Řešení příkladů z poslední kapitoly učebních textů Lineárí algebra docenta Slováka. Na řešení se podíleli David Holec, Jan Mysliveček, Ondřej Přibyla a Lukáš Vokřínek.

14.2. Vektory a počítání s maticemi

1. Rozepsáním pro prvních pár členů dospějeme k hypotéze

$$A^k = \begin{pmatrix} \cos k\alpha & -\sin k\alpha \\ \sin k\alpha & \cos k\alpha \end{pmatrix}$$

Dokážeme ji matematickou indukcí:

1) $A^1 = A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

2) Předpokládejme, že A^k je požadovaného tvaru. Potom:
$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} \cos k\alpha & -\sin k\alpha \\ \sin k\alpha & \cos k\ \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} \cos k\alpha\cos\alpha - \sin k\alpha\sin\alpha & -\cos k\alpha\cos\alpha - \sin k\alpha\sin\alpha \\ \sin k\alpha\sin\alpha + \cos k\alpha\cos\alpha & -\sin k\alpha\sin\alpha + \cos k\alpha\cos\alpha \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} \cos(k+1)\alpha & -\sin(k+1)\alpha \\ \sin(k+1)\alpha & \cos(k+1)\alpha \end{pmatrix}$

Dělitelé nuly jsou například matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

2. Viz. 14.9.1.

3.

$$EI = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -14 & 28 \end{pmatrix}$$

$$IE = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot(-3) + (-2)\cdot 0 + 4\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \end{pmatrix}$$

$$D^3 + 4DH - H^2 = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -28 \\ 12 & -56 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -20 \\ 26 & -92 \end{pmatrix}$$

$$G^2 - 3F = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -9 & -14 \end{pmatrix}$$

$$A - F \qquad \text{nedefinováno}$$

$$A - GFA = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 5 & 59 \\ -7 & -13 \end{pmatrix}$$

$$BACE - BFB^T = (BA)(CE) - (BF)B^T =$$
$$= \begin{pmatrix} -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 29 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 134 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 113 \end{pmatrix}$$

4. Viz. skripta.

5.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 \\ \sin\alpha & 1 \end{pmatrix}$$
$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Nejprve pro matici B :

$$B = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

Nyní následují matice z příkladu 3 :

$$D = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$F = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 29 & -6 & -3 & 4 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & \frac{40}{29} & \frac{20}{29} & \frac{12}{29} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-6}{29} & \frac{-3}{29} & \frac{4}{29} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{29} & \frac{-10}{29} & \frac{-6}{29} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{29} & \frac{5}{29} & \frac{3}{29} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-6}{29} & \frac{-3}{29} & \frac{4}{29} \end{array}\right)$$

$$G = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$H = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right)$$

Matice C nad $\mathbb{C}$

$$C = \left(\begin{array}{cc|cc} 1+i & 1-i & 1 & 0 \\ 2 & i & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -2i & 1-i & 0 \\ 2 & i & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -2i & 1-i & 0 \\ 0 & 3i & i-1 & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i & -\frac{1}{3}i \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{6} - \frac{1}{6}i & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i & -\frac{1}{3}i \end{array}\right)$$

V maticích A^k je vždy některé z čísel $\sin(k\alpha)$, $\cos(k\alpha)$ nenulové, nechť je to například $\cos(k\alpha)$. V opačném případě by se příklad řešil analogicky, se stejným výsledkem.

$$A^k(\alpha) = \left(\begin{array}{cc|cc} \cos(k\alpha) & -\sin(k\alpha) & 1 & 0 \\ \sin(k\alpha) & \cos(k\alpha) & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} \cos(k\alpha) & -\sin(k\alpha) & 1 & 0 \\ 0 & \cos(k\alpha)+\frac{\sin^2(k\alpha)}{\cos(k\alpha)} & -\operatorname{tg}(k\alpha) & 1 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} \cos(k\alpha) & -\sin(k\alpha) & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos(k\alpha)} & -\operatorname{tg}(k\alpha) & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} \cos(k\alpha) & -\sin(k\alpha) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\sin(k\alpha) & \cos(k\alpha) \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} \cos(k\alpha) & 0 & 1-\sin^2(k\alpha) & \sin(k\alpha)\cos(k\alpha) \\ 0 & 1 & -\sin(k\alpha) & \cos(k\alpha) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \cos(k\alpha) & \sin(k\alpha) \\ 0 & 1 & -\sin(k\alpha) & \cos(k\alpha) \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \cos(-k\alpha) & -\sin(-k\alpha) \\ 0 & 1 & \sin(-k\alpha) & \cos(-k\alpha) \end{array}\right) \Rightarrow \left[A^k(\alpha)\right]^{-1} = A^k(-\alpha)$$

Poslední je matice D ze zadání :

$$D = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \dots \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & & \ddots & \ddots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & & & \ddots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

7. Nejprve vypočteme inverzní matici, tu můžeme okamžitě psát pomocí algebraicky adjungované matice, my provedeme výpočet pomocí jednotkové matice

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

Potom je

$$X = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

14.3. Vektorové prostory, lineární závislost

1. Aby se jednalo o VP, musí být splněny vlastnosti KG1-KG4, a V1-V4.

$$
\begin{array}{rc}
(KG1) & (x \oplus y) \oplus z = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = (x \oplus y) \oplus z \\
(KG2) & x \oplus y = x \cdot y = y \cdot x = y \oplus x \\
(KG3) & x \oplus 1 = x \cdot 1 = x \\
(KG4) & x \oplus \frac{1}{x} = x.\frac{1}{x} = 1 \\
(V1) & a \odot (x \oplus y) = (x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a = (a \odot x) \oplus (a \odot y) \\
(V2) & (a+b) \odot x = x^{a+b} = x^a \cdot x^b = (a \odot x) \oplus (b \odot x) \\
(V3) & a \odot (b \odot x) = (x^b)^a = x^{a \cdot b} = (a \cdot b) \odot x \\
(V4) & 1 \odot x = x^1 = x
\end{array}
$$

Navíc všechny operace jsou na množině uzavřené. Jde tedy o VP.

2. Hledáme bijektivní zobrazení $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^1$. Má být lineární, tzn. $f(a \odot x) = f(x^a) = af(x)$, $f(x \oplus y) = f(xy) = f(x) + f(y)$. Lze nahlédnout, že tyto vlastnosti splňuje například funkce logaritmus o libovolném základu. Pro volbu báze $b \in \mathbb{R}_+$ a $1 \in \mathbb{R}^1$ dostáváme $f = \log_b$. Na druhou stranu je ale zobrazení určeno obrazy bázových vektorů, je to tedy zároveň jediný takový izomorfizmus.

3.

a) $\langle M \rangle \supseteq \langle (1,0),(0,1) \rangle = \mathbb{R}^2$, ale na druhou stranu $M \subseteq \mathbb{R}^2$. Proto musí být $\langle M \rangle = \mathbb{R}^2$. M tedy není vektorový prostor, protože $M \neq \langle M \rangle$.

b) $M = \{(x,x) = x \cdot (1,1) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\}$, všechny vektory z M jsou tedy násobky vektoru $(1,1)$. Je tedy nutně $\langle M \rangle = \langle (1,1) \rangle = \{x \cdot (1,1) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\} = M$, proto je také M vektorovým prostorem.

c) $\langle M \rangle \supseteq \langle (1,0),(0,1) \rangle = \mathbb{R}^2$, ale na druhou stranu $M \subseteq \mathbb{R}^2$. Proto musí být $\langle M \rangle = \mathbb{R}^2$. M tedy není vektorový prostor, protože $M \neq \langle M \rangle$.

d) $\langle M \rangle \supseteq \langle (-1,0),(0,1) \rangle = \mathbb{R}^2$, ale na druhou stranu $M \subseteq \mathbb{R}^2$. Proto musí být $\langle M \rangle = \mathbb{R}^2$. M tedy není vektorový prostor, protože $M \neq \langle M \rangle$.

4. Vektory zapíšeme do matice a použijeme na ni Gaussovu eliminaci. Počet nenulových řádků bude roven počtu nezávislých vektorů. Nejprve pro reálná čísla :

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2}-1 \\ -1 & 1+\sqrt{2} & -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Nad reálnými čísly jsou tedy vektory závislé. Dokonce je vidět, že řešením této soustavy je vektor $(-1, 1, \sqrt{2})$. Díky tomu můžeme sestavit jejich nulovou lineární kombinaci

$$
(-1) \cdot (1, -\sqrt{2}, -1) + 1 \cdot (1-\sqrt{2}, 2, 1+\sqrt{2}) + \sqrt{2} \cdot (1, -\sqrt{2}-1, -\sqrt{2}-1) = 0
$$

Pro racionální skaláry je již situace těžší. Použijeme přímo definici a z toho, že je nějaká lineární kombinace nulová dokážeme, že musí být i koeficienty nulové :

$$
a \cdot (1, -\sqrt{2}, -1) + b \cdot (1-\sqrt{2}, 2, 1+\sqrt{2}) + c \cdot (1, -\sqrt{2}-1, -\sqrt{2}-1) = 0 \quad \Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow \begin{array}{ccccccc} a & + & b \cdot (1-\sqrt{2}) & + & c & = & 0 \\ a \cdot (-\sqrt{2}) & + & 2b & + & c \cdot (-\sqrt{2}-1) & = & 0 \\ -a & + & b \cdot (1+\sqrt{2}) & + & c \cdot (-\sqrt{2}-1) & = & 0 \end{array} \Rightarrow
$$

$$\begin{array}{rrcl} & a+b+c & = & b\sqrt{2} \\ \Rightarrow & 2b-c & = & (a+c)\sqrt{2} \\ & -a+b+c & = & (c-b)\sqrt{2} \end{array}$$

Nyní již je jasné, že musí být obě strany všech rovností nulové[1] a tedy musí nutně být $a = b = c = 0$. To ale znamená, že jsou vektory lineárně nezávislé nad tělesem $\mathbb{Q}$.

5.

1. $1+x, 1-x, 2+x+x^2$. Jsou evidentně nezávislé. Porovnáním koeficientů totiž dostaneme:

$$a(1+x) + b(1-x) + c(2+x+x^2) = 0 \Rightarrow a = 0, b = 0, c = 0$$

2. $1-x, x-x^2, x^2-1$. Jsou lineárně závislé, neboť $(1-x)+(x-x^2)+(x^2-1) = 0$ a přitom koeficienty jsou nenulové.

6. Viz. řešené příklady: příklad č. 3.

7. Platí $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, tedy $\sqrt{8} \in \langle 1, \sqrt{2} \rangle$. Druhé tvrzení neplatí, což dokážeme sporem. Předpokládejme, že $\sqrt{3} \in \langle 1, \sqrt{2} \rangle$, tedy, že existují koeficienty $a, b \in \mathbb{Q}$ tak, že $\sqrt{3} = a \cdot 1 + b \cdot \sqrt{2}$. Předpokládejme nejprve, že $a = 0$, potom vynásobením této rovnosti číslem $\sqrt{2}$ dostáváme $\sqrt{6} = 2b \in \mathbb{Q}$, což není možné. Pokud by bylo $b = 0$, potom dostáváme přímo $\sqrt{3} = a \in \mathbb{Q}$, což je opět spor. Uvažme nakonec případ $ab \neq 0$. Umocněním naší rovnosti potom dostáváme $3 = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2}$, z níž obdržíme $\sqrt{2} = \frac{3-a^2-2b^2}{2ab} \in \mathbb{Q}$, což je spor. Taková čísla $a, b \in \mathbb{Q}$ tedy neexistují, čímž jsme dokázali tvrzení.

8. Vektor $(1,1,1,1)$ patří do podprostoru generovaného třemi vektory, je-li jejich lineární kombinací. Napíšeme-li všechny čtyři vektory do matice, je to vpodstatě problém najít koeficienty a, b, c tak, aby $au_1 + bu_2 + cu_3 = (1,1,1,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Takže vektor do daného podprostoru nepatří (poslední rovnice totiž znamená 0=1). Analogicky

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -3 & -5 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & 5 & 3 & 2 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

a daný vektor patří do daného vektorového podprostoru.

9.

1. $M = \{(1,-1,0,2), (0,2,1,3), (2,0,1,7)\}$. Když si napíšeme vektory do řádků matice, můžeme elementárními úpravami velmi jednoduše prověřovat lineární nezávislost těchto vektorů.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

elementárními úpravami jsme dostali dva řádky matice stejné. Z toho plyne, že původní vektory jistě byly lineárně závislé. Protože báze musí být lineárně nezávislá podmnožina, nemůžeme doplněním původní množiny získat bázi.

[1] jinak by například $\sqrt{2} = \frac{a+b+c}{b} \in \mathbb{Q}$

2. $M = \{(-1,1,0,0),(0,-1,1,0),(0,0,-1,1)\}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

je vidět, že každým vektorem $(0,0,0,a), a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ můžeme původní množinu doplnit do báze, vznikne totiž nezávislá čtyřprvková podmnožina $\mathbb{R}^4$ ($\dim \mathbb{R}^4 = 4$) a musí jít tedy o bázi.

14.4. Báze vektorových prostorů

1. Zadaná množina je

$$M = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$$

Podle vazebné podmínky vyjádříme poslední složku

$$x_n = -x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1}$$

Tedy obecný vektor z M je tvaru

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, -x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1}) = x_1(1,0,0,\ldots,0,-1)+$$
$$+x_2(0,1,0,\ldots,0,-1) + \ldots + x_{n-1}(0,0,0,\ldots,1,-1)$$

Odtud plyne, že množina je generována např. následovně:

$$M = \langle (1,0,0,\ldots,0,-1),(0,1,0,\ldots,0,-1),\ldots,(0,0,0,\ldots,1,-1)\rangle$$

Přidáme-li vektor $(0,0,0,\ldots,0,1)$, znamená to v podstatě, že jsme prvních $n-1$ vektorů standardní báze nahranili $n-1$ vektory báze M a poslední nám zůstal. Dodejme ještě, že jsme mohli nechat libovolný z vektorů standardní báze.

