langle u\rangle$, $U_2 = \langle v\rangle$, pak

$$\cos\alpha = \frac{|u.v|}{\|u\|\|v\|}.$$

(2) Jsou-li dimenze U_1, U_2 kladné a $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, pak

$$\alpha = \inf\{\varphi(\langle u\rangle, \langle v\rangle); 0 \ne u \in U_1, 0 \ne v \in U_2\}.$$

(3) Je-li $U_1 \subset U_2$ nebo $U_2 \subset U_1$ (zejména je-li jeden z nich nulový), je $\alpha = 0$.

(4) Je-li $U_1 \cap U_2 \ne \{0\}$ a $U_1 \ne U_1 \cap U_2 \ne U_2$, pak

$$\alpha = \varphi(U_1 \cap (U_1 \cap U_2)^\perp, U_2 \cap (U_1 \cap U_2)^\perp).$$

* Všimněme si, že odchylka je vždy dobře definována, zejména v posledním případě je

$$(U_1 \cap (U_1 \cap U_2)^\perp) \cap (U_2 \cap (U_1 \cap U_2)^\perp) = \{0\}$$

můžeme tedy opravdu odchylku určit podle bodu (2). Všimněme si, že v případě $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, jsou U_1 a U_2 kolmé podle našich dřívějších definic právě, když jejich odchylka je $\pi/2$. Pokud však mají netriviální průnik, nemohou být kolmé v dřívějším smyslu.

* Za chvíli ukážeme, že ve skutečnosti vždy existují vektory $u \in U_1$, $v \in U_2$, pro které nabývá výraz pro odchylku požadovaného infima. Nejdříve speciální případ:

* **9.6. Lemma.** *Nechť v je vektor v euklidovském prostoru V a $U \subset V$ libovolný podprostor. Označme $v_1 \in U$, $v_2 \in U^\perp$ (jednoznačně určené) komponenty vektoru v, tj. $v = v_1 + v_2$. Pak pro odchylku φ podprostoru generovaného v od U platí*

$$\cos\varphi(\langle v\rangle, U) = \cos\varphi(\langle v\rangle, \langle v_1\rangle) = \frac{\|v_1\|}{\|v\|}.$$

* **Důkaz.** Pro všechny $u \in U$ platí

$$\begin{aligned}\frac{|u\cdot v|}{\|u\|\|v\|} &= \frac{|u\cdot(v_1+v_2)|}{\|u\|\|v\|} = \frac{|u\cdot v_1|}{\|u\|\|v\|}\\ &\leq \frac{\|u\|\|v_1\|}{\|u\|\|v\|} = \frac{\|v_1\|}{\|v\|} = \frac{\|v_1\|^2}{\|v\|\|v_1\|} = \frac{|v_1\cdot v|}{\|v\|\|v_1\|}.\end{aligned}$$

Odtud plyne

$$\cos\varphi(\langle v\rangle, \langle u\rangle) \leq \cos\varphi(\langle v\rangle, \langle v_1\rangle) = \frac{\|v_1\|}{\|v\|}$$

a protože funkce cos je na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$ klesající, je tvrzení dokázané. □

* **9.7.** Uvažujme dva podprostory U_1, U_2 v euklidovském prostoru V, $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ a zvolme pevně ortonormální báze $\underline{e}$, a $\underline{e}'$ tak, aby $U_1 = \langle e_1, \dots, e_k\rangle$, $U_2 = \langle e'_1, \dots, e'_l\rangle$. Nechť φ je kolmý průmět na U_2, jeho zúžení na U_1 budeme opět značit $\varphi\colon U_1 \to U_2$. Zobrazení $\psi\colon U_2 \to U_1$ nechť vznikne podobně z kolmého průmětu na U_1. Tato zobrazení mají v bazích $(e_1, \dots, e_k)$ a $(e'_1, \dots, e'_l)$ matice

$$A = \begin{pmatrix} e_1\cdot e'_1 & \dots & e_k\cdot e'_1\\ \vdots & & \vdots\\ e_1\cdot e'_l & \dots & e_k\cdot e'_l\end{pmatrix},\qquad B = \begin{pmatrix} e'_1\cdot e_1 & \dots & e'_l\cdot e_1\\ \vdots & & \vdots\\ e'_1\cdot e_k & \dots & e'_l\cdot e_k\end{pmatrix}$$

Zejména platí $B = A^T$. Složené zobrazení $\psi\circ\varphi\colon U_1 \to U_1$ má tedy symetrickou matici A^TA. V příští kapitole, ve větě 10.11, ukážeme, že každé takové zobrazení má pouze reálná vlastní čísla a že má ve vhodné ortonormální bázi diagonální matici s těmito vlastními čísly na diagonále. Navíc platí pro každou k-tici x souřadnic $x^TA^TAx = \|Ax\|^2 \geq 0$, jsou tedy všechna vlastní čísla matice A nezáporná.

* Nyní můžeme odvodit obecný postup pro výpočet odchylky $\alpha = \varphi(U_1, U_2)$.

* **Věta.** *V předchozím označení nechť λ je největší vlastní hodnota matice A^TA. Pak $\cos^2\alpha = \lambda$*

** **Důkaz.** Nechť $u \in U_1$ je vlastní vektor zobrazení $\psi\circ\varphi$ příslušný největší vlastní hodnotě λ, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ nechť jsou všechna vlastní čísla (včetně násobnosti) a nechť $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ je příslušná ortonormální báze U_1 z vlastních vektorů. Můžeme přímo předpokládat, že $\lambda = \lambda_1$, $u = u_1$. Potřebujeme ukázat, že odchylka libovolného $v \in U_1$ od U_2 je nejméně tak velká jako odchylka u od U_2. Tzn. že kosinus příslušného úhlu nesmí být větší. Podle předchozího lemmatu stačí diskutovat odchylku u a $\varphi(u) \in U_2$ a přitom víme, že $\|u\| = 1$. Zvolme tedy $v \in U_1$, $v = a_1u_1 + \dots + a_ku_k$, $\sum_{i=1}^k a_i^2 = \|v\|^2 = 1$. Pak

$$\|\varphi(v)\|^2 = \varphi(v)\cdot\varphi(v) = \psi\circ\varphi(v)\cdot v \leq \|\psi\circ\varphi(v)\|\|v\| = \|\psi\circ\varphi(v)\|.$$

Předchozí lemma navíc dává i vzorec pro odchylku α vektoru v od U_2

$$\cos\alpha = \frac{\|\varphi(v)\|}{\|v\|} = \|\varphi(v)\|.$$

Protože jsme zvolili za λ_1 největší z vlastních hodnot, dostáváme

$$(\cos\alpha)^2 = \|\varphi(v)\|^2 \le \|\psi\circ\varphi(v)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i a_i)^2} =$$

$$= \sqrt{\lambda_1^2 + \sum_{i=1}^{k} a_i^2(\lambda_i^2 - \lambda_1^2)} \le \sqrt{\lambda_1^2}.$$

Při $v = u$ dostáváme ovšem přesně $\|\varphi(v)\|^2 = \lambda_1^2\|v\|^2 = \lambda^2$ a tedy odchylka dosahuje pro tento vektor minimální možné hodnoty. Tím je věta dokázána. □

9.8. Definice. *Odchylka podprostorů* $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$ v bodovém euklidovském prostoru $\mathcal{E}_n$ se definuje jako odchylka jejich zaměření $Z(\mathcal{Q}_1)$, $Z(\mathcal{Q}_2)$.

9.9. Příklady standardních úloh.

1. Najděte vzdálenost bodu $A \in \mathcal{E}_n$ od podprostoru $\mathcal{Q} \subset \mathcal{E}_n$: Viz. věta 9.2.

2. V $\mathcal{E}_2$ veďte bodem A přímku q svírající s danou přímkou p daný úhel: Najdeme vektor $u \in \mathbb{R}^2$ ležící v zaměření přímky q a zvolíme vektor v mající od u zadanou odchylku. Hledaná přímka je dána bodem A a zaměřením $\langle v\rangle$. Úloha má dvě nebo jedno řešení.

3. Spočtěte patu kolmice vedené bodem na danou přímku: Viz. důkaz posledního bodu věty 9.2.

4. V $\mathcal{E}_3$ určete vzdálenost dvou přímek p, q: Zvolíme libovolně jeden bod z každé přímky, $A \in p$, $B \in q$. Komponenta vektoru $A - B$ v ortogonálním doplňku $(Z(p) + Z(q))^\perp$ má velikost rovnu vzdálenosti p a q.

5. V $\mathcal{E}_3$ najděte osu dvou mimoběžek p a q: Nechť η je rovina generovaná jedním bodem $A \in p$ a součtem $Z(p)+(Z(p)+Z(q))^\perp$. Pak průnik $\eta\cap q$ spolu se zaměřením $(Z(p) + Z(q))^\perp$ dávají parametrický popis hledané osy. (Prověřte, kolik má úloha obecně řešení!)

* **9.10. Objem.** Orientovaný (bodový) euklidovský prostor je euklidovský bodový prostor, jehož zaměření je orientované. V dalším budeme uvažovat standardní $\mathcal{E}_n$ spolu s orientací zadanou standradní bazí $\mathcal{R}^n$.

* Nechť $u_1, \dots, u_k$, jsou libovolné vektory v zaměření $\mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{E}_n$ je libovolný bod. *Rovnoběžnostěn* $\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) \subset \mathcal{E}_n$ jsme definovali jako množinu

$$\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) = \{A + c_1u_1 + \dots + c_ku_k; 0 \le c_i \le 1, i = 1, \dots, k\}.$$

Jsou-li vektory $u_1, \dots, u_k$ nezávislé, hovoříme o k-rozměrném rovnoběžnostěnu $\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) \subset \mathcal{E}_n$. Pro dané $u_1, \dots, u_k$ máme k dispozici také rovnoběžnostěny menších dimenzí

$$\mathcal{P}_1(A; u_1), \dots, \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k)$$

v euklidovských podprostorech $A + \langle u_1 \rangle, \dots, A + \langle u_1, \dots, u_k \rangle$.

* Jsou-li $u_1, \dots, u_k$ lineárně závislé definujeme objem $\operatorname{Vol} P_k = 0$. Pro nezávislé vektory pak platí $\langle u_1, \dots, u_k \rangle = \langle u_1, \dots, u_{k-1} \rangle \oplus (\langle u_1, \dots, u_{k-1} \rangle^{\perp} \cap \langle u_1, \dots, u_k \rangle)$. Navíc v tomto rozkladu se u_k jednoznačně vyjádří jako

$$u_k = u_k' + e_k, \text{ kde } e_k \perp \langle u_1, \dots, u_{k-1} \rangle.$$

Absolutní hodnotu objemu definujeme induktivně:

$$\begin{aligned} |\operatorname{Vol}| \mathcal{P}_1(A; u_1) &= \|u_1\| \\ |\operatorname{Vol}| \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) &= \|e_k\| |\operatorname{Vol}| \mathcal{P}(A; u_1, \dots, u_{k-1}). \end{aligned}$$

Je-li $u_1, \dots, u_n$ báze kompatibilní s orientací V, definujeme (orientovaný) objem rovnoběžnostěnu $\operatorname{Vol} \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_n) = |\operatorname{Vol}| \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_n)$, v opačném případě klademe $\operatorname{Vol} \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_n) = -|\operatorname{Vol}| \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_n)$.

* **9.11. Věta.** *Nechť $\mathcal{Q} \subset \mathcal{E}_n$ je euklidovský podprostor a nechť $(e_1, \dots, e_k)$ je jeho ortonormální báze. Pak pro libovolné vektory $u_1, \dots, u_k \in Z(\mathcal{Q})$ a $A \in \mathcal{Q}$ platí*

(1) $$\operatorname{Vol} \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) = \det \begin{pmatrix} u_1 \cdot e_1 & \dots & u_k \cdot e_1 \\ \vdots & & \vdots \\ u_1 \cdot e_k & \dots & u_k \cdot e_k \end{pmatrix}$$

(2) $$(\operatorname{Vol} \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k))^2 = \det \begin{pmatrix} u_1 \cdot u_1 & \dots & u_k \cdot u_1 \\ \vdots & & \vdots \\ u_1 \cdot u_k & \dots & u_k \cdot u_k \end{pmatrix}$$

** **Důkaz.** Matice $A = \begin{pmatrix} u_1 \cdot e_1 & \dots & u_k \cdot e_1 \\ \vdots & & \vdots \\ u_1 \cdot e_k & \dots & u_k \cdot e_k \end{pmatrix}$ má ve sloupcích souřadnice vektorů $u_1, \dots, u_k$ ve zvolené ortonormální bázi. Platí

$$|A|^2 = |A||A| = |A^T||A| = |A^T A| = \det \begin{pmatrix} u_1 \cdot u_1 & \dots & u_k \cdot u_1 \\ \vdots & & \vdots \\ u_1 \cdot u_k & \dots & u_k \cdot u_k \end{pmatrix}.$$

Přímo z definice je neorientovaný objem roven součinu $\|v_1\| \|v_2\| \dots \|v_k\|$, kde $v_1 = u_1$, $v_2 = u_2 + a_1^2 v_1, \dots, v_k = u_k + a_1^k v_1 + \dots + a_{k-1}^k v_{k-1}$ je výsledek Grammova-Schmidtova ortogonalizačního procesu. Je tedy

$$\begin{aligned} (\operatorname{Vol} \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k))^2 &= \det \begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & \dots & v_k \cdot v_1 \\ \vdots & & \vdots \\ v_1 \cdot v_k & \dots & v_k \cdot v_k \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & v_k \cdot v_k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Označme B matici jejíž sloupce jsou souřadnice vektorů $v_1, \dots, v_k$ v bázi $\underline{e}$. Protože $v_1, \dots, v_k$ vznikly z $u_1, \dots, u_k$ jako obrazy v lineární transformaci s horní trojúhelníkovou maticí C s jedničkami na diagonále, je $B = CA$ a $|B| = |C||A| = |A|$. Pak ovšem $|A|^2 = |B|^2 = |A||A|$, proto $\operatorname{Vol} \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) = \pm|A|$. Přitom pokud jsou vektory $u_1, \dots, u_k$ závislé vyjde objem nulový, pokud jsou nezávislé, pak znaménko determinantu je kladné právě když je báze $u_1, \dots, u_k$ kompatibilní s orientací danou bazí $\underline{e}$. $\square$

* Determinant $\det \begin{pmatrix} u_1 \cdot u_1 & \dots & u_k \cdot u_1 \\ \vdots & & \vdots \\ u_1 \cdot u_k & \dots & u_k \cdot u_k \end{pmatrix}$ se nazývá *Grammův determinant* k-tice vektorů $u_1, \dots, u_k$.

** **9.12. Důsledek.** *Pro každé lineární zobrazení $\varphi\colon V \to V$ euklidovského vektorového prostoru V je* $\det \varphi$ *roven (orientovanému) objemu obrazu rovnoběžnostěnu určeného vektory ortonormální báze. Obecněji, obraz rovnoběžnostěnu $\mathcal{P}$ určeného libovolnými* $\dim V$ *vektory má objem roven* $\det \varphi$*-násobku původního objemu.*

* **9.13. Vnější součin vektorů.** Předchozí úvahy úzce souvisí s tzv. vnějším tensorovým součinem vektorů. Podrobnější informace jsou k dispozici v dodatku 13, nyní ale aspoň zmíníme případ vnějšího součinu $n = \dim V$ vektorů $u_1, \dots, u_n \in V$.

* Nechť $(u_{1j}, \dots, u_{nj})$ jsou souřadná vyjádření vektorů u_j v nějaké pevně zvolené ortonormální bázi V a M nechť je matice s koeficienty (u_{ij}). Pak determinant $|M|$ nezávisí na volbě báze a jeho hodnotu nazýváme *vnějším součinem vektorů* $u_1, \dots, u_n$ a značíme $[u_1, \dots, u_n]$. (Nezávislost byla ukázána v důkazu Věty 9.11).

* Přímo z definice nyní vyplývají užitečné vlastnosti vnějšího součinu

1. Zobrazení $(u_1, \dots, u_n) \mapsto [u_1, \dots, u_n]$ je antisymetrické n-lineární zobrazení. Tzn., že je lineární ve všech argumentech a výměna dvou argumentů se vždy projeví změnou znaménka výsledku.
2. Vnější součin je nulový právě, když jsou vektory $u_1, \dots, u_n$ lineárně závislé
3. Vektory $u_1, \dots, u_n$ tvoří kladnou bázi právě, když je jejich vnější součin kladný.

* **9.14. Vektorový součin.** V $\mathbb{R}_3$ máme ještě další významnou operaci, tzv. vektorový součin, který dvojici vektorů přiřazuje vektor třetí. Uvažme obecný euklidovský vektorový prostor V dimenze $n \geq 2$ a vektory $u_1, \dots, u_{n-1} \in V$. Vektor $v \in V$ nazveme *vektorový součin* vektorů $u_1, \dots, u_{n-1}$, jestliže pro každý vektor $w \in V$ platí

$$\langle v, w \rangle = [u_1, \dots, u_{n-1}, w].$$

Značíme $v = u_1 \times \dots u_{n-1}$.

* V ortonormálních souřadnicích, kde $v = (y_1, \dots, y_n)^T$, $w = (x_1, \dots, x_n)^T$ a $u_j = (u_{1j}, \dots u_{nj})^T$, předchozí vztah znamená

$$y_1 x_1 + \dots + y_n x_n = \begin{vmatrix} u_{11} & \dots & u_{1(n-1)} & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{n1} & \dots & u_{n(n-1)} & x_n \end{vmatrix} \tag{1}$$

Odtud vyplývá, že vektor v je tímto vztahem zadán jednoznačně a jeho souřadnice spočteme formálním rozvojem determinantu v (1) podle posledního sloupce.

* **9.15. Věta.** *Pro vektorový součin $v = u_1 \times \ldots \times u_{n-1}$ platí*

(1) $v \in \langle u_1, \ldots , u_{n-1}\rangle^{\perp}$
(2) *v je nenulový vektor právě, když jsou vektory $u_1, \ldots , u_{n-1}$ lineárně nezávislé*
(3) *velikost $\|v\|$ vektorového součinu je rovna absolutní hodnotě objemu rovnoběžníku $\mathcal{P}(0; u_1, \ldots , u_{n-1})$*
(4) *$(u_1, \ldots , u_{n-1}, v)$ je kladná báze orientovaného euklidovského prostoru V*

* **Důkaz.** První tvrzení plyne přímo z definičního vztahu pro v, protože dosazením libovolného vektoru u_j za w máme nalevo skalární součin $v \cdot u_j$ a napravo determinant s dvěma shodnými sloupci.

* Hodnost matice s $n-1$ sloupci u_j je dána maximální velikostí nenulového minoru. Minory, které zadávají souřadnice vektorového součinu jsou stupně $n-1$ a tím je dokázáno tvrzení (2).

