Geometrické struktury na varietách

Jan Slovák

učební text k přednáškám

Obsah

Masarykova univerzita v Brně
1998/1999

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

Tyto texty zachycují stručně moje přednášky pro pokročilejší studenty matematiky a fyziky konané v podzimním i letním semestru školního roku 1998/99. Jedná se o doplněné a trochu rozšířené poznámky Vojtěcha Žádníka, kterému touto cestou velice děkuji. Mým cílem bylo předvést obecný přístup ke geometrickým strukturám na varietách a vybudovat základní nástroje pro analýzu na takovýchto objektech. Bohužel přehled základních pojmů zabral dobře polovinu prvního semestru, takže se mi tohoto cíle podařilo dosáhnout jen částečně.

Některé základní informace o varietách, bandlech a jetech jsou v úvodní části. O něco více lze najít v dodatku k učebním textům [Sl97], včetně výkladu základů tenzorového počtu. Podrobnější výklad může čtenář najít v úvodních třech kapitolách [KMS], jejichž četbu paralelně s tímto textem vřele doporučuji. Samozřejmě je též možné použít kteroukoliv základní učebnici diferenciální geometrie, ty však nebývají psány kategoriálním jazykem, který tu upřednostňuji já.

Také se v těchto textech neobjevuje nic o reprezentacích Lieových grup a algeber, čtenáře odkazuji na učební text [Sl97]. Celá publikace [Sl94] je věnována jednomu příkladu našich struktur, konformním Riemannovským varietám a je vhodným doplněním zejména pro závěr tohoto textu.

Brno, květen 1999 Jan Slovák

Úvodní přehled pojmů

0.1. Jety. Jsou-li M, N hladké variety, $x \in M$, pak řekneme, že dvě zobrazení f, $g\colon M \to N$ mají stejný *jet řádu* r v x (stručně r–jet), jestliže v nějakých (a pak ovšem ve všech) souřadných mapách $\varphi\colon \mathbb{R}^m \to M$, $\psi\colon \mathbb{R}^n \to N$ platí

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|} g(x)}{\partial x^\alpha}$$

pro všechny multiindexy α o velikosti $|\alpha| \le k$. Značíme $j^r_x f = j^r_x g$. Bod x je *zdroj jetu* $j^r_x f$, hodnota $f(x)$ je *cíl jetu.* (Z Leibnitzova pravidla pro derivaci složené funkce okamžitě plyne, že jde o dobře definovanou relaci ekvivalence na zobrazeních.) Množinu všech r–jetů zobrazení $M \to N$ značíme $J^r(M,N)$. Podobně $J^r_x(M,N)$, $J^r(M,N)_y$, $J^r_x(M,N)_y$ znamená jety se zdrojem x, cílem y a průnik těchto podmnožin.

Jsou-li $f, \bar f\colon M \to N$, $g, \bar g : N \to Q$ hladká zobrazení, $j^r_x f = j^r_x \bar f$, $j^r_{f(x)} g = j^r_{f(x)} \bar g$, pak také

$$j^r_x(g \circ f) = j^r_x(\bar g \circ \bar f),$$

jak okamžitě plyne z pravidla pro derivování složených zobrazení. Odtud vyplývá korektnost definice *skládání jetů*: Pro $X \in J^r_x(M,N)_y$, $X = j^r_x f$, $Y \in J^r_y(N,Q)$, $Y = j^r_y g$ klademe

$$X \circ Y = j^r_x(g \circ f).$$

Jet $X \in J^r_x(M,N)_y$ se nazývá *invertibilní jet*, jestliže existuje $X^{-1} \in J^r_y(N,M)_x$ takový, že $X^{-1} \circ X = j^r_x \,\mathrm{id}_M$.

