Cvičení k přednáškám

1. Vlastnosti skalárů

Zopakujte si vlastnosti tělesa komplexních čísel $\mathbb{C}$.

Všimněte si vlastností sčítání a násobení, rozeberte si $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ jako podmonožiny se zúženými operacemi (grupa, okruh, dělitelé nuly, apod.)

Uvědomte si strukturu reálného vektorového prostoru na $\mathbb{C}$.

Počítejte inverzní prvky vzhledem k násobení, $(a+ib)^{-1} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$, např. $(1+2i)^{-1}$ apod. Vzpomněte goniometrické tvary, mocniny, atd.

Připomeňte si běžné geometrické transformace z rovinné a prostorové geometrie (např. podobnosti, projekce, reflexe, otáčení apod.)

2. Vektory a počítání s maticemi

1. Zopakujte pojmy sloupce matice, řádky matice, operace sčítání a násobení. Vynásobte několik příkladů matic, najděte nějaké dělitele nuly. Např. pro $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ spočtěte A^2, A^3 (obecně A^k?).

2. Jednoduché systémy rovnic řešte Gausovou eliminací (převod na trojúhelníkový tvar.) Volte více příkladů.

3. Uvažme matice nad $\mathbb{Z}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -7 \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Spočtěte (pokud je definováno) EI, IE, $D^3 + 4DH - H^2$, $G^2 - 3F$, $A - F$, $A - GFA$, $BACE - BFB^T$ a další "polynomiální výrazy" dle vlastní volby.

4. Najděte matice pro elementární řádkové a sloupcové transformace.

5. Některé matice z příkladu 1 upravte na řádkový (sloupcový) schodovitý tvar.

6. Najděte inverzní matici B^{-1} k $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ metodou současných úprav s jednotkovou maticí. Totéž pro (čtvercové) matice z předchozích příkladů, pro matici $C = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & i \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{C}$, (čtvercové) matice z příkladu 1, a matici typu n/n

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Řešte maticové rovnice, např.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

výpočtem inverze i přímým výpočtem.

3. Vektorové prostory, lineární závislost

1. Zjistěte, zda množina $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$ s operacemi $x \oplus y = x.y$, $a \odot x = x^a$ pro $x, y \in \mathbb{R}_+$, $a \in \mathbb{R}$ tvoří vektorový prostor. Pokud ano, určete jeho bázi a dimenzi.

2. Podle obecné teorie musí být $\mathbb{R}_+$ z předchozího cvičení izomorfní s $\mathbb{R}^1$. Jaký je izomorfismus? (Pro každou volbu báze $b \in \mathbb{R}_+$ a $1 \in \mathbb{R}^1$ dostaneme právě jeden.)

3. Zjistěte, zda daná množina tvoří vektorový podprostor v $\mathbb{R}^2$

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0\}$$
$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = y\}$$
$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x.y \geq 0\}$$
$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = y + 1\}.$$

Určete vždy podprostor generovaný M.

4. Prověřte lineární závislost vektorů

$$(1, -\sqrt{2}, -01),\ (1 - \sqrt{2}, 2, 1 + \sqrt{2}),\ (1, -\sqrt{2} - 1, -\sqrt{2} - 1)$$

v $\mathbb{R}^3$ nad skaláry $\mathbb{R}$ a v $\mathbb{R}^3$ nad skaláry $\mathbb{Q}$.

5. Prověřte lineární závislost polynomů v $\mathbb{R}_2[x]$.
a) $1 + x$, $1 - x$, $2 + x - x^2$
b) $1 - x$, $x - x^2$, $x^2 - 1$

6. Zjistěte, zda jsou lineárně závislé matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ve vektorovém prostoru $\mathrm{Mat}_2\mathbb{R}$.

7. Uvažujte $\mathbb{R}$ jako vektorový prostor nad $\mathbb{Q}$. Je $\sqrt{8} \in \langle 1, \sqrt{2} \rangle$? Je $\sqrt{3} \in \langle 1, \sqrt{2} \rangle$?

8. Zjistěte, zda
a) $(1,1,1,1)$ patří do $\langle (1,0,1,2), (0,0,1,3), (0,1,0,2) \rangle \subset \mathbb{R}^4$
b) $(-1,-4,7) \in \mathbb{R}^3$ patří do

$$\langle (1,-2,3), (-2,1,-1), (0,-3,5), (-2,-5,3), (-1,-1,2) \rangle.$$

9. Doplňte množiny do báze $\mathbb{R}^4$

$$M = \{(1,-1,0,2), (0,2,1,3), (2,0,1,7)\}$$
$$M = \{(-1,1,0,0,), (0,-1,1,0), (0,0,-1,1)\}.$$

4. Báze vektorových prostorů

1. Určete nějakou bázi vektorového podprostoru

$$M\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$$

a doplňte ji na bázi $\mathbb{R}^n$. Vzpomeňte přitom, jak funguje Steinitzova věta o výměně.