* Jsou-li vektory $u_1, \ldots , u_{n-1}$ závislé, pak platí i (3). Nechť jsou tedy nezávislé, v je jejich vektorový součin a zvolme libovolnou ortonormální bázi $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ prostoru $\langle u_1, \ldots, u_{n-1}\rangle$. Z již dokázáného vyplývá, že existuje nějaký násobek $(1/\alpha)v$, $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$, takový, že $(e_1, \ldots, e_k, (1/\alpha)v)$ je ortonormální báze celého V. Souřadnice našich vektorů v této bázi jsou

$$u_j = (u_{1j}, \ldots, u_{(n-1)j}, 0)^T, \quad v = (0, \ldots, 0, \alpha)^T.$$

Proto je vnější součin $[u_1, \ldots, u_{n-1}, v]$ roven (viz. definice vektorového součinu)

$$[u_1, \ldots, u_{n-1}, v] = \begin{vmatrix} u_{11} & \ldots & u_{1(n-1)} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{(n-1)1} & \ldots & u_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha \end{vmatrix} = \langle v, v\rangle = \alpha^2$$

Rozvojem determinantu podle posledního sloupce zároveň obdržíme

$$\alpha^2 = \alpha \operatorname{Vol} \mathcal{P}(0; u_1, \ldots , u_{n-1}).$$

Odtud už vyplývají obě zbylá tvrzení věty. □

* **9.16.** Závěrem ještě pár poznámek o objektech v $\mathcal{E}_n$ zadaných kvadratickými rovnicemi, hovoříme o *kvadrikách.* Zvolme v $\mathcal{E}_n$ pevně kartézskou souřadnou soustavu (tj. bod a ortonormální bázi zaměření) a uvažme obecnou kvadratickou rovnici pro souřadnice $(x_1, \ldots , x_n)$ bodů $A \in \mathcal{E}_n$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} 2a_ix_i + a = 0, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Můžeme ji zapsat jako $f(u)+g(u)+a = 0$ pro kvadratickou formu f, lineární formu g a $a \in \mathbb{R}$ a předpokládáme že hodnost f je nenulová (jinak by se jednalo o lineární rovnici popisující euklidovský podprostor).

* Podle věty o ortogonální klasifikaci kvadratických forem (viz. 8.24) existuje ortonormální báze zaměření, ve které má f diagonální matici (a diagonální hodnoty jsou jednoznačně určeny až na pořadí). Předpokládejme tedy přímo rovnici ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + b = 0.$$

Nyní pro souřadnice x_i s $\lambda_i \neq 0$ provedeme doplnění do čtverců (viz. Lagrangeův algoritmus), tj. získáme tvar

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - p_i)^2 + \sum_{j \text{ splňující } \lambda_j = 0}^{n} b_j x_j + c = 0.$$

Pokud nám opravdu zůstaly nějaké lineární členy, můžeme zvolit novou bázi zaměření tak, aby odpovídající lineární forma byla prvkem duální báze a novou volbou počátku v $\mathcal{E}_n$ pak dosáhneme výsledného tvaru

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i^2 + b y_{k+1} + c = 0$$

kde k je hodnost kvadratické formy f, lineární člen se může (ale nemusí) objevit jen pokud je hodnost f menší než n, $c \in \mathbb{R}$ může být nenulové pouze když je $b = 0$.

* **9.17. Případ $\mathcal{E}_2$.** Původní rovnice má tvar

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_1 x + a_2 y + a = 0.$$

Volbou vhodné báze zaměření a následným doplněním čtverců dosáhneme tvaru (opět používáme stejného značení x, y pro nové souřadnice):

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_1 x + a_2 y + a = 0$$

kde a_i může být nenulové pouze v případě, že a_{ii} je nulové. Posledním krokem obecného postupu, tj. v dimenzi $n = 2$ jen případnou volbou posunutí, dosáhneme právě jedné z rovnic

$0 = x^2/a^2 + y^2/b^2 + 1$	prázdná množina
$0 = x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1$	elipsa
$0 = x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1$	hyperbola
$0 = x^2/a^2 - 2py$	parabola
$0 = x^2/a^2 + y^2/b^2$	bod
$0 = x^2/a^2 - y^2/b^2$	2 různoběžné přímky
$0 = x^2 - a^2$	2 rovnoběžné přímky
$0 = x^2$	2 splývající přímky
$0 = x^2 + a^2$	prázdná množina

** **9.18. Poznámka.** Technicky daleko účinnější je diskuse kvadrik v tzv. projektivním rozšíření afinních nebo euklidovských prostorů. Zejména pokud nás nezajímají metrické vlastnosti a chceme vyjádřit danou kvadriku v libovolných afinních souřadnicích, můžeme použít standardní klasifikaci kvadratických forem velmi přehledně.

** Ztotožníme za tím účelem $\mathcal{A}_n$ s podprostorem v $\mathcal{A}_{n+1}$ takovým, že v pevně zvolené bázi budou mít všechny body $\mathcal{A}_n$ první souřadnici rovnu jedné. Množinu, která nás zajímá nyní můžeme vyjádřit jako řešení systému dvou rovnic

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} 2a_{0i}x_i x_0 + a_{00}x_0^2 = 0, \quad x_0 = 1$$

kde jsme zavedli značení $a_{0i} = a_{i0} = a_i$, $a_{00} = a$, a předpokládáme, že matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{10} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{n0} \\ a_{01} & \dots & a_{0n} & a_{00} \end{pmatrix}$$

je symetrická. Jinými slovy, hledaná množina řešení je průnikem podmnožiny určené množinou vektorů na nichž je nulová kvadratická forma h daná maticí A a naroviny $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$ zadané rovnicí $x_0 = 1$. Podle obecné teorie existují v $\mathcal{A}_{n+1}$ souřadnice, ve kterých má h diagonální matici s hodnotami ± 1 a 0 na diagonále, počet nenulových prvků je přitom dán hodností A.

** Body projektivního rozšíření $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ standardního afinního prostoru $\mathcal{A}_n$ jsou právě všechny jednorozměrné podprostory v R_{n+1} procházející počátkem a kvadratická forma h daná maticí A sice nemá dobře definované hodnoty na bodech $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, má ale dobře definovanou množinu bodů, kde se anuluje. Této množině říkáme projektivní kvadrika zadaná formou h. Patří jí kromě původních bodů naší kvadriky právě ještě její nekonečné body.

Poznámky k přemýšlení

1. Uveďte si pojmy této kapitoly do souvislostí se základními transformacemi elementární geometrie jako stejnolehlost, zrcadlení apod.

2. Vyjádřete transformační rovnice pro převod souřadnic z afinní souřadné soustavy $(A; \underline{u})$ na $\mathcal{A}_n$ do souřadné soustavy $(B; \underline{v})$. (Návod: použijte matici přechodu mezi bazemi zaměření a vektor $B - A$.)

3. Odvoďte v $\mathcal{E}_3$ vzorec pro vzdálenost bodu od roviny.

4. Zformulujte vlastnosti zobrazení, která zachovávají struktury afinních nebo euklidovských prostorů (tzv. afinní a euklidovská zobrazení).

5. Všimněme si, že objem nezávisí na umístění vrcholu $A \in \mathcal{E}_n$ a stejně tak se nemění vhodnými zobrazeními $\varphi\colon \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$. Ukažte, o jaká zobrazení jde. (Návod: jejich matice musí mít determinant rovný jedné)

6. Napište si formuli pro vektorový součin v $\mathbb{R}^3$

7. Diskutujte podrobně kvadriky v $\mathcal{E}_3$ a $\mathcal{A}_3$.

8. Promyslete podrobněji, jak se obdrží afinní klasifikace kvadrik z uvedených úvah v projektivním rozšíření.

10. Spektrální teorie

Nejprve budeme diskutovat souvislosti kvadratických forem, resp. hermiteovských forem, se skalárními součiny v unitárních prostorech.

10.1. *Pololineární zobrazení*[17] na komplexních vektorových prostorech je zobrazení, které je aditivní (tj. $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$) a pro násobení skalárem platí $\varphi(a\,u) = \bar{a}\varphi(u)$.

Definice hermiteovských forem tedy říká, že jde o zobrazení lineární v prvém argumentu a pololineární v druhém. Zejména skalární součiny jsou zobrazení $V \times V \to \mathbb{K}$, která jsou lineární v prvním argumentu a pololineární v druhém.

V případě reálných skalárů definice pololineárních a lineárních zobrazení splývá. Z hlediska této identifikace je třeba chápat tvrzení následujících vět pro reálné vektorové prostory.

10.2. Věta. *Nechť V je unitární prostor.*

(1) *Vektory $v \in V$ jsou v bijektivní korespondenci s lineárními formami $\alpha_v \in V^*$ tak, že $\alpha_v(u) = u \cdot v$ pro všechny vektory $u \in V$. Tato bijekce je navíc pololineární zobrazení $V \to V^*$.*

(2) *Zobrazení $f\colon V \times V \to \mathbb{K}$, která jsou lineární v prvním argumentu a pololineární v druhém, jsou v bijektivní korespondenci s endomorfismy $\varphi\colon V \to V$ splňujícími $f(u,v) = u \cdot \varphi(v)$ pro všechny vektory $u, v \in V$.*

* **Důkaz.** Všechny lineární formy na unitárním prostoru V tvoří vektorový prostor stejné dimenze jako V. Každý vektor $u \in V$ zadává lineární formu α_u na V vztahem $\alpha_u(v) = v \cdot u$. Protože $\alpha_u(u) = \|u\|^2$, je forma α_u nulová právě tehdy když je $u = 0$. V případě, že V je euklidovský prostor, zadává tedy přiřazení $u \mapsto \alpha_u$ lineární prosté zobrazení V do prostoru lineárních forem na V. Z důvodu dimenze to musí být i zobrazení na, tedy isomorfismus. Každý komplexní vektorový prostor můžeme chápat jako reálný vektorový prostor dvojnásobné dimenze a přiřazení $u \mapsto \alpha_u$ je pololineární zobrazení mezi příslušnými komplexními prostory, tedy to je lineární zobrazení mezi odpovídajícími reálnými prostory, a podle předchozího argumentu je to tedy i zobrazení na. Tím je dokázána první část věty.

* Druhé tvrzení se snadno odvodí z prvého: Pro pevný endomorfismus $\varphi\colon V \to V$ má zobrazení $f_\varphi(u,v) = u \cdot \varphi(v)$ požadované vlastnosti. Naopak, máme-li takové f, je pro každý vektor $v \in V$ zobrazení $u \mapsto f(u,v)$ lineární forma na V a proto je $f(u,v) = u \cdot (\varphi(v))$ pro vhodný vektor $\varphi(v) \in V$. Tím je definováno zobrazení $\varphi\colon V \to V$. Z předpokládaných vlastností f vyplývá, že φ je skutečmě endomorfismus a přitom jeho hodnota $\varphi(v)$ byla určena jednoznačně podle předchozí části věty. $\square$

[17] V literatuře se často používá také název *sesquilineární*

V dalším budeme používat pro skalární součin i značení $\langle\ ,\ \rangle$ dříve zavedené pro bilineární zobrazení vyčíslení lineárních forem na vektorech.

10.3. Adjungované zobrazení. Protože skalární součin na V zadává ztotožnění duálního prostoru V^* s V, musí existovat pro každé lineární zobrazení $\varphi\colon V \to W$ mezi unitárními prostory zobrazení odpovídající duálnímu zobrazení $\varphi^*\colon W^* \to V^*$. Budeme jej opět značit $\varphi^*\colon W \to V$. Přitom z předchozí věty bezprostředně vyplývá, že pro $\varphi^*(v) \in V$ je $u \cdot \varphi^*(v)$ definované právě jako hodnota odpovídající formy $\varphi^*(\alpha_v)$. Proto je zobrazení $\varphi^*\colon W \to V$ jednoznačně určeno definičním vztahem

$$\varphi(u) \cdot v = u \cdot \varphi^*(v) \tag{1}$$

pro všechny $u \in V$, $v \in W$ (všimněte si, že skalární součiny na obou stranách rovnosti jsou v různých prostorech!). Hovoříme o *adjungovaném zobrazení* k lineárnímu zobrazení $\varphi\colon V \to W$. V dalším budeme většinou pracovat s endomorfismy $\varphi\colon V \to V$ a jejich adjungovanými zobrazeními.

10.4. Věta. *Nechť $\varphi\colon V \to W$ je libovolné lineární zobrazení unitárních prostorů V, W.*

(1) *Vztahem 10.3.(1) je dobře definované lineární zobrazení $\varphi^*\colon W \to V$.*
(2) *Platí $(\varphi^*)^* = \varphi$.*
(3) *Přiřazení $\varphi \mapsto \varphi^*$ je pololineární zobrazení* $\mathrm{Hom}(V, W)$ *do* $\mathrm{Hom}(W, V)$.
(4) *Má-li φ v nějaké ortonormální bázi matici A, má φ^* v téže bázi matici $\bar{A}^T$.*

* **Důkaz.** (1): Podle 10.2.(1) je hodnotami $u \cdot \varphi^*(v)$ pro všechny $u \in V$ jednoznačně určen vektor $\varphi^*(v) \in V$. Přitom

$$u\cdot\varphi^*(av+bv') = \langle\varphi(u), av+bv'\rangle = \bar{a}\langle u, \varphi^*(v)\rangle + \bar{b}\langle u, \varphi^*(v')\rangle = \langle u, a\varphi^*(v)+b\varphi^*(v')\rangle.$$

* (2): $\langle u, (\varphi^*)^*(v)\rangle = \langle\varphi^*(u), v\rangle = \overline{\langle v, \varphi^*(u)\rangle} = \langle u, \varphi(v)\rangle$.

* (3): Vyplývá přímo z definičního vztahu.

* (4): Matice kvadratické, resp. hermiteovské formy zadávající skalární součin v libovolné ortonormální bázi je jednotková matice E. Tzn., že v souřadnicích je $\langle x, y\rangle = x^T\bar{y}$ a definiční vztah pro φ^* je vyjádřen

$$\langle Ax, y\rangle = (Ax)^T\bar{y} = x^T\overline{(\bar{A}^T y)} = x^T\overline{(By)} = \langle x, \varphi^*(y)\rangle$$

kde B je matice φ^*. $\square$

Matici vzniklou z dané (komplexní) matice A konjugováním a transponováním nazýváme *adjungovanou maticí*, značíme ji A^*. Ukázali jsme tedy, že pro zobrazení φ s maticí A má φ^* v téže bázi adjungovanou matici $A^* = \bar{A}^T$.

10.5. Definice. Lineární zobrazení $\varphi\colon V \to V$ unitárního prostoru V se nazývá *samoadjungované* jestliže $\varphi = \varphi^*$. V komplexním případě se také používá název *hermiteovské*, v reálném *symetrické* zobrazení.

Z definice to tedy znamená, že pro všechny $u, v \in V$ platí $\varphi(u) \cdot v = u \cdot \varphi(v)$. Přímým výpočtem se snadno ověří, že samoadjungované zobrazení tvoří reálný vektorový podprostor v $\mathrm{Hom}(V, V)$, ten však není v komplexním případě uzavřený vzhledem k násobení komplexními skaláry s nenulovou imaginární komponentou. Jak jsme viděli, matice samoadjungovaných zobrazení jsou v komplexním případě hermiteovské, v reálném případě symetrické matice. Opět jsou to reálné vektorové podprostory v prostoru všech matic. (Hermiteovské mají vždy reálnou diagonálu, po vynásobení komplexním skalárem to nebývá zachováno!)

10.6. Věta. *Nechť φ je lineární zobrazení na unitárním konečněrozměrném prostoru V. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(1) *φ je samoadjungované.*
(2) *matice A zobrazení φ v libovolné ortonormální bázi je hermiteovská (v reálném případě to znamená symetrická).*
(3) *matice A zobrazení φ v nějaké ortonormální bázi je hermiteovská.*

Důkaz. (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3): Nechť A je matice φ v ortonormální bázi $\underline{e}$. Pak (přímo z definice matice zobrazení a díky vlastnostem souřadnic v ortonormálních bazích)

$$a_{ji} = \langle \varphi(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, \varphi(e_j) \rangle = \overline{\langle \varphi(e_j), e_i \rangle} = \overline{a_{ij}}.$$

Odtud plyne (2) a tedy i (3).

(3) $\Rightarrow$ (1): V souřadnicích spočteme

$$\varphi(u) \cdot v = (Ax)^T \bar{y} = x^T A^T \bar{y} = x^T \overline{\bar{A}^T y} = x^T \overline{(Ay)} = u \cdot \varphi(v).$$

□

10.7. Věta. *Nechť φ, $\psi\colon V \to V$ jsou samoadjungovaná, A a B nechť jsou jejich matice v ortonormální bázi. Potom $\varphi \circ \psi$ je samoadjungované právě, když $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi$ a to nastane právě, když $AB = BA$.*

Důkaz. Podle předchozí věty jsou obě tvrzení ekvivalentní. Stačí tedy ověřit tvrzení o maticích. Pro hermiteovské A, B i AB máme

$$AB = (\overline{AB})^T = \bar{B}^T \bar{A}^T = BA$$

a stejný výpočet dokazuje i opačnou implikaci. □

10.8. Vektorový prostor všech matic $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ je přímým součtem podprostorů symetrických a antisymetrických matic. V jazyku zobrazení jde o tvrzení, že každé lineární zobrazení $\varphi\colon V \to V$ euklidovského prostoru do sebe se jednoznačně vyjadřuje jako součet $\varphi = \varphi_{\mathrm{sym}} + \varphi_{\mathrm{antisym}}$. Přitom φ_{sym} je samoadjungované a $\varphi_{\mathrm{antisym}}$ má vlastnost $\langle \varphi_{\mathrm{antisym}}(u), v \rangle = -\langle u, \varphi_{\mathrm{antisym}}(v) \rangle$.

* V komplexním případě dostáváme analogický rozklad každé matice $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$

$$A = \frac{1}{2}(A + \bar{A}^T) + \frac{1}{2}(A - \bar{A}^T)$$

na hermiteovskou a tzv. antihermiteovskou matici. Zde ovšem hermiteovské transformace tvoří jen reálný podprostor a matice B je antihermiteovská právě, když je skalární násobek iB hermiteovská. Pro zobrazení $\varphi\colon V \to V$ komplexního unitárního prostoru tedy dostaneme rozklad $\varphi = \psi + i\eta$ s jednoznačně definovanými hermiteovskými zobrazeními ψ a η. Zejména tedy vidíme, že komplexní vektorový prostor všech matic $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, resp. endomorfismů komplexního unitárního prostoru V, je komplexifikací reálného vektorového prostoru všech hermiteovských matic, resp. všech samoadjungovaných zobrazení $V \to V$. Přímo z definice pak vidíme, $\varphi^* = \psi - i\eta$, tj. adjungování na $\mathrm{Hom}(V, V)$ odpovídá konjugování v této komplexifikaci.

10.9. Lemma. *Nechť $\varphi\colon V \to V$ je samoadjungované zobrazení unitárního prostoru V.*

(1) *Je-li $U \subset V$ invariantní podprostor, pak je i $U^\perp$ invariantní podprostor vzhledem k φ.*
(2) *Vlastní hodnoty zobrazení φ jsou reálné.*
(3) *Vlastní vektory příslušné různým vlastním hodnotám jsou ortogonální.*

* **Důkaz.** (1): Pro $u \in U$ je i $\varphi(u) \in U$, proto pro každý $v \in U^\perp$ je $\varphi(u) \cdot v = u \cdot \varphi(v) = 0$. Odtud již plyne i $\varphi(v) \in U^\perp$.

* (2): Pro vlastní vektor $u \in V$ platí $\varphi(v) = \lambda v$, proto $\varphi(v) \cdot v = \lambda(v \cdot v) = v \cdot \varphi(v) = \bar{\lambda}(v \cdot v)$.