Z věty o inverzním zobrazení okamžitě vyplývá, že $j^r_x f$ je invertibilní právě tehdy, když lokálně existuje inverzní zobrazení k zobrazení f v bodě x, a to nastane právě tehdy, když je $j^1_x f$ invertibilní. Množinu všech invertibilních jetů značíme $\operatorname{inv} J^r(M,N) \subset J^r(M,N)$.

0.1. Varieta $J^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Na afinních prostorech $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ máme význačné globální souřadné mapy (tj. běžné souřadnice). Každý jet $j^r_x f$ zobrazení $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ můžeme vyjádřit jako $j^r_0 t_{f(x)} \circ j^r_0(t_{-f(x)} \circ f \circ t_x) \circ j^r_x t_{-x}$, kde t_a značí posunutí o prvek a. Dostáváme tedy

$$J^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times J^r_0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)_0.$$

Koeficienty Taylorových polynomů v počátku nyní definují globální souřadný systém na $J^r_0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)_0$ ve kterém je skládání jetů polynomiální zobrazení, zejména je tedy hladké. Tímto jsme získali význačný globální souřadný systém na $J^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, který nám zadává na jetech strukturu hladké variety.

Navíc pro $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m'}$ lokálně invertibilní, $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n'}$ libovolné hladké definujeme

$$J^r(f,g)\colon J^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \to J^r(\mathbb{R}^{m'}, \mathbb{R}^{n'}),$$
$$J^r_x(\mathbb{R}^{m'}, \mathbb{R}^{n'})_y \ni X \mapsto (j^r_y g) \circ X \circ (j^r_x f)^{-1}.$$

Dostáváme tak vždy hladký homomorfismus fibrovaných variet

$$\begin{tikzcd}
J^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \arrow[r, "J^r(f,g)"] \arrow[d] & J^r_x(\mathbb{R}^{m'}, \mathbb{R}^{n'}) \arrow[d] \\
\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \arrow[r, "f{,}g"] & \mathbb{R}^{m'} \times \mathbb{R}^{n'}
\end{tikzcd}$$

Naši konstrukci můžeme popsat tvrzením: J^r *je bifunktor na hladkých zobrazeních mezi afinními prostory* R^m.

0.3. Varieta $J^r(M,N)$**.** Funktoriálnost konstrukce jetů pro afinní prostory se jednoduše rozšiřuje na všechny variety, tj. získáváme bifunktor J^r, který dvojici hladkých variet M, N přiřadí (zatím pouze množinu) $J^r(M,N)$ a dvojici zobrazení (f,g) příslušný homomorfismus $J^r(f,g)$ zachovávající fibrace. Tato funktoriálnost nám nabízí jednoduchou možnost, jak zadefinovat hladkou strukturu na množině jetů $J^r(M,N)$ pomocí hladkých struktur na M a N.

Pro libovolné souřadné mapy $\varphi\colon \mathbb{R}^m \to M$, $\psi\colon \mathbb{R}^n \to N$ totiž dostáváme zobrazení

$$J^r(\varphi,\psi)\colon J^r(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n) \to J^r(M,N),$$

které prohlásíme za souřadnou mapu na $J^r(M,N)$. Takovými mapami je definována hladká struktura na $J^r(M,N)$ (indukovaná hladkými strukturami na M a N). Funktoriálnost J^r bezprostředně zaručuje korektnost naší definice.

Všimněme si také zřejmých projekcí $\pi^r_s\colon J^r(M,N) \to J^s(M,N)$, $r \ge s \ge 0$, které zapomínají část derivací, tj. $\pi^r_s(j^r_x f) = j^s_x f$. Zřejmě jsou to hladká zobrazení. Projekce π^r_0 je právě projekcí na zdroj a cíl jetů.