2. Nechť $P_1 = \langle M_1 \rangle$, $P_2 = \langle M_2 \rangle$ v $\mathbb{R}^4$, kde

$$M_1 = \{(4,0,-2,6), (2,1,-2,3), (3,1,-2,4)\}$$
$$M_2 = \{(1,-1,0,2), (2,2,-1,3), (0,1,1,0)\}$$

Najděte $P_1 + P_2$, $P_1 \cap P_2$, jejich báze a dimenze. (Připomeňte si přitom větu $\dim P_1 + \dim P_2 = \dim(P_1 + P_2) + \dim(P_1 \cap P_2)$.)

3. V $\mathbb{R}_5[x]$ najděte bázi podprostorů
a) $P_1 = \{f \in \mathbb{R}_5[x]; f(x) = f(-x)\}$
b) $P_2 = \{f \in \mathbb{R}_5[x]; f(x) = -f(-x)\}$
c) $P_3 = \{f \in \mathbb{R}_5[x]; f(1) = f(2) = 0\}$.
Určete také $P_1 \cap P_3$, $P_2 + P_3$.

4. Najděte souřadnice vektoru v dané bázi.
a) $v = (2,1,1) \in \mathbb{R}^3$, $\underline{u} = ((2,7,3),(3,9,4),(1,5,3))$
b) $v = (2,1,1) \in \mathbb{R}^3$, $\underline{u} = ((1,0,1),(1,0,0),(1,1,1))$
c) $v = x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{R}_4[x]$, $\underline{u} = (1 + x^3, x + x^3, x^2 + x^3 + x^4, x^3)$
d) $v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{23}(\mathbb{R})$ s bazí

$$\underline{u} = \Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Big)$$

5. Souřadnice a lineární zobrazení

1. Připomeňte si pojem souřadnic vektoru v dané bázi a napište souřadnice vektoru $(1,1,1,1) \in \mathbb{R}^4$ v bázi
a) $\underline{u} = ((-1,0,0,0),(-1,-1,0,0),(-1,-1,-1,0),(0,0,1,-1))$
b) $\underline{v} = ((0,0,0,-5),(1,2,3,1),(1,0,-1,0),(0,1,1,0))$.

2. Zjistěte, zda je zobrazení $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineární.
a) $f(x,y) = (x, y^2)$
b) $f(x,y) = (2x + 3y, x - y)$
c) $f(x,y,z) = (x + y, x - y, x + z + 2)$
d) $f(x,y,z) = (x - 17y + z, 2x - 5y, 13y - z)$

3. Připomeňte si pojem matice zobrazení. V prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardní bazí $\underline{u} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ napište matice následujících zobrazení
a) identického zobrazení $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
b) kolmé projekce do osy generované vektorem $(1,0,0)$
c) kolmé projekce do roviny generované vektory $(0,1,0),(0,0,1)$
d) násobení pevně zvoleným skalárem $a \in \mathbb{R}$.
Zapište tato zobrazení způsobem použitým v předchozím cvičení.

4. V reálném vektorovém prostoru $V = \mathbb{C}$, tj. $\dim V = 2$, najdětete nutnou a dostatečnou podmínku pro to, aby obecné lineární zobrazení $\varphi\colon V \to V$ bylo také lineární jako zobrazení mezi (1-rozměrnými) komplexními vektorovými prostory.

5. V prostoru $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$ napište matici zobrazení (ve standardní bázi), která každý vektor $(p,q) \in \mathbb{C}^2$ zobrazí na (ip, iq). (Matice bude v $\mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$.)

6. Napište matici $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})_{\underline{u},\underline{v}}$ identického zobrazení na $\mathbb{R}^4$ v bazích $\underline{u}$, $\underline{v}$ ze cvičení 1, tzv. matici přechodu. Napište také $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})_{\underline{v},\underline{u}}$ a uvědomte si jak se tyto matice použijí pro převod souřadnic vektorů z jedné báze do druhé.

7. V prostoru polynomů $\mathbb{R}_3[x]$ uvažme báze $\underline{u} = (1, x, x^2, x^3)$ a $\underline{v} = (1 + x, 1 - x, x^2 + x^3, x^2 - x^3)$. Najděte matice přechodu od $\underline{u}$ k $\underline{v}$ a naopak. Použijte je k převodu souřadnic několika polynomů.