* (3): Předpokládejme $\varphi(u) = \lambda u$, $\varphi(v) = \mu v$. Potom

$$\varphi(u) \cdot v = \lambda(u \cdot v) = u \cdot \varphi(v) = \bar{\mu}(u \cdot v) = \mu(u \cdot v)$$

tj. $(\lambda - \mu)(u \cdot v) = 0$. □

10.10. Definice. *Idempotentní zobrazení* $P\colon V \to V$ vektorového prostoru V do sebe, tj. $P \circ P = P$, se nazývá *projektor*. Projektor P se nazývá *kolmý* je-li $\mathrm{Ker}\, P \perp \mathrm{Im}\, P$.

Z vlastnosti $P^2 = P$ okamžitě vyplývá $\mathrm{Ker}\, P = \mathrm{Im}(\mathrm{id}_V - P)$ a $(\mathrm{id}_V - P) \circ (\mathrm{id}_V - P) = \mathrm{id}_V - P$, takže je to opět projektor. Každý projektor je jednoznačně zadán svým jádrem a obrazem, zejména každý podprostor v unitárním prostoru definuje jednoznačně kolmý projektor, jehož je obrazem (jádrem je pak jeho ortogonální doplněk). Dva projektory P, Q, s vlastností $P \circ Q = 0$ se nazývají *vzájemně kolmé*. V případě kolmých projektorů to znamená právě, že $\mathrm{Im}\, P \perp \mathrm{Im}\, Q$.

10.11. Věta o spektrálním rozkladu. *Pro každé samoadjungované zobrazení $\varphi\colon V \to V$ unitárního prostoru V existuje ortonormální báze vlastních vektorů a všechna příslušná vlastní čísla jsou reálná. Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ všechna různá vlastní čísla φ a $P_1, \dots, P_k$ kolmé (a vzájemně kolmé) projektory na příslušné podprostory vlastních vektorů, pak*

$$\varphi = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k.$$

* **Důkaz.** Předpokládejme nejprve, že V je komplexní unitární prostor. Pak φ jistě má vlastní vektor v_1 s reálnou vlastní hodnotou a podle lemmatu 10.9 je $V_1 = \langle v_1 \rangle^\perp \subset V$ opět invariantní podprostor a zúžení $\varphi_{|V_1}$ je opět samoadjungované. Opět musí existovat vlastní vektor $v_2 \in V_1$ a $V_2 = \langle v_1, v_2 \rangle^\perp$ je invariantní. Iterací tohoto postupu získáme ortogonální bázi z vlastních vektorů, jistě tedy existuje i

ortonormální báze z vlastních vektorů. Z definice 10.10 pak plyne, že existence takové ortonormální báze je ekvivalentní dokazovanému tvrzení.

* Pro reálný unitární prostor (tj. euklidovský prostor) pak můžeme použít proceduru komplexifikace. Nechť A je matice φ v nějaké ortonormální bázi $\underline{u}$. Pak A je také maticí komplexifikace $\varphi_{\mathbb{C}}\colon V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ v indukované bázi $\underline{u}_{\mathbb{C}}$ a na $V_{\mathbb{C}}$ máme jednoznačně dán skalární součin pro který je $\underline{u}_{\mathbb{C}}$ ortonormální. Vzhledem k tomuto součinu je $\varphi_{\mathbb{C}}$ opět samoadjungované (díky $A = A^T = \bar{A}^T$). Podle předchozího existuje ortonormální báze z $\dim V$ vlastních vektorů s reálnými vlastními hodnotami, jejich souřadná vyjádření jsou tedy řešeními reálných systémů lineárních rovnic. Proto všechny leží v reálné části $V_{\mathbb{C}}$. Tím jsme získali potřebnou ortonormální bázi na V. $\square$

* **10.12.** O lineárním zobrazení $\varphi\colon V \to V$ unitárního prostoru V řekneme, že je *ortogonálně diagonalizovatelné*, jestliže existuje ortonormální báze, v níž má φ diagonální matici. Pro euklidovské je nyní snadné určit všechna taková zobrazení: diagonální matice jsou zejména symetrické, jedná se tedy právě o samoadjungovaná zobrazení. Jako důsledek získáváme tvrzení, že ortogonální zobrazení euklidovského prostoru do sebe je ortogonálně diagonalizovatelné právě, když je zároveň samoadjungované (jsou to právě ta samoadjungovaná zobrazení s vlastními hodnotami ± 1).

* U komplexních unitárních prostorů je situace složitější. Uvažme libovolné lineární zobrazení $\varphi\colon V \to V$ komplexního unitárního prostoru a nechť $\varphi = \psi + i\eta$ je (jednoznačně daný) rozklad φ na hermiteovskou a antihermiteovskou část, viz. 10.8. Má-li φ ve vhodné ortonormální bázi diagonální matici D, pak $D = \mathrm{re}D + i\mathrm{im}D$, kde reálná a imaginární část jsou právě matice ψ a η (plyne z jednoznačnosti rozkla-du). Zejména tedy platí $\psi \circ \eta = \eta \circ \psi$ a $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$. Zobrazení $\varphi\colon V \to V$ s poslední uvedenou vlastností se nazývají *normální*. Vzájemné souvislosti ukazuje následující věta (pokračujeme ve značení tohoto odstavce):

* **10.13. Věta.** *Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(1) *φ je ortogonálně diagonalizovatelné*
(2) *$\varphi^* \circ \varphi = \varphi \circ \varphi^*$ (tj. φ je normální zobrazení)*
(3) *$\psi \circ \eta = \eta \circ \psi$*
(4) *Pro matici $A = (a_{ij})$ zobrazení φ v nějaké ortonormální bázi a jejích $m = \dim V$ vlastních čísel λ_i platí $\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^m |\lambda_i|^2$.*

** **Důkaz.** Implikaci (1) $\Rightarrow$ (2) jsme již diskutovali.

** (2) $\Leftrightarrow$ (3): Stačí provést přímý výpočet

$$\varphi\varphi^* = (\psi + i\eta)(\psi - i\eta) = \psi^2 + \eta^2 + i(\eta\psi - \psi\eta)$$
$$\varphi^*\varphi = (\psi - i\eta)(\psi + i\eta) = \psi^2 + \eta^2 + i(\psi\eta - \eta\psi)$$

Odečtením dostaneme $2i(\eta\psi - \psi\eta)$.

** (2) $\Rightarrow$ (1): Nechť $u \in V$ je vlastní vektor normálního zobrazení φ. Pak

$$\varphi(u) \cdot \varphi(u) = \langle \varphi^*\varphi(u), u\rangle = \langle \varphi\varphi^*(u), u\rangle = \varphi^*(u) \cdot \varphi^*(u)$$

zejména tedy $|\varphi(u)| = |\varphi^*(u)|$. Je-li φ normální, je $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V)^* = (\varphi^* - \bar{\lambda}\,\mathrm{id}_V)$ a je proto i $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V)$ normální zobrazení. Z předešlé rovnosti tedy plyne, že je-li $\varphi(u) = \lambda u$, pak $\varphi^*(u) = \bar{\lambda}u$. Tzn., že φ a φ^* mají stejné vlastní vektory a konjugované vlastní hodnoty.

** Stejně jako u samoadjungovaných teď snadno dokážeme ortogonální diagonalizovatelnost. K tomu je nutné a stačí, aby ortogonální doplněk každého vlastního podprostoru pro normální φ byl invariantní (je totiž zúžení normálního zobrazení na invariantní podprostor opět normální). Uvažme vlastní vektor $u \in V$ s vlastní hodnotou λ, $v \in \langle u \rangle^\perp$. Platí

$$\varphi(v) \cdot u = v \cdot \varphi^*(u) = \langle v, \bar{\lambda}u \rangle = \lambda u \cdot v = 0$$

a tedy opět $\varphi(v) \in \langle u \rangle^\perp$.

** (1) $\Leftrightarrow$ (4): Výraz $\sum_{i,j} |a_{ij}|^2$ je právě stopa matice AA^*, to je matice zobrazení $\varphi \circ \varphi^*$. Proto nezávisí na volbě ortonormální báze. Je-li tedy φ diagonalizovatelné, je tento výraz roven právě $\sum_i |\lambda_i|^2$.

** Opačná implikace je přímým důsledkem Schurovy věty o unitární triangulovatelnosti libovolného lineárního zobrazení $V \to V$, viz. 7.25. Podle ní totiž existuje pro každé lineární zobrazení $\varphi\colon V \to V$ ortogonální báze, ve které má φ horní trojúhelníkovou matici. Na její diagonále pak musí být právě všechny vlastní hodnoty φ. Jak jsme již ukázali, výraz $\sum_{i,j} |a_{ij}|^2$ nezávisí na volbě ortonormální báze, proto z předpokládané rovnosti vyplývá, že všechny prvky mimo diagonálu musí být v této matici nulové. □

* V termínech matic zobrazení dostáváme: zobrazení je normální právě, když jeho matice v některé ortonormální bázi (a ekvivalentně v každé) splňuje $AA^* = A^*A$. Takové matice nazýváme *normální matice*.

** Všimněme si, že pro počet s lineárními zobrazeními na komplexním unitárním prostoru lze poslední větu chápat také jako zobecnění běžných počtů s komplexními čísly v goniometrickém tvaru (roli reálných čísel zde hrají samoadjungovaná zobrazení). Roli komplexních jednotek pak hrají unitární zobrazení. Zejména si všimněme analogie k jejich tvaru $\cos t + i \sin t$ s vlastností $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$:

** **10.14. Důsledek.** *Unitární zobrazení na komplexním unitárním prostoru V jsou právě ta normální zobrazení, pro která výše užívaný jednoznačný rozklad $\varphi = \psi + i\eta$ splňuje $\psi^2 + \eta^2 = \mathrm{id}_V$*

** **Důkaz.** Pro unitární je $\varphi\varphi^* = \mathrm{id}_V = \varphi^*\varphi$ a tedy $\varphi\varphi^* = (\psi + i\eta)(\psi - i\eta) = \psi^2 + 0 + \eta^2 = \mathrm{id}_V$. Naopak, pro normální poslední výpočet ukazuje, že opačná implikace platí také. □

* Dalším pojmem, který můžeme rozšířit z reálných čísel do našich úvah o samoadjungovaných zobrazeních, je pojem nezáporného (resp. kladného) čísla. U reálných čísel jej lze definovat jako ta čísla, pro která existuje odmocnina. Tak to půjde i nyní:

* **10.15. Definice.** Samoadjungované zobrazení $\varphi\colon V \to V$ na unitárním prostoru V se nazývá *nezáporné*, jestliže existuje samodjungované zobrazení ψ takové, že $\varphi = \psi^2$. Pokud existuje takové invertibilní ψ, nazývá se φ *kladné* zobrazení. (Někdy se též používá označení positivně semidefinitní, resp. definitní, podobně jako u forem.)

* **10.16. Věta.** *Lineární zobrazení $\varphi\colon V \to V$ je nezáporné, resp. kladné, právě když je splněna některá z následujících ekvivalentních podmínek*

(1) *φ je samoadjungované a $\varphi(u)\cdot u \geq 0$ pro všechny $u \in V$, resp. $\varphi(u)\cdot u > 0$ pro všechny $u \neq 0$.*
(2) *existuje lineární $\psi\colon V \to V$ takové, že $\varphi = \psi^* \circ \psi$, resp. navíc ještě je takové ψ invertibilní.*
(3) *matice A zobrazení φ v některé (a tedy v každé) ortonormální bázi je positivně semidefinitní, resp. positivně definitní, hermiteovská (v komplexním případě) nebo symetrická (v reálném případě) matice.*

* **Důkaz.** (1): Protože je φ samoadjungované, má ve vhodné ortonormální bázi diagonální matici A s reálnými λ_i na diagonále. Pak ovšem $\sqrt{A}$ existuje (a je to diagonální matice s $\sqrt{\lambda_i}$ na diagonále) právě tehdy, když jsou všechny $\lambda_i \geq 0$, resp. je navíc ještě invertibilní když $\lambda_i > 0$. Přitom jsou poslední nerovnosti zřejmě ekvivalentní nerovnostem v (1). Zároveň jsme přitom ověřili i (3).

* (2): Je-li φ samoadjungované nezáporné, pak $\varphi = \psi \circ \psi = \psi^* \circ \psi$ pro samoadjungované ψ. Předpokládejme naopak, že $\varphi = \psi^* \circ \psi$. Nechť matice φ a ψ v ortonormální bázi $\underline{e}$ jsou A a B, tj. $A = \bar{B}^T B$. Odtud

$$\bar{A}^T = \overline{(\bar{B}^T B)}^T = \bar{B}^T B = A$$

je tedy A samoadjungovaná. Přitom

$$\varphi(u)\cdot u = \psi^*\psi(u)\cdot u = |\psi(u)|^2 \geq 0.$$

a tvrzení je dokázané. □

* **10.17. Důsledek.** *Všechny pozitivně (semi-) definitní reálné matice A (příp. komplexní hermiteovské) mají odmocninu, tj. existuje B taková, že $A = B^2$. Obecně ji můžeme definovat tak, že vyjádříme $A = S^* D S$ pro S vhodnou unitární, D reálnou diagonální s nezápornými prvky. Pak $B = S^*\sqrt{D}S$, kde $\sqrt{D}$ obsahuje na diagonále odmocniny z prvků v D.*

Vrátíme se ke zkoumání vlastností kvadratických forem, nyní na unitárních prostorech. Přímou aplikací předchozích výsledků o samoadjungovaných zobrazeních obdržíme tzv. *metrickou klasifikaci* symetrických bilineárních, resp. hermiteovských forem.

* **10.19. Důkaz věty 8.24.** Nejprve dokažme tvrzení pro reálné symetrické formy. Jak jsme viděli v 8.7, definuje f lineární zobrazení $\hat{f}\colon V \to V^*$, $f(u,v) = \hat{f}(u)(v)$ a skalární součin definuje lineární isomorfismus $i\colon V \to V^*$, $i(u)(v) = v\cdot u$, viz. 10.2. Je-li A matice f v ortonormální bázi $\underline{e}$, pak je A také maticí $\hat{f}$ v bazích $\underline{e}$ a duální $\underline{e}^*$, matice zobrazení i v bazích $\underline{e}$ a $\underline{e}^*$ je ovšem identická matice, proto je A také maticí složeného zobrazení $\tilde{f} = i^{-1} \circ \hat{f}$. Protože se jedná o symetrickou matici, je $\tilde{f}$ samoadjungované. Proto existuje báze z vlastních vektorů $\tilde{f}$, ve které má $\tilde{f}$ diagonální tvar, diagonální prvky jsou pak právě vlastní hodnoty a jsou jednoznačně určeny až na pořadí. Nechť je tedy $\underline{e}$ přímo tato báze. Pak

$$f(e_i,e_j) = \hat{f}(e_i)(e_j) = e_j \cdot \tilde{f}(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j \\ \lambda_i & \text{pro } i = j \end{cases}$$

Tím je dokázáno prvé tvrzení.

* Tvrzení pro hermiteovské formy se dokáže přesně stejně, jen je i pololineární bijekce, A je hermiteovská a získané $\tilde{f}$ je proto samoadjungované. Z posledního výpočtu nám vyjde $f(e_i, e_j) = \bar{\lambda}_i$ pro $i = j$ a nula jinak, všechny vlastní hodnoty jsou ale stejně reálné. □

Problémy k přemýšlení

* **1.** Nechť V je unitární prostor. Projektor $P\colon V \to V$ je kolmý právě, když je P samoadjungované. Součet $P = P_1 + \cdots + P_k$ kolmých projektorů P_i je projektorem právě tehdy, když projektory P_i jsou vzájemně kolmé (tj. $P_i \circ P_j = 0$ pro $i \neq j$). Potom je P také samoadjungované. Dokažte.

* **2.** Ukažte, že pro každé lineární $\varphi\colon V \to V$ na unitárním prostoru V platí

$$(\operatorname{Ker}\varphi)\perp(\operatorname{Im}\varphi^*), \quad (\operatorname{Im}\varphi)\perp(\operatorname{Ker}\varphi^*).$$

(Použijte tato tvrzení znovu pro důkaz předchozího cvičení.)

* **3.** Zformulujte a dokažte větu o spektrálním rozkladu pro normální zobrazení. (Můžete to brát i tak, že normální zobrazení jsou právě všechna zobrazení, pro která věta o spektrálním rozkladu platí.)

* **4.** Dokažte, že matice vzniklá jako hodnota polynomu v hermiteovské, resp. symetrické matici, je opět hermiteovská, resp. symetrická.

5. Rozšiřte tvrzení 10.16 o $\varphi\colon V \to V$ *je samoadjungované a nezáporné právě, když existuje* $\psi\colon V \to W$ *takové, že* $\varphi = \psi^* \circ \psi$. (Stačí si vše řádně zapsat v maticích.)

6. Dokažte tvrzení problému 2 pro $\varphi\colon V \to W$.

11. Rozklady matic a aproximace

Pro numerické zpracování matic je často důležité mít možnost pracovat jen s maticemi určitých typů. Řadu příkladů jsme již potkali, např. výpočet determinantu nebo stopy je velmi snadný pro trojúhelníkové matice, inverze se snadno spočte pro unitární apod. Prostory skalárů budou vždy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. V této kapitole tedy uvedeme několik typů rozkladů matic na součin speciálních matic. Výsledky jsou vesměs mimořádně významné pro většinu numerických aplikací. Často ovšem je zapotřebí kombinace s různými iterativními přibližnými metodami, na jejichž výklad nám již nezbývá prostor.

Jako první výsledek uvedeme větu o triangulovatelnosti matic, kterou jsme již dokázali v 7.25 (ve formulaci pro lineární zobrazení).

11.1. Věta (Schurova o unitární triangulovatelnosti). *Nechť A je matice v* $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *nebo* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, *a* $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ *nechť jsou všechna vlastní čísla matice A. Pak existuje unitární* $U \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{C})$ *taková, že* $U^*AU = T$, *kde T je* *horní trojúhelníková matice s čísly $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ na diagonále. Je-li navíc $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ a všechna vlastní čísla λ_i jsou reálná, pak lze volit ortogonální $U \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.*

Důkaz. Jde pouze o přeformulování věty 7.25 pro standardní euklidovský vektorový prostor $\mathbb{R}^n$ nebo standardní komplexní unitární prostor $\mathbb{C}^n$. $\square$

Další věta je podstatným rozšířením věty 1.14, ve které jsme dokázali, že pro každé lineární zobrazení mezi konečněrozměrnými vektorovými prostory docílíme vhodnou volbou bazí toho, že matice zobrazení je diagonální s jedničkami a nulami na diagonále.

11.2. Věta (o singulárním rozkladu). *Nechť $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{K})$ kde $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, resp. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Pak existují unitární, resp. ortogonální, matice $U \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{K})$, $V \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ a reálná diagonální matice s nezápornými prvky $D \in \mathrm{Mat}_r(\mathbb{K})$, $r \le \min\{m, n\}$, takové, že*

$$A = USV^*, \quad S = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{K}), \quad r = h(AA^*).$$

Přitom je S určena jednoznačně až na pořadí prvků a prvky diagonální matice D jsou druhé odmocniny vlastních čísel d_i matice AA^*.