2. Snadno ověříme, že vektory množiny M_1 jsou lineárně nezávislé, stejně jako vektory množiny M_2. Je tedy $\dim P_1 = \dim P_2 = 3$. Najdeme nyní bázi prostoru $P_1 \cap P_2$. Budeme hledat vektory v takové, že $v \in P_1 \wedge v \in P_2$. Tyto vektory budou právě řešeními rovnice

$$\alpha_1 \cdot (4,0,-2,6) + \alpha_2 \cdot (2,1,-2,3) + \alpha_3 \cdot (3,1,-2,4) =$$
$$=\beta_1 \cdot (1,-1,0,2) + \beta_2 \cdot (2,2,-1,3) + \beta_3 \cdot (0,1,1,0)$$

Tuto rovnici můžeme rozepsat do složek a řešit jako homogenní soustavu čtyř lineárních rovnic o šesti neznámých, jejíž matice je

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & 4 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Protože je dimenze prostoru řešení soustavy rovna 2, je též dimenze průniku $P_1 \cap P_2$ rovna 2, přičemž je podle poslední matice popsána rovnicí $\beta_2 + \beta_3 = 0$ (tj. $\beta_3 = -\beta_2$). Obecný vektor z $P_1 \cap P_2$ lze zapsat jako

$$v = \beta_1 \cdot (1,-1,0,2) + \beta_2 \cdot (2,2,-1,3) - \beta_2 \cdot (0,1,1,0) = \beta_1 \cdot (1,-1,0,2) + \beta_2 \cdot (2,1,-2,3)$$

Tímto jsme dostali dimenzi i bázi $P_1 \cap P_2$. Protože však $\dim(P_1 + P_2) = \dim P_1 + \dim P_2 - \dim(P_1 \cap P_2) = 3 + 3 - 2 = 4$, platí $P_1 + P_2 = \mathbb{R}^4$, lze tedy volit například standardní bázi $((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$.

3. Řešeno

4.

1. $v = (2,1,1) \in \mathbb{R}^3, \underline{u} = ((2,7,3),(3,9,4),(1,5,3))$. Musí platit $(2,1,1) = a(2,7,3)+b(3,9,4)+c(1,5,3)$ a vzniká systém rovnic

$$\begin{aligned} 2a+3b+c&=2\\ 7a+9b+5c&=1\\ 3a+4b+3c&=1 \end{aligned} \quad \text{což je v maticovém zápisu} \quad \begin{pmatrix}2&3&1\\7&9&5\\3&4&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&3&1&2\\7&9&5&1\\3&4&3&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&-5\\0&1&0&4\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

Vektor $(2,1,1)$ má v bázi $\underline{u}$ souřadnice $(-5,4,0)$.

2. $v = (2,1,1)$ v bázi $\underline{u} = ((1,0,1),(1,0,0),(1,1,1))$

Naprosto stejně jako v předchozí části příkladu získáme souřadnice $(0,1,1)$.

3. $v = x^3+x^2+x+1$ v bázi $\underline{u} = (1+x^3, x+x^3, x^2+x^3+x^4, x^3)$

$\underline{u}$ není bází

4. $v = \left(\begin{smallmatrix}1&0&-1\\2&1&4\end{smallmatrix}\right)$ v bázi $\underline{u} = \left(\left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}1&1&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}1&1&1\\0&0&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\-1&0&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\-1&-1&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\-1&-1&-1\end{smallmatrix}\right)\right)$

$v = u_1+u_2-u_3-u_4+3u_5-4u_6$

14.5. Souřadnice a lineární zobrazení

1.

a) $a(-1,0,0,0)+b(-1,-1,0,0)+c(-1,-1,-1,0)+d(0,0,1,-1) = (1,1,1,1)$

$$\begin{pmatrix}-1&-1&-1&0&1\\0&-1&-1&0&1\\0&0&-1&1&1\\0&0&0&-1&1\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{l} d=-1\\ c=-2\\ b=1\\ a=0\end{array} \Longrightarrow (1,1,1,1)_{\text{std}} = (0,1,-2,-1)_{\underline{u}}$$

b) $a(0,0,0,5)+b(1,2,3,1)+c(1,0,-1,0)+d(0,1,1,0) = (1,1,1,1)$

$$\begin{pmatrix}0&1&1&0&1\\0&2&0&1&1\\0&3&-1&1&1\\5&1&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}5&1&0&0&1\\0&3&-1&1&1\\0&1&1&0&1\\0&1&-1&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}5&1&0&0&1\\0&3&-1&1&1\\0&1&1&0&1\\0&0&2&0&1\end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{l} c=\frac{1}{2}\\ b=\frac{1}{2}\\ d=0\\ a=\frac{1}{10}\end{array} \Longrightarrow (1,1,1,1)_{\text{std}} = (\tfrac{1}{10},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0)_{\underline{v}}$$

2.

a) Zobrazení není lineární, neboť např. $f[a(x,y)] = f(ax,ay) = (ax,a^2y^2) \neq (ax,ay^2) = a(x,y^2) = af(x,y) \quad \forall ay \neq 0$

b) Zobrazení je lineární, což dokážeme ve dvou krocích, zachování součtu vektorů a zachování násobení skalárem

$$\begin{aligned} f[(x_1,y_1)+(x_2,y_2)] &= f(x_1+x_2,y_1+y_2) = (2(x_1+x_2)+3(y_1+y_2),(x_1+x_2)-(y_1+y_2)) = \\ &= (2x_1+3y_1,x_1-y_1)+(2x_2+3y_2,x_2-y_2) = f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2)\\ f[a(x,y)] &= f(ax,ay) = (2ax+3ay,ax-ay) = a(2x+3y,x-y) = af(x,y) \end{aligned}$$

Tím je linearita dokázána.

c), d) Analogicky části b).

3. Matici zobrazení dostaneme tak, že do jejích sloupečků budeme psát postupně obrazy jednotlivých bázových vektorů.

- Identické zobrazení má vždy jednotkovou matici.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$f(x, y, z) = (x, y, z)$$

- Vzhledem k tomu, že všechny vektory jsou ve standardní bázi navzájem kolmé, průměty ostatních bázových vektorů jsou nulové, samotný vektor, podle kterého zobrazujeme, zůstane zachován. Výsledkem je

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$f(x, y, z) = (x, 0, 0)$$

- Analogicky předcházející části se zachovávají poslední dva bázové vektory, první se zobrazí na nulu. Maticově

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$f(x, y, z) = (0, y, z)$$

- Bázové vektory pouze vynásobíme skalárem a. Potom

$$P = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$
$$f(x, y, z) = (ax, ay, az)$$

4. Zobrazení, pokud ho bereme nad polem $\mathbb{R}$ je obecně násobení maticí $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, zatímco nad polem $\mathbb{C}$ je to násobení maticí $(\,\alpha+\beta i\,)$. Dohromady pak musí platit

$$\varphi_{\mathbb{R}^2}((x, y)) \equiv \varphi_{\mathbb{C}}(x + iy)$$
$$\begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv (\beta + i\gamma)(x + iy) = (\beta x - \gamma y) + i(\gamma x + \beta y)$$
$$\Longrightarrow a = d = \beta, \quad c = -b = \gamma$$

Vzhledem k tomu, že šlo všude o ekvivalence, je to jak nutná, tak postačující podmínka.

5. Komplexní čísla nad $\mathbb{R}$ tvoří vektorový prostor isomorfní s $\mathbb{R}^2$. Koplexní čísla proto můžeme reprezentovat jako uspořádané dvojice reálných čísel. V této reprezentaci dostáváme:

$$\mathbb{C} \ni p = (a, b) \Rightarrow ip = (-b, a)$$

$$\mathbb{C}^2 \ni (p, q) = ((a, b), (c, d)) = (a, b, c, d) \mapsto (ip, iq) = ((-b, a), (-d, c)) = (-b, a, -d, c)$$

Hledaná matice zobrazení proto je

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Matice zobrazení $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})_{\underline{u},\underline{e}}$, kde $\underline{e}$ je standardní báze v $\mathbb{R}^4$, je zřejmě

$$A_{\underline{u},\underline{e}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

pro matici zobrazení $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})_{\underline{v},\underline{e}}$ potom

$$A_{\underline{v},\underline{e}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pro skládání zobrazení platí $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})_{\underline{u},\underline{v}} = (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})_{\underline{e},\underline{v}} \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})_{\underline{u},\underline{e}} = (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})^{-1}_{\underline{v},\underline{e}} \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})_{\underline{u},\underline{e}}$, maticově

$$A_{\underline{u},\underline{v}} = A^{-1}_{\underline{v},\underline{e}} A_{\underline{u},\underline{e}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Analogické vztahy platí pro matici zobrazení $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})_{\underline{v},\underline{u}}$, která je

$$A_{\underline{v},\underline{u}} = A^{-1}_{\underline{u},\underline{e}} A_{\underline{v},\underline{e}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -5 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Použití matic je jasné :

$$\forall w \in \mathbb{R}^4 : \underline{v}(w) = A_{\underline{u},\underline{v}} \underline{u}(w) \qquad \forall w \in \mathbb{R}^4 : \underline{u}(w) = A_{\underline{v},\underline{u}} \underline{v}(w)$$

7. Zobrazíme-li bázové vektory $\underline{v}$ a ty zapíšeme do sloupečků matice, okamžitě dostaneme pro přechod od $\underline{v}$ k $\underline{u}$ matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Pro přechod opačným směrem potřebujeme matici inverzní. Tu získáme snadno pomocí úprav s jednotkovou maticí, či pomocí algebraicky adjungované matice[2]. Výsledkem je matice přechodu

[2]tato metoda je poměrně výhodná díky spoustě nul v matici.

od $\underline{u}$ k $\underline{v}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Zobrazování je triviální násobení sloupečkem souřadnic zprava, proto jej přenecháváme na čtenáři.

8. Zobrazení si převedeme do standardní báze. Podle předchozího cvičení

$$T\underline{u}(w) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \underline{u}(w) = \underline{v}(w)$$

$$\Rightarrow f(w) = A\underline{v}(w) = AT\underline{u}(w) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \underline{u}(w)$$

$$2x - x^3: \quad AT \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow f(2x - x^3) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$f(1 + x^2) = 5x + 5 \qquad f(1 + x + x^2 + x^3) = 6x + 4$$

9. Zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ je dáno maticí A. Zobrazení $g : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ je dáno maticí B. Zobrazení $f \circ g : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ je dáno maticí C.

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 & 15 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ -4 & 9 & 0 & 17 & 8 \\ 3 & 2 & 0 & 6 & -1 \\ 5 & -2 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$|C| = 0$, neboť matice obsahuje nulový sloupec. Protože neexistuje $|C|^{-1}$, neexistuje ani inverzní zobrazení s maticí C^{-1} a tedy se nejedná o isomorfismus.

Zobrazení $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je dáno maticí D.

$$D = BA = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 5 \\ -5 & 9 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|D| = 5 \begin{vmatrix} -5 & 9 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5(-10 + 9) - 3(-12 - 3) = 45 - 5 = 40$$

Existuje $|D|^{-1}$, tedy existuje i D^{-1}, a proto se jedná o isomorfismus.

14.6. Lineární zobrazení II

1. Napíšeme si vedle sebe bázi vzorového vektorového prostoru (vpravo) a obrazy jeho příslušných bázových vektorů (vlevo). Pokud budeme provádět řádkové elementární transformace, zůstane toto zachováno. Lze tedy psát

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 4 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -5 & -4 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -10 & 0 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -15 & -5 & -3 & -4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -5 & -4 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 8 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 7 & 0 & 2 & -3 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -5 & -4 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 8 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & -10 & -7 & 8\end{array}\right)$$

První tři řádky jsou nezávislé a tvoří tedy bázi $\operatorname{Im} f$. Naopak je čtvrtý vektor nulový, jeho vzorem je podprostor generovaný posledním novým bázovým vektorem vzorového prostoru, je to tedy $\operatorname{Ker} f$. Dohromady máme

$$\operatorname{Im} f = \langle (1,4,1,1), (0,-5,-4,-1), (0,0,1,0) \rangle \qquad \operatorname{Ker} f = \langle (9,-10,-7,8) \rangle$$

vektor $(0,0,8,0)$ jsme nahradili vektorem $(0,0,1,0)$ pouze kvůli jednoduchosti. V tomto případě lze doplnit báze $\operatorname{Im} f$ na bázi celého $\mathbb{R}^4$ bází $\operatorname{Ker} f$, ale obecně nikoli, například pro zobrazení dané maticí

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

je $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f = \langle (0,1) \rangle$. Zbývá určit matici zobrazení f v nové bázi. Určíme nejprve matici přechodu od nové báze ke staré. Ta je jednoduše

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9\\ 4 & -5 & 0 & -10\\ 1 & -4 & 1 & -7\\ 1 & -1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Pro matici A' zobrazení f v nové bázi platí

$$A' = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 16 & -26 & 3 & 0\\ 9 & -16 & 2 & 0\\ 15 & -39 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 3 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

je matice zobrazení f v původní bázi.

2. Zobrazení je izomorfismus, pouze je-li hodnost matice zobrazení rovna dimenzi vzoru. K tomu použijeme Gaussovu eliminaci, matici budeme upravovat společně s jednotkovou maticí, abychom zjistili matici inverzního zobrazení.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{array}\right)$$

Jde o izomorfismus s inverzní maticí

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3. Ve standardních bazích $\mathbb{R}_4[x]$ a $\mathbb{R}_8[x]$ určete zobrazení, které je definováno jako násobení pevně zvoleným polynomem $g \in \mathbb{R}_4[x]$.