8. Nechť $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ je matice zobrazení $f\colon \mathbb{C}_3[x] \to \mathbb{C}_1[x]$ v bazích $\underline{v}$ z předchozího cvičení a standardní $(1, x)$ na $\mathbb{C}_1[x]$. Najděte obrazy polynomů $2x - x^3$, $1 + x^2$, $1 + x + x^2 + x^3$.

9. Ve standardních bazích na $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^5$ je dáno zobrazení f maticí A, g maticí B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Uvědomte si odkud kam tato zobrazení jdou a najděte matice jejich kompozic. Zjistěte, zda půjde o izomorfismus.

6. Lineární zobrazení II

1. Nechť $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ je lineární zobrazení dané vztahem $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4, 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4, x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$.

a) Najděte báze jádra $\mathrm{Ker} f$ a obrazu $\mathrm{Im} f$.

b) Doplňte bázi $\mathrm{Im} f$ na bázi celého $\mathbb{R}^4$, nejlépe bazí $\mathrm{Ker} f$, pokud to půjde (promyslete si), a napište matici f v této nové bázi.

2. Matice lineárního zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ v bázi $\underline{u} = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0))$ je

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Zjistěte, zda je f izomorfismus.

b) Pokud ano, najděte matici inverzního zobrazení ve standardní bázi.

3. Ve standardních bazích $\mathbb{R}_4[x]$ a $\mathbb{R}_8[x]$ určete matici zobrazení, které je definováno jako násobení pevně zvoleným polynomem $g \in \mathbb{R}_4[x]$.

a) Zvolte sami několik různých g a najděte vždy dimenzi jádra příslušného zobrazení.

b) Zjistěte dimenzi obrazu podprostoru $\langle x^2 + x^3, x - x^4 \rangle$ při některé volbě.

Promyslete si dobře, co je skutečně nutné počítat v bodech a), b).

4. Určete dimenzi obrazu a jádra zobrazení, které je definováno jako násobení maticí $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ v $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$

a) zprava

b) zleva.

5. Najděte dimenzi a bázi obrazu průniku podprostorů V_1 a $V_2 \subset \mathbb{R}^4$ při zobrazení $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$. Přitom $f(x,y,z,w) = (x+2y+3z+w, 2x-3y-z-12w, -x+y+5w, -y-z-2w, 2x-3y-z-12w)$, $V_1 = \langle (2,-1,-1,1), (-2,3,1,-1) \rangle$, $V_2 = \langle (0,2,0,0), (1,1,1,1) \rangle$. Dále zjistěte dimenzi vzoru podprostoru $W \subset \mathbb{R}^5$, generovaného vektorem $(1,1,1,1,1)$.

7. Permutace a determinanty

1. Uvědomte si souvislost permutace σ na množině $X = \{1,\dots,n\}$ s pořadím $(\sigma(1),\dots,\sigma(n))$.

a) Pro permutace $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ spočtěte kompozice $\sigma \circ \pi$, $\pi \circ \sigma$ a pro všechny čtyři předchozí permutace spočtěte jejich paritu (z definice pomocí počtu inverzí).

b) Napište π a σ jako součiny transpozic.

2. Nechť permutace π na $X = \{1,\dots,n\}$ je definována pomocí cyklu na k prvcích v X, $k \geq 1$, a ostatní prvky nechť jsou samodružné. k nazýváme délka cyklu π. Ukažte, že parita této permutace je $\mathrm{sgn}(\pi) = (-1)^{k-1}$. Odtud pak plyne, že je-li permutace σ součinem cyklů $\pi_1,\dots,\pi_s$, o délkách $k_1,\dots,k_s$ pak parita je $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{\sum_{i=1}^{s} k_s - s}$.

3. Pro transpozici $\sigma = (1,\dots,j,\dots,i,\dots,n)$ platí $\mathrm{sgn}\sigma = \Pi_{i>j} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$. Dokažte, že tentýž vztah platí pro libovolnou permutaci σ. (Návod: Užijte vztah pro paritu součinu permutací a větu, že každá permutace je součinem transpozic.)

4. Rozložte následující permutace dané pořadím na cykly a spočtěte jejich paritu.

a) $(9,4,5,1,6,2,8,3,10,7)$

b) $(9,19,5,18,10,13,20,3,12,15,11,1,4,16,8,2,17,6,7,14)$.

5. Určete paritu permutací:

a) $(n, n-1, \dots, 2, 1)$

b) $(1,3,5,\dots,2n-3,2n-1,2,4,\dots,2n)$

c) $(2,3,1,5,6,4,\dots,3n-1,3n,3n-2)$.