0.4. Důležité příklady. Jako speciální případy variet jetů dostáváme důležité geometrické objekty. Příkladem jsou r–jety křivek, specielně pak *tečné vektory*.

$$\begin{aligned} T^r_1 M &:= J^r_0(\mathbb{R},M), \quad T^r_1 f\colon (j^r_0 c) \mapsto j^r_0(f\circ c)\\ TM &:= J^1_0(\mathbb{R},M) \end{aligned}$$

Podobně získáme

$$T^{r*}M := J^r(M,\mathbb{R})_0, \quad T^{r*}f\colon (j^r_x h) \mapsto j^r_{f(x)} h\circ f^{-1}.$$

Definovali jsme tak (kovariantní) funktor r–rychlostí na kategorii všech variet a hladkých zobrazení s hodnotami ve fibrovaných varietách a (kontravariantní) funktor r–korychlostí, definovaný na varietách pevné dimenze a lokálně invertibilních zobrazení.

Na $T^{r*}M$ je vždy struktura reálné algebry (násobení se definuje pomocí násobení reálných hodnot zobrazení), zejména tak dostáváme strukturu vektorového prostoru na tzv. ***kotečném prostoru*** $T^*M = T^{1*}M$. Vyčíslením $\langle\ ,\ \rangle\colon T_xM \times T^*_xM \to \mathbb{R}$, $\langle j^1_0 c, j^1_{c(0)} h\rangle = j^1_0(h\circ c) \in \mathbb{R}$ dostáváme indentifikaci kotečného prostoru s duálním prostorem k tečnému prostoru a tím i přirozenou vektorovou strukturu na TM.

Obecněji, k–rozměrné r–rychlosti jsou $T^r_k M = J^r_0(\mathbb{R}^k, M)$. Podobně k–rozměrné korychlosti $T^{r*}_k M = J^r(M,\mathbb{R}^k)$. T^r_k je funktor na cele kategorii hladkých variet a hladkých zobrazení, T^{r*}_k pouze na lokálně invertibilních.

Obzvlášť důležitým případem je funktor P^r, který m–rozměrné varietě přiřadí všechny invertibilní m–rozměrné rychlosti,

$$P^r M = \operatorname{inv} J^r_0(\mathbb{R}^m, M)$$

a je definován na lokálně invertibilních zobrazeních. Nejdůležitější je $r = 1$, kdy P^1M splývá s prostorem všech bazí tečných prostorů T_xM, $x \in M$.

Fibr $P^r\mathbb{R}^m$ nad nulou, tj. varieta $\operatorname{inv} J_0^r(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m)_0$, působí skládáním jetů sám na sobě a je tak definována struktura Lieovy grupy na

$$G_m^r = \operatorname{inv} J_0^r(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m)_0.$$

Pro $r=1$ pak dostáváme obvyklou obecnou lineární grupu $GL(m,\mathbb{R}) = G_m^1$.

Intuitivně můžeme chápat body $j_0^r\psi \in P^rM$ jako infinitesimální verze souřadných map ψ v podkladovém bodě $x=\psi(0)\in M$.

0.5. Hlavní bandly. Nechť G je *Lieova grupa*, tj. varieta spolu s algebraickou strukturou grupy, jejíž operace jsou hladké. Triviální hlavní bandl se strukturní grupou G nad hladkou varietou M je kartézský součin $M\times G\to M$ s projekcí na první komponentu.

Obecný *hlavní bandl* P se strukturní grupou G a bazí M je fibrovaná varieta $p\colon P\to M$ s tranzitivní a jednoduchou pravou akcí $r\colon P\times G\to P$ na fibrech. Podrobněji, fibry jsou právě orbity akce r, tj. $p(u)=p(u')$ právě, když existuje $g\in G$, $u'=r(u,g)$, a $r(u,g)=u$ pro nějaké $u\in P$ a $g\in G$ znamená, že g je jednotka grupy G.