Nechť $g = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, z $\mathbb{R}_4[x]$ vezměme

$$h = \alpha_4 x^4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$$

Potom $f(h) = g \cdot h = a\alpha_4 x^8 + (a\alpha_3 + b\alpha_4)x^7 \dots e\alpha_0$ Porovnáním koeficientů:

$$f(h) = g \cdot h = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 & 0 \\ d & c & b & a & 0 \\ e & d & c & b & a \\ 0 & e & d & c & b \\ 0 & 0 & e & d & c \\ 0 & 0 & 0 & e & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_3 \\ \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}$$

Protože je okruh reálných polynomů obor integrity, má jádro vždy dimenzi 1, pokud je $g \neq 0$, v případě nulového polynomu má jadro dimenzi 4. Tím je jasné, že má podprostor $\langle x^2 + x^3, x - x^4 \rangle$ obraz dimenze 2, respektive 0 pro $g = 0$.

4. Označme $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ libovolnou matici. Označme g zobrazení definované jako násobení maticí $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ zprava a h násobení zleva.

a)

$$g : A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+4b & a+4b \\ c+4d & c+4d \end{pmatrix}$$

Aby byla $A \in \operatorname{Ker} g$, musí být

$$\begin{matrix} a+4b=0 & a+4b=0 \\ c+4d=0 & c+4d=0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} a=-4b \\ c=-4d \end{matrix}$$

tedy matice A musí být tvaru

$$\begin{pmatrix} -4b & b \\ -4d & d \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Jádro zobrazení g je generováno dvěma vektory. Proto

$$\dim \operatorname{Ker} g = 2$$

a potom i

$$\dim \operatorname{Im} g = 2$$

b) Analogicky $\dim \operatorname{Ker} h = \dim \operatorname{Im} h = 2$.

5. Protože je $V_1 = \langle(2,-1,-1,1),(-2,3,1,-1)\rangle = \langle(0,2,0,0),(-2,3,1,-1)\rangle$, je zřejmé, že $V_1 \cap V_2 = \langle(0,2,0,0)\rangle = \langle(0,1,0,0)\rangle$. Potom je ale

$$\operatorname{Im} f|_{V_1 \cap V_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & -12 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle(2,-3,1,-1,-3)\rangle$$

Obraz je zjevně jednorozměrný. Pro určení dimenze vzoru podprostoru $W \subset \mathbb{R}^5$ generovaného vektorem $(1,1,1,1,1)$ budeme řešit soustavu rovnic s rozšířenou maticí soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & -12 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & -12 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Protože nemé soustava řešení, neexistuje žádný vektor, který by se zobrazil na žádaný vektor, tím pádem ani na libovolný jeho násobek (tedy kromě nulového vektoru). Vzor podprostoru W má potom dimenzi jádra. Protože je ale hodnost matice 2, musí být dimenze jádra také 2.

14.7. Permutace a determinanty

1. Chyba v zadání, nejspíše rešeno.

2. Každý cyklus délky k je součinem $k-1$ transpozic. Proto má paritu stejnou, jako je parita $k-1$. Každá transpozice má totiž lichou paritu, protože čísla mezi těmi dvěma prohazovanými se vyskytují právě ve dvou inverzích (s oběma těmito čísly), na paritu tedy vliv nemají. Pouze ona prohazovaná dvojice "vytváří" lichý počet transpozic. Parita transpozice je proto -1 a počet transpozic určuje paritu.

3. Označme $\operatorname{par} \sigma = \prod_{i>j} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$. Přitom ale nemusíme dělat součin přes $i > j$, ale stačí každou dvojici $i \neq j$ započítat právě jednou. Potom dostáváme

$$\operatorname{par} \sigma \circ \pi = \prod \frac{\sigma \circ \pi(i) - \sigma \circ \pi(j)}{i-j} = \prod \frac{\sigma(\pi(i)) - \sigma(\pi(j))}{\pi(i) - \pi(j)} \cdot \prod \frac{\pi(i) - \pi(j)}{i-j} = \operatorname{par} \sigma \cdot \operatorname{par} \pi$$

protože je π bijekce, a proto v součinu přes všechny různé dvojice i, j můžeme přejít k součinu přes všechny možné různé dvojice $\pi(i)$, $\pi(j)$. Zbytek již plyne z toho, že každou permutaci σ můžeme zapsat jako součin transpozic $\sigma_1, \dots, \sigma_k$, pro které platí $\operatorname{sgn} \sigma_i = \operatorname{par} \sigma_i$. Proto platí i

$$\operatorname{par} \sigma = \operatorname{par} \sigma_1 \cdots \operatorname{par} \sigma_k = \operatorname{sgn} \sigma_1 \cdots \operatorname{sgn} \sigma_k = \operatorname{sgn} \sigma$$

4.

a) Permutace obsahuje pouze jeden cyklus

$$1 \to 9 \to 10 \to 7 \to 8 \to 3 \to 5 \to 6 \to 2 \to 4 \to 1$$

její paritu spočteme podle cvičení 2.

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{10-1} = -1$$

b) Permutace je složena z následujících cyklů

$$\begin{aligned}
&1 \to 9 \to 12 \to 1\\
&2 \to 19 \to 7 \to 20 \to 14 \to 16 \to 2\\
&3 \to 5 \to 10 \to 15 \to 8 \to 3\\
&4 \to 18 \to 6 \to 13 \to 4\\
&11 \to 11\\
&17 \to 17
\end{aligned}$$

Podle cvičení 2 je potom $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{20-6} = 1$.

5. Budeme počítat počet inverzí

- Každý prvek je větší než všechny, co stojí za ním. Počet inverzí je tedy $p = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$. Parita je pak

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

- Permutace obsahuje nejprve n lichých čísel seřazených vzestupně (není mezi nimi žádná inverze) a poté také vzestupně seřazeno n sudých čísel (opět žádná inverze). Zbývá určit, kolik větších lichých čísel je před menšími sudými čísly. Každé liché číslo je přitom před každým sudým, počet inverzí příslušných číslu $2k+1$ je počet menších sudých čísel, tedy k. Potom $p = 1 + 2 + \ldots n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ a parita je opět

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

- Povšimněme si, že tato permutace je tvořena trojicemi, které jsou jako celky uspořádané od nejmenší po největší, ovšem „ve vnitř“ stojí vždy $3j-1$ před $3j-2$ a také $3j$ před $3j-2$. Každá trojice přispěje do součtu počtem 2, trojic je celkem n a výsledná permutace je tedy sudá, neboť

$$(-1)^{2n} = 1$$

6.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^0(1\cdot 2\cdot -1\cdot 0) + (-1)^1(1\cdot 2\cdot 1\cdot 1) + (-1)^1(0\cdot 0\cdot -1\cdot 0) + \cdots = 1$$

Počítáním determinantu metice řádu n podle definice je nutno sečíst $n!$, tedy v našem případě 24 členů.

7.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4\\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2$

b) $\begin{vmatrix} 1+i & i\\ 3-i & 2+i \end{vmatrix} = (2 + 3i + i^2) - (3i - i^2) = 0$

c) $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x\\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

d) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & -5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & -5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$

$= (-1)^{1+5}.2.\begin{vmatrix} 4 & -3 & -1 & 2 \\ 6 & 5 & 2 & 3 \\ -9 & -3 & 7 & -5 \\ -4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+5}.1.\begin{vmatrix} 3 & -3 & -1 & 2 \\ -5 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 7 & -5 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$

$= 2.\begin{vmatrix} 4 & -3 & -1 & 2 \\ 6 & 5 & 2 & 3 \\ -9 & -3 & 7 & -5 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 11 & -5 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+4}.(-2).2.\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \\ -9 & 7 & -5 \end{vmatrix} -$

$-(-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4(-40+27+84+36-84-30) + (18-6-6-20) = 14$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 8 & 15 \\ 0 & 7 & 26 & 63 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 15 \\ 7 & 26 & 63 \end{vmatrix} = 2.3.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 13 & 21 \end{vmatrix} = 6.\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 7 & 6 & 14 \end{vmatrix} =$

$= 6.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 14 \end{vmatrix} = 6.(14-12) = 12$

14.8. Výpočet determinantů a inverzních matic

1.

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2)\cdot(-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -2(3-2) = -2$$

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 5 & 0 & 6 & 0 \\ 5 & 6 & 6 & 7 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 5 & 0 & 6 & 0 \\ 5 & 6 & 6 & 7 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-9) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-12) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-12) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 144$$

2. Řešeno

3.

a)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 8 & 5 & 1 & 0 \\ 11 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & -11 & 8 \end{array}\right)$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

a platí $\det A = 1$. Algebraicky adjungovaná matice má prvky (b_{ij}): $b_{11} = (-1)^0 \det\left(\begin{smallmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -2 \end{smallmatrix}\right)$, $b_{12} = (-1)^1 \det\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{smallmatrix}\right)$, atd. Inverzní matice je

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 & -2 \\ -1 & -6 & -11 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 154 & -179 & -205 & 235 \\ -36 & 42 & 48 & -55 \\ 6 & -7 & -8 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

14.9. Systémy lineárních rovnic I

1.

1. Matice soustavy je

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 10 \\ 1 & -2 & 2 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -9 \\ 3 & 5 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -9 \\ 0 & 11 & -2 & 37 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nad $\mathbb{Z}$: Aby vyšlo z druhé rovnice v upravené matici celočíselné x_3, musí být $37 - 11x_2$ sudé, tzn. x_2 musí být liché. Potom $x_2 = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$ a

$$(x_1, x_2, x_3) \in \{(19 - 18k, 2k + 1, 11k - 13);\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Nad $\mathbb{Q}$:

$$(x_1, x_2, x_3) \in \left\{ \left(28 - 9t, t, -\frac{37 - 11t}{2}\right) ;\ t \in \mathbb{Q} \right\}$$

Nad $\mathbb{R}$: dostáváme stejný tvar množiny řešení jako nad $\mathbb{Q}$, ale parametr t bude tentokrát z $\mathbb{R}$.

2.

$$\begin{pmatrix} 12 & -1 & 5 & 30 \\ 3 & -13 & 2 & 21 \\ 7 & 2 & 3 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 12 & -1 & 5 & 30 \\ 0 & 51 & -3 & -54 \\ 0 & 31 & 1 & -30 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 12 & -1 & 5 & 30 \\ 0 & 17 & -1 & -18 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nad $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$:

$$(x_1, x_2, x_3) = (2, -1, 1)$$

3.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 17 & -29 & -36 & 22 \\ 2 & -3 & 18 & -27 & 33 & 21 \\ 12 & -18 & 102 & -174 & -216 & 132 \\ 2 & -3 & 21 & -24 & -30 & 20 \\ 2 & -3 & 24 & -21 & -27 & 19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 17 & -29 & -36 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 69 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 270 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 66 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nad $\mathbb{Z}$ nemá soustava řešení, nad $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$:

$$(x_1, x_2, x_3) \in \left\{ \left(\frac{t-3}{2}, \frac{t}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0\right) ;\ t \in \mathbb{K} \right\}$$

2.

(1)

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 11 & -2 \\ 0 & 11 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fundamentální systém řešení je $(-18, 2, 11)$. Soustava je buď neřešitelná nebo nedourčená.

(2)

$$\begin{pmatrix} 12 & -1 & 5 \\ 3 & -13 & 2 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -13 & 2 \\ 12 & -1 & 5 \\ 21 & 6 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -13 & 2 \\ 0 & 51 & -3 \\ 0 & 97 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & -13 & 2 \\ 0 & 17 & -1 \\ 0 & 17 \cdot 97 & -85 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -13 & 2 \\ 0 & 17 & -1 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \sim$$

Soustava má fundamentální systém řešení $\emptyset$, je řešitelná a dourčená.

(3)

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 17 & -29 & -36 \\ 2 & -3 & 18 & -27 & -33 \\ 12 & -18 & 102 & -174 & -216 \\ 2 & -3 & 21 & -24 & -30 \\ 2 & -3 & 24 & -21 & -27 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 17 & -29 & -36 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 17 & -29 & -36 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 17 & -29 & -36 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soustava je opět buď neřešitelná nebo nedourčená, její fundamentální systém řešení je $(3,2,0,0,0), (-39,0,2,-4,2)$.

3. Viz. příklad 19

4. Budeme přímo upravovat matici:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha^2 & 1-\alpha \end{array}\right)$$

Pokud $\alpha = 1$ pak má soustava triviální řešení $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, což znamená $(x_1, x_2, x_3) \in \{(t, s, 1-t-s);\ t, s \in \mathbb{K}\}$. Pokud $\alpha \neq 1$, pak můžeme dolní dva řádky matice vydělit $(1-\alpha)$, jako bychom dělili kterýmkoliv jiným číslem.

$$\cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1+\alpha & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+\alpha & 1 \end{array}\right)$$

a máme hned řešení $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2+\alpha}$, samořejmě za předpokladu, že $\alpha \neq -2$. Pokud $\alpha = -2$, soustava nemá řešení. Pro $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ pak soustava má řešení pouze pro $\alpha = 1$ a pro α, pro něž je $\alpha + 2$ invertibilní skalár, dohromady dostáváme $\alpha \in \{1, -1, -3\}$.

5.