6. Vypočtěte determinant dle definice: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

7. Spočtěte determinanty matic

a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1+i & i \\ 3-i & 2+i \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & -5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}$.

8. Výpočet determinantů a inverzních matic

1. Spočtěte úpravou na trojúhelníkový tvar nebo vhodným Laplaceovým rozvojem deteminanty matic

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 5 & 0 & 6 & 0 \\ 5 & 6 & 6 & 7 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Vypočtěte determinanty n-tého řádu z matice $D_n \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.

a) $D_{2n} = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & \dots & 0 & 0 & \dots & b & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & c & d & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots & \\ 0 & c & \dots & 0 & 0 & \dots & d & 0 \\ c & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & d \end{pmatrix}$

b) $D_n = \begin{pmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{pmatrix}$

3. Spočtěte inverzní matice k daným maticím metodou využívající přímé a zpětné Gausovy eliminace a použitím algebraicky adjungované matice.

a) $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 & -2 \\ -1 & -6 & -11 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 0 \end{pmatrix}$

d) Všimněte si, že všechny tři matice mají determinant ± 1, proto výsledné inverzní matice jsou celočíselné. Vzpomeňte obecný výsledek, který toto zajišťuje (A^{-1} existuje právě, když $|A|$ je invertibilní skalár!)

9. Systémy lineárních rovnic I

1. Řešte systémy rovnic (a diskutujte jejich řešitelnost pro různé okruhy skalárů).

(1)
$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 10 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -9 \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} 12x_1 - x_2 + 5x_3 &= 30 \\ 3x_1 - 13x_2 + 2x_3 &= 21 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 15 \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 17x_3 - 29x_4 - 36x_5 &= 22 \\ 2x_1 - 3x_2 + 18x_3 - 27x_4 + 33x_5 &= 21 \\ 12x_1 - 18x_2 + 102x_3 - 174x_4 - 216x_5 &= 132 \\ 2x_1 - 3x_2 + 21x_3 - 24x_4 - 30x_5 &= 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 24x_3 - 21x_4 - 27x_5 &= 19 \end{aligned}$$

2. Diskutujte řešení předchozích rovnic z hlediska řešení příslušných homogenních systémů a najděte fundamentální sytémy řešení pro skaláry $\mathbb{R}$.

3. Najděte takový systém rovnic nad $\mathbb{R}$, aby platilo

(1) množina jeho řešení je $\{(1+2s-t, 2t, -1+s-t)^T \in \mathbb{R}^3; s, t \in \mathbb{R}\}$

(2) jeho fundamentální systém řešení je $\{(1,0,0,2,1), (0,1,1,1,0), (1,1,1,0,2)\}$

Umíte najít všechny takové systémy?

4. Řešte systém rovnic s parametrem $\alpha \in \mathbb{K}$, uvažte přitom možnosti $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \alpha x_3 &= 1 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 &= 1 \\ \alpha x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

5. Nad $\mathbb{R}$ řešte maticovou rovnici

$$(1)\qquad \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(2)\qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Diskutujte přitom možnost nalezení inverzní matice, příp. použití fundamentálních systémů řešení homogeního systému.

10. Systémy lineárních rovnic II

1. Najděte fundamentální systém řešení následujícího systému lineárních rovnic a fundamentální systém řešení příslušného homogenního systému.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Řešte nad skaláry $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_7$. Diskutujte přitom použití Cramerova pravidla i Gausovy eliminace.

2. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ najděte průnik podprostorů V_1 a V_2 zadaných generátory $V_1 = \langle (1,1,1,1),(1,0,1,0) \rangle$, $V_2 = \langle (1,1,0,0),(0,1,1,1),(0,1,1,0) \rangle$.

Spočtěte také průnik součtu V_1+V_2 s podprostorem generovaným vektorem $(1,-2,3,-4)$. (Hodí se v tomto případě Crammerovo pravidlo?)

3. Považujte generátory podprostorů V_1 a V_2 z předchozího cvičení za prvky v $(Z_2)^4$, $(Z_3)^4$, resp. $\mathbb{C}^4$, a řešte znovu stejnou úlohu. Zejména si uvědomte, kolik prvků mají diskutované prostory a podprostory.

4. V prostoru polynomů $\mathbb{R}_6[x]$ uvažte podprostory $V_1 = \langle x^2+2x^3, -x^3+x^6 \rangle$, $V_2 = \langle 2+x^2, -1+x^6, x^2+x^3+2x^4 \rangle$, $V_3 = \langle x^2+x^6, 1+3x^3+x^5, x^3 \rangle$ a spočtěte jejich průnik a $V_1+V_2+V_3$.