Zdefinice plyne, že na hlavním bandlu existují speciální fibrované mapy, které jsou dány lokálním řezem projekce $p\colon P\to M$. Každý takový řez σ totiž umožňuje ztotožnit $\sigma(x)$ s jednotkou grupy G a pak se celý fibr nad x ztotožňuje s G prostřednictvím pravé akce. Tyto mapy nazýváme lokální trivializace hlavního bandlu P. Atlas z lokálních trivializací vznikne výběrem lokálních řezů σ_α nad pokrytím U_α bázové variety M a přechodové funkce jsou určeny pravým násobením konstantními prvky z G, které převádí jeden řez na druhý. Hovoříme o *kocyklu přechodových funkcí* $\tau_{\alpha\beta}\colon M\to G$, splňujících

$$\sigma_\beta(x) = \sigma_\alpha(x)\cdot\tau_{\alpha\beta}(x) \tag{1}$$

a tedy také

$$\tau_{\alpha\gamma}(x) = \tau_{\alpha\beta}(x)\tau_{\beta\gamma}(x). \tag{2}$$

Naopak, zadáním libovolného kocyklu přechodových funkcí, tj. funkcí $\tau_{\alpha\beta}\colon U_\alpha\cap U_\beta\to G$ na překryvech pokrytí M splňujících podmínku (2), definujeme (až na izomorfismus) jednoznačně hlavní bandl P nad M se strukturní grupou G.

Náš nejdůležitější netriviální příklad je hlavní bandl P^rM se strukturní grupou G_m^r, kde hlavní (pravá) akce je dána skládáním jetů zprava (a může být intuitivně chápána jako infinitesimální změny souřadných map). Zejména dostáváme hlavní bandl P^1M všech bazí v tečných prostorech T_xM, $x\in M$, se strukturní grupou $GL(m,\mathbb{R})$.

Neméně důležitým příkladem jsou *homogenní prostory.* Jde o hlavní bandly $p\colon G\to G/H$, kde $H\subset G$ je libovolná uzavřená podgrupa v Lieově grupě G. Lze celkem snadno ukázat, že na $M=G/H$ existuje význačná hladká struktura taková, že standardní projekce p je hladká a hladké funkce na M jsou ty, jejichž kompozice s p je hladká.

Homomorfismem hlavních bandlů $\varphi\colon P\to P'$ se stejnou strukturní grupou rozumíme fibrované zobrazení nad bázovým zobrazením $\varphi_0\colon M\to M'$, které komutuje s pravými akcemi strukturní grupy G (pokud jsou grupy různé, požadujeme komutování prostřednictvím homomorfismu odpovídajících grup $\psi : G\to G'$).

Všimněme si, že každý homomorfismus je zadán po celém fibru hodnotou v jediném bodě. Zejména tedy skutečně lokální řez $\sigma_\alpha \colon U_\alpha \subset M \to P$ zadává izomorfismus triviálního bandlu $U_\alpha \times G$ s $p^{-1}(U_\alpha) \subset P$.

Je-li $H \subset G$ Lieova podgrupa, Q hlavní bandl se strukturní grupou H, P hlavní bandl nad stejnou bází a se strukturní grupou G a $i \colon Q \to P$ homomorfismus vzhledem ke vložení H do G, pak hovoříme o *redukci* P ke strukturní grupě H.

Výše skonstruovaný funktor P^r je ve skutečnosti funktorem z kategorie hladkých variet pevné dimenze m a lokálně invertibilních zobrazení do kategorie hlavních fibrovaných prostorů a se strukturních grupou G^r_m.

0.6. Asociované bandly. Nechť $p \colon P \to M$ je hlavní bandl se strukturou grupou G a $\lambda \colon G \to \mathrm{Diff}(S)$ grupový homomorpfismus do grupy všech difeomorfismů na hladké varietě S. Na součinu $P \times S$ pak definujeme ekvivalenci předpisem $(u, s) \simeq (u \cdot g, \lambda(g^{-1})(s))$ a definujeme $P \times_\lambda S$ jako prostor tříd této ekvivalence.