1. Výpočet inverzní matice:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Hledaná matice X potom je

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 36 & 57 \\ -1 & -1 & -1 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix}$$

2. Viz. řešené příklady: příklad č. 20.

14.10. Systémy lineárních rovnic II

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -9 & 6 & -7 \\ 0 & -9 & 6 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -9 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nezávisle na okruhu skalárů je vektor $(1,-2,-3)$, který dostaneme dosazením $x_1 = 1$, řešením zhomogenizovaného systému. V $\mathbb{Z}$ je soustava neřešitelná, neboť (po úpravách) druhá rovnice je neřešitelná v $\mathbb{Z}$. Její levá strana je totiž dělitelná třemi, pravá nikoli. To stejné platí pro $\mathbb{Z}_6$. Nad okruhem $\mathbb{Z}_7$ pak soustava řešitelná je :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -9 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Možným řešením je například $(3,0,0)$, všechna řešení získáme přičtením vektorového prostoru řešení zhomogenizované soustavy řešení, tedy

$$\{(3-t, 2t, 3t) \in (\mathbb{Z}_7)^3;\ t \in \mathbb{Z}_7\}$$

Gaussova eliminace lze použít vždy, narozdíl od Cramerova pravidla, které zde uplatnit nelze, neboť je determinant soustavy nulový, tedy neinvertibilní skalár.

2. Vektor, který leží v průniku, musí ležet ve V_1 i V_2. Musí tedy splňovat

$$a(1,1,1,1) + b(1,0,1,0) = c(1,1,0,0) + d(0,1,1,1) + e(0,1,1,0)$$

Tuto homogenní soustavu zapíšeme do matice a převedeme na schodovitý tvar.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$V_1 \cap V_2$ je tedy jednorozměrný, volbou $e = 1$ získáme fundamentální řešení $(-2,1,-1,-2,1)$. Prostor řešení soustavy je proto $\langle(-2,1,-1,-2,1)\rangle$. Pro $V_1 \cap V_2$ potom platí

$$V_1 \cap V_2 = \langle(-2)(1,1,1,1) + 1(1,0,1,0)\rangle = \langle(-1,-2,-1,-2)\rangle = \langle(1,2,1,2)\rangle$$

Podle věty o dimenzi je dimenze $V_1 + V_2$ rovna 4. Proto musí být

$$V_1 + V_2 = \mathbb{R}^4$$

Cramerovo pravidlo použít nelze.

3. Nezávisle na okruhu skalárů je podle předchozího cvičení

$$V_1 \cap V_2 = \langle(1,2,1,2)\rangle$$

Pro $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ pak dostáváme trojprvkovou množinu $\{(0,0,0,0),(0,1,0,1),(1,0,1,0)\}$, stejně tak pro $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$, kde jde o množinu $\{(0,0,0,0),(1,2,1,2),(2,1,2,1)\}$. V případě $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ jde o nespočetnou množinu.

4. Uvažme standardní bázi na $\mathbb{R}_6[x]$, tzn:

$$\mathbb{R}_6[x] = \langle x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6\rangle$$

Zadané prostory potom v této jsou:

$$V_1 = \langle(0,0,1,2,0,0,0,),(0,0,0,-1,0,0,1)\rangle$$

$$V_2 = \langle(2,0,1,0,0,0,0),(-1,0,0,0,0,0,1),(0,0,1,1,2,0,0)\rangle$$

$$V_3 = \langle(0,0,1,0,0,0,1),(1,0,0,3,0,1,0),(0,0,0,1,0,0,0)\rangle$$

Vektor z průniku $V_1 \cap V_2$ musí ležet ve V_1 i ve V_2, tedy musí být lineární kombinací jak generátorů V_1, tak i V_2.

$$a\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\\0\\0\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}+e\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\2\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&-2&1&0\\0&0&0&0&0\\1&0&-1&0&-1\\2&-1&0&0&-1\\0&0&0&0&-2\\0&0&0&0&0\\0&1&0&-1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&0&0&-1&0\\0&1&0&-1&0\\0&0&2&-1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Odtud dostáváme řešení:

$$(a,b,c,d,e)\in\langle(1,2,1,2,0)\rangle$$

Dosadíme do rovnice vektorů průniku:

$$V_1\cap V_2=\langle 1(2,0,1,0,0,0,0)+2(-1,0,0,0,0,0,1)\rangle=\langle(0,0,1,0,0,0,2)\rangle$$

Nyní již lze snadno nahlédnout, že

$$(V_1\cap V_2)\cap V_3=\{(0,0,0,0,0,0,0)\}$$

$V_1+V_2+V_3$ je generováno sjednocením generátorů jednotlivých prostorů. Bázi určíme Gaussovou eliminací.

$$\begin{pmatrix}0&0&1&2&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0&1\\2&0&1&0&0&0&0\\-1&0&0&0&0&0&1\\0&0&1&1&2&0&0\\0&0&1&0&0&0&1\\1&0&0&3&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&0&1&0&0&0&0\\0&0&1&2&0&0&0\\0&0&0&4&0&1&0\\0&0&0&0&8&1&0\\0&0&0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Odtud plyne

$$\begin{aligned}V_1+V_2+V_3 &=\langle(2,0,1,0,0,0,0),(0,0,1,2,0,0,0),(0,0,0,4,0,1,0),\\&\quad(0,0,0,0,8,1,0),(0,0,0,0,0,1,2),(0,0,0,0,0,0,1)\rangle\end{aligned}$$

$$V_1+V_2+V_3=\langle 2+x^2,x^2+2x^3,4x^3+x^5,8x^4+x^5,x^5+2x^6,x^6\rangle=\langle 1,x^2,x^3,x^4,x^5,x^6\rangle$$

protože je to prostor dimenze 5, který neobsahuje v žádném polynomu x.

14.11. Vlastní vektory a vlastní hodnoty I

1. Zvolme na prostoru $\mathbb{R}^3$ bázi $\underline{u}=((1,0,1),(1,1,1),(1,0,0))$. Vektory u_2,u_3 se zřejmě musí zobrazit na nulový vektor, zatímco vektor u_1 se musí zobrazit na nějaký vektor z $\operatorname{Im} A$, protože je to však jednorozměrný podprostor generovaný právě u_1, musí se zobrazit na nějaký jeho nenulový násobek au_1. Tím je zobrazení určeno a má matici

$$A_{\underline{u}}\begin{pmatrix}a&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Nyní již stačí matici transformovat do standardní báze, matice přechodu od báze $\underline{u}$ ke standardní je

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice zobrazení A ve standardní bázi je potom

$$A_{\underline{e}} = TA_{\underline{u}}T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -a & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & a \end{pmatrix}$$

Zároveň jsou to všechna taková zobrazení, kde ovšem $a \neq 0$.

2. Pokud by takové lineární zobrazení mělo existovat, muselo by platit

$$\begin{aligned} A(1,-4,5) &= A(-3(1,2,-3)+2(2,1,2)) = \\ &= -3A(1,2,-3)+2A(2,1,2) = -3(1,2)+2(2,3) = (1,-3) \neq (1,3) \end{aligned}$$

Proto takové lineární zobrazení neexistuje.

3. Pomocí linearity zobrazení získáme:

$$f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \qquad f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \qquad f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

$$\Rightarrow f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + 2c - d$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}, \quad \mathrm{Ker}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

4. Derivace součtu je součet derivací. Konstantu lze z derivovaného výrazu vytknout. Tedy derivace je lineární zobrazení. Zobrazení A je proto také lineární. Matice zobrazení $D : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_4[x]$, definovaného předpisem $D(P) = P'$, je

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pro matici zobrazení A potom dostáváme

$$A = D^3 - 2D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Výpočet vlastních hodnot:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & -12 & 24 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^5$$

Tedy zobrazení má jedinou vlastní hodnoru $\lambda = 0$. Z tvaru matice A je vidět, že vlastní vektory jí příslušné budou tvořit vektorový podprostor

$$\langle (1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0)\rangle$$

Zároveň je tento podprostor jádrem zobrazení A, neboť se jedná o vlastní vektory příslušné vlastní hodnotě $\lambda = 0$. V matici A máme ve sloupečcích obrazy bázových vektorů, které generují obraz zobrazení, stačí z nich vybrat bázi. Ta ale zjevně je

$$\mathrm{Im}\ A = \langle (1,0,0,0,0),(1,-2,0,0,0),(0,1,-1,0,0)\rangle$$

5. Označme bázi prostoru $\mathbb{K}^3$ ze zadání jako $\underline{u}$. Nejprve určíme vlastní hodnoty zobrazení f v této bázi a nakonec vše převedeme do standardní báze.

$$\begin{aligned}
|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 7 \\ 1 & -4-\lambda & 9 \\ -4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} =& \\
=&(4-\lambda)(-4-\lambda)(5-\lambda)+180+28(-4-\lambda)+5(5-\lambda) = \\
=&-\lambda^3+5\lambda^2-17\lambda+13 = \\
=&-(\lambda-1)[\lambda-(2-3i)][\lambda-(2+3i)]
\end{aligned}$$

Dosazením $\lambda = 1$ do $A - \lambda E$ získáme prostor vlastních vektorů příslušný vlastní hodnotě $\lambda = 1$.

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 1 & -5 & 9 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Prostor vlastních vektorů tedy je $V_1 = \langle (1,2,1)_{\underline{u}}\rangle$. Pro převod do standardní báze použijeme matici

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Po transformaci je $V_1 = \langle (3,-1,1)\rangle$. Nyní dosadíme hodnotu $\lambda = 2-3i$.

$$\begin{pmatrix} 4-(2-3i) & -5 & 7 \\ 1 & -4-(2-3i) & 9 \\ -4 & 0 & 5-(2-3i) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -6+3i & 9 \\ 2+3i & -5 & 7 \\ -4 & 0 & 3+3i \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -6+3i & 9 \\ 0 & 16+12i & -11-27i \\ 0 & -24+12i & 39+3i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -6+3i & 9 \\ 0 & 400 & -500-300i \\ 0 & -24+12i & 39+3i \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -6+3i & 9 \\ 0 & 4 & -5-3i \\ 0 & -24+12i & 39+3i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -24+12i & 36 \\ 0 & 4 & -5-3i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3-3i \\ 0 & 4 & -5-3i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Prostor vlastních vektorů je tedy $V_{2-3i} = \langle (3+3i, 5+3i, 4)_{\underline{u}}\rangle$, po transformaci potom $V_{2-3i} = \langle (8+6i,-2,4)\rangle = \langle (4+3i,-1,2)\rangle$. Analogicky pro poslední vlastní hodnotu, pří ní jde o tytéž matice, co výše, pouze jsou komplexně sdružené, platí $V_{2+3i} = \langle (3-3i,5-3i,4)_{\underline{u}}\rangle = \langle (4-3i,-1,2)\rangle$. Zároveň je vidět, že reálným skalárům přísluší pouze jedna vlastní hodnota, a to $\lambda = 1$ a pouze jednorozměrný prostor vlastních vektorů V_1 příslušný této vlastní hodnotě.

6. Pro vlastní hodnoty λ platí

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0$$

Nad $\mathbb{Z}_5$ dostaneme $\lambda^2 = -4 = 1$, která má řešení $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Vlastní vektory najdeme řešením

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow U_1 = \langle(-2, 1)\rangle$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow U_4 = \langle(2, 1)\rangle$$

Nad $\mathbb{R}$ nemá rovnice $\lambda^2 = -4$ řešení, zobrazení nemá vlastní hodnoty a tím pádem ani vlastní vektory.

Nad $\mathbb{C}$ dostáváme řešení $2i, -2i$. Vlastní vektory najdeme řešením

$$\begin{pmatrix} -2i & -2 \\ 2 & -2i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow U_{2i} = \langle(i, 1)\rangle$$
$$\begin{pmatrix} 2i & -2 \\ 2 & 2i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow U_{-2i} = \langle(-i, 1)\rangle$$

14.12. Vlastní hodnoty a vlastní vektory II

1. Všechna tři zobrazení mají trojnásobnou vlastní hodnotu 3, liší se však podprostorem vlastních vektorů. V případě matice A je podprostor vlastních vektorů celé $\mathbb{R}^3$, v případě matice B jde o $\langle(1, 0, 0), (0, 0, 1)\rangle$ a pro C vychází $\langle(1, 0, 0)\rangle$.

2.

a) Spočteme vlastní hodnoty:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & -3 \\ 4 & 5-\lambda & -4 \\ 6 & 4 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

Charakteristický polynom má kořeny

$$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 1$$

Každé vlastní hodnotě přísluší alespoň jeden vlastní vektor (a tím i podprostor vlastních vektorů dimenze alespoň 1). Vlastní vektory různých vlastních hodnot jsou lineárně nezávislé. Proto pokud jsme získali tři různé vlastní hodnoty, budou generovat celý prostor $\mathbb{K}^3$.

b) Obdobným výpočtem zjistíme, že vlastní hodnoty jsou:

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2 + 3i,\ \lambda_3 = 2 - 3i$$

Stejnou úvahou jako v první části zjistíme, že nad poli $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ není matice A podobná diagonální, nad polem $\mathbb{C}$ podobná je.

c) Opět spočteme vlastní hodnoty:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & -5 \\ 6 & 4-\lambda & -9 \\ 5 & 3 & -7-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 = -\lambda^2(\lambda - 1)$$

Vlastní hodnoty jsou:

$$\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 1$$

Nyní musíme zjistit vlastní vektory příslušné vlastní hodnotě $\lambda_{1,2}$:

$$A - \lambda_{1,2}E = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tedy vlastní vektory příslušné 0 tvoří podprostor $\langle(1,3,2)\rangle$ Vlastní vektory generují pouze podprostor dimenze 2, tedy nad žádným z polí $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ani $\mathbb{C}$ není matice A podobná diagonální.

3. Nechť u je vlastní vektor zobrazení ϕ, potom $\phi(u) = \lambda u \neq 0$. Díky linearitě platí $\phi(\frac{1}{\lambda}u) = \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda u = u$. Tedy $\phi^{-1}(u) = \frac{1}{\lambda}u$ a u je vlastním vektorem zobrazení ϕ^{-1}. Dále je $(\phi^{-1})^{-1} = \phi$, platí tedy též, že každý vlastní vektor ϕ^{-1} je též vlastním vektorem ϕ. Z toho plyne první tvrzení. Zároveň je také vidět, že pokud je λ vlastní hodnota ϕ, pak ϕ^{-1} má vlastní hodnotu $\frac{1}{\lambda}$ a naopak. Tím je dokázáno i druhé tvrzení.