** **Důkaz.** Předpokládejme nejprve $m \le n$ a označme $\varphi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ zobrazení zadané maticí A ve standardních bazích. Máme vlastně ukázat, že existují ortonormální báze na $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}^m$ ve kterých bude mít φ matici S z tvrzení věty. Matice A^*A je pozitivně semidefinitní, viz. např. důkaz věty o odchylce podprostorů (viz. 6.17). Proto má samá reálná nezáporná vlastní čísla a existuje ortonormální báze $\underline{w}$ v $\mathbb{K}^n$, ve které má příslušné zobrazení $\varphi^* \circ \varphi$ diagonální matici s vlastními čísly na diagonále. Jinými slovy, existuje unitární matice (resp. reálná ortogonální matice) V taková, že $A^*A = VBV^*$ pro reálnou diagonální matici s nezápornými vlastními čísly $(d_1, d_2, \dots, d_r, 0, \dots, 0)$ na diagonále, $d_i \ne 0$ pro všechny $i = 1, \dots, r$. Odtud $B = V^*A^*AV = (AV)^*(AV)$, což je ekvivalentní tvrzení, že prvních r sloupců matice AV je ortogonálních a zbývající jsou nulové (mají totiž nulovou velikost), označme prvních r sloupců $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{K}^m$. Tzn. $v_i \cdot v_i = d_i$, $i = 1, \dots, r$ a tedy vektory $u_i = \frac{1}{\sqrt{d_i}} v_i$ tvoří ortonormální systém nenulových vektorů. Doplňme je na ortonormální bázi $u_1, \dots, u_n$ celého $\mathbb{K}^m$. Vyjádříme-li zobrazení φ v bazích $\underline{w}$ na $\mathbb{K}^n$ a $\underline{u}$ na $\mathbb{K}^m$, dostáváme matici $\sqrt{B}$. Přechody od standardních bází k nově vybraným odpovídají násobení zleva unitárními maticemi U a zprava $V^{-1} = V^*$, v případě $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ pak jde o ortogonální matice.

** Pokud je $m > n$, můžeme aplikovat předchozí část důkazu na matici A^*. Odtud pak přímo plyne požadované tvrzení. $\square$

** Všimněte si, že náš důkaz věty o singulárním rozkladu je konstruktivní, můžeme jej opravdu použít pro výpočet unitárních (resp. ortogonálních) matic U, V a diagonálních nenulových prvků matice S.

* **11.3. Geometrická interpretace.** Diagonálním hodnotám matice D z předchozí věty se říká *singulární hodnoty matice A*. Pro příslušné zobrazení $\varphi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ mají jednoduchý geometrický význam: Nechť $K \subset \mathbb{K}^n$ je jednotková sféra pro standardní skalární součin. Obrazem $\varphi(K)$ pak vždy bude (možná degenerovaný)

m-rozměrný elipsoid. Singulární čísla matice A jsou přitom velikosti hlavních poloos.

* Pro čtvercové matice je vidět, že A je invertibilní právě, když všechna singulární čísla jsou nenulová. Poměr největšího a nejmenšího singulárního čísla je důležitým parametrem pro řadu numerických výpočtů s maticemi, např. pro výpočet inverzní matice.

11.4. Věta (o polárním rozkladu). *Každou čtvercovou matici $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, lze vždy vyjádřit ve tvaru $A = PV$, kde $P \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ je samoadjungovaná positivně semidefinitní a $V \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ je unitární. Přitom $P = \sqrt{AA^*}$. Je-li A invertibilní, je rozklad jednoznačný a $V = (\sqrt{AA^*})^{-1}A$.*

* **Důkaz.** Z věty o singulárním rozkladu plyne $A = USW^*$ s diagonální S s nezápornými reálnými čísly na diagonále a unitárními U, W. Pak $A = USU^*UW^*$ a můžeme přímo definovat $P := USU^*$, $V := UW^*$. Pak P je samoadjungovaná pozitivně semidefinitní a V je unitární. Navíc $A^* = WSU^*$ a tedy $AA^* = USSU^* = P^2$.

* Předpokládejme, že $A = PV = QU$ jsou dva takové rozklady a A je invertibilní. Pak ovšem je $AA^* = PVV^*P = P^2 = QUU^*Q = Q^2$ positivně definitní a proto je $Q = P = \sqrt{AA^*}$ jednoznačně určené a invertibilní. Pak také $U = V = P^{-1}A$. □

* Aplikací věty 11.4 na A^* obdržíme jinou verzi:

* **11.5. Důsledek (Věta o polárním rozkladu).** *Každou čtvercovou matici $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, lze vždy vyjádřit ve tvaru $A = UP$, kde $P \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ je samoadjungovaná positivně semidefinitní a $U \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ je unitární.*

* Všimněme si opět pěkné analogie mezi komplexními čísly a komplexními maticemi: matice P s věty 11.4 hraje roli absolutní hodnoty čísla, zatímco unitární V je analogií jeho argumentu (tj. komplexní jednotky, která se také rozkládá na součet $\varphi + i\psi$ se samoadjungovanými φ, ψ, které navíc splňují $\varphi^2 + \psi^2 = \mathrm{id}_V$). Přitom ale nyní není jedno v jakém pořadí samoadjungované a unitární matice chceme násobit. Umíme v obou, vyjdou ale pokaždé jiné.

* Pro řadu aplikací bývá rychlejší použití následujícího rozkladu:

* **11.6. Věta (o QR-rozkladu).** *Pro každou matici $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{K})$ existuje unitární matice Q a horní trojúhelníková matice R takové, že $A = Q^*R$. V případě $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lze volit ortogonální matici Q*

* **Důkaz.** V geometrické formulaci potřebujeme dokázat, že pro každé zobrazení $\varphi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ s maticí A v standardních bazích můžeme zvolit novou bázi na $\mathbb{K}^m$ tak, aby potom φ mělo horní trojúhelníkovou matici.

* Uvažme obrazy $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \in \mathbb{K}^m$ vektorů standardní báze, vyberme z nich maximální lineárně nezávislý systém $v_1, \dots, v_k$ takovým způsobem, že vypouštěné závislé vektory jsou vždy lineární kombinací předchozích vektorů, a doplňme jej do báze $v_1, \dots, v_m$. Nechť $u_1, \dots, u_m$ je ortonormální báze vzniklá Gramm-Schmidtovou ortogonalizací tohoto systému vektorů. Nyní pro každé e_i je $\varphi(e_i)$ buď jedno z v_j, $j \le i$, nebo je lineární kombinací $v_1, \dots, v_{i-1}$, proto ve vyjádření $\varphi(e_i)$ v bázi $\underline{u}$ vystupují pouze vektory $u_1, \dots, u_i$. Zobrazení φ má proto ve standardní bázi na $\mathbb{K}^n$ a ortonormální bázi $\underline{u}$ na $\mathbb{K}^m$ horní trojúhelníkovou matici R. Přechod k bázi $\underline{u}$ na $\mathbb{K}^m$ odpovídá násobení unitární maticí Q, tj. $R = QA$, ekvivalentně $A = Q^*R$. □

* **11.7. Definice.** Nechť $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{K})$ a nechť $A = USV^*$ je její singulární rozklad, $S = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Matici $A^{(-1)} := VS'U^*$ s $S' = \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nazýváme *pseudoinverzní matice* k matici A.

* Jak ukazuje následující věta, je pseudoinverze důležité zobecnění pojmu inverzní matice.

* **11.8. Věta.** *Nechť $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Platí*

(1) *Je-li A invertibilní (zejména tedy čtvercová), pak $A^{(-1)} = A^{-1}$.*
(2) *pro pseudoinverzi $A^{(-1)}$ platí, že $A^{(-1)}A$ i $AA^{(-1)}$ jsou samoadjungované a $AA^{(-1)}A = A$, $A^{(-1)}AA^{(-1)} = A^{(-1)}$.*
(3) *Uvažme pro danou matici $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{K})$ systém lineárních rovnic $Ax = b$, $b \in \mathbb{K}^m$. Pak $y = A^{(-1)}b \in \mathbb{K}^n$ minimalizuje vzdálenost $\|Ax - b\|$ pro všechny $x \in \mathbb{K}^n$.*

* **Důkaz.** (1): Je-li $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ invertibilní, pak i $S = U^*AV \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ je invertibilní a přímo z definice je $S' = S^{-1}$. Odtud $A^{(-1)}A = AA^{(-1)} = E$.

* (2): Přímým výpočtem dostáváme $SS'S = S$ a $S'SS' = S'$, proto

$$AA^{(-1)}A = USV^*VS'U^*USV^* = USS'SV^* = USV^* = A$$

a analogicky pro druhou rovnost. Dále

$$(AA^{(-1)})^* = (USS'U^*)^* = U(S')^T S^T U^* = U(SS')^T U^* = USS'U^* = AA^{(-1)}$$

a podobně se ukáže $(A^{(-1)}A)^* = A^{(-1)}A$.

** (3): Uvažme zobrazení $\varphi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $x \mapsto Ax$, a přímé součty $\mathbb{K}^n = (\mathrm{Ker}\,\varphi)^\perp \oplus \mathrm{Ker}\,\varphi$, $\mathbb{K}^m = \mathrm{Im}\,\varphi \oplus (\mathrm{Im}\,\varphi)^\perp$. Zúžené zobrazení $\tilde{\varphi} := \varphi_{|(\mathrm{Ker}\,\varphi)^\perp}\colon (\mathrm{Ker}\,\varphi)^\perp \to \mathrm{Im}\,\varphi$ je lineární isomorfismus. Zvolíme-li vhodně ortonormální báze na $(\mathrm{Ker}\,\varphi)^\perp$ a $\mathrm{Im}\,\varphi$ a doplníme je na ortonormální báze na celých prostorech, bude mít φ matici S a $\tilde{\varphi}$ matici D z věty o singulárním rozkladu. Pro dané $b \in \mathbb{K}^m$ je bod $z \in \mathrm{Im}\,\varphi$ minimalizující vzdálenost $\|b - z\|$ (tj. realizující vzdálenost od podprostoru $\rho(b, \mathrm{Im}\,\varphi)$) právě komponenta $z = b_1$ rozkladu $b = b_1 + b_2$, $b_1 \in \mathrm{Im}\,\varphi$, $b_2 \in (\mathrm{Im}\,\varphi)^\perp$. Přitom ale ve zvolené bázi je zobrazení $\varphi^{(-1)}$, původně zadané ve standardních bazích pseudoinverzí $A^{(-1)}$, dáno maticí S' z věty o singulárním rozkladu, zejména je $\varphi^{(-1)}(\mathrm{Im}\,\varphi) = (\mathrm{Ker}\,\varphi)^\perp$ a D^{-1} maticí zúžení $\varphi^{(-1)}_{|\,\mathrm{Im}\,\varphi}$ a $\varphi^{(-1)}_{|(\mathrm{Im}\,\varphi)^\perp}$ je nulové. Je tedy skutečně

$$\varphi \circ \varphi^{(-1)}(b) = \varphi(\varphi^{(-1)}(z)) = z$$

a důkaz je ukončen. $\square$

** Lze také ukázat, že matice $A^{(-1)}$ minimalizuje výraz $\|AA^{(-1)} - E\|^2$ (tj. sumu kvadrátů všech prvků uvedené matice).

* **11.9. Lineární regrese.** Aproximační vlastnost (3) předchozí věty je velice užitečná v případech, kdy máme najít co nejlepší přiblížení (neexistujícího) řešení přeurčeného systému $Ax = b$, kde $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{K})$ a m je větší než n. Např. máme-li zadány hodnoty b_i, skutečné hodnoty funkcí $a_{ij} = f_j(x_i)$ v bodech $x_i \in \mathbb{R}$ a naším úkolem je určit koeficienty $\alpha_j \in \mathbb{R}$ tak, aby $\sum_{i=1}^m (b_i - (\sum_{j=1}^n \alpha_j a_{ij}))^2$ byla minimální. Jinými slovy, hledáme lineární kombinaci funkcí f_j takovou, abychom "dobře" proložili zadané hodnoty b_i. Díky předchozí větě jsou hledané optimální koeficienty $A^{(-1)}b$.

Problémy k přemýšlení

** **1.** Dokažte věty o polárním rozkladu přímo (bez použití věty o singulárním rozkladu).

** **2.** Dokažte, že pseudoinverze $A^{(-1)}$ je jediná matice taková, že $A^{(-1)}A$ i $AA^{(-1)}$ jsou samoadjungované a $AA^{(-1)}A = A$, $A^{(-1)}AA^{(-1)} = A^{(-1)}$.

** **3.** Nechť $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{K})$, $m \geq n$, a předpokládejme, že sloupce A jsou lineárně nezávislé. Pak A^*A je invertibilní a $A^{(-1)} = (A^*A)^{-1}A^*$. Pro praktické užití lineární regrese bývá tento vztah užitečný, protože počet volných parametrů, tj. rozměr matice A^*A, bývá malý a počet zadaných hodnot naopak velký, takže při praktických měření je v podstatě jisté, že sloupce A budou nezávislé. Spočíst potom inverzi z "malé" matice A^*A bývá rychlé. (Návod: užijte tvrzení předchozího problému!)

Část III. Dodatky

12. Polynomiální matice a kanonické tvary

Odvodíme efektivní algebraický postup pro určení Jordanových kanonických tvarů. Základem bude jistá verze Gaussovy eliminace pro charakteristické matice, tj. pro matice jejichž prvky jsou polynomy.

12.1. Věta. *Pro matice $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ nad polem skalárů $\mathbb{K}$ existuje invertibilní matice $P \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ taková, že $A = PBP^{-1}$ právě, když charakteristickou matici $A - \lambda E$ lze převést na charakteristickou matici $B - \lambda E$ pomocí elementárních řádkových a sloupcových transformací.*[18]

Důkaz této klíčové (a elegantní) věty je technicky poněkud nepříjemný, začneme s přípravnými definicemi a poznámkami.

12.2. Dělení v okruzích polynomů. Nechť R je libovolný okruh, $R_\infty[\lambda]$ polynomy v proměnné λ nad R. Pro každé polynomy $f(\lambda) = a_n\lambda^n + \cdots + a_0$, $g(\lambda) = b_m\lambda^m + \cdots + b_0$, s $b_m \in R$ invertibilním, existují jednoznačně určené polynomy $q_1(\lambda)$, $r_1(\lambda)$, $q_2(\lambda)$, $r_2(\lambda)$ takové, že

$$f(\lambda) = g(\lambda)q_1(\lambda) + r_1(\lambda)$$
$$f(\lambda) = q_2(\lambda)g(\lambda) + r_2(\lambda)$$

a buď stupně $r_1(\lambda)$ a $r_2(\lambda)$ jsou menší než stupeň $g(\lambda)$ nebo jsou $r_1(\lambda)$ či $r_2(\lambda)$ nulové polynomy.

Důkaz. Zcela shodný se standardním důkazem o dělení se zbytkem pro polynomy s reálnými koeficienty,[19] pouze musíme pamatovat na invertibilnost b_m a na (možnou) nekomutativnost násobení v R (proto dostaneme různé výsledky pronásobení zleva a zprava). □

12.3. λ-matice a maticové polynomy. Matice, jejichž prvky jsou polynomy v proměnné λ nazýváme *λ-matice*. Jde tedy o prvky v $\mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{K}_\infty[\lambda])$. Protože však sčítání v polynomech se definuje po jednotlivých mocninách a v maticích po jednotlivých prvcích, můžeme λ-matice ztotožňovat s polynomy nad okruhem matic, tj. $(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}))_\infty[\lambda] \cong \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}_\infty[\lambda])$. Promyslete si to podrobně!

12.4. Poznámky. (1) Podmnožina invertibilních matic v $\mathrm{Mat}_n(R)$ nad libovolným okruhem R vždy tvoří grupu vhledem k násobení matic.

(2) λ-matice $A(\lambda)$ je invertibilní právě, když je $|A(\lambda)| \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, viz. 3.21

(3) algoritmus pro dělení s zbytkem lze vždy aplikovat pro dělení charakteristickou maticí $A - \lambda E$, protože vedoucí koeficient tohoto polynomu je matice $-E$, tzn. je invertibilní.

---

[18] Matice B a PBP^{-1} se nazývají podobné, matice, které lze na sebe převést elementárními transformacemi ekvivalentní. Můžeme proto větu stručně formulovat takto: *A a B jsou podobné právě, když jejich charakteristické matice jsou ekvivalentní.*

[19] Jistě jej najdete podrobně vypracovaný v každém základním textu o algebře.

12.5. Elementární sloupcové a řádkové transformace byly pro matice nad libovolným okruhem definovány již v 1.11, 1.13. Musíme jen dát pozor na invertibilitu skaláru při násobení vybraného řádku. Ve skutečnosti stačí právě dvě:

(1) Vynásobení vybraného řádku (sloupce) invertibilním skalárem a

(2) Přičtení (libovolného) násobku některého jiného řádku k vybranému řádku.

Výměna řádků či sloupců se snadno získá kombinací těchto dvou transformací. Opět odpovídají řádkové elementární transformace násobení invertibilní maticí zleva, sloupcové zprava.

12.6. Důkaz Věty 12.1. Nejprve ověříme snadnější implikaci. Nechť jsou A a B podobné, $A = PBP^{-1}$. Potom

$$P(B - \lambda E)P^{-1} = PBP^{-1} - \lambda E = A - \lambda E.$$

Každou skalární invertibilní matici dostaneme ale jako součin matic elementárních transformací. Vystačíme tedy dokonce se skalárními lineárními kombinacemi při úpravách charakteristických matic.

Opačná implikace je nepříjemná. Předpokládejme, že existují invertibilní matice $P(\lambda)$ a $Q(\lambda)$ takové, že

$$B - \lambda E = P(\lambda)(A - \lambda E)Q(\lambda). \tag{1}$$

Pokud by $P(\lambda)$ a $Q(\lambda)$ byly ve skutečnosti konstantní polynomy (tj. skalární matice), pak v rovnosti (1) můžeme snadno porovnat koeficienty u stejných mocnin λ a dostaneme $E = PQ$, $B = PAQ$. To ale znamená, že $Q = P^{-1}$ a matice B a A jsou podobné. Stačí nám tedy ukázat, že každé matice $P(\lambda)$ a $Q(\lambda)$ splňující (1) jsou nezávislé na λ.

Pomocí dělení se zbytkem najdeme polynomy $P_1(\lambda)$, P_0, $Q_1(\lambda)$ a Q_0 splňující

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (B - \lambda E)P_1 + P_0 \\ Q(\lambda) &= Q_1(B - \lambda E) + Q_0 \end{aligned} \tag{2}$$

kde stupeň P_0 a Q_0 musí být menší než stupeň $B - \lambda E$, tedy nula (pokud jsou vůbec nenulové). Dosazením za $P(\lambda)$ z (2) do (1)

$$B - \lambda E = (B - \lambda E)P_1(\lambda)(A - \lambda E)Q(\lambda) + P_0(A - \lambda E)Q(\lambda).$$

Dosadíme i za $Q(\lambda)$ a upravíme:

$$\begin{gathered} B - \lambda E - P_0(A - \lambda E)Q_0 = K(\lambda) \\ K(\lambda) = (B - \lambda E)P_1(\lambda)(A - \lambda E)Q(\lambda) + P_0(A - \lambda E)Q_1(\lambda)(B - \lambda E) \end{gathered} \tag{3}$$

Za P_0 ještě můžeme dosadit $P(\lambda) - (B - \lambda E)P_1(\lambda)$

$$\begin{aligned} K(\lambda) = (B - \lambda E)P_1(\lambda)(A - \lambda E)Q(\lambda) + P_\lambda(A - \lambda E)Q_1(\lambda)(B - \lambda E) - \\ (B - \lambda E)P_1(\lambda)(A - \lambda E)Q_1(\lambda)(B - \lambda E) \end{aligned}$$

Nyní využijeme invertibilitu $P(\lambda)$ a $Q(\lambda)$ a vyjádříme $K(\lambda)$ jako součin začínající a končící $B - \lambda E$ (tím bude zajištěno, že by mělo $K(\lambda)$ mít stupeň alespoň 2). Z (1) totiž plyne $(A - \lambda E)Q(\lambda) = P^{-1}(\lambda)(B - \lambda E)$, $P(\lambda)(A - \lambda E) = (B - \lambda E)Q^{-1}(\lambda)$ a dostáváme

$$K(\lambda) = (B - \lambda E)(P_1(\lambda)P^{-1}(\lambda) + Q^{-1}(\lambda)Q_1(\lambda) + P_1(\lambda)(A - \lambda E)Q_1(\lambda))(B - \lambda E)$$

Přitom ovšem ze vztahu (3) plyne, že stupeň $K(\lambda)$ je nejvýše 1. Pak už zbývá jen možnost $K(\lambda) = 0$ a (3) dává přesně požadovaný vztah. $\square$

12.7. Kanonický tvar λ-matic. Pro matice nad okruhem polynomů nelze přímo použít Gaussovy eliminace, tak jak v 1.14, můžeme ale postup modifikovat tak, že obdržíme kanonický diagonální tvar matic nad okruhem polynomů $\mathbb{K}_\infty[\lambda]$ kde $\mathbb{K}$ je pole.