Dobrý názorný příklad je vektorový prostor $\mathbb{V}$ místo S a prostor všech bazí $\mathbb{V}$ jako hlavní fibrovaný prostor nad jednobodovou bazí (všimněme si, že takové P je přímo lineární grupa $GL(\mathbb{V})$, až na volbu jednotky, která není kanonicky dána.) Obecně lze tedy nahlížet na reprezenta $\{u, s\}$ třídy v $P \times_\lambda S$ jako na souřadnice s daného bodu v bázi u. Změna báze na $u \cdot g$ pak musí odpovídat změně souřadnic na $\lambda(g^{-1})(s)$, viz. opět příklad s bazemi vektorových prostorů.

Na $P \times_\lambda S$ je indukována struktura bandlu nad M se standardním fibrem S. Nejsnadněji ji zadáme prostřednictvím lokálních řezů na P, protože zadáním $\sigma(x)$ dostaneme význačného reprezanta každého prvku ve fibru nad x ve tvaru $\{\sigma(x), s\}$. Výsledný bandl nazýváme *asociovaný bandl* k P prostřednictvím reprezentace λ. Také hovoříme o G–bandlu asociovaném k P a píšeme $P \times_G S$, pokud je akce G jasná z kontextu.

Je-li λ lineární reprezentace, tj. hodnoty λ jsou v $GL(\mathbb{V})$ pro vektorový prostor $\mathbb{V}$, pak dostáváme asociovaný vektorový bandl. Podobně pro afinní reprezentace afinní bandl, atd.

Každý homomorfismus $\varphi \colon P \to P'$ hlavních fibrovaných prostorů se strukturní grupou G indukuje bandlové homomorfismy pro všechny asociované bandly $\varphi \colon P \times_\lambda S \to P' \times_\lambda S$ předpisem $\varphi \colon \{u, s\} \mapsto \{\varphi(u), s\}$. Slovy to můžeme vyjádřit tak, že zobrazíme báze a souřadnice necháme nezměněné.

Velice důležité bude následující jednoduché tvrzení, které ve výše uvedeném příkladu souřadnic na vektorovém prostoru říká, že vektory jsou totéž co zobrazení z bazí do souřadnic se správným ekvivariantním chováním.

Lemma. *Množina $C^\infty(P \times_\lambda S)$ všech hladkých řezů s asociovaného bandlu je v přirozené bijekci s G–ekvivariantními zobrazeními $\tilde{s} \in C^\infty(P, S)^G$, tj. $\tilde{s}(u \cdot g) = \lambda(g^{-1})(s(u))$. Tato bijekce je dána prostřednictvím libovolného lokálního řezu σ na P dána vztahem*

$$s(x) = \{\sigma(x), \tilde{s}(\sigma(x))\} \tag{1}$$

Důkaz. Pro $x \in M$ a lokální řez σ kolem x máme

$$s(x) = \{\sigma(x), \tilde{s}(\sigma(x))\} = \{\sigma(x) \cdot g, \lambda(g^{-1})(\tilde{s}(\sigma(x)))\}$$

což jednoznačně určuje $\tilde{s}$ na celém fibru nad x, máme-li dáno $s(x)$. Naopak, ekvivariantní $\tilde{s}$ zjevně dobře definuje s toutéž formulí. $\square$

0.7. Přirozené bandly. Předchozí konstrukce nám pro každou reprezentaci λ jetové grupy G^r_m na hladké varietě S zadává tzv. *přirozený bandl*, tj. funktor F z variet pevné dimenze m a invertibilních hladkých zobrazení do kategorie bandlů se standardním fibrem S, $M \mapsto P^rM \times_\lambda S$ a $f \mapsto \{P^rf, \mathrm{id}_S\}$. Nejmenší možné r se pak nazývá *řád přirozeného bandlu* F.

Axiomatice takovýchto funktorů je z velké části věnována kniha [KMS]. Nám bude plně postačovat tato explicitní definice. Typickými příklady jsou všechny tenzorové bandly na hladkých