4.

1. Charakteristická matice a polynom

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = -(\lambda-1)^2(\lambda-3)(\lambda-1)$$

Pro jednotlivé hodnoty dostaneme

$$A - E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow U_1 = \langle(-1,0,1),(1,1,0)\rangle$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow U_3 = \langle(-1,1,0)\rangle$$

2. Charakteristická matice

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ -1 & -2-\lambda & -3 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ -\lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)((1-\lambda)\lambda^2 + 3\lambda^2 - 2\lambda^2) = (\lambda-2)^2\lambda^2$$

Vlastní hodnoty jsou 0 a 2. Vlastní vektory najdeme analogicky předcházejícím příkladům, proto již stručněji.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow U_0 = \langle(-2,1,0,0),(-3,0,0,1)\rangle$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow U_2 = \langle(0,0,1,0),(1,-1,0,1)\rangle$$

14.13. Vlastní hodnoty a vlastní vektory III

1. $\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 + 4\lambda - 20$, vlastním hodnotám $5, 2, -2$ odpovídají vlastní podprostory $\langle(1, 1, \frac{\alpha+\beta}{3})\rangle, \langle(0, 0, 1)\rangle, \langle(1, -\frac{4}{3}, \frac{\beta}{3} - \frac{\alpha}{4})\rangle$. Vlastní hodnoty na parametrech nezávisí, ale vlastní vektory ano. Postup viz. 14.12.4.

Vlastní hodnoty B jsou $-2, 5, 2+\alpha$, vlastní podprostory příslušné těmto hodnotám

$$\left\langle\left(-3\frac{4+\alpha}{3\alpha-4\beta}, 4\frac{4+\alpha}{3\alpha-4\beta}, 1\right)\right\rangle, \left\langle\left(1, 1, -\frac{\alpha+\beta}{\alpha-3}\right)\right\rangle, \langle(0, 0, 1)\rangle$$

2.

1. Spočtěme vlastní hodnoty matice A:

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 4-\lambda & 0 \\ 5 & 7 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 27 - 27\lambda + 9\lambda^2 - \lambda^3 = -(\lambda-3)^2$$

   Tedy jediná vlastní hodnota je $\lambda = 3$. Zjistíme vlastní vektory příslušné této hodnotě (postup viz předchozí příklady), ty tvoří podprostor $\langle(0, 0, 1)\rangle$. Prostor vlastních vektorů má dimenzi 1, Jordanova matice tedy bude obsahovat 1 blok:

$$J_A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Zcela analogicky dostáváme, že vlastní hodnota je $\lambda = 3$. Jí příslušné vlastní vektory jsou:

$$\langle(1, 0, 0), (0, 0, 1)\rangle$$

   Dimenze prostoru vlastních vektorů je 2, tedy Jordanova matice bude obsahovat dva bloky:

$$J_B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Dostáváme vlastní hodnoty:

$$\lambda_{1,2} = 1, \ \lambda_3 = -1$$

   Vlastní vektory příslušné hodnotě 1 tvoří podprostor:

$$\langle(1, 1, -2)\rangle$$

   proto bude Jordanův blok příslušný hodnotě 1 pouze jeden.

$$J_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Nejprve určíme vlastní hodnoty A a jim příslušné podprostory vlastních vektorů. To samé provedeme pro identické zobrazení E.

$$\begin{aligned} |A-\lambda E| = &\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 4 & -2-\lambda & 2 \\ 2 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\ =&(2-\lambda)(-2-\lambda)(1-\lambda) - 4 - 4 - 2(-2-\lambda) + 2(2-\lambda) + 4(1-\lambda) = \\ =&-\lambda^3 + \lambda^2 = -\lambda^2(\lambda-1) \end{aligned}$$

Nyní dosadíme vlastní hodnotu $\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Odpovídající podprostor vlastních vektorů tedy je $V_0 = \langle (1,2,0),(0,1,1) \rangle$. Totéž pro $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Potom je $V_1 = \langle (1,2,1) \rangle$. Pro identické zobrazení E je zřejmě $\lambda_{1,2,3} = 1$ a podprostor vlastních vektorů příslušných vlastní hodnotě $\lambda = 1$ je zřejmě celé $V_1 = \mathbb{K}^3$. Pro $x_1 = (1,2,0)$ platí $Ax_1 = 0$, $Ex_1 = x_1$. Potom

$$Bx_1 = 3A^4x_1 - 2A^3x_1 + A^2x_1 - Ax_1 + 6Ex_1 = 6x_1$$

Pro $x_2 = (0,1,1)$ analogicky $Ax_2 = 0$, $Ex_2 = x_2$, tedy též $Bx_2 = 6x_2$. Nakonec pro $x_3 = (1,2,1)$ platí $Ax_3 = x_3$, $Ex_3 = x_3$, je tedy x_3 též vlastní vektor, neboť $Bx_3 = 7x_3$. Protože x_1, x_2, x_3 generují celé $\mathbb{K}^3$, má B vlastní hodnoty : $\lambda = 6$ s odpovídajícím podprostorem vlastních vektorů $\langle (1,2,0),(0,1,1) \rangle$ a $\lambda = 7$ s podprostorem vlastních vektorů $\langle (1,2,1) \rangle$.

14.14. Afinní úlohy I

1. Podle definice

$$\begin{aligned} A' = 0 \cdot A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C &= A + \frac{1}{2}(B - A) + \frac{1}{2}(C - A) \Rightarrow \\ \Rightarrow A' - A &= \frac{1}{2}(B - A) + \frac{1}{2}(C - A) \end{aligned}$$

Analogicky

$$\begin{aligned} B' - B &= \frac{1}{2}(C - B) + \frac{1}{2}(A - B) \\ C' - C &= \frac{1}{2}(A - C) + \frac{1}{2}(B - C) \end{aligned}$$

Víme však, že $(X - Y) = -(Y - X)$ a proto sečtením dostaneme

$$(A' - A) + (B' - B) + (C' - C) = 0$$

2. $p : 2x - 3y - 6 = 0$. Parametrický popis z implicitního získáme snadno: jednu souřadnici položíme rovnu parametru a druhou dopočítáme:

$$x = t \to y = \frac{2t - 6}{3} \longrightarrow p = \{[t, \frac{2t - 6}{3}], t \in \mathbb{R}\}$$

Převod parametrického tvaru na implicitní ukážeme obecně. Pro přímku $q = \{[a + bt, c + dt]\}$ budeme hledat implicitní popis ve tvaru $Ax + By + C = 0$. Do tohoto popisu dosadíme za x, y z parametrického popisu:

$$A(a + bt) + B(c + dt) + C = 0 \Rightarrow (Ab + Bd)t + (Aa + Bc + C) = 0$$

Protože má být rovnost splněna pro všechna t, musí být oba koeficienty nulové, toho dosáhneme například volbou $A = d$, $B = -b$, $C = bc - ad$. Rovnice pak má tvar

$$dx - by + (bc - ad) = 0$$

Dodejme ještě, že jinou volbou bychom dostali ekvivalentní rovnici.

3.

1. Vzájemnou polohu přímek v rovině určíme pomocí jejich průniku. To znamená určit body, splňující obě rovnice přímek.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 0 & 13 & 26 \end{pmatrix}$$

Řešením je

$$x = 1, \quad y = 2$$

Průnikem je jeden bod, jedná se tedy o různoběžky.

2. Dosadíme do rovnice přímky q za x, y z parametrického popisu p. Dostáváme

$$2(1+t) + (-1-2t) - 1 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Rovnice je splněna pro všechna $t \in \mathbb{R}$, jde tedy o shodné přímky.

3. Budeme hledat množinu parametrů t a s, pro něž dostáváme stejné body:

$$(2,1) + t(-1,3) = (1,3) + s(2,-6)$$
$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Množina řešení soustavy je $\emptyset$, proto se jedná o nesplývající rovnoběžky.

4. Zjistíme, kolik bodů leží v průniku těchto dvou rovin

(1) Řešíme soustavu rovnic

$$(1,-2,3) + t(-1,0,1) + s(2,1,0) = (-1,0,1) + t'(1,1,2) + s'(-1,3,1)$$

pro neznámé t, s, t', s'. Soustavu přepíšeme do rozsířené matice

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

Protože je průnikem jednorozměrný vektorový prostor, tedy přímka, jsou roviny různoběžné.

(2) Budeme dělat totéž, akorát dosadíme parametrický popis jedné roviny do implicitního popisu druhé.

$$\begin{aligned} (2+t+s) + (-1+t-s) - 2(1+t) + 1 =& 0 \\ 0 =& 0 \end{aligned}$$

Protože je nyní řešením celé $(t,s) \in \mathbb{R}^2$, tedy celá rovina α, jsou dané roviny shodné, tedy rovnoběžné.

(3) Průnik tentokrát vyřešíme jako soustavu rovnic

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Prostor řešení této rovnice má dimenzi 1, tedy je průnikem nutně přímka, roviny jsou různoběžné.

5. Obě rovnice zapíšeme do matice a tu upravíme na schodovitý tvar

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Tím dostáváme množinu řešení této soustavy jako součet partikulárního řešení (libovolné, např. $(3, -3, 0)$) a řešení zhomogenizované soustavy, tj.

$$p = (3, -3, 0) + \langle (0, 1, 1) \rangle = \{(3, -3 + t, t);\ t \in \mathbb{R}\}$$

Svazek rovin je dán takovou lineární kombinací daných rovnic

$$\lambda_1(2x - y + z - 9) + \lambda_2(x + y - z) = 0, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

pro kterou tato rovnice zůstane lineární, tj. pro $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$.

Parametrický popis přímky dané body A, B získáme jednoduše jako

$$p = \{A + t\vec{AB};\ t \in \mathbb{R}\}$$

Implicitní popis získáme rozepsáním parametrického popisu do složek a vyloučením parametru, dostaneme dvě nezávislé rovnice rovin.

Rovina by se řešila analogicky, např. parametrický popis

$$\sigma = \{A + t\vec{AB} + s\vec{AC};\ s, t \in \mathbb{R}\}$$

6. Nejprve určíme obě roviny $\langle M, p\rangle$, $\langle M, q\rangle$

$$\alpha = \langle M, p\rangle : (x, y, z) = (2, -1, 1) + t(1, 2, 1) + s(5, 1, 3)$$

$$\beta = \langle M, q\rangle : (x, y, z) = (1, 1, 1) + t'(2, -1, 1) + s'(6, -1, 3)$$

Hledaná osa je $o = \alpha \cap \beta$. Budeme tedy řešit soustavu $(2, -1, 1) + t(1, 2, 1) + s(5, 1, 3) = (1, 1, 1) + t'(2, -1, 1) + s'(6, -1, 3)$ o čtyřech neznámých t, s, t', s'. Její rozšířená matice je

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & -6 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Řešením je $(0, 1, 0, 1) + \langle (-2, 2, 1, 1) \rangle$. Po dosazení za t', s' dostáváme

$$o = [(1, 1, 1) + 0(2, -1, 1) + 1(6, -1, 3)] + \langle 1(2, -1, 1) + 1(6, -1, 3) \rangle = (7, 0, 4) + \langle 8, -2, 4 \rangle$$

neboli $o : (x, y, z) = (7, 0, 4) + t(8, -2, 4)$. Příčka zadaná směrem se řěší stejně, až na to, že α, β jsou zadány přímkami a dalším směrovým vektorem, nikoli bodem.

14.16. Prostory se skalárním součinem I

1. Ověřím definiční vlastnosti skalárního součinu na prvním příkladu, ostatní analogicky.

1. $$g(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

   (a) Symetrie

   $$g(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 = y_1x_1 + y_1x_2 + y_2x_1 + y_2x_2 = g(y, x) = \overline{g(y, x)}$$

   (b) Linearita násobení skalárem

   $$g(ax, y) = ax_1y_1 + ax_1y_2 + ax_2y_1 + ax_2y_2 = a(x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2) = ag(x, y)$$

(c) Linearita sčítání vektorů

$$g(u+x,y) = (u_1+x_1)y_1 + (u_1+x_1)y_2 + (u_2+x_2)y_1 + (u_2+x_2)y_2 =$$
$$= (u_1y_1 + u_1y_2 + u_2y_1 + u_2y_2) + (x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2) = g(u,y) + g(x,y)$$

(d) Vlastnost reflexivity

$$g(x,x) = x_1x_1 + x_1x_2 + x_2x_1 + x_2x_2 = (x_1+x_2)^2 > 0 \text{ pro nenulový } x$$

Zobrazení je skalární součin.

2. Zobrazení není skalární součin, protože není symetrické.

3. Zobrazení je skalární součin.

2.

(1) V bázi $\underline{u} = ((1,2),(2,3))$ má mít skalární součin $u \cdot v$ pro libovolné vektory u, v tvar

$$u \cdot v = x'^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y'$$

kde x' a y' jsou souřadnice příslušných vektorů v bázi $\underline{u}$. Po převodu do standardní báze transformační maticí

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

dostáváme pro skalární součin ve standardních souřadnicích $(x,\, y)$

$$u \cdot v = (T^{-1}x)^T E (T^{-1}y) = x^T \left[(T^{-1})^T E T^{-1}\right] y = x^T \begin{pmatrix} 13 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} y$$

Po rozepsání tohoto maticového násobení dostáváme skalární součin jako zobrazení

$$g(x,y) = 13x_1y_1 - 8x_1y_2 - 8x_2y_1 + 5x_2y_2$$

(2) Pro vektory u, v ze zadání platí

$$u \cdot v = (-5,2)\cdot(10,-4) = (10,-4)\cdot(-5,2) = -2\,[(-5,2)\cdot(-5,2)] < 0$$

protože pro vektor $(-5,2) \neq (0,0)$ musí (podle posledního axiomu skalárního součinu) platit $(-5,2)\cdot(-5,2) > 0$. Proto nemohou být vektory u, v kolmé.