11. Vlastní vektory a vlastní hodnoty I

1. Dejte příklad zobrazení $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pro které je $\mathrm{Ker}A = \langle (1,0,0),(1,1,1) \rangle$, $\mathrm{Im}A = \langle (1,0,1) \rangle$.

2. Rozhodněte, zda existuje lineární zobrazení $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, které zobrazí postupně vektory $(1,2,-3),(2,1,-2),(1,-4,5)$ na vektory $(1,2),(2,3),(1,3)$.

3. Lineární zobrazení $f\colon \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ splňuje $f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$, $f\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$, $f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 3$, $f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$. Najděte vyjádření f pomocí prvků matic, jádro, obraz.

4. Zobrazení $A\colon \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_4[x]$ je definováno předpisem $A(f)(x) = f'''(x) - 2f''(x)$, kde čárky označují derivaci polynomů podle proměnné x. Ověřte, že A je lineární, spočtěte jeho jádro, obraz, vlastní hodnoty, vlastní vektory.

5. Nad skaláry $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ najděte vlastní hodnoty a vlastní vektory zobrazení $f\colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$, které je v bázi $((1,1,0),(1,-1,0),(0,0,1))$ dané maticí

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. Nad skaláry $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ najděte vlastní hodnoty a vlastní vektory zobrazení $f\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$, které je ve standardní bázi dané maticí $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

12. Vlastní hodnoty a vlastní vektory II

1. V $\mathbb{R}^3$ určete podprostor vlastních vektorů příslušných vlastní hodnotě 3 pro matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Zjistěte, zda je matice A podobná diagonální matici nad poli $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ (to nastane právě když vlastní vektory generují celý prostor $\mathbb{K}^3$).

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$

3. Nechť $\phi\colon V \to V$ je izomorfismus. Dokažte, že ϕ a ϕ^{-1} mají stejné podprostory vlastních vektorů a zjistěte závislost mezi vlastními hodnotami (jsou to převrácené hodnoty, nula tam být stejně nemůže).

4. Nad skaláry $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ najděte vlastní čísla a vlastní vektory matic

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

13. Vlastní hodnoty a vlastní vektory II

1. Zjistěte, jak závisí vlastní hodnoty a vlastní vektory matic A, B na parametrech α a β.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & 2+\alpha \end{pmatrix}$$

2. Najděte Jordanovy kanonické tvary matic A, B, C.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Spočtěte vlastní hodnoty a vlastní vektory matice $B = 3A^4 - 2A^3 + A^2 = A + 6E$ (aniž byste počítali B!)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. S využitím existence Jordanova kanonického tvaru dokažte pro komplexní matice větu Hamiltonovu-Caleyovu (tvrdí, že každá matice je kořenem svého charakteristického polynomu).

14. Komplexifikace a kanonické tvary reálných matic

1. Nechť $D\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ je lineární zobrazení dané derivací polynomů podle proměnné x. Ukažte, že komplexifikace reálných polynomů dá právě komplexní vektorový prostor polynomů téhož stupně nad $\mathbb{C}$ a $D^{\mathbb{C}}\colon \mathbb{C}_3[x] \to \mathbb{C}_3[x]$ je opět derivace podle proměnné x.

2. Projděte si podobně jako v prvním příkladě prostory reálných a komplexních matic a lineární zobrazení transpozice a násobení pevnou (reálnou) maticí zprava, resp. zleva.

3. Spočtěte Jordanův kanonický tvar reálné matice A nad $\mathbb{C}$. Pak diskutujte geometrické vlastnosti příslušného zobrazení $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (tj. při existenci komplexních kořenů najděte příslušnou invariantní rovinu, ve které je zobrazení dáno rotací a homotetií).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Proveďte totéž jako v předchozí úloze v závislosti na hodnotě parametru $a \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} a+2 & -2 & a+2 \\ a & 0 & a+2 \\ a-2 & 0 & a \end{pmatrix}$$

5. Nechť V je reálný vektorový prostor a uvažujme jeho komplexifikaci $V^{\mathbb{C}}$ jako reálný vektorový prostor $(V^{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$. Připomeňme si pojem komplexní konjugace na komplexifikaci a ukažte, že komplexifikaci posledního prostoru můžeme (jako komplexní vektorový prostor) ztotožnit s $V^{\mathbb{C}} \oplus \bar{V}^{\mathbb{C}}$.