Řekneme, že λ-matice $A(\lambda)$ je v *kanonickém tvaru*, jestliže je

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} e_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_2(\lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e_n(\lambda) \end{pmatrix}$$

kde polynomy e_{i-1} vždy dělí e_i, $i = 2, \dots, n$ (nulový polynom je dělitelný pouze nulovým polynomem) a nenulové polynomy mají vedoucí koeficient 1.

Např. nulová matice je v kanonickém tvaru, jednotková matice E je v kanonickém tvaru. Je-li $e_i(\lambda) = 0$, pak podle definice jsou všechny $e_j(\lambda)$, $j > i$ také nulové. Postupně ukážeme, že každá λ-matice nad polem skalárů je ekvivalentní s právě jedním kanonickým tvarem. Protože už také víme, že pro každou matici nad komplexními čísly existuje (až na pořadí bloků) jednoznačně určený Jordanův kanonický tvar, musíme být schopni jej z kanonického tvaru charakteristické matice vyčíst. Ve skutečnosti ukážeme i algoritmický postup pro nalezení kanonického tvaru λ-matic a znovu dokážeme existenci a jednoznačnost Jordanova kanonického tvaru matic.

12.8. Lemma. *Každá čtvercová λ-matice nad polem $\mathbb{K}$ je ekvivalentní s jistým kanonickým tvarem.*

Důkaz. Postup pro nalezení kanonického tvaru je modifikací Gaussovy eliminace. Jistě lze zařídit, aby $a_{11}(\lambda) \neq 0$. Pokud je prvek $a_{11}(\lambda)$ nenulový polynom a přitom nedělí beze zbytku všechny ostatní nenulové prvky na prvním řádku a v prvním sloupci, pak můžeme pomocí elementárních transformací zmenšit jeho stupeň: Je-li $a_{1k}(\lambda) = a_{11}(\lambda)p(\lambda) + r(\lambda)$, kde $r(\lambda) \neq 0$ a jeho stupeň je menší než stupeň $a_{11}(\lambda)$, pak můžeme od k-tého sloupce odečíst $p(\lambda)$-násobek prvního a vyměnit k-tý sloupec s prvním. Při každém takovém kroku snížíme stupeň polynomu a_{11} nejméně o 1. Protože každý nenulový konstantní polynom dělí všechny nenulové polynomy, po konečném počtu kroků tak zajistíme požadovanou dělitelnost. V tom okamžiku ovšem můžeme použít stejný postup jako v Gaussově eliminaci a pomocí elementárních transformací získat nulové polynomy na všech ostaních místech v prvním sloupci a v prvním řádku.

Pokud nyní polynom $a_{11}(\lambda)$ nedělí beze zbytku všechny ostatní polynomy v matici, lze opět snížit jeho stupeň: Nechť $a_{ij}(\lambda) = a_{11}(\lambda)q(\lambda) + r(\lambda)$, $r(\lambda) \neq 0$, je výsledek po dělení se zbytkem. Pak připočteme i-tý řádek k prvému a postupujeme opět podle předešlého kroku.

Po konečném počtu kroků tedy dosáhneme, že $e_1(\lambda) = a_{11}(\lambda)$ dělí všechny ostatní nenulové polynomy v matici a zároveň je jediným nenulovým prvkem na prvním řádku a v prvním sloupci. Nyní postupně uplatňujeme zcela stejný postup na submatici tvořenou zbývajícími řádky a sloupci a po konečném počtu kroků získáme požadovaný tvar. □

12.9. Příklad.

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}6-\lambda & 2 & 2\\ 2 & 3-\lambda & -4\\ 2 & -4 & 3-\lambda\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & \frac{3-\lambda}{2}\\ 2 & 3-\lambda & -4\\ 6-\lambda & 2 & 2\end{pmatrix}$$
$$\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & \frac{3-\lambda}{2}\\ 0 & 7-\lambda & \lambda-7\\ 0 & -2\lambda+14 & \frac{-\lambda^2+9\lambda+14}{2}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 7-\lambda & \lambda-7\\ 0 & 0 & -\lambda^2+5\lambda+14\end{pmatrix}$$
$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-7 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+2)(\lambda-7)\end{pmatrix}$$

kde v první úpravě jsme vyměnili první řádek s polovinou třetího, pak jsme provedli standardní vyeliminování prvků v prvním řádku a prvním sloupci. Protože získaný prvek a_{22} přímo dělil ostatní v druhém řádku a sloupci, v zápětí jsme vyeliminovali i druhý řádek a sloupec. Náhodou vše probíhalo tak hladce že jsme nemuseli používat dělení se zbytkem. Všimněme si, že je vždy výhodné vyměňovat řádky a sloupce tak, abychom nemuseli zbytečně brzy začít pracovat s nekonstantními polynomy.

Zatím ovšem ještě nevíme, jestli získané kanonické tvary nezávisí na našem postupu. Abychom ukázali jednoznačnost, vyjádříme kanonický tvar nezávisle na dalších volbách a ukážeme, že ekvivalentní matice mají kanonický tvar shodný.

12.10. Věta. *Nechť $A(\lambda)$ je čtvercová řádu n λ-matice nad polem skalárů $\mathbb{K}$. Pro $1\le k\le n$ definujeme polynom $d_k^A(\lambda)\in\mathbb{K}_\infty[\lambda]$ jako největší společný dělitel všech minorů stupně k v $A(\lambda)$ s vedoucím koeficientem 1. Platí*

(1) *Je-li $d_{k+1}^A(\lambda)\neq 0$, pak $d_k^A(\lambda)$ dělí $d_{k+1}^A(\lambda)$.*
(2) *Jsou λ-matice $A(\lambda)$ a $B(\lambda)$ ekvivalentní, pak $d_k^A(\lambda)=d_k^B(\lambda)$ pro všechny k.*
(3) *Nechť $\begin{pmatrix}e_1(\lambda) & \dots & 0\\ & \ddots & \\ 0 & \dots & e_n(\lambda)\end{pmatrix}$ je kanonický tvar matice $A(\lambda)$. Pak $e_1(\lambda)=d_1^A(\lambda)$, $e_k(\lambda)=d_k^A(\lambda)/d_{k-1}^A(\lambda)$ pro všechny nenulové $e_k(\lambda)$ a $e_k(\lambda)=0$ právě, když $d_k^A(\lambda)=0$.*
(4) *Kanonický tvar matice $A(\lambda)$ vždy existuje a je jednoznačně určený.*

Důkaz. (2) K tomu abychom dokázali, že polynomy $d_k^A(\lambda)$ splývají pro ekvivalentní matice stačí dokázat, že se nemění při elementárních transformacích. Vynásobení řádku skalárem z $\mathbb{K}$ (vzpomeňme, že invertibilní jsou právě nenulové konstantní polynomy) vede k vynásobení všech minorů, které tento řádek zahrnují týmž skalárem, jistě tedy nepovede ke změně společných dělitelů. Zbývá tedy pouze přičtení $f(\lambda)$-násobku j-tého řádku k i-tému, resp. totéž pro sloupce. U minorů, kterými neprochází i-tý řádek nedojde ke změně, u těch které zahrnují i-tý i j-tý také ne. Předpokládejme tedy, že minor $|M|$ zahrnuje i-tý řádek, ne však j-tý. Po transformaci dostaneme $|\bar{M}|=|M|+f(\lambda)|M'|$, kde $|M'|$ je minor k-tého řádu, v němž jsou prvky na i-tém řádku nahrazeny odpovídajícími prvky z řádku j-tého. To znamená, že $|M'|$ je, až na případné znaménko, opět jeden z minorů matice A. Nyní $d_k^A(\lambda)$ dělí $|M|$ i $|M'|$, musí proto dělit i nově vzniklý minor $|\bar{M}|$.

Celkem tedy víme, že pro $B(\lambda)=P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)$ vzniklou z $A(\lambda)$ elementárními transformacemi platí, že pro všechny k dělí $d_k^A(\lambda)$ polynom $d_k^B(\lambda)$. Pak ovšem také $A(\lambda) = P^{-1}(\lambda)B(\lambda)Q^{-1}(\lambda)$ a tedy i $d_k^B(\lambda)$ dělí $d_k^A(\lambda)$. Protože jsou vedoucí koeficienty těchto polynomů normované na 1, musí nutně platit $d_k^A(\lambda) = d_k^B(\lambda)$.

(1), (3), (4) Podle předchozí věty umíme najít nějaký kanonický tvar matice $A(\lambda)$. Pak ovšem můžeme, podle předchozího, spočíst $d_k^A(\lambda)$ ze získaného kanonického tvaru. Pro matice v kanonickém tvaru jsou ale zbývající tvrzení věty zřejmá. Navíc je sama matice $A(\lambda)$ v kanonickém tvaru určena polynomy $d_k^A(\lambda)$ jednoznačně. □

Jednoznačně určené polynomy $e_i(\lambda)$ z kanonického tvaru λ-matice $A(\lambda)$ se nazývají *invariantní faktory*. Každý z nich se (nad zvoleným polem $\mathbb{K}$) jednoznačně rozkládá na ireducibilní faktory, $e_i(\lambda) = (\varepsilon_{i_1}^{s_{i_1}}) \cdot \ldots \cdot (\varepsilon_{i_k}(\lambda))^{s_{i_k}}$, jednotlivé mocniny $(\varepsilon_{i_j}(\lambda))^{s_{i_\ell}}$ nazýváme *elementární dělitele* α-matice $A(\lambda)$.

12.11. Příklad. Pro charakteristickou matici Jordanova bloku řádu m

$$A(\lambda) = J - \lambda E = \begin{pmatrix} \lambda_0 - \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_0 - \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 - \lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_0 - \lambda \end{pmatrix}$$

platí $d_1^A(\lambda) = \cdots = d_{m-1}^A(\lambda) = 1$, $d_m^A(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^m$. Skutečně, pro řády menší než m vždy najdeme nenulový minor neobsahující λ a $|A| = (-1)^m(\lambda - \lambda_0)^m$.

12.12. Lemma. *Nechť matice $J \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ je blokově diagonální s Jordanovými bloky J_i, $i = 1, \ldots, k$, na diagonále. Nechť $J_i \in \mathrm{Mat}_{k_i}(\mathbb{K})$ a nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_j$ jsou všechna vlastní čísla matice J. Předpokládejme, že λ_1 se objevuje v blocích $J_1, \ldots, J_p$, λ_2 v q blocích $J_{p+1}, \ldots, J_{p+q}$, atd. Potom platí*

$$\begin{aligned} d_n^{J-\lambda E}(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)^{k_1+k_2+\cdots+k_p} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{k_{p+1}+k_{p+2}+\cdots+k_{p+q}} \cdot \ldots \\ d_{n-1}^{J-\lambda E}(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)^{k_2+\cdots+k_p} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{k_{p+2}+\cdots+k_{p+q}} \cdot \ldots \\ d_{n-2}^{J-\lambda E}(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)^{k_3+\cdots+k_p} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{k_{p+3}+\cdots+k_{p+q}} \cdot \ldots \end{aligned}$$

kde exponenty se nahradí nulou, není-li už co sčítat, tzn. příslušná mocnina $(\lambda - \lambda_i)$ se nahradí pro všechny další polynomy jedničkou.

Důkaz. Invariantní faktor $d_n^{J-\lambda E}(\lambda)$ je právě determinant $(-1)^n|J - \lambda E|$. Zjevně je tedy v požadovaném tvaru.

Zbývající tvary se snadno zjistí přímým výpočtem vybraných minorů. Popíšeme postup: Nejprve můžeme každý z diagonálních bloků matice $J - \lambda E$ upravit na kanonický tvar jako λ-matice, tj. všechny bloky $J_i - \lambda E_i$ budou diagonální, se svými invariantními faktory na diagonále. Jejich přesný tvar jsme odvodili v předchozím příkladě. Nyní pro výpočet největšího společného dělitele $d_s^{J-\lambda E}(\lambda)$ všech minorů řádu s musíme postupně vypouštět co nejvyšší mocniny faktorů $(\lambda - \lambda_j)$. V případě jednotlivých Jordanových bloků to ale znamená vypustit vždy poslední řádek a poslední sloupec (jediný nekonstantní výraz). Tím získáme právě požadované tvary. Např. pro $d_{n-1}^{J-\lambda E}(\lambda)$ postupně po jednom vypouštíme poslední řádky a sloupce všech bloků, což vede právě k vypuštění největších exponentů z $d_n^{J-\lambda E}(\lambda)$.

Zkuste si sepsat formální důkaz indukcí! □

Celkem jsme již znovu dokázali existenci Jordanova kanonického tvaru, viz. 5.27. Jestliže totiž existuje pro matici $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ n vlastních čísel (včetně násobností), lze její charakteristický polynom, který je vždy součinem invariantních faktorů λ-matice $A - \lambda E$ rozložit na součin lineárních faktorů $(\lambda - \lambda_i)$. Pak ovšem získané invariantní faktory určují podle předchozího lemmatu jedinou matici v Jordanově kanonickém tvaru, až na pořadí Jordanových bloků. Přitom je podle věty 12.1 tento Jordanův tvar podobný původní matici A. Navíc byl důkaz tohoto výsledku opřen o algoritmickou proceduru výpočtu kanonického tvaru λ-matic, která vede k poměrně snadnému výpočtu Jordanových kanonických tvarů. Sformulujme tedy výsledek do věty:

12.13. Věta. *Nechť $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}$ pole, a nechť charakteristický polynom $|A - \lambda E|$ má v $\mathbb{K}$ n kořenů (včetně násobností). Pak existuje podobná matice $J = PAP^{-1}$ v Jordanově kanonickém tvaru s Jordanovými bloky $J_i \in \mathrm{Mat}_{k_i}(\mathbb{K})$. Jsou-li invariantní faktory λ-matice A tvaru*

$$\begin{aligned} e_n(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{k_{p+1}} \cdot \ldots \\ e_{n-1}(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)^{k_2} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{k_{p+2}} \cdot \ldots \\ e_{n-2}(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)^{k_3} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{k_{p+3}} \cdot \ldots \end{aligned}$$

kde $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq 0$, $k_{p+1} \geq k_{p+2} \geq \cdots \geq 0, \ldots$, potom (ve značení z předchozího lemmatu) lze zvolit za J_1 Jordanův blok příslušný vlastnímu číslu λ_1 stupně k_1, za J_2 blok příslušný λ_1 stupně $k_2, \ldots, J_{p+1}$ bude blok příslušný λ_2 stupně $k_{p+1}, \ldots$. Přitom je matice J určena jednoznačně až na pořadí bloků. □

12.14. Příklad. V 12.9 jsme získali kanonický tvar charakteristické matice

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 6-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 7 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+2)(\lambda-7) \end{pmatrix}$$

Je tedy matice A diagonalizovatelná a v bázi z vlastních vektorů má přislušné zobrazení tvar

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Kdyby výsledný kanonický tvar charakteristické matice byl

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+2)(\lambda-7)^2 \end{pmatrix}$$

pak by příslušný Jordanův kanonický tvar původní matice byl

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a v tomto případě by neexistovala báze z vlastních vektorů.

Pro praktický výpočet je vhodné zkombinovat převod charakteristické matice do kanonického tvaru λ-matice s přímým výpočtem invariantních faktorů. Všimněte si také, že důkaz věty 12.1 dává přímo algoritmický postup pro nalezení matice přechodu do nové báze, ve které bude mít diskutované zobrazení matici v Jordanově tvaru: Protože A a její Jordanův tvar jsou podobné, mají ekvivalentní charakteristické matice a při úpravě $A - \lambda E$ na kanonický tvar $Z(\lambda)$ najdeme invertibilní λ-matice $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$ takové, že $Z(\lambda) = P(\lambda)(A - \lambda E)Q(\lambda)$ a podobně je také $J - \lambda E = \bar{P}(\lambda)Z(\lambda)\bar{Q}(\lambda)$ pro vhodné λ-matice $\bar{P}(\lambda)$ a $\bar{Q}(\lambda)$. Podle důkazu 12.1 je pak $J - \lambda E = \bar{P}(\lambda)P(\lambda)(A - \lambda E)Q(\lambda)\bar{Q}(\lambda)$ a navíc platí, že $P := \bar{P}(\lambda)P(\lambda) = (Q(\lambda)\bar{Q}(\lambda))^{-1}$ jsou matice nezávislé na λ a platí $J = PAP^{-1}$. Stačí tedy provést všechny naznačené úpravy, pamatovat si všechny řádkové transformace a vynásobit příslušné elementární matice. Tím získáme matici přechodu P převádějící matici A do Jordanova kanonického tvaru.

Tento algoritmus lze použít i pro úlohu zjistit, zda jsou dvě matice A, $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ podobné a v případě, že jsou, nalézt příslušnou matici přechodu.

12.15. Závěrem této kapitoly ještě zmíníme několik výsledků o hodnotách polynomů v maticích. Protože pole $\mathbb{K}$ je vloženo homomorfismem okruhů $\mathbb{K} \ni a \mapsto aE \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ do okruhu matic $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ a navíc konstantní násobky jednotkové matice komutují se všemi maticemi v $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$, můžeme každý polynom $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{K}_\infty[x]$ chápat i jako polynom v $(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}))[x]$. Pro libovolnou matici $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ pak platí $f(A) = a_n \cdot A^n + a_{n-1} \cdot A^{n-1} + \cdots + a_0 \cdot E$.[20] Říkáme, že matice A je *kořenem polynomu* $f(x)$, je-li $f(A)$ nulová matice.