3. Přesně podle Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu

1. $$v_1 = u_1 = (1,1,-1,-1)$$
2. $$v_2 = u_2 + \alpha_1 v_1, \alpha_1 = -\tfrac{u_2\cdot v_1}{v_1\cdot v_1} = -\tfrac{-2}{4} = \tfrac{1}{2}$$
$$v_2 = (1,-1,1,1) + \tfrac{1}{2}(1,1,-1,-1) = (\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$$
3. $$v_3 = u_3 + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2,$$
$$\beta_1 = -\tfrac{u_3\cdot v_1}{v_1\cdot v_1} = 1, \quad \beta_2 = -\tfrac{u_3\cdot v_2}{v_2\cdot v_2} = 0,$$
$$v_3 = (-1,-2,0,1) + (1,1,-1,-1) = (0,-1,-1,0)$$
Získali jsme ortogonální bázi, provedeme normování
tak, že každý vektor podělíme jeho velikostí
4. $$e_1 = \tfrac{1}{2}v_1, e_2 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}v_2, e_3 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}v_3$$

4. Vyjdeme ze standardní báze: $u_1 = 1, u_2 = x, u_3 = x^2, u_4 = x^3$ Nyní použijeme ortogonalizační proces

$$e_1 = u_1 = 1 \qquad e_1 \cdot e_1 = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x = 2$$

$$\begin{aligned} e_2 = u_2 + \alpha e_1 \quad &|\cdot e_1 \\ 0 = u_2 \cdot e_1 + \alpha e_1 \cdot e_1 \end{aligned} \quad u_2 \cdot e_1 = \int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x = 0 \quad \Rightarrow \alpha = 0$$

$$e_1 = u_2 = x \qquad e_2 \cdot e_2 = \int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} e_3 = u_3 + \alpha e_2 + \beta e_1 \quad &|\cdot e_1 \\ 0 = u_3 \cdot e_1 + \beta e_1 \cdot e_1 \end{aligned} \quad u_3 \cdot e_1 = \int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \beta = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} e_3 = u_3 + \alpha e_2 + \beta e_1 \quad &|\cdot e_2 \\ 0 = u_3 \cdot e_2 + \alpha e_2 \cdot e_2 \end{aligned} \quad u_3 \cdot e_2 = \int_{-1}^{1} x^3\mathrm{d}x = 0 \quad \Rightarrow \alpha = 0$$

$$e_3 = x^2 - \frac{1}{3}$$

Dalším zopakováním tohoto postupu na $e_4 = u_4 + \alpha e_3 + \beta e_2 + \gamma e_1$ získáme $e_4 = x^3 - \frac{3}{5}x$
Matice přechodu od standardní báze je

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Je vidět, že

$$\langle(-1,1,1),(1,1,1)\rangle = \langle(1,0,0),(0,1,1)\rangle$$

Druhý vektor ještě znormalizujeme

$$\frac{(0,1,1)}{\sqrt{(0,1,1)\cdot(0,1,1)}} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Ortonormální báze podprostoru L je

$$L = \left\langle (1,0,0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle$$

Potom pro průmět vektoru $u = (1,2,3)$ dostáváme

$$\mathrm{pr}_L(u) = ((1,2,3)\cdot(1,0,0))(1,0,0) + \left((1,2,3)\cdot\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(1,\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$$

14.17. Prostory se skalárním součinem II

1. Zápis skalárního součinu vektoru u se souřadným vyjádřením $x' = (x_1' \cdots x_{n+1}')^T$ a vektoru v se souřadným vyjádřením $y' = (y_1' \cdots y_{n+1}')^T$ v bázi ze zadání je

$$u \cdot v = {x'}^T E \overline{y'}$$

Pro převod ze standardní báze $\underline{e} = (1, x, \dots, x^n)$ do báze ze zadání použijeme transformační matici

$$T = \begin{pmatrix} 0! & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1! & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (n-1)! & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n! \end{pmatrix}$$

Skalární součin ve standardní bázi má pak vzhledem k $x' = Tx$ a $y' = Ty$ tvar

$$u \cdot v = (Tx)^T E\,\overline{(Ty)} = x^T (T^T E \overline{T}) \overline{y} =$$

$$= x^T \cdot \begin{pmatrix} 0!^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1!^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (n-1)!^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n!^2 \end{pmatrix} \cdot \overline{y} =$$

$$= 0!^2 \cdot x_1 y_1 + \dots + n!^2 \cdot x_{n+1} y_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} [(k! \cdot x_{k+1})(k! \cdot y_{k+1})] = \sum_{k=0}^{n} \left[u^{(k)}(0) \cdot v^{(k)}(0) \right]$$

kde $u^{(k)}(0)$, $v^{(k)}(0)$ značí k-té derivace u, v podle proměnné x v bodě 0.

2. Přesně podle Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu

1. $v_1 = u_1 = (3, 2, -4, -6)$
2. $v_2 = u_2 + \alpha_1 v_1, \alpha_1 = -\dfrac{u_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} = -\dfrac{130}{65} = -2$

   $v_2 = (8, 1, -2, -16) - 2(3, 2, -4, -6) = (2, -3, 6, -4)$
3. $v_3 = (6, 4, 2, 3)$
4. $v_4 = (0, 0, 0, 0)$

   Nalezená báze má pouze tři vektory, protože původní vektory byly závislé.

   Nyní již pouze provedeme normování
5. $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{65}} v_1, e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{65}} v_2, e_3 = \dfrac{1}{\sqrt{65}} v_3$

3.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 & 0 \\ 4 & -2 & 7 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ generátory prostoru řešení rovnic jsou $u_1 = (1, 2, 0, 0), u_2 = (0, -8, -3, 1)$ Ty musíme jen ortogonalizovat a normalizovat:

$$e_1 = u_1; e_2 = u_2 + \alpha u_1 \rightsquigarrow \alpha = \frac{16}{5}$$

Ortonormalizovaný fundamentální systém řešení je

$$(e_1)_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0, 0) \qquad (e_2)_n = \sqrt{\frac{5}{114}} \left(\frac{16}{5}, -\frac{8}{5}, -3, 1 \right)$$

4.

1. Nejprve ověříme, zda jsou zadané vektory kolmé.

$$u \cdot v \ = (2,2,1)\cdot(-2,1,2) = -4+2+2 = 0$$

Hledaný vektor $w = (a,b,c)$ musí být kolmý k oběma zadaným. Dostáváme následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 2a+2b+c &= 0 \\ -2a+b+2c &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bázi můžeme doplnit libovolným vektorem $w \in \langle(1,-2,2)\rangle$

2. Opět sestavíme soustavu a vyřešíme

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 10 & -17 & 14 \end{pmatrix}$$

Zatímco v 1. části jsme měli až na velikost a orientaci pouze 1 možnost, zde můžeme za w, x volit libovolné na sebe kolmé vektory z roviny

$$w, x \in \langle(1,-7,0,5),(-1,17,10,0)\rangle$$

Jednou z možných voleb je například dvojice

$$w \in \langle(1,-15,-8,1)\rangle \qquad x \in \langle(15,-31,74,112)\rangle$$

5. Matice $A \in \mathrm{Mat}_n\mathbb{K}$ je ortogonální právě tehdy, když její sloupce tvoří ortonormální bázi prostoru $\mathbb{K}^n$ se standardním skalárním součinem. Dostáváme tak soustavu rovnic pro neznáme hodnoty a, b, c. Nejprve musí být všechny sloupce normované, dostáváme

$$\begin{aligned} 1 = a^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + (-a)^2 = 2a^2 + \frac{1}{3} \qquad &\Rightarrow \qquad |a| = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 = 0^2 + (2b)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 4b^2 + \frac{1}{2} \qquad &\Rightarrow \qquad |b| = \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 1 = (2c)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + c^2 = 5c^2 + \frac{1}{6} \qquad &\Rightarrow \qquad |c| = \frac{1}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

Z podmínek, že sloupce musí být na sebe kolmé dostáváme, že všechna a, b, c musí mít stejná znaménka, naopak obě trojice $(a,b,c) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$ a $(a,b,c) = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$ vyhovují, dostáváme tak všechna řešení. Geometrické vlastnosti, viz. 14.18.4.

6. Označme matici zobrazení G, matici prvního skalárního součinu A a druhého B. Pak chceme, aby pro všechna $u, v \in \mathbb{R}^3$ platilo

$$u^T A v = (Gu)^T B (Gv) = u^T (G^T B G) v$$

Volme například matici druhého skalárního součinu jednotkovou. Protože pro matici G máme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dostaneme po patřičném vynásobení matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

což je matice skalárního součinu, protože je pozitivně definitní a samoadjungovaná (příp. prověřte axiomy skalárního součinu).

14.18. Ortogonální průměty a ortogonální zobrazení

1. $P = \langle(-1,2,0,1),(3,1,-2,4),(-4,1,2,-4)\rangle$ a hledáme takový (x,y,z,t) který je kolmý na každý z generátorů P.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ -4 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Řešením tohoto systému rovnic je $P^{\perp} = \langle(4,2,7,0)\rangle$ Dále určíme průměty standardních bázových vektorů do $P^{\perp}$:

$$(1,0,0,0) = a(4,2,7,0) + b(-1,2,0,1) + c(3,1,-2,4) + d(-4,1,2,-4)$$

Jestliže celou rovnici vynásobíme vektorem $(4,2,7,0)$, který je kolmý k ostatním, získáme

$$4 = 69a \Rightarrow a = \frac{4}{69}$$

tedy průmět vektoru $(1,0,0,0)$ do $P^{\perp}$ je $\frac{4}{69}(4,2,7,0)$. Průmět do P určíme jednoduše jako

$$(1,0,0,0) - \frac{4}{69}(4,2,7,0) = \left(\frac{53}{69}, -\frac{8}{69}, -\frac{28}{69}, 0\right)$$

Průměty dalších vektorů určíme analogicky:

$$\begin{aligned} (0,1,0,0) &= \frac{2}{69}(4,2,7,0) + \left(-\frac{8}{69}, \frac{65}{69}, -\frac{14}{69}, 0\right) \\ (0,0,1,0) &= \frac{7}{69}(4,2,7,0) + \left(-\frac{28}{69}, -\frac{14}{69}, \frac{20}{69}, 0\right) \\ (0,0,0,1) &= 0 \cdot (4,2,7,0) + (0,0,0,1) \end{aligned}$$

2.

1. Najdeme libovolný vektor, který je kolmý na u, v i w a ten bude generátorem $L^{\perp}$.

$$x = (a,b,c,d)$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Řešením je libovolné $x \in \langle(-1,-1,1,1)\rangle$. Potřebujeme bázi $L^{\perp}$, vektor x proto hledáme normovaný

$$x = \frac{(-1,-1,1,1)}{\sqrt{(-1,-1,1,1)\cdot(-1,-1,1,1)}} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Nyní již můžeme spočítat projekci z do $L^{\perp}$:

$$\mathrm{pr}_{L^{\perp}}(z) = \left((4,2,-5,3)\cdot\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (2,2,-2,-2)$$

Kolmý průmět do L již snadno dopočítáme

$$\mathrm{pr}_L(z) = z - \mathrm{pr}_{L^\perp}(z) = (2, 0, -3, 5)$$

2. Postup řešení je shodný s minulou částí.

$$\mathrm{pr}_{L^\perp}(z) = (4, 2, 1, -1) \qquad \mathrm{pr}_L(z) = (-2, 3, 1, -1)$$

3. Označme hledanou matici $A \in \mathrm{Mat}_2\mathbb{C}$ jako

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Využijeme toho, že matice je unitární právě tehdy, když její řádky tvoří ortonormální bázi prostoru $\mathbb{C}^2$ se standardním skalárním součinem. Dostáváme tak podmínky

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \qquad |c|^2 + |d|^2 = 1 \qquad a\overline{c} + b\overline{d} = 0$$

Pro velikosti těchto čísel máme vztahy

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \qquad |c|^2 + |d|^2 = 1 \qquad |a||c| = |b||d|$$

přičemž z prvních dvou můžeme dosadit vyjádření $|b|$, $|c|$ do poslední rovnice umocněné na druhou a dostaneme

$$|a|^2 \cdot (1 - |d|^2) = (1 - |a|^2) \cdot |d|^2 \qquad \Rightarrow \qquad |a| = |d|$$

protože se jedná o nezáporná reálná čísla. Po dosazení zpět do vztahů pro $|b|$, $|c|$ máme (při označení $|a| = |d| = \cos\alpha$)

$$|b| = |c| = \sin\alpha$$

kde $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ kvůli nezápornosti uvažovaných čísel. Pro reálné skaláry již stačí pouze doplnit znaménka. Ta dostaneme z rovnice $a\overline{c} + b\overline{d} = 0$. Musí tedy být buď právě jedno z čísel nekladné nebo právě jedno z čísel nezáporné. Pokud rozšíříme obor hodnot argumentu α na $\alpha \in \langle 0, 2\pi)$, pak dostáváme pouze dva možné tvary ortogonálních matic, a to sice

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Tyto matice jsou po řadě matice otočení o úhel α a složení překlopení podle osy x s týmž otočením. Potom je jasné, že první typ musí mít determinant 1, tedy kladný a druhý typ determinant -1, tedy záporný, očemž se můžeme přesvědčit výpočtem. Pro případ unitárních matic označme

$$\begin{aligned} a &= \cos\alpha(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1) \qquad & b &= \sin\alpha(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2) \\ c &= \sin\alpha(\cos\alpha_3 + i\sin\alpha_3) \qquad & d &= \cos\alpha(\cos\alpha_4 + i\sin\alpha_4) \end{aligned}$$

Rovnici $a\overline{c} + b\overline{d} = 0$ lze přepsat na ekvivalentní tvar

$$\begin{aligned} &\cos\alpha\sin\alpha\,[\cos(\alpha_1 - \alpha_3) + i\sin(\alpha_1 - \alpha_3)] = \\ &= \cos\alpha\sin\alpha\,[\cos(\pi + \alpha_2 - \alpha_4) + i\sin(\pi + \alpha_2 - \alpha_4)] \end{aligned}$$

Ta je zjevně splněna právě tehdy, když

$$\alpha_1 - \alpha_3 = \pi + \alpha_2 - \alpha_4 + 2k\pi$$

kde $k \in \mathbb{Z}$. Tím jsou popsány všechny takové matice.