15. Prostory se skalalárním součinem, I.

1. Zjistěte, zda je zobrazení $g\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ skalární součin.

$$g(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$
$$g(x,y) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 5x_2y_2$$
$$g(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$$

2. Zkuste na $\mathbb{R}^2$ najít takový skalární součin, aby vektory u a v na sebe byly kolmé
(1) $u = (1,2)$, $v = (2,3)$
(2) $u = (-5,2)$, $v = (10,-4)$

3. Grammovým-Schmidtovým ortogonalizačním procesem sestrojte ortonormální bázi podprostoru

$$L = \langle (1,1,-1,-1), (1,-1,1,1), (-1,-2,0,1) \rangle$$

ve standardním euklideovském $\mathbb{R}^4$.

4. Najděte ortogonální bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ se skalárním součinem definovaným vztahem $f \cdot g = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. Najděte matici přechodu od standardní báze $(1, x, x^2, x^3)$ do nalezené báze.

5. Najděte ortogonální průmět vektoru $(1,2,3)$ do podprostoru

$$L = \langle (-1,1,1), (1,1,1) \rangle.$$

16. Prostory se skalárním součinem, II.

1. Na vektorovém prostoru $\mathbb{C}_n[x]$ definujte skalární součin tak, aby byla báze $(1, x, \frac{1}{2!}x^2, \dots, \frac{1}{n!}x^n)$ ortonormální.

2. Najděte ortonormální bázi podprostoru

$$L = \langle (3,2,-4,-6), (8,1,-2,-16), (5,12,-14,5), (11,3,4,-7) \rangle \subset \mathbb{R}^4$$

ve standardním euklideovském prostoru.

3. Nejděte ortonormální fundamentální systém řešení systému rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 &= 0 \end{aligned}$$

4. Pokud to jde, doplňte dané vektory na ortogonální bázi standardního euklidovského prostoru. (Kolik máme možností?)
(1) $u = (2, 2, 1)$, $v = (-2, 1, 2)$
(2) $u = (-3, 1, -2, 2)$, $v = (4, 2, -3, 2)$.

5. Určete všechny hodnoty parametrů a, b, c, pro které je matice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 2c \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 2b & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -a & -\frac{1}{\sqrt{2}} & c \end{pmatrix}$$

ortogonální. Pro tyto hodnoty spočtěte příslušný kanonický tvar. (Promyslete geometrické vlastnosti transformace!)

6. Zkuste definovat na $\mathbb{R}^3$ dva skalární součiny tak, aby zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, -x_1 + x_2, x_3)$, bylo ortogonální.

17. Ortogonální průměty a zobrazení

1. Najděte ortogonální doplněk podprostoru

$$P = \langle (-1, 2, 0, 1), (3, 1, -2, 4), (-4, 1, 2, -4) \rangle$$

v $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem. Pak najděte kolmé průměty vektorů standardní báze do P a $P^\perp$.

2. Nechť je $L = \langle u, v, w \rangle \subset \mathbb{R}^4$. Nejděte kolmý průmět vektoru z do L a $L^\perp$.
(1) $z = (4, 2, -5, 3)$, $u = (5, 1, 3, 3)$, $v = (3, -1, -3, 5)$, $w = (3, -1, 5, -3)$
(2) $z = (2, 5, 2, -2)$, $u = (1, 1, 2, 8)$, $v = (0, 1, 1, 3)$, $w = (1, -2, 1, 1)$

3. Najděte (přímým výpočtem) všechny ortogální a unitární matice řádu 2, pak všechny ortogonální s kladným determinantem.

4. Zjistěte, zda je ortogonální transformace daná maticí

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

kompozicí reflexe a rotace, či zda se jedná pouze o rotaci, a najděte osu a úhel této rotace.

18. Bilineární a kvadratické formy

1. Zjistěte, zda je zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bilineární forma na $\mathbb{R}^2$. Pokud ano, rozhodněte, zda je symetrická nebo antisymetrická.
(1) $f(x,y) = x_1y_2$
(2) $f(x,y) = x_1y_1 + 2y_2 - 12$
(3) $f(x,y) = x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_1$

2. Určete hodnost bilineární formy $f(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_1 - x_2y_2 + 3x_3y_2$ na $\mathbb{R}^3$ a najděte její matici v
(1) standardní bázi $\mathbb{R}^3$
(2) v bázi $(1,1,1),(0,1,1),(1,0,1)$

3. Uvažme bilineární formu $h(x,y) = 2x_1y_1 - 4x_1y_2 - 3x_2y_2 + 2x_2y_3 - 4x_3y_2 - x_3y_3$ definovanou na $\mathbb{C}^3$ a nechť $f(x)$ je jí definovaná kvadratická forma.
(1) Napište analytické vyjádření f.
(2) Najděte polární formu g pro f.