12.16. Věta. *Nechť $A = PBP^{-1}$. Pak pro každý polynom $f(x) \in \mathbb{K}_\infty[x]$ je*

$$f(A) = P \cdot f(B) \cdot P^{-1}.$$

Navíc je pro každý další polynom $g(x) \in \mathbb{K}_\infty[x]$

$$(f+g)(A) = f(A) + g(A), \quad (f \cdot g)(A) = (g \cdot f)(A) = f(A) \cdot g(A) = g(A) \cdot f(A).$$

Důkaz. Vždy platí

$$(PBP^{-1})^k = (PBP^{-1})(PBP^{-1}) \dots (PBP^{-1}) = PBEB \dots EBP^{-1}.$$

Odtud plyne první tvrzení. Zbývající tvrzení plynou z komutativity násobení v $\mathbb{K}$.[21] $\square$

[20] Pro invertibilní matice umíme i A^{-n}, $n \in \mathbb{N}$, můžeme pak tedy definovat na invertibilních maticích i složitější funkce. Navíc lze na matice rozšířit i řadu dalších analytických procedur založených na algebraických výrazech, zejména lze tvořit nekonečné řady. Můžeme tedy například hovořit o exponenciálním a logaritmickém zobrazení e^A, $\log A$, pro matice $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$. V dalším navíc uvidíme, že hodnoty takto vytvořených výrazů vhodně závisí na volbě matice z třídy podobných matic, jedná se proto o dobře definované hodnoty diskutovaných funkcí na lineárních zobrazeních. Tato skutečnost je základem matematického aparátu značné části moderní fyziky, zejména kvantové mechaniky.

[21] Je zajímavé, že pro hustou podmnožinu všech matic A v $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ (v běžném smyslu matematické analýzy) lze ukázat, že komutují právě se všemi maticemi, které vzniknou jako hodnoty polynomů v A.

12.17. Minimální polynom matice. Každá matice $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ zadává posloupnost vektorů $E = A^0, A, \dots, A^k, \dots$ ve vektorovém prostoru $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$. Protože dimenze tohoto prostoru je n^2, nutně musí existovat netriviální lineární kombinace $0 = a_{n^2}A^{n^2} + a_{n^2-1}A^{n^2-1} + \dots + a_0E$. Je tedy každá matice kořenem nějakého polynomu. Proto musí existovat polynom $g(x)$ s vedoucím koeficientem 1 a minimálním stupněm mezi polynomy, jejichž je A kořenem. Takový polynom nazýváme *minimální polynom* matice A nad $\mathbb{K}$. Z věty 12.16 přímo vyplývá, že podobné matice mají stejný minimální polynom.

12.18. Věta. *Nechť $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}$ pole, a nechť $m(\lambda) \in \mathbb{K}_\infty[\lambda]$ je minimální polynom matice A nad $\mathbb{K}$. Potom*

(1) *Každý polynom $f(\lambda) \in \mathbb{K}_\infty[\lambda]$, pro který je $f(A) = 0$, je dělitelný $m(\lambda)$.*
(2) *$m(\lambda)$ je jednoznačně určený.*
(3) *$m(\lambda)$ je roven invariantnímu faktoru $e_n(\lambda)$ charakteristické matice $A - \lambda E$.*

Důkaz. (1) Je-li $f(A) = 0$ a $f(x) = m(x)g(x) + r(x)$ je výsledek dělení se zbytkem polynomu $f(x)$ polynomem $m(x)$, je také $r(A) = 0$. Pokud by ale $r(x) \neq 0$, pak by stupeň $r(x)$ byl menší než stupeň $m(x)$. Proto je nutně $r(x) = 0$ a $f(x)$ je dělitelné $m(x)$.

(2) Předpokládejme, že $m(x)$ a $m'(x)$ jsou dva minimální polynomy matice A. Pak mají stejný stupeň a dělí se navzájem. Protože přitom mají vedoucí členy rovny 1, je nutně $m(x) = m'(x)$.

(3) Zde je důkaz poněkud zdlouhavější. Využijeme toho, že pro charakteristickou matici je invariant $d_n^{A-\lambda E}(\lambda)$ vždy nenulový a proto platí $(-1)^n \cdot |A - \lambda E| = d_{n-1}^{A-\lambda E}(\lambda) \cdot e_n(\lambda)$. Když se nám podaří vyjádřit $|A - \lambda E|$ jako násobek polynomu $d_{n-1}^{A-\lambda E}(\lambda)$, pak odtud dostaneme $e_n(A) = 0$.

Pro algebraicky adjungovanou matici $B(\lambda) := (A - \lambda E)^*$ platí $(A - \lambda E) \cdot B(\lambda) = |A - \lambda E| \cdot E$, viz 3.21. Protože je $d_{n-1}^{A-\lambda E}(\lambda)$ největším společným dělitelem všech minorů stupně $n - 1$, plyne z definice algebraicky adjungované matice $B(\lambda) = d_{n-1}^{A-\lambda E}(\lambda) \cdot C(\lambda)$, kde největší společný dělitel prvků λ-matice $C(\lambda)$ je 1. Nyní

$$|A - \lambda E| \cdot E = (A - \lambda E) \cdot d_{n-1}^{A-\lambda E} \cdot C(\lambda) = (-1)^n d_{n-1}^{A-\lambda E}(\lambda) e_n(\lambda)$$

a protože je $d_{n-1}^{A-\lambda E}(\lambda)$ nenulový polynom, lze jej krátit. Pak ovšem dosazením A obdržíme[22]

$$(-1)^n e_n(A) \cdot E = (A - A) \cdot C(A) = 0.$$

Podle již dokázaného tvrzení musí být tedy $e_n(\lambda)$ dělitelné $m(\lambda)$, tj. $e_n(\lambda) = m(\lambda)q(\lambda)$ pro vhodný polynom $q(\lambda)$. Nyní si všimněme, že dělit se zbytkem maticí $A - \lambda E$ umíme explicitně: Je-li $m(\lambda) = a_k\lambda^k + \dots + a_0$, pak[23]

$$\begin{aligned} m(\lambda) \cdot E = (\lambda E - A)(a_kE\lambda^{k-1} + (a_kA + a_{k-1}E)\lambda^{k-2}) + \dots \\ + (A^{k-1}a_k + A^{k-2}a_{k-1} + \dots + a_1E) + A^k a_k + A^{k-1}a_{k-1} + \dots + a_0E = \\ -(A - \lambda E)Q(\lambda) + m(A). \end{aligned}$$

[22]Uvědomte si, že nelze výpočet provést tak, že A dosadíme přímo do charakteristického polynomu způsobem $|A - A \cdot E|$!

[23]Stejně lze vyjádřit dělení libovolné matice $B(\lambda)$ charakteristickou maticí $A - \lambda E$.

Protože je $m(A) = 0$, můžeme nyní porovnat

$$\begin{aligned}(A - \lambda E)C(\lambda) &= \\ &= (-1)^n m(\lambda)q(\lambda)E = q(\lambda)m(\lambda)E = q(\lambda)(A - \lambda E)Q(\lambda) = \\ &= (A - \lambda E)q(\lambda)Q(\lambda).\end{aligned}$$

Odtud plyne $(A - \lambda E)(C(\lambda) - q(\lambda)Q(\lambda)) = 0$. Protože dělení polynomů se zbytkem má vždy jednoznačné výsledky, předchozí výpočet s dosazením nulového polynomu za $m(\lambda)$ ukazuje, že $A - \lambda E$ nemůže být dělitelem nuly. Proto platí $C(\lambda) = q(\lambda)Q(\lambda)$.

Přitom je ale vedoucí koeficient $q(\lambda)$ i největší společný dělitel všech prvků v $C(\lambda)$ roven 1, proto musí být $q(\lambda) = 1$. Tím jsme ukázali $m(\lambda) = e_n(\lambda)$. □

12.19. Věta (Hamiltonova-Caleyova). *Každá matice $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}$ pole, je kořenem svého charakteristického polynomu.*

Důkaz. Invariantní faktor $e_n(\lambda)$ matice A je vždy dělitelem charakteristického polynomu. □

Poznámky k přemýšlení

1. Odvoďte pro komplexní matice Hamiltonovu-Caleyovu větu přímo využitím existence Jordanova kanonického tvaru. Potom odvoďte tuto větu pro reálné matice pomocí komplexifikace. (Všimněte si, že polynomy z blokově diagonální matice lze počítat po blocích.)

2. Kdy je minimální polynom matice roven jejímu charakteristickému polynomu. Najděte odpověď pomocí Jordanova kanonického tvaru.

3. Najděte explicitní vztah mezi Jordanovým kanonickým tvarem a minimálním polynomem matice.

13. Multilineární algebra

V této krátké kapitole jen trochu rozšíříme výklad o tensorech. Začneme alternativní, podstatně více abstraktní definicí:

13.1. Tensorový součin. Nechť V a W jsou vektorové prostory nad stejným polem skalárů $\mathbb{K}$. *Tensorový součin* $V \otimes W$ je vektorový prostor spolu s bilineárním zobrazením $V \times W \to V \otimes W$, $v \times w \mapsto v \otimes W$, které má následující univerzální vlastnost: Pro každé bilineární zobrazení $\varphi\colon V \times W \to Z$ existuje právě jedno lineární zobrazení $\bar{\varphi}\colon V \otimes W \to Z$ takové, že $\varphi(v, w) = \bar{\varphi}(v \otimes w)$, pro všechny $v \in v$, $w \in W$.

Je snadné ověřit, že tensorový součin, pokud existuje, je touto vlastností určen jednoznačně až na isomorfismus. V Kapitole 8. jsme již ukázali následující větu:

13.2. Věta. *Nechť $(e_1, \dots, e_m)$ je báze V, $(f_1, \dots, f_n)$ je báze W. Pak $V \otimes W$ existuje a má bázi $(e_1 \otimes f_1, \dots, e_1 \otimes f_n, \dots, e_m \otimes f_n)$. Tato konstrukce je navíc funktoriální, tzn. pro dvě lineární zobrazení $\varphi\colon V \to V'$, $\psi\colon W \to W'$ dostáváme lineární zobrazení $\varphi \otimes \psi\colon V \otimes W \to V' \otimes W'$, $(\varphi \otimes \psi)(v \otimes w) = \varphi(v) \otimes \psi(w)$.*

13.3. Důsledek. *Pro konečněrozměrné prostory V, Z a W platí*

(1) $V \otimes W \simeq W \otimes V$
(2) $(V \oplus Z) \otimes W \simeq (V \otimes W) \oplus (Z \otimes W)$
(3) $(V \otimes W) \otimes Z \simeq V \otimes (W \otimes Z)$

Bude-li nutné zdůraznit nad jakými skaláry tensorový součin uvažujeme, budeme příslušné pole označovat jako index u znaku pro tensorový součin (např. komplexní vektorové prostory lze chápat také jako reálné a uvažovat příslušný tensorový součin, který budeme značit $\otimes_{\mathbb{R}}$).

Analogicky definujeme libovolné konečné tensorové součiny. Jedná-li se o tensorový součin k kopií téhož vektorového prostoru V, píšeme často $V^{\otimes k}$ nebo $\otimes^k V$.

13.4. Antisymetrická zobrazení. Připomeňme, že k-lineární zobrazení φ je *antisymetrické*, jestliže pro každou permutaci σ na k prvcích platí

$$\varphi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sgn}\sigma\varphi(v_1, \dots, v_k).$$

Není těžké ověřit, že ekvivalentní je (zdánlivě slabší) požadavek, $\varphi(v_1, \dots, v_k) = 0$ kdykoliv jsou alespoň dva z argumentů stejné.

Vnější tensorový součin $\Lambda^k V$ stupně k je vektorový prostor spolu s antisymetrickým k-lineárním zobrazením $V \times \dots \times V \to \Lambda^k V$, $(v_1, \dots, v_k) \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_k$, s univerzální vlastností: Pro každé antisymetrické multilineární zobrazení $\varphi\colon V \times \dots \times V \to Z$ existuje jediné lineární zobrazení $\bar\varphi\colon \Lambda^k \to Z$ splňující $\varphi(v_1, \dots, v_k) = \bar\varphi(v_1 \wedge \dots \wedge v_k)$. Z technických důvodů klademe $\Lambda^0 V = \mathbb{K}$.

Opět je snadné ověřit, že když prostor $\Lambda^k V$ existuje, je určen jednoznačně až na isomorfismus.

13.5. Věta. *Nechť V je vektorový prostor s bazí $(e_1, \dots, e_m)$. Pak $\Lambda^k V$ existuje a má bázi tvořenou prvky $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ s $i_1 < \dots < i_k$. Zejména je $\Lambda^m V \simeq \mathbb{K}$ a $\Lambda^k V$ je triviální nulový prostor pro $k > m$.*

Důkaz. Snadno se ověří přímou konstrukcí. Lze také odvodit zavedením $\Lambda^k V$ jako faktorového prostoru $V^{\otimes k}/I$, kde vektorový podprostor I je generován výrazy $v_1 \otimes \dots \otimes v_k$ s alespoň dvěmi stejnými vektory v_i. □

13.6. Důsledek. *Nechť V a W jsou dva konečněrozměrné vektorové prostory. Pak $\Lambda^k(V \oplus W) = \oplus_{j=0}^k \Lambda^j V \otimes \Lambda^{k-j} W$.*

Důkaz. Hledaný isomorfismus je dán přiřazením

$$(v_1 \wedge \dots \wedge v_j) \otimes (w_1 \wedge \dots \wedge w_{k-j}) \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_j \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_{k-j}.$$

13.7. Symetrická zobrazení. Připomeňme, že multilineární zobrazení φ je symetrické, jestliže pro každou permutaci σ na k prvcích platí $\varphi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \varphi(v_1, \dots, v_k)$.

Symetrický tensorový součin $S^k V$ stupně k definujeme jako vektorový prostor spolu se symetrickým k-lineárním zobrazením $V \times \ldots \times V \to S^k V$, $(v_1, \dots, v_k) \mapsto v_1 \vee \cdots \vee v_k$, s univerzální vlastností: Pro každé symetrické lineární zobrazení $\varphi\colon V \times \ldots \times V \to Z$ existuje jediné lineární zobrazení $\bar\varphi\colon S^k \to Z$ splňující $\varphi(v_1, \dots, v_k) = \bar\varphi(v_1 \vee \cdots \vee v_k)$. Z technických důvodů opět klademe $S^0 V = \mathbb{K}$.

Opět je snadné ověřit, že když $S^k V$ existuje, je určeno jednoznačně až na isomorfismus.

13.8. Věta. *Nechť V je konečněrozměrný vektorový prostor s bazí $(e_1, \dots, e_m)$. Potom $S^k V$ existuje pro každé $k \geq 0$ a má bázi tvořenou prvky $e_{j_1} \vee \cdots \vee e_{j_k}$ s $j_1 \leq \cdots \leq j_k$.*

Důkaz. Ověří se přímou konstrukcí. Lze též definovat $S^k V$ jako faktorový prostor $V^{\otimes k}/I$, kde vektorový podprostor I je generován prvky $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k - v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}$ pro libovolnou permutaci σ na k prvcích. $\square$

Báze v $S^k V$ můžeme také zapsat ve tvaru $e_1^{i_1} \vee \cdots \vee e_n^{i_n}$, kde exponenty probíhají všechny multiindexy $(i_1, \dots, i_n)$ splňující $\sum_{j=1}^n i_j = k$.

13.9. Důsledek. *Realizace $\Lambda^k V$ a $S^k V$ jako faktorových prostorů celého tensorového prostoru $V^{\otimes k}$ dává projekce* $\mathrm{Alt}\colon V^{\otimes k} \to \Lambda^k V$, $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \mapsto \frac{1}{k!} v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ a $\mathrm{Sym}\colon V^{\otimes k} \to S^k V$, $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \mapsto \frac{1}{k!} v_1 \vee \cdots \vee v_k$. *Naopak, máme inkluze*

$$\iota\colon \Lambda^k V \to V^{\otimes k},\ v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \mapsto \sum_\sigma \operatorname{sgn} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}$$
$$\iota\colon S^k V \to V^{\otimes k},\ v_1 \vee \cdots \vee v_k \mapsto \sum_\sigma v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}$$

13.10. Věta. *Přiřazení $(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) \otimes (v_{k+1} \wedge \cdots \wedge v_{k+l}) \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_{k+l}$ definuje antisymetrické bilineární zobrazení $\wedge\colon \Lambda^k V \times \Lambda^l V \to \Lambda^{k+l} V$.*

Podobně, přiřazení $(v_1 \vee \cdots \vee v_k) \otimes (v_{k+1} \vee \cdots \vee v_{k+l}) \mapsto v_1 \vee \cdots \vee v_{k+l}$ definuje symetrické bilineární zobrazení $\vee\colon S^k V \times S^l V \to S^{k+l} V$.

Důkaz. Proveďte jako cvičení.

13.11. Definice. Zobrazení $\wedge$ z předchozí věty nazýváme *vnější součin* a podobně $\vee$ nazýváme *symetrický součin*. Vektorový prostor $\Lambda(V) = \oplus_{k=0}^m \Lambda^k V$, $m = \dim V$, spolu s vnějším součinem, nazýváme *vnější algebra* (nad V). Vektorový prostor $S(V) = \oplus_{k=0}^\infty S^k V$, spolu se symetrickým součinem nazýváme *symetrická algebra* (nad V). Podobně máme obecnou *tensorovou algebru* $T(V)$, která je definována jako vektorový prostor $\oplus_{k=0}^\infty V^{\otimes k}$ se součinem daným tensorovým součinem $\otimes$. Tensory, které jsou vyjádřitelné jako součin příslušného počtu vektorů z V, nazýváme *rozložitelné*.

13.12. Duální prostory. Nechť V je (konečněrozměrný) vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a V^* jeho duální prostor, tj. vektorový prostor všech lineárních forem na V.

Připomeňme, že prostor všech lineárních zobrazení $\varphi\colon V\to W$, kde W je libovolný další vektorový prostor konečné dimenze nad týmž polem skalárů, můžeme ztotožnit s tensorovým součinem $W\otimes V^*$, a to prostřednictvím přiřazení $w\otimes v^*\mapsto (v\mapsto \langle v,v^*\rangle .w)$, viz. 8.30.

Analogicky pak $W\otimes (V^*)^{\otimes k}$ je prostor všech k-lineárních zobrazení na V s hodnotami ve W, $W\otimes\Lambda^k V^*$ a $W\otimes S^k V^*$ jsou prostory všech k-lineárních antisymetrických zobrazení a k-lineárních symetrických zobrazení s hodnotami v W.

Specielně pro $W=\mathbb{K}$ dostáváme příslušné prostory multilineárních forem na V. Lineární automorfismy na V jsou pak právě tensory ve $V\otimes V^*$.

13.13. Báze. Nechť $e_1,\dots,e_n$ je báze V a $e^1,\dots,e^n$ duální báze ve V^*. Pak

$$\begin{aligned} e^*_{j_1}\otimes\dots\otimes e^*_{j_k}, &\qquad 1\le j_1,\dots,j_k\le n\\ e^*_{j_1}\wedge\dots\wedge e^*_{j_k}, &\qquad j_1<\dots<j_k\\ \tfrac{1}{i_1!\dots i_n!}(e^*_{j_1})^{i_1}\vee\dots\vee(e^*_{j_k})^{i_n}, &\qquad i_1+\dots+i_n=k \end{aligned}$$

jsou příslušné duální báze ke standardním bazím na $(V^*)^{\otimes k}$, $\Lambda^k V$ a S^k. Ověřte!

Jako jednoduché cvičení si ověřte, že v případě $V\otimes V^*$ tvoří souřadnice tensoru v příslušné standardní bázi právě matici odpovídajícího zobrazení v původní bázi na V. Obecné tensory pak dávají něco jako matice multilineárních zobrazení, ty však samozřejmě mohou mít mnoho indexů místo právě dvou. Vhodná konvence (standardně užívaná v geometrii) je, že u souřadnic tensorů píšeme indexy odpovídající kopiím V jako horní, indexy odpovídající kopiím V^* jako dolní. U označování bázových prvků je tomu pak naopak a implicitně se ve formulích sčítá, kdykoliv se objeví stejný index jednou nahoře a jednou dole.