4. Nejprve určíme charakteristický polynom a vlastní hodnoty

$$|A-\lambda E| = -(\lambda-1)\left(\lambda^2-\left(\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)x+1\right)$$

$$A-E \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\sqrt{6}-\sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{2}+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tím je určená osa rotace, protože je to podprostor s vlastní hodnotou 1. Tím je také jasné, že se jedná pouze o rotaci, pro reflexi by byla vlastní hodnota -1. Osa je podprostor

$$o = \left\langle \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}, -2\sqrt{2}+1, 2\right)\right\rangle$$

Úhel otočení určíme z komplexního kořene charakteristického polynomu.

$$\cos\varphi = \mathrm{Re}\lambda_{1,2} = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)$$

14.19. Bilineární a kvadratické formy

1.

1. $f(x,y) = x_1y_2$ je bilineární forma, není symetrická ani antisymetrická. Ukážeme linearitu v prvním argumentu:

$$f(ax+bx',y) = (ax_1+bx_1')y_2 = af(x,y)+bf(x',y)$$

2. $f(x,y) = x_1y_1+2y_2-12$ není bilineární forma, protože není lineární

$$f(ax,y) = ax_1y_1+2y_2-12 \neq af(x,y)$$

3. $f(x,y) = x_1y_2-x_2y_1+x_1y_1$ je bilineární formou, není symetrická, ani antisymetrická.

2.

1. Podle definice matice bilineární formy dostáváme (ve standardní bázi: $\mathbb{R}^3 = \langle(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\rangle$):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tedy hodnost bilineární formy je 2.

2. Matice přechodu z báze $\underline{u} = ((1,1,1),(0,1,1),(1,0,1))$ do standardní báze je

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Potom matice bilineární formy B v bázi $\underline{u}$ je

$$B = T^TAT = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice bilineární formy v bázi $\underline{u}$ je 2. Ke stejné matici B se samozřejmě dopracujeme i přímo z definice.

3. Kvadratickou formu $f(x)$ získáme dosazením $x = y$ do bilineární formy $h(x,y)$

$$f(x) = h(x,x) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 - 3x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2$$

Polární formu g určíme podle vztahu

$$\begin{aligned} g(x,y) =& \frac{1}{2}(f(x+y) - f(x) - f(y)) = \\ =& 2x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - 3x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 - x_3y_3 \end{aligned}$$

4. Zapíšeme formu do matice a poté je hodnost formy rovna hodnosti matice. V $\mathbb{R}^5$ nám pouze přibudou dva nulové řádky a dva nulové sloupce, které nemají žádný vliv na hodnost. Nad oběma prostory je hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rovna 3, což je i hodnost polární formy.

5.

a) $f(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 8x_1x_3 - 2x_2x_3$

$$= (x_1 - x_2 + 4x_3)^2 - x_2^2 - 16x_3^2 + 8x_2x_3 - 2x_2x_3 =$$

substituce $(x_1 - x_2 + 4x_3) = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = y_3$

$$= y_1^2 - y_2^2 + 6y_2y_3 - 16y_3^2 = y_1 - (y_2 - 3y_3)^2 + 9y_3^2 - 16y_3^2 =$$

substituce $z_1 = y_1, \quad z_2 = y_2 - 3y_3, \quad z_3 = y_3$

$$= z_1^2 - z_2^2 - 7z_3^2$$

b)

$$4x_1^2 + 2x_2^2 + 15x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3 = 4(x_1 + \frac{x_2}{2} - \frac{x_3}{2})^2 + (x_2 - 3x_3)^2 + 5x_3^2$$

c)

$$f(x,y) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

substituce $x_1 = y_1 + y_2, \quad x_2 = y_1 - y_2, \quad x_3 = y_3$

$$= y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 = (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2$$

14.20. Reálné a komplexní kvadratické formy

1.

1. Daná forma je $f(x) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 15x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$. Matice formy je

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \\ -2 & -4 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

tedy hodnost matice je 3. Proto je i hodnost kvadratické formy f 3 a tudíž je kanonický tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Převod formy do polární báze:
$f(x) = \frac{1}{4}(4x_1 + 2x_2 - 2x_3)^2 + x_2^2 + 14x_3^2 - 6x_2x_3$
transformace: $y_1 = 4x_1 + 2x_2 - 2x_3, y_2 = x_2, y_3 = x_3$
$f(y) = \frac{1}{4}y_1^2 + (y_2 - 3y_3)^2 + y_3^2$
transformace: $z_1 = y_1, z_2 = y_2 - 3y_3, z_3 = y_3$
$f(z) = \frac{1}{4}z_1^2 + z_2^2 + 5z_3^2$
transformace: $u_1 = \frac{1}{2}z_1, u_2 = z_2, u_3 = \sqrt{5}z_3$
$f(u) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$
Posbíráním transformací dostáváme:

$$\begin{gathered} u_1 = \tfrac{1}{2}z_1 = \tfrac{1}{2}y_1 = \tfrac{1}{2}(4x_1 + 2x_2 - 2x_2) = 2x_1 + x_2 - x_3 \\ u_2 = z_2 = y_2 - 3y_3 = x_2 - 3x_3 \\ u_3 = \sqrt{5}z_3 = \sqrt{5}y_3 = \sqrt{5}x_3 \end{gathered}$$

Tedy matice přechodu do polární báze je

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Vypočtením inverzní matice dostaneme matici přechodu od standartní báze k polární bázi. Její sloupce budou přímo bázové vektory polární báze.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

a polární báze je

$$\left(\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{3}{5}\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)\right)$$

2. Zcela analogickým postupem následujícími trasformacemi dojdeme ke kanonickému tvaru:

$$\begin{gathered} z_1 = y_1 + \tfrac{1}{2}y_2 + y_3 = \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + x_3 \\ z_2 = \tfrac{i}{2}y_2 = \tfrac{i}{2}(x_2 - x_1) \\ z_3 = iy_3 = ix_3 \\ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0 \end{gathered}$$

Matice transformace souřadnic je

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{i}{2} & \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

Její inverze je

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & i & i \\ 1 & -i & i \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

tedy polární báze je

$$((1, 1, 0), (i, -i, 0), (i, i, -i))$$

2.

(1) Matice této kvadratické formy je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

jejíž hlavní minory jsou všechny kladné. Kvadratická forma je potom pozitivně definitní (podle Sylvestrova kriteria).

(2) Podle Lagrangeovy věty upravíme $f(x)$ na tvar

$$f(x) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - 2x_3)^2$$

je tedy vidět, že je kvadratická forma indefinitní, což by se dalo jednoduše ukázat také tak, že bychom dosadili některé hodnoty, například

$$f(1, 1, 0) = 2 > 0 > -2 = f(1, -1, 0)$$

(3) Opět využijeme, stejně jako pro první kvadratickou formu Sylvestrova kriteria. Protože je $|A_1| = -2$, $|A_2| = 15$, $|A_3| = -15$, je kvadratická forma negativně definitní. Aplikací Lagrangeovy věty bychom získali

$$f(x) = -\frac{1}{2}(2x_1 - x_2 - 2x_3)^2 - \frac{15}{2}x_2^2 - x_3^2$$

3. Sylvestrovo kritérium používá k rozhodnutí výpočet hlavních minorů, z matic to však snadno uvidíme

1.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2a & \frac{a^2}{2} \\ 2a & 1 & 0 \\ \frac{a^2}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Protože hned první determinant je nulový, nemůže být forma ani negativně ani pozitivně definitní.

2.

$$\begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & a-3 \end{pmatrix}$$

Dostáváme postupně $A_1 = a, A_2 = a^2 - 1, \frac{1}{3}A_3 = -a^2 + 1$. Nejprve vyřešme pozitivní definitnost, musí být z první podmínky $a > 0$, z druhé $a > 1$ nebo $a < -1$, z třetí $-1 < a < 1$. Vidíme, že pozitivně definitní být nemůže. Negativně definitní je potom pro $a < -1$.

14.21. Metrické úlohy I

1. Obdélník $ABCD$ určíme bodem A a dvěma kolmými vektory u, v takto:

$$B = A + u, C = a + u + v, D = A + v, u \perp v$$

Pak už jen upravujeme dokazovanou rovnost.

$$(B - M) \cdot (D - M) = ((A - M) + u) \cdot ((C - M) - u) =$$

vzhledem k linearitě skalárního součinu v obou argumentech

$$\begin{aligned} &= (A - M) \cdot (C - M) - (A - M) \cdot u + (C - M) \cdot u - u^2 = \\ &\qquad = (A - M) \cdot (C - M) - (A - M) \cdot u + ((A - M) + u + v) \cdot u - u^2 = \end{aligned} \tag{1}$$

opět za použití linearity

$$= (A - M) \cdot (C - M) - (A - M) \cdot u + (A - M) \cdot u + u^2 + v \cdot u - u^2 = (A - M) \cdot (C - M)$$

Přičemž $u \cdot v = 0$, protože jsou na sebe kolmé.

2. Uvažme dva různé body nadroviny η: $x = (x_1, \dots, x_n)$ a $y = (y_1, \dots, y_n)$. Jejich rozdíl je vektor rovnoběžný s nadrovinou η:

$$w = x - y = (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n)$$

Jde o body nadroviny η, proto musí vyhovovat rovnici, která ji zadává.

$$\begin{gathered} a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_0 = 0 \\ a_1y_1 + \cdots + a_ny_n + a_0 = 0 \\ a_1(x_1 - y_1) + \cdots + a_n(x_n - y_n) = 0 \end{gathered}$$

Uvážíme-li vektor $v = (a_1, \dots, a_n)$, potom výše uvedená rovnost říká, že $w \perp v$. Protože toto platí bez ohledu na volbu bodů $x, y \in \eta$, je v kolmý na η. Jelikož je dimenze nadroviny $n - 1$, musí být dimenze ortogonálního doplňku nadroviny 1, tedy v jeho generátor

Uvažme libovolný bod X nadroviny. Ten má souřadnice $X = (x_1, \dots, x_n)$. Potom vektor $\vec{AX}$ má souřadnice

$$\vec{AX} = (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n)$$

Promítneme jej do ortogonálního doplňku nadroviny (ten je generován vektorem v, musíme ho ale vynormovat). Potom promítnutý vektor přímo realizuje vzdálenost a dostáváme

$$\begin{aligned} \varrho(A, \eta) &= \left| \vec{AX} \cdot \frac{v}{\|v\|} \right| = \frac{|\vec{AX} \cdot v|}{\|v\|} = \frac{|y_1a_1 - x_1a_1 + \cdots + y_na_n - x_na_n|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}} = \\ &= \frac{|a_1y_1 + \cdots + a_ny_n + a_0|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}} \end{aligned}$$

protože $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = -a_0$.

3.

(1) Pro nezáporná čísla je mocnění ekvivalentní úpravou, dostáváme tak ekvivalentní podmínku

$$(u + v) \cdot (u + v) = (u - v) \cdot (u - v) \qquad \Leftrightarrow \qquad u \cdot v = 0$$

Je tedy podmínka ze zadání ekvivalentní kolmosti vektorů u, v.

(2) Analogicky části (1) umocníme rovnici na druhou s tím že pro $\|u\| \geq \|v\|$ je to ekvivalentní podmínka, v opačném případě není podmínka ze zadání splněna nikdy.

$$2(u \cdot v) = -2\|u\|\,\|v\|$$

Po vydělení $2\|u\|\,\|v\|$ dostáváme

$$\cos \varphi(u, v) = -1$$

Podmínka (2) je tedy ekvivalentní tomu, že vektory u, v jsou lineárně závislé, opačně orientované a vektor u je alespoň tak velký, co vektor v (tj. $\|u\| \geq \|v\|$).

(3) Nerovnost (3) lze přepsat do podoby

$$\|u + v\| + \| - v\| \geq \|u\|$$

což je trojúhelníková nerovnost mezi vektory $u + v$ a $-v$, která platí pro všechny vektory.

(4) Nerovnost opět umocníme a analogicky části (1) dostaneme

$$u \cdot v > 0$$

což je ekvivalentní tomu, že vektory spolu svírají ostrý úhel (tedy musí být především nenulové).

4. Pro bod C musí platit $C = A + \vec{AB} + \vec{AD}$, což umožňuje snadno nalézt řešení v rovině. Podstatné je ovšem určení vektoru $\vec{AE}$, ze kterého již snadno určíme bod E a další body F, G, H prostým přičítáním vektorů k bodům. Pro hledaný vektor $\vec{AE} = (a, b, c)$ musí platit

$$\vec{AB} \perp \vec{AE}, \vec{AE} \perp \vec{AC}, |\vec{AE}| = |\vec{AC}| = 9$$

Rovnice dávají tvar

$$\begin{aligned} 2a + b + 2c &= 0 \\ -2a + 2b + c &= 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 9 \end{aligned}$$

Řešení je vektor $\pm(1, 2, -2)$ odkud snadno dopočteme všechny body.

$$\begin{array}{lllll} C = (1,2,6) & E = (2,1,1) & F = (4,2,3) & G = (2,4,4) & H = (0,3,2) \\ \text{resp.} & E = (0,-3,5) & F = (2,-2,7) & G = (0,0,8) & H = (-2,-1,6) \end{array}$$

5. $q : \sqrt{3}x - y + 3 = 0 \Rightarrow q^{\perp} = \langle(\sqrt{3}, -1)\rangle$ Budeme hledat vektor $v = (a, b)$, který má od $u = (\sqrt{3}, -1)$ požadovanou odchylku. Hledaná přímka pak bude mít rovnici $ax + by + c = 0$. Koeficient c určíme tak, aby přímka procházela bodem $M = (3, 2)$.