4. Určete hodnost kvadratické formy $f(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 8x_1x_3 - 2x_2x_3$, uvažujeme-li f jako formu na $\mathbb{C}^3$, resp. na $\mathbb{R}^5$.

5. Najděte diagonální tvar formy f na $\mathbb{R}^3$ pomocí algoritmu doplnění na čtverce
(1) f je daná formulí z předchozího cvičení
(2) $f(x,y) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 15x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$
(3) $f(x,y) = x_1x_2 + x_1x_3 + x2x_3$

19. Reálné a komplexní kvadratické formy

1. Najděte kanonické tvary kvadratických forem na $\mathbb{C}^3$ daných vztahy (2), (3) z cvičení 5 předchozí série. Najděte také příslušné polární báze.

2. Zjistěte vlastnosti reálných kvadratických forem, např. definitnost, pozitivní definitnost apod. (pozor na závislost na prostoru V na němž je forma definována)
(1) $f(x) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$
(2) $f(x) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3$
(3) $f(x) = -2x_1^2 - 8x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$

3. Najděte všechny hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$, pro které je kvadratická forma f na $\mathbb{R}^3$ positivně definitní, resp. negativně definitní (použijte Sylvestrovo kriterium)
(1) $f(x) = x_2^2 + x_3^2 + 4ax_1x_2 + a^2x_1x_3$
(2) $f(x) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-3)x_3^2 + 2x_1x_2 + 2ax_1x_3 + 2x_2x_3$

20. Adjungovaná zobrazení

1. Lineární zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je dáno vztahem

$$\varphi(x,y,z) = (x - 2y + z, x + 3z, -y - z)$$

(1) Spočtěte duální zobrazení $\varphi^*\colon \mathbb{R}^{3*} \to \mathbb{R}^{3*}$
(2) adjungované zobrazení $\varphi^*\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu na $\mathbb{R}^3$.
(3) adjungované zobrazení $\varphi^*\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vzhledem ke skalárnímu součinu

$$\langle (x,y,z),(x',y',z')\rangle = 2xx' + xy' + x'y + 2yy' + yz' + y'z + zz'.$$

2. Na $\mathbb{C}^4$ se standardním skalárním součinem určete, kdy je samoadjungované zobrazení

$$\varphi(x,y,z,w) = (\alpha x, \beta y, \gamma z, \delta w)$$

pro $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$.

3. Na prostoru reálných polynomů stupně 2 se skalárním součinem daným $f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ spočtěte adjungované zobrazení k
(1) operaci derivování podle proměnné
(2) operaci násobení pevným polynomem
(3) operaci "zapomenutí monomů stupně 2"

4. Na $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem najděte adjungované zobrazení k promítání na vybraný podprostor ve směru doplňkového podprostoru. Kdy bude toto promítání samoadjungované?

21. Analytická geometrie I

1. V rovině R_2 ja dán trojúhelník ABC. Označme po řadě A', B', C' středy jeho stran BC, AC, AB. Dokažte že v zaměření $\mathbb{R}^2$ platí

$$(A' - A) + (B' - B) + (C' - C) = 0.$$

2. Je dána přímka $p : 2x + 3y - 6 = 0$. Určete její parametrický popis. Jak se získá implicitní popis z parametrického?

3. Určete vzájemnou polohu polohu přímek
(1) $p : 2x - 3y + 4 = 0$, $q : 3x + 2y - 7 = 0$
(2) $p : (x,y) = (1,-1) + t(1,-2)$, $q : 2x + y - 1 = 0$
(3) $p : (x,y) = (2,1) + t(-1,3)$, $q : (x,y) = (1,3) + t(2,-6)$

4. Zjistěte vzájmenou polohu rovin

(1) $\alpha : (x, y, z) = (1, -2, 3) + t(-1, 0, 1) + s(2, 1, 0)$
$\beta : (x, y, z) = (-1, 0, 1) + t(1, 1, 2) + s(-1, 3, 1)$
(2) $\alpha : (x, y, z) = (2, -1, 1) + t(1, 1, 1) + s(1, -1, 0)$
$\beta : x + y - 2z + 1 = 0$
(3) $\alpha : 2x - y + z - 9 = 0$, $\beta : x + y - z = 0$

5. Najděte parametrické vyjádření přímky v R_3 zadané

$$p : \begin{cases} 2x - y + z - 9 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Jak vypadají rovnice všech rovin procházejících danou přímkou p (tzv. svazek rovin)? Jak se získá jejich obecná rovnice z parametrického, resp. implicitního tvaru p.

Zadejte parametricky i implicitně přímku, resp. rovinu zadanou dvěmi, resp. třemi, body. Zadání volte sami.