Dále můžete ověřit, že při změně původní báze na V prostřednictvím matice A dostaneme příslušné transformační zákony pro souřadnice na prostorech tensorů tak, že pro každý výskyt V^* násobíme jednou maticí A^{-1}, pro každý výskyt V jednou maticí A.

13.14. Kontrakce. Vektorový prostor V lze také považovat za prostor lineárních forem na V^*, kde $v(v^*)=\langle v,v^*\rangle$. Kdykoliv uvažujeme tensorový součin $V^{\otimes k}\otimes(V^*)^{\otimes\ell}$, $k,\ell>0$, jako ℓ-lineární zobrazení s hodnotami ve $V^{\otimes k}$, máme pro každou vybranou kopii V ve $V^{\otimes k}$ a V^* ve $(V^*)^{\otimes\ell}$ definovánu tzv. *kontrakci*, která je tensorem ve $V^{\otimes(k-1)}\otimes(V^*)^{\otimes(\ell-1)}$:

Pro $\alpha\in V^{\otimes(k-1)}\otimes(V^*)^{\otimes(\ell-1)}$ je $\alpha(v_1^*,\dots,v_k^*,v_1,\dots,v_\ell)\in\mathbb{K}$ a kontrakci $\operatorname{Tr}\alpha$ i-té a j-té komponenty definujeme předpisem

$$\begin{aligned} &\operatorname{Tr}\alpha(v_1^*,\dots,v_{k-1}^*,v_1,\dots,v_{\ell-1})=\\ &\qquad=\sum_p \alpha(v_1^*,\dots,v_{i-1}^*,e^p,v_{i+1}^*,\dots,v_k^*,v_1,\dots,v_{j-1},e_p,v_{j+1},\dots,v_\ell) \end{aligned}$$

V případě $k=\ell=1$ jde přesně o vyčíslení lineárních forem na vektorech.

Bez souřadnic lze kontrakci názorně definovat tak, že $V^{\otimes k}\otimes(V^*)^{\otimes\ell}$ chápeme jako $(V^{\otimes(k-1)}\otimes(V^*)^{\otimes(\ell-1)})\otimes(V\otimes V^*)$, kde jsme dozadu přesunuli (isomorfismem) právě vybrané komponenty a kontrakce pak je definována na rozložitelných tensorech vztahem (pro jednoduchost uvažujeme $i=j=1$)

$$\operatorname{Tr}(v_1^*\otimes\dots\otimes v_k^*\otimes v_1\otimes\dots\otimes v_\ell)=\langle v_1,v_1^*\rangle v_2^*\otimes\dots\otimes v_k^*\otimes v_2\otimes\dots\otimes v_\ell.$$

Je-li $k = \ell$, máme k dispozici tzv. *úplnou kontrakci* $V^{\otimes k} \otimes (V^*)^k \to \mathbb{K}$. Budeme ji značit stejně jako vyčíslení forem $\langle\ ,\ \rangle$, což je speciální případ.

13.15. Operátor i_X. V případech symetrických tensorů nezávisí kontrakce na výběru kopií V a V^*, u antisymetrických se mění pouze znaménko a zavádíme konvenci, že vždy kontrahujeme přes první indexy. Dostáváme tak pro $x \in \Lambda^p V$, resp. $y^* \in \Lambda^p V^*$ zobrazení splňující

$$i_X \colon \Lambda^{p+q} V^* \to \Lambda^q V^*, \quad \langle z, i_x(w^*)\rangle = \langle z \wedge x, w^*\rangle$$
$$i_{y^*} \colon \Lambda^{p+q} V \to \Lambda^q V, \quad \langle i_{y^*}(w), z^*\rangle = \langle w, y^* \wedge x^*\rangle.$$

Ověřte si, že takto definovaná operace i je rovna kompozici

$$\tfrac{1}{p!q!} \operatorname{Alt} \circ c \circ (\iota \otimes \iota) \colon \Lambda^{p+q} V \otimes \Lambda^p V^* \to V^{\otimes(p+q)} \otimes (V^*)^{\otimes p} \to V^{\otimes q} \to \Lambda^q V$$

kde c je kontrakce přes prvních p kopií V.Analogická formule platí i pro duální případ (se stejným koeficientem).

Podobně se definuje také operace vložení i_y pro symetrické tensory.

14. Cvičení k přednáškám

14.1. Vlastnosti skalárů

Zopakujte si vlastnosti tělesa komplexních čísel $\mathbb{C}$.

Všimněte si vlastností sčítání a násobení, rozeberte si $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ jako podmonožiny se zúženými operacemi (grupa, okruh, dělitelé nuly, apod.; zadefinujte zbytkové třídy Z_k)

Uvědomte si strukturu reálného vektorového prostoru na $\mathbb{C}$.

Počítejte inverzní prvky vzhledem k násobení, $(a+ib)^{-1} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$, např. $(1+2i)^{-1}$ apod. Vzpomněte goniometrické tvary, mocniny, atd.

Připomeňte si běžné geometrické transformace z rovinné a prostorové geometrie (např. podobnosti, projekce, reflexe, otáčení apod.)

14.2. Vektory a počítání s maticemi

1. Zopakujte pojmy sloupce matice, řádky matice, operace sčítání a násobení. Vynásobte několik příkladů matic, najděte nějaké dělitele nuly. Např. pro $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ spočtěte A^2, A^3 (obecně A^k?).

2. Jednoduché systémy rovnic řešte Gausovou eliminací (převod na trojúhelníkový tvar.) Volte více příkladů.

3. Uvažme matice nad $\mathbb{Z}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -7 \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Spočtěte (pokud je definováno) EI, IE, $D^3+4DH-H^2$, G^2-3F, $A-F$, $A-GFA$, $BACE - BFB^T$ a další "polynomiální výrazy" dle vlastní volby.

4. Najděte matice pro elementární řádkové a sloupcové transformace.

5. Některé matice z příkladu 1 upravte na řádkový (sloupcový) schodovitý tvar.

6. Najděte inverzní matici B^{-1} k $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ metodou současných úprav s jednotkovou maticí. Totéž pro (čtvercové) matice z předchozích příkladů, pro matici $C = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & i \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{C}$, (čtvercové) matice z příkladu 1, a matici typu n/n

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Řešte maticové rovnice, např.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

výpočtem inverze i přímým výpočtem.

14.3. Vektorové prostory, lineární závislost

1. Zjistěte, zda množina $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$ s operacemi $x \oplus y = x.y$, $a \odot x = x^a$ pro $x, y \in \mathbb{R}_+$, $a \in \mathbb{R}$ tvoří vektorový prostor. Pokud ano, určete jeho bázi a dimenzi.

2. Podle obecné teorie musí být $\mathbb{R}_+$ z předchozího cvičení izomorfní s $\mathbb{R}^1$. Jaký je izomorfismus? (Pro každou volbu báze $b \in \mathbb{R}_+$ a $1 \in \mathbb{R}^1$ dostaneme právě jeden.)

3. Zjistěte, zda daná množina tvoří vektorový podprostor v $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} M &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0\} \\ M &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x = y\} \\ M &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x.y \geq 0\} \\ M &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x = y+1\}. \end{aligned}$$

Určete vždy podprostor generovaný M.

4. Prověřte lineární závislost vektorů

$$(1, -\sqrt{2}, -01),\ (1-\sqrt{2}, 2, 1+\sqrt{2}),\ (1, -\sqrt{2}-1, -\sqrt{2}-1)$$

v $\mathbb{R}^3$ nad skaláry $\mathbb{R}$ a v $\mathbb{R}^3$ nad skaláry $\mathbb{Q}$.

5. Prověřte lineární závislost polynomů v $\mathbb{R}_2[x]$.
a) $1+x,\ 1-x,\ 2+x-x^2$
b) $1-x,\ x-x^2,\ x^2-1$

6. Zjistěte, zda jsou lineárně závislé matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ve vektorovém prostoru $\mathrm{Mat}_2\mathbb{R}$.

7. Uvažujte $\mathbb{R}$ jako vektorový prostor nad $\mathbb{Q}$. Je $\sqrt{8} \in \langle 1, \sqrt{2}\rangle$? Je $\sqrt{3} \in \langle 1, \sqrt{2}\rangle$?

8. Zjistěte, zda
a) $(1,1,1,1)$ patří do $\langle (1,0,1,2), (0,0,1,3), (0,1,0,2)\rangle \subset \mathbb{R}^4$
b) $(-1,-4,7) \in \mathbb{R}^3$ patří do

$$\langle (1,-2,3), (-2,1,-1), (0,-3,5), (-2,-5,3), (-1,-1,2)\rangle.$$

9. Doplňte množiny do báze $\mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} M &= \{(1,-1,0,2), (0,2,1,3), (2,0,1,7)\} \\ M &= \{(-1,1,0,0,), (0,-1,1,0), (0,0,-1,1)\}. \end{aligned}$$

14.4. Báze vektorových prostorů

1. Určete nějakou bázi vektorového podprostoru

$$M\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$$

a doplňte ji na bázi $\mathbb{R}^n$. Vzpomeňte přitom, jak funguje Steinitzova věta o výměně.

2. Nechť $P_1 = \langle M_1 \rangle$, $P_2 = \langle M_2 \rangle$ v $\mathbb{R}^4$, kde

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(4,0,-2,6),(2,1,-2,3),(3,1,-2,4)\} \\ M_2 &= \{(1,-1,0,2),(2,2,-1,3),(0,1,1,0)\} \end{aligned}$$

Najděte $P_1 + P_2$, $P_1 \cap P_2$, jejich báze a dimenze. (Připomeňte si přitom větu $\dim P_1 + \dim P_2 = \dim(P_1 + P_2) + \dim(P_1 \cap P_2)$.)

3. V $\mathbb{R}_5[x]$ najděte bázi podprostorů
a) $P_1 = \{f \in \mathbb{R}_5[x]; f(x) = f(-x)\}$
b) $P_2 = \{f \in \mathbb{R}_5[x]; f(x) = -f(-x)\}$
c) $P_3 = \{f \in \mathbb{R}_5[x]; f(1) = f(2) = 0\}$.
Určete také $P_1 \cap P_3$, $P_2 + P_3$.

4. Najděte souřadnice vektoru v dané bázi.
a) $v = (2,1,1) \in \mathbb{R}^3$, $\underline{u} = ((2,7,3),(3,9,4),(1,5,3))$
b) $v = (2,1,1) \in \mathbb{R}^3$, $\underline{u} = ((1,0,1),(1,0,0),(1,1,1))$
c) $v = x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{R}_4[x]$, $\underline{u} = (1 + x^3, x + x^3, x^2 + x^3 + x^4, x^3)$
d) $v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{23}(\mathbb{R})$ s bazí

$$\begin{aligned} \underline{u} = \Bigg(&\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ &\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Bigg) \end{aligned}$$

14.5. Souřadnice a lineární zobrazení

1. Připomeňte si pojem souřadnic vektoru v dané bázi a napište souřadnice vektoru $(1,1,1,1) \in \mathbb{R}^4$ v bázi
a) $\underline{u} = ((-1,0,0,0),(-1,-1,0,0),(-1,-1,-1,0),(0,0,1,-1))$
b) $\underline{v} = ((0,0,0,-5),(1,2,3,1),(1,0,-1,0),(0,1,1,0))$.

2. Zjistěte, zda je zobrazení $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineární.
a) $f(x,y) = (x, y^2)$
b) $f(x,y) = (2x + 3y, x - y)$
c) $f(x,y,z) = (x + y, x - y, x + z + 2)$
d) $f(x,y,z) = (x - 17y + z, 2x - 5y, 13y - z)$

3. Připomeňte si pojem matice zobrazení. V prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardní bazí $\underline{u} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ napište matice následujících zobrazení
a) identického zobrazení $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
b) kolmé projekce do osy generované vektorem $(1,0,0)$
c) kolmé projekce do roviny generované vektory $(0,1,0),(0,0,1)$
d) násobení pevně zvoleným skalárem $a \in \mathbb{R}$.
Zapište tato zobrazení způsobem použitým v předchozím cvičení.

4. V reálném vektorovém prostoru $V = \mathbb{C}$, tj. $\dim V = 2$, najdětete nutnou a dostatečnou podmínku pro to, aby obecné lineární zobrazení $\varphi\colon V \to V$ bylo také lineární jako zobrazení mezi (1-rozměrnými) komplexními vektorovými prostory.

5. V prostoru $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$ napište matici zobrazení (ve standardní bázi), která každý vektor $(p, q) \in \mathbb{C}^2$ zobrazí na (ip, iq). (Matice bude v $\mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$.)

6. Napište matici $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})_{\underline{u},\underline{v}}$ identického zobrazení na $\mathbb{R}^4$ v bazích $\underline{u}$, $\underline{v}$ ze cvičení 1, tzv. matici přechodu. Napište také $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})_{\underline{v},\underline{u}}$ a uvědomte si jak se tyto matice použijí pro převod souřadnic vektorů z jedné báze do druhé.

7. V prostoru polynomů $\mathbb{R}_3[x]$ uvažme báze $\underline{u} = (1, x, x^2, x^3)$ a $\underline{v} = (1 + x, 1 - x, x^2 + x^3, x^2 - x^3)$. Najděte matice přechodu od $\underline{u}$ k $\underline{v}$ a naopak. Použijte je k převodu souřadnic několika polynomů.

8. Nechť $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ je matice zobrazení $f\colon \mathbb{C}_3[x] \to \mathbb{C}_1[x]$ v bazích $\underline{v}$ z předchozího cvičení a standardní $(1, x)$ na $\mathbb{C}_1[x]$. Najděte obrazy polynomů $2x - x^3$, $1 + x^2$, $1 + x + x^2 + x^3$.

9. Ve standardních bazích na $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^5$ je dáno zobrazení f maticí A, g maticí B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Uvědomte si odkud kam tato zobrazení jdou a najděte matice jejich kompozic. Zjistěte, zda půjde o izomorfismus.

14.6. Lineární zobrazení II

1. Nechť $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ je lineární zobrazení dané vztahem $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4, 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4, x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$.

a) Najděte báze jádra $\mathrm{Ker} f$ a obrazu $\mathrm{Im} f$.

b) Doplňte bázi $\mathrm{Im} f$ na bázi celého $\mathbb{R}^4$, nejlépe bazí $\mathrm{Ker} f$, pokud to půjde (promyslete si), a napište matici f v této nové bázi.

2. Matice lineárního zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ v bázi $\underline{u} = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0))$ je

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Zjistěte, zda je f izomorfismus.

b) Pokud ano, najděte matici inverzního zobrazení ve standardní bázi.

3. Ve standardních bazích $\mathbb{R}_4[x]$ a $\mathbb{R}_8[x]$ určete matici zobrazení, které je definováno jako násobení pevně zvoleným polynomem $g \in \mathbb{R}_4[x]$.

a) Zvolte sami několik různých g a najděte vždy dimenzi jádra příslušného zobrazení.

b) Zjistěte dimenzi obrazu podprostoru $\langle x^2 + x^3, x - x^4 \rangle$ při některé volbě.

Promyslete si dobře, co je skutečně nutné počítat v bodech a), b).

4. Určete dimenzi obrazu a jádra zobrazení, které je definováno jako násobení maticí $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ v $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$

a) zprava

b) zleva.

5. Najděte dimenzi a bázi obrazu průniku podprostorů V_1 a $V_2 \subset \mathbb{R}^4$ při zobrazení $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$. Přitom $f(x, y, z, w) = (x + 2y + 3z + w, 2x - 3y - z - 12w, -x + y + 5w, -y - z - 2w, 2x - 3y - z - 12w)$, $V_1 = \langle (2, -1, -1, 1), (-2, 3, 1, -1) \rangle$, $V_2 = \langle (0, 2, 0, 0), (1, 1, 1, 1) \rangle$. Dále zjistěte dimenzi vzoru podprostoru $W \subset \mathbb{R}^5$, generovaného vektorem $(1, 1, 1, 1, 1)$.

14.7. Permutace a determinanty

1. Uvědomte si souvislost permutace σ na množině $X = \{1, \dots, n\}$ s pořadím $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$.

a) Pro permutace $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ spočtěte kompozice $\sigma \circ \pi$, $\pi \circ \sigma$ a pro všechny čtyři předchozí permutace spočtěte jejich paritu (z definice pomocí počtu inverzí).

b) Napište π a σ jako součiny transpozic.

2. Nechť permutace π na $X = \{1, \dots, n\}$ je definována pomocí cyklu na k prvcích v X, $k \geq 1$, a ostatní prvky nechť jsou samodružné. k nazýváme délka cyklu π. Ukažte, že parita této permutace je $\mathrm{sgn}(\pi) = (-1)^{k-1}$. Odtud pak plyne, že je-li permutace σ součinem cyklů $\pi_1, \dots, \pi_s$, o délkách $k_1, \dots, k_s$ pak parita je $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{\sum_{i=1}^{s} k_s - s}$.

3. Pro transpozici $\sigma = (1, \dots, j, \dots, i, \dots, n)$ platí $\mathrm{sgn}\sigma = \Pi_{i>j} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$. Dokažte, že tentýž vztah platí pro libovolnou permutaci σ. (Návod: Užijte vztah pro paritu součinu permutací a větu, že každá permutace je součinem transpozic.)

4. Rozložte následující permutace dané pořadím na cykly a spočtěte jejich paritu.

a) $(9, 4, 5, 1, 6, 2, 8, 3, 10, 7)$

b) $(9, 19, 5, 18, 10, 13, 20, 3, 12, 15, 11, 1, 4, 16, 8, 2, 17, 6, 7, 14)$.

5. Určete paritu permutací:

a) $(n, n-1, \dots, 2, 1)$

b) $(1, 3, 5, \dots, 2n-3, 2n-1, 2, 4, \dots, 2n)$

c) $(2, 3, 1, 5, 6, 4, \dots, 3n-1, 3n, 3n-2)$.

6. Vypočtěte determinant dle definice: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

7. Spočtěte determinanty matic

a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1+i & i \\ 3-i & 2+i \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & -5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}$.

14.8. Výpočet determinantů a inverzních matic

1. Spočtěte úpravou na trojúhelníkový tvar nebo vhodným Laplaceovým rozvojem deteminanty matic

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 5 & 0 & 6 & 0 \\ 5 & 6 & 6 & 7 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Vypočtěte determinanty n-tého řádu z matice $D_n \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.

a) $D_{2n} = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & \dots & 0 & 0 & \dots & b & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & c & d & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots & \\ 0 & c & \dots & 0 & 0 & \dots & d & 0 \\ c & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & d \end{pmatrix}$

b) $D_n = \begin{pmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{pmatrix}$

3. Spočtěte inverzní matice k daným maticím metodou využívající přímé a zpětné Gausovy eliminace a použitím algebraicky adjungované matice.

a) $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 & -2 \\ -1 & -6 & -11 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 0 \end{pmatrix}$

d) Všimněte si, že všechny tři matice mají determinant ± 1, proto výsledné inverzní matice jsou celočíselné. Vzpomeňte obecný výsledek, který toto zajišťuje (A^{-1} existuje právě, když $|A|$ je invertibilní skalár!)

14.9. Systémy lineárních rovnic I

1. Řešte systémy rovnic (a diskutujte jejich řešitelnost pro různé okruhy skalárů).