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 = \frac{\sqrt{3}a - b}{\sqrt{4}\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow a = 1, b = \sqrt{3}, c = 2\sqrt{3} - 3$$

Rovnice má pak tvar $x + \sqrt{3}y + (2\sqrt{3} - 3) = 0$. Pro odchylku $\frac{\pi}{3}$ dostáváme

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}a - b}{\sqrt{4}\sqrt{a^2 + b^2}} \rightsquigarrow a(a - \sqrt{3}b) = 0$$

$\Rightarrow$ zde máme dvě řešení: $y - 2 = 0$ a $\sqrt{3}x + y - (3\sqrt{3} + 2) = 0$

6.

Označme $v = (4, 3, -1)$ směrový vektor přímky a dále M takový bod na přímce, který splňuje $v \perp \vec{PM}$. Ten můžeme vypočítat.

$$\begin{gathered} M = (-7 + 4t, -4 + 3t, 7 - t) \\ \vec{PM} = (-10 + 4t, -3 + 3t, 3 - t) \\ 0 = v \cdot \vec{PM} = -40 + 16t - 9 + 9t - 3 + t = -52 + 26t \\ t = 2 \\ M = (1, 2, 5) \end{gathered}$$

Potom obraz v osové souměrnosti bodu P je

$$P' = P + 2\vec{PM} = (-1, 5, 6)$$

7. Vektor v kolmý na směrové vektory obou přímek je $v = (-3, 18, 8)$. Rovina $\eta = p + \langle v \rangle$ má parametrický popis

$$\eta : (x, y, z) = (0, -15, -6) + t(2, -1, 3) + r(-3, 18, 8)$$

Nyní stačí najít její průnik s přímkou q. Dostáváme soustavu rovnic pro neznámé t, r, s, jejíž rozšířená matice je

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 & 3 \\ -1 & 18 & -2 & 19 \\ 3 & 8 & 3 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Rovnice osy je tedy $o : (x, y, z) = (1, 1, -1) + r(-3, 18, 8)$.

14.22. Metrické úlohy II

1. Triviální případ, kdy nadroviny jsou rovnoběžné, je celkem zřejmý. Pokud je jejich průnik nenulový, je to jistě útvar dimenze $n-2$ a jeho ortogonální doplněk dimenze 2. Pokud přitom provedeme průnik s nadrovinou, dostaneme vektorový prostor dimenze 1, jehož libovolný generátor je normálovým vektorem druhé nadroviny. Průnikem s druhým prostorem dostaneme normálový vektor prvního prostoru. Z definice pak plyne trvzení.

2. Zvolme $A = (0, 0, 0), B = (1, 0, 0)$ a dopočítejme C a D tak aby $ABCD$ byl pravidelný čtyřstěn o délce hrany 1. Bod C můžeme volit v rovině $z = 0$. Potom vychází $C = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$. Pro poslední bod $D = (a, b, c)$platí rovnice

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1 \\ (a-1)^2 + b^2 + c^2 &= 1 \\ \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + c^2 &= 1 \end{aligned}$$

Řešením těchto rovnic je $D = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}})$

Takto přímo získáváme, že výška čtyřstěnu o délce hrany 1 je $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Odchylka protilehlých hran:

$$(B - A) \cdot (D - C) = 0$$

Tedy protilehlé hrany jsou na sebe kolmé.

3. Nejprve si vyjádříme vektory, které tvoří rovnoběžnostěn, jehož je čtyřstěn částí.

$$\begin{aligned} u_1 = B - A &= (1, 1, -4) \\ u_2 = C - A &= (2, -1, -2) \\ u_3 = D - A &= (0, 2, -1) \end{aligned}$$

Objem rovnoběžnostěnu můžeme vypočítat pomocí determinantu:

$$V = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{matrix} \right\| = |-9| = 9$$

Jedná se o čtyřstěn. Víme, že u jehlanů je objem roven $\frac{1}{3}Sv$, kde S je obsah základny. Ten je poloviční, než základna rovnoběžnostěnu (místo kosodélníku trojúhelník). Celkem tedy hledaný objem je

$$V_0 = \frac{V}{6} = \frac{3}{2}$$

Povrch je součet obsahů jednotlivých stran. Budeme potřebovat ještě dva vektory $u_4 = C - B =$

$(1,-2,2)$ a $u_5 = D - B = (-1,1,3)$. Obsahy jednotlivých stran vypočteme následovně:

$$S_{ABC} = \tfrac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{BC}|$$
$$S_{ABC}\tfrac{1}{2}|u_1 \times u_2| = \tfrac{1}{2}|(-6,-6,-3)| = \tfrac{9}{2}$$
$$S_{ABD}\tfrac{1}{2}|u_1 \times u_3| = \tfrac{1}{2}|(7,1,2)| = \tfrac{3}{2}\sqrt{6}$$
$$S_{ACD}\tfrac{1}{2}|u_2 \times u_3| = \tfrac{1}{2}|(-5,-2,-4)| = \tfrac{3}{2}\sqrt{5}$$
$$S_{BCD}\tfrac{1}{2}|u_4 \times u_5| = \tfrac{1}{2}|(-8,-5,-1)| = \tfrac{3}{2}\sqrt{10}$$
$$P = \tfrac{3}{2}(3 + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{10}) = 16,27$$

4. Objem spočítáme jako součet objemu čtyřstěnu $ABCV$ a čtyřstěnu $ACDV$. Nejprve zavedeme označení $u_B = B - A$, $u_C = C - A$, $u_D = D - A$, $u_V = V - A$. Potom bude pro objem V platit

$$\begin{aligned} V =& \frac{1}{6}\,|\,\mathrm{Vol}\ \mathcal{P}_3(A; u_B, u_C, u_V) + \mathrm{Vol}\ \mathcal{P}_3(A; u_C, u_D, u_V)| = \\ =& \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}|(-10) + (-40)| = \frac{25}{3} \end{aligned}$$

Analogicky spočteme obsah podstavy jehlanu jako

$$\begin{aligned} S =& \frac{1}{2}\,|\,\mathrm{Vol}\ \mathcal{P}_2(A; u_B, u_C) + \mathrm{Vol}\ \mathcal{P}_2(A; u_C, u_D)| = \\ =& \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} 14 & 16 \\ 16 & 19 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} + \begin{vmatrix} 19 & -26 \\ -26 & 44 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}(\sqrt{10} + 4\sqrt{10}) = \frac{5}{2}\sqrt{10} \end{aligned}$$

To, že se obsahy sečtou je zřejmé z výpočtu objemu, kde se tak stalo. Výška jehlanu je tedy

$$v = \frac{6V}{2S} = \frac{50}{5\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

K tomuto bychom se mohli též dostat jako ke vzdálenosti bodu V od roviny podstavy, tedy od roviny

$$\sigma : -3y + z - 5 = 0$$

Podle 14.21.2 je potom vzdálenost rovna

$$v = \frac{|-3 \cdot 2 + 1 - 5|}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2}} = \sqrt{10}$$

Máme dále určit odchylky přímek $V + \langle V - A \rangle$, $V + \langle V - B \rangle$, $V + \langle V - C \rangle$, $V + \langle V - D \rangle$ od roviny σ. To jsou ale doplňky odchylek těchto vektorů od normálového vektoru roviny σ do $\frac{\pi}{2}$. Odchylku hrany AV od podstavy je potom

$$\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{|(V - A) \cdot n|}{\|V - A\|\,\|n\|} = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{10}{\sqrt{10}\sqrt{11}} = \arcsin\frac{\sqrt{110}}{11} \doteq 72,45^\circ$$

Další odchylky jsou po řadě $\arcsin\frac{\sqrt{210}}{21}$, $\arcsin\frac{\sqrt{15}}{6}$, $\arcsin\frac{\sqrt{590}}{59}$

14.23. Metrické úlohy III

1. Viz. věta 9.15.3.

2. Ondra neudělal.

3. Všimneme si, že přímky p a q jsou rovnoběžné (mají stejné normálové vektory). Proto střed kružnice bude ležet na přímce rovnoběžné s p a q, která má od obou stejnou vzdálenost. Její rovnice bude

$$o:\ x - y + 1 = 0$$

Vzdálenost $\varrho(o,p) = \varrho(o,q) = \sqrt{2}$. Obecný bod na přímce o má souřadnice $[y-1, y]$. Hledáme bod na přímce o, který má vzdálenost $\sqrt{2}$ od bodu A:

$$\begin{aligned}(x-1)^2 + (y-2)^2 &= 2\\ (y-2)^2 + (y-2^2 &= 2\\ (y-2)^2 &= 1\\ y &= 2 \pm 1\\ x &= 1 \pm 1\end{aligned}$$

a tedy možné kružnice jsou dvě. Jejich rovnice jsou

$$\begin{aligned}\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{4} &= 1\\ \frac{x^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{4} &= 1\end{aligned}$$

14.24. Adjungovaná zobrazení

1. Jak duální zobrazení, tak adjungované zobrazení má stejnou matici

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ -2 & 3 & -1\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$$

která je pouze transponovanou maticí zobrazení φ. Pro část (3) musíme najít matici skalárního součinu ve standardní bázi. Ta je jednoduše

$$G = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$$

Matice adjungovaného zobrazení vzhledem ke skalárnímu součinu ze zadání je

$$B^* = G^{-1}A^*G = \begin{pmatrix} 2 & \frac{29}{26} & \frac{3}{13}\\ -3 & \frac{7}{13} & \frac{1}{13}\\ 5 & \frac{149}{26} & \frac{6}{13}\end{pmatrix}$$

protože přesně podle důkazu věty o tvaru matice adjungovaného zobrazení je

$$\langle \varphi(x), y\rangle = (Ax)^T G\,\overline{y} = x^T G G^{-1} A^T G\,\overline{y} = x^T G\,\overline{\overline{G^{-1}A^T G}y} = \langle x, \varphi^*(y)\rangle$$

matice adjungovaného zobrazení potom jistě musí být právě

$$B^* = \overline{G^{-1}A^T G} = G^{-1}A^*G$$

neboť se nacházíme v reálném poli skalárů.

2. Vzhledem k tomu, že pro matici A samoadjungovaného zobrazení musí platit $A = \overline{A}^T$, dostáváme $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

3. Označíme-li matici skalárního součinu

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{pmatrix} \qquad G^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30\\ -36 & 192 & -180\\ 30 & -180 & 180\end{pmatrix}$$

potom pro adjungované zobrazení k zobrazení danému maticí A platí vztah

$$A^* = \overline{G^{-1}A^TG} = G^{-1}A^TG$$

Pro jednotlivá zobrazení již potom stačí určit matici zobrazení. Derivování dle proměnné:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_1^* = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 12 & -24 & -26 \\ 0 & 30 & 30 \end{pmatrix}$$

Násobení jiným polynomem než konstantním není zobrazení na $\mathbb{R}_2[x]$. Operace zapomenutí monomu stupně 2 má matici

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_2^* = \begin{pmatrix} -9 & -\frac{15}{2} & -6 \\ 60 & 46 & 36 \\ -60 & -45 & -35 \end{pmatrix}$$

4. Označme promítání na vybraný podprostor jako φ. Potom platí

$$\begin{aligned} v \in \operatorname{Ker}\varphi^* \Leftrightarrow \varphi^*(v) = 0 \Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R}^3 : u \cdot \varphi^*(v) = 0 \ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R}^3 : \varphi(u) \cdot v = 0 \Leftrightarrow v \in (\operatorname{Im}\varphi)^\perp \end{aligned}$$

To ale znamená, že $\operatorname{Ker}\varphi^* = (\operatorname{Im}\varphi)^\perp$. Ze stejného důvodu platí i $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}(\varphi^*)^* = (\operatorname{Im}\varphi^*)^\perp$. Vzhledem k tomu, že jde o vektorové podprostory, znamená to, že $\operatorname{Im}\varphi^* = (\operatorname{Ker}\varphi)^\perp$. Nyní už je celkem zřejmé, že půjde opět o promítání, tentokrát ve směru $(\operatorname{Im}\varphi)^\perp$ na podprostor $(\operatorname{Ker}\varphi)^\perp$. K tomu bychom ještě měli dokázat, že

$$\varphi^* \circ \varphi^* = \varphi^*$$

Přitom ale platí

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^3 : (\varphi^* \circ \varphi^*(v) - \varphi^*(v)) \cdot u = \varphi^* \circ \varphi^*(v) \cdot u - \varphi^*(v) \cdot u = v \cdot \varphi \circ \varphi(u) - v \cdot \varphi(u) = 0$$

přičemž poslední rovnost platí, protože je φ promítání. Tím jsme ale potřebné dokázali[3].

Má-li být φ samoadjungované, musí být $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\varphi^* = (\operatorname{Im}\varphi)^\perp$, musí tedy jít o kolmé promítání. Naopak, každé kolmé promítání je samoadjungované.

[3]Platí totiž $\forall u, v \in \mathbb{R}^3 : (\varphi^* \circ \varphi^*(v) - \varphi^*(v)) \cdot u = 0 \Leftrightarrow \forall v \in \mathbb{R}^3 : \varphi^* \circ \varphi^*(v) - \varphi^*(v) = 0$, a to je již dokazované tvrzení.