6. Najděte příčku mimoběžek p, q procházející bodem M. Je dáno $M = (7, 0, 4)$, $p : (x, y, z) = (2, -1, 1) + t(1, 2, 1)$, $q : (x, y, z) = (1, 1, 1) + t(2, -1, 1)$ Jak se hledá příčka zadaná směrem?

22. Analytická geometrie II

1. V rovině E_2 je dán obdélník $ABCD$. Dokažte že v jejím zaměření $\mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem platí $(A - M) \cdot (C - M) = (B - M) \cdot (D - M)$.

2. Ukažte, že ortogonální doplněk zaměření nadroviny v E_n zadané implicitně $\eta : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_0 = 0$ je generován tzv. normálovým vektorem $v = (a_1, \ldots, a_n)$.

Ukažte, že pro vzdálenost bodu $A = (y_1, \ldots, y_n)$ od η platí

$$\rho(A, \eta) = \frac{|a_1y_1 + \cdots + a_ny_n + a_0}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}.$$

3. Určete pro jaké vektory v E_2, E_3 platí

(1) $\|u + v\| = \|u - v\|$
(2) $\|u + v\| = \|u\| - \|v\|$
(3) $\|u + v\| \geq \|u\| - \|v\|$
(4) $\|u + v\| > \|u - v\|$

4. Najděte souřadnice vrcholů krychle $ABCDEFGH$, je-li $A = (1, -1, 3)$, $B = (3, 0, 5)$, $D = (-1, 1, 4)$ (pokud existuje).

5. Napište rovnici přímky p, která obsahuje $M = (3, 2)$ a s přímkou $q : \sqrt{3}x - y + 3 = 0$ svírá úhel $\frac{\pi}{3}$, resp. $\frac{\pi}{2}$.

6. Určete bod Q souměrný k bodu $P = (3, -1, 4)$ podle přímky $p : (x, y, z) = (-7, -4, 7) + t(4, 3, -1)$.

7. Najděte osu mimoběžek $p : (x, y, z) = (0, -15, -6) + t(2, -1, 3)$, $q : (x, y, z) = (3, 4, 2) + s(4, 2, -3)$.

23. Analytická geometrie III

1. Ukažte, že odchylka dvou nadrovin je rovna odchylce jejich normálových vektorů.

2. Spočtěte výšku pravidelného čtyřstěnu $ABCD$ v E_3 a odchylky jeho protilehlých hran .

3. Spočtěte povrch a objem čtyřstěnu $ABCD$ v E_3 je-li $A = (1, -1, 2)$, $B = (2, 0, -2)$, $C = (3, -2, 0)$, $D = (1, 1, 1)$.

4. Spočtěte objem a výšku čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ v E_3, je-li $A = (2, -1, 2)$, $B = (0, 0, 5)$, $C = (-1, 0, 5)$, $D = (4, -3, -4)$, $V = (1, 2, 1)$. Dále určete odchylky jeho hran od podstavy.

24. Analytická geometrie IV

1. Uvažme $n-1$ vektorů $u_1 = (x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, u_{n-1} = (x_{(n-1)1}, \dots, x_{(n-1)n})$ v standardním orientovaném euklidovském vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$. Dále uvažme matici

$$A = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{(n-1)1} & x_{(n-1)2} & \dots & x_{(n-1)n} \end{pmatrix}$$

Ukažte, že vektor $u_n = (A_{11}, \dots, A_{1n})$, kde A_{ij} jsou algebraické doplňky prvků a_{ij} matice A má následující vlastnosti:

(1) u_n je kolmý na všechny $u_1, \dots, u_{n-1}$
(2) velikost vektoru $\|u_n\|$ je rovna (neorientovanému) objemu rovnoběžnostěnu zadaného vektory $u_1, \dots, u_{(n-1)}$
(3) $u_1, \dots, u_n$ je báze $\mathbb{R}^n$ kompatibilní s orientací.

V dimenzi 2 tak dostáváme obvyklý *vektorový součin* dvou vektorů u_1, u_2.

2. Najděte kanonické rovnice a osy kuželosečky dané ve standardní souřadné soustavě rovnicí

(1) $x^2 + y^2 + 4xy + 2x + 1 = 0$ (hyperbola s vrcholem v $(-\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ a osami ve směrech $(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$)
(2) $2x^2 - 3y^2 + 5xy + x + 10y - 3$ (dvě různoběžné přímky)

3. Napište rovnici kružnice procházející bodem $A = (1, 2)$ a dotýkající se přímek $p : x - y + 3 = 0$, $q : x - y - 1 = 0$.