(1)
$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 10 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -9 \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} 12x_1 - x_2 + 5x_3 &= 30 \\ 3x_1 - 13x_2 + 2x_3 &= 21 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 15 \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 17x_3 - 29x_4 - 36x_5 &= 22 \\ 2x_1 - 3x_2 + 18x_3 - 27x_4 + 33x_5 &= 21 \\ 12x_1 - 18x_2 + 102x_3 - 174x_4 - 216x_5 &= 132 \\ 2x_1 - 3x_2 + 21x_3 - 24x_4 - 30x_5 &= 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 24x_3 - 21x_4 - 27x_5 &= 19 \end{aligned}$$

2. Diskutujte řešení předchozích rovnic z hlediska řešení příslušných homogenních systémů a najděte fundamentální sytémy řešení pro skaláry $\mathbb{R}$.

3. Najděte takový systém rovnic nad $\mathbb{R}$, aby platilo

(1) množina jeho řešení je $\{(1 + 2s - t, 2t, -1 + s - t)^T \in \mathbb{R}^3; s, t \in \mathbb{R}\}$

(2) jeho fundamentální systém řešení je $\{(1, 0, 0, 2, 1), (0, 1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0, 2)\}$

Umíte najít všechny takové systémy?

4. Řešte systém rovnic s parametrem $\alpha \in \mathbb{K}$, uvažte přitom možnosti $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \alpha x_3 &= 1 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 &= 1 \\ \alpha x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

5. Nad $\mathbb{R}$ řešte maticovou rovnici

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Diskutujte přitom možnost nalezení inverzní matice, příp. použití fundamentálních systémů řešení homogeního systému.

14.10. Systémy lineárních rovnic II

1. Najděte fundamentální systém řešení následujícího systému lineárních rovnic a fundamentální systém řešení příslušného homogenního systému.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Řešte nad skaláry $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_7$. Diskutujte přitom použití Cramerova pravidla i Gausovy eliminace.

2. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ najděte průnik podprostorů V_1 a V_2 zadaných generátory $V_1 = \langle(1,1,1,1),(1,0,1,0)\rangle$, $V_2 = \langle(1,1,0,0),(0,1,1,1),(0,1,1,0)\rangle$.

Spočtěte také průnik součtu $V_1 + V_2$ s podprostorem generovaným vektorem $(1,-2,3,-4)$. (Hodí se v tomto případě Crammerovo pravidlo?)

3. Považujte generátory podprostorů V_1 a V_2 z předchozího cvičení za prvky v $(Z_2)^4$, $(Z_3)^4$, resp. $\mathbb{C}^4$, a řešte znovu stejnou úlohu. Zejména si uvědomte, kolik prvků mají diskutované prostory a podprostory.

4. V prostoru polynomů $\mathbb{R}_6[x]$ uvažte podprostory $V_1 = \langle x^2 + 2x^3, -x^3 + x^6\rangle$, $V_2 = \langle 2 + x^2, -1 + x^6, x^2 + x^3 + 2x^4\rangle$, $V_3 = \langle x^2 + x^6, 1 + 3x^3 + x^5, x^3\rangle$ a spočtěte jejich průnik a $V_1 + V_2 + V_3$.

14.11. Vlastní vektory a vlastní hodnoty I

1. Dejte příklad zobrazení $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pro které je $\mathrm{Ker} A = \langle(1,0,0),(1,1,1)\rangle$, $\mathrm{Im} A = \langle(1,0,1)\rangle$.

2. Rozhodněte, zda existuje lineární zobrazení $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, které zobrazí postupně vektory $(1,2,-3),(2,1,-2),(1,-4,5)$ na vektory $(1,2),(2,3),(1,3)$.

3. Lineární zobrazení $f\colon \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ splňuje $f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$, $f\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$, $f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 3$, $f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$. Najděte vyjádření f pomocí prvků matic, jádro, obraz.

4. Zobrazení $A\colon \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_4[x]$ je definováno předpisem $A(f)(x) = f'''(x) - 2f''(x)$, kde čárky označují derivaci polynomů podle proměnné x. Ověřte, že A je lineární, spočtěte jeho jádro, obraz, vlastní hodnoty, vlastní vektory.

5. Nad skaláry $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ najděte vlastní hodnoty a vlastní vektory zobrazení $f\colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$, které je v bázi $((1,1,0),(1,-1,0),(0,0,1))$ dané maticí

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. Nad skaláry $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ najděte vlastní hodnoty a vlastní vektory zobrazení $f\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$, které je ve standardní bázi dané maticí $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

14.12. Vlastní hodnoty a vlastní vektory II

1. V $\mathbb{R}^3$ určete podprostor vlastních vektorů příslušných vlastní hodnotě 3 pro matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Zjistěte, zda je matice A podobná diagonální matici nad poli $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ (to nastane právě když vlastní vektory generují celý prostor $\mathbb{K}^3$).

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$

3. Nechť $\phi\colon V \to V$ je izomorfismus. Dokažte, že ϕ a ϕ^{-1} mají stejné podprostory vlastních vektorů a zjistěte závislost mezi vlastními hodnotami (jsou to převrácené hodnoty, nula tam být stejně nemůže).

4. Nad skaláry $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ najděte vlastní čísla a vlastní vektory matic

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

14.13. Vlastní hodnoty a vlastní vektory III

1. Zjistěte, jak závisí vlastní hodnoty a vlastní vektory matic A, B na parametrech α a β.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & 2+\alpha \end{pmatrix}$$

2. Najděte Jordanovy kanonické tvary matic A, B, C.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Spočtěte vlastní hodnoty a vlastní vektory matice $B = 3A^4 - 2A^3 + A^2 - A + 6E$ (aniž byste počítali B!)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

14.14. Afinní úlohy I

1. V rovině R_2 ja dán trojúhelník ABC. Označme po řadě A', B', C' středy jeho stran BC, AC, AB. Dokažte že v zaměření $\mathbb{R}^2$ platí

$$(A' - A) + (B' - B) + (C' - C) = 0.$$

2. Je dána přímka $p : 2x + 3y - 6 = 0$. Určete její parametrický popis. Jak se získá implicitní popis z parametrického?

3. Určete vzájemnou polohu polohu přímek

(1) $p : 2x - 3y + 4 = 0$, $q : 3x + 2y - 7 = 0$
(2) $p : (x, y) = (1, -1) + t(1, -2)$, $q : 2x + y - 1 = 0$
(3) $p : (x, y) = (2, 1) + t(-1, 3)$, $q : (x, y) = (1, 3) + t(2, -6)$

4. Zjistěte vzájmenou polohu rovin

(1) $\alpha : (x, y, z) = (1, -2, 3) + t(-1, 0, 1) + s(2, 1, 0)$
$\beta : (x, y, z) = (-1, 0, 1) + t(1, 1, 2) + s(-1, 3, 1)$
(2) $\alpha : (x, y, z) = (2, -1, 1) + t(1, 1, 1) + s(1, -1, 0)$
$\beta : x + y - 2z + 1 = 0$
(3) $\alpha : 2x - y + z - 9 = 0$, $\beta : x + y - z = 0$

5. Najděte parametrické vyjádření přímky v R_3 zadané

$$p : \begin{cases} 2x - y + z - 9 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Jak vypadají rovnice všech rovin procházejících danou přímkou p (tzv. svazek rovin)? Jak se získá jejich obecná rovnice z parametrického, resp. implicitního tvaru p.

Zadejte parametricky i implicitně přímku, resp. rovinu zadanou dvěmi, resp. třemi, body. Zadání volte sami.

6. Najděte příčku mimoběžek p, q procházející bodem M. Je dáno $M = (7, 0, 4)$, $p : (x, y, z) = (2, -1, 1) + t(1, 2, 1)$, $q : (x, y, z) = (1, 1, 1) + t(2, -1, 1)$ Jak se hledá příčka zadaná směrem?

14.15. Afinní úlohy II

afinní souřadnice, poměry, konvexnost

14.16. Prostory se skalalárním součinem I

1. Zjistěte, zda je zobrazení $g\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ skalární součin.

$$
\begin{aligned}
g(x,y) &= x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2\\
g(x,y) &= 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 5x_2y_2\\
g(x,y) &= x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2
\end{aligned}
$$

2. Zkuste na $\mathbb{R}^2$ najít takový skalární součin, aby vektory u a v na sebe byly kolmé
(1) $u = (1,2)$, $v = (2,3)$
(2) $u = (-5,2)$, $v = (10,-4)$

3. Grammovým-Schmidtovým ortogonalizačním procesem sestrojte ortonormální bázi podprostoru

$$L = \langle (1,1,-1,-1), (1,-1,1,1), (-1,-2,0,1) \rangle$$

ve standardním euklideovském $\mathbb{R}^4$.

4. Najděte ortogonální bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ se skalárním součinem definovaným vztahem $f \cdot g = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. Najděte matici přechodu od standardní báze $(1, x, x^2, x^3)$ do nalezené báze.

5. Najděte ortogonální průmět vektoru $(1,2,3)$ do podprostoru

$$L = \langle (-1,1,1), (1,1,1) \rangle.$$

14.17. Prostory se skalárním součinem II

1. Na vektorovém prostoru $\mathbb{C}_n[x]$ definujte skalární součin tak, aby byla báze $(1, x, \frac{1}{2!}x^2, \ldots, \frac{1}{n!}x^n)$ ortonormální.

2. Najděte ortonormální bázi podprostoru

$$L = \langle (3,2,-4,-6), (8,1,-2,-16), (5,12,-14,5), (11,3,4,-7) \rangle \subset \mathbb{R}^4$$

ve standardním euklideovském prostoru.

3. Nejděte ortonormální fundamentální systém řešení systému rovnic

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 0\\
4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 &= 0\\
2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 &= 0
\end{aligned}
$$

4. Pokud to jde, doplňte dané vektory na ortogonální bázi standardního euklidovského prostoru. (Kolik máme možností?)
(1) $u = (2, 2, 1)$, $v = (-2, 1, 2)$
(2) $u = (-3, 1, -2, 2)$, $v = (4, 2, -3, 2)$.

5. Určete všechny hodnoty parametrů a, b, c, pro které je matice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 2c \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 2b & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -a & -\frac{1}{\sqrt{2}} & c \end{pmatrix}$$

ortogonální. Pro tyto hodnoty spočtěte příslušný kanonický tvar. (Promyslete geometrické vlastnosti transformace!)

6. Zkuste definovat na $\mathbb{R}^3$ dva skalární součiny tak, aby zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, -x_1 + x_2, x_3)$, bylo ortogonální.

14.18. Ortogonální průměty a ortogonální zobrazení

1. Najděte ortogonální doplněk podprostoru

$$P = \langle(-1, 2, 0, 1), (3, 1, -2, 4), (-4, 1, 2, -4)\rangle$$

v $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem. Pak najděte kolmé průměty vektorů standardní báze do P a $P^\perp$.

2. Nechť je $L = \langle u, v, w\rangle \subset \mathbb{R}^4$. Nejděte kolmý průmět vektoru z do L a $L^\perp$.
(1) $z = (4, 2, -5, 3)$, $u = (5, 1, 3, 3)$, $v = (3, -1, -3, 5)$, $w = (3, -1, 5, -3)$
(2) $z = (2, 5, 2, -2)$, $u = (1, 1, 2, 8)$, $v = (0, 1, 1, 3)$, $w = (1, -2, 1, 1)$

3. Najděte (přímým výpočtem) všechny ortogonální a unitární matice řádu 2, pak všechny ortogonální s kladným determinantem.

4. Zjistěte, zda je ortogonální transformace daná maticí

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

kompozicí reflexe a rotace, či zda se jedná pouze o rotaci, a najděte osu a úhel této rotace.

14.19. Bilineární a kvadratické formy

1. Zjistěte, zda je zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bilineární forma na $\mathbb{R}^2$. Pokud ano, rozhodněte, zda je symetrická nebo antisymetrická.
(1) $f(x, y) = x_1 y_2$
(2) $f(x, y) = x_1 y_1 + 2y_2 - 12$
(3) $f(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_1 y_1$

2. Určete hodnost bilineární formy $f(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_1 - x_2y_2 + 3x_3y_2$ na $\mathbb{R}^3$ a najděte její matici v
(1) standardní bázi $\mathbb{R}^3$
(2) v bázi $(1,1,1), (0,1,1), (1,0,1)$

3. Uvažme bilineární formu $h(x,y) = 2x_1y_1 - 4x_1y_2 - 3x_2y_2 + 2x_2y_3 - 4x_3y_2 - x_3y_3$ definovanou na $\mathbb{C}^3$ a nechť $f(x)$ je jí definovaná kvadratická forma.
(1) Napište analytické vyjádření f.
(2) Najděte polární formu g pro f.

4. Určete hodnost kvadratické formy $f(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 8x_1x_3 - 2x_2x_3$, uvažujeme-li f jako formu na $\mathbb{C}^3$, resp. na $\mathbb{R}^5$.

5. Najděte diagonální tvar formy f na $\mathbb{R}^3$ pomocí algoritmu doplnění na čtverce
(1) f je daná formulí z předchozího cvičení
(2) $f(x,y) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 15x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$
(3) $f(x,y) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

14.20. Reálné a komplexní kvadratické formy

1. Najděte kanonické tvary kvadratických forem na $\mathbb{C}^3$ daných vztahy (2), (3) z cvičení 5 předchozí série. Najděte také příslušné polární báze.

2. Zjistěte vlastnosti reálných kvadratických forem, např. definitnost, pozitivní definitnost apod. (pozor na závislost na prostoru V na němž je forma definována)
(1) $f(x) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$
(2) $f(x) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3$
(3) $f(x) = -2x_1^2 - 8x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$

3. Najděte všechny hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$, pro které je kvadratická forma f na $\mathbb{R}^3$ positivně definitní, resp. negativně definitní (použijte Sylvestrovo kriterium)
(1) $f(x) = x_2^2 + x_3^2 + 4ax_1x_2 + a^2x_1x_3$
(2) $f(x) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-3)x_3^2 + 2x_1x_2 + 2ax_1x_3 + 2x_2x_3$

14.21. Metrické úlohy I

1. V rovině E_2 je dán obdélník $ABCD$. Dokažte že v jejím zaměření $\mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem platí $(A - M) \cdot (C - M) = (B - M) \cdot (D - M)$.

2. Ukažte, že ortogonální doplněk zaměření nadroviny v E_n zadané implicitně $\eta : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_0 = 0$ je generován tzv. normálovým vektorem $v = (a_1, \ldots, a_n)$.

Ukažte, že pro vzdálenost bodu $A = (y_1, \ldots, y_n)$ od η platí

$$\rho(A, \eta) = \frac{|a_1y_1 + \cdots + a_ny_n + a_0}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}.$$

3. Určete pro jaké vektory v E_2, E_3 platí

(1) $\|u+v\| = \|u-v\|$
(2) $\|u+v\| = \|u\| - \|v\|$
(3) $\|u+v\| \geq \|u\| - \|v\|$
(4) $\|u+v\| > \|u-v\|$

4. Najděte souřadnice vrcholů krychle $ABCDEFGH$, je-li $A=(1,-1,3)$, $B=(3,0,5)$, $D=(-1,1,4)$ (pokud existuje).

5. Napište rovnici přímky p, která obsahuje $M=(3,2)$ a s přímkou $q: \sqrt{3}x - y + 3 = 0$ svírá úhel $\frac{\pi}{3}$, resp. $\frac{\pi}{2}$.

6. Určete bod Q souměrný k bodu $P=(3,-1,4)$ podle přímky $p: (x,y,z) = (-7,-4,7)+t(4,3,-1)$.

7. Najděte osu mimoběžek $p: (x,y,z) = (0,-15,-6)+t(2,-1,3)$, $q: (x,y,z) = (3,4,2)+s(4,2,-3)$.

14.22. Metrické úlohy II

1. Ukažte, že odchylka dvou nadrovin je rovna odchylce jejich normálových vektorů.

2. Spočtěte výšku pravidelného čtyřstěnu $ABCD$ v E_3 a odchylky jeho protilehlých hran .

3. Spočtěte povrch a objem čtyřstěnu $ABCD$ v E_3 je-li $A=(1,-1,2)$, $B=(2,0,-2)$, $C=(3,-2,0)$, $D=(1,1,1)$.

4. Spočtěte objem a výšku čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ v E_3, je-li $A=(2,-1,2)$, $B=(0,0,5)$, $C=(-1,0,5)$, $D=(4,-3,-4)$, $V=(1,2,1)$. Dále určete odchylky jeho hran od podstavy.

14.23. Metrické úlohy III

1. Uvažme $n-1$ vektorů $u_1 = (x_{11},\dots,x_{1n}),\dots,u_{n-1} = (x_{(n-1)1},\dots,x_{(n-1)n})$ v standardním orientovaném euklidovském vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$. Dále uvažme matici

$$A = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{(n-1)1} & x_{(n-1)2} & \dots & x_{(n-1)n} \end{pmatrix}$$

Ukažte, že vektor $u_n = (A_{11},\dots,A_{1n})$, kde A_{ij} jsou algebraické doplňky prvků a_{ij} matice A má následující vlastnosti:

(1) u_n je kolmý na všechny $u_1,\dots,u_{n-1}$
(2) velikost vektoru $\|u_n\|$ je rovna (neorientovanému) objemu rovnoběžnostěnu zadaného vektory $u_1,\dots,u_{(n-1)}$
(3) $u_1,\dots,u_n$ je báze $\mathbb{R}^n$ kompatibilní s orientací.

V dimenzi 2 tak dostáváme obvyklý *vektorový součin* dvou vektorů u_1, u_2.

2. Najděte kanonické rovnice a osy kuželosečky dané ve standardní souřadné soustavě rovnicí

(1) $x^2 + y^2 + 4xy + 2x + 1 = 0$ (hyperbola s vrcholem v $(-\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ a osami ve směrech $(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$)
(2) $2x^2 - 3y^2 + 5xy + x + 10y - 3$ (dvě různoběžné přímky)

3. Napište rovnici kružnice procházející bodem $A = (1, 2)$ a dotýkající se přímek $p : x - y + 3 = 0$, $q : x - y - 1 = 0$.

14.24. Adjungovaná zobrazení

1. Lineární zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je dáno vztahem

$$\varphi(x, y, z) = (x - 2y + z, x + 3z, -y - z)$$

(1) Spočtěte duální zobrazení $\varphi^*\colon \mathbb{R}^{3*} \to \mathbb{R}^{3*}$
(2) adjungované zobrazení $\varphi^*\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu na $\mathbb{R}^3$.
(3) adjungované zobrazení $\varphi^*\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vzhledem ke skalárnímu součinu

$$\langle (x, y, z), (x', y', z') \rangle = 2xx' + xy' + x'y + 2yy' + yz' + y'z + zz'.$$

2. Na $\mathbb{C}^4$ se standardním skalárním součinem určete, kdy je samoadjungované zobrazení

$$\varphi(x, y, z, w) = (\alpha x, \beta y, \gamma z, \delta w)$$

pro $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$.

3. Na prostoru reálných polynomů stupně 2 se skalárním součinem daným $f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ spočtěte adjungované zobrazení k

(1) operaci derivování podle proměnné
(2) operaci násobení pevným polynomem
(3) operaci "zapomenutí monomů stupně 2"

4. Na $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem najděte adjungované zobrazení k promítání na vybraný podprostor ve směru doplňkového podprostoru. Kdy bude toto promítání samoadjungované?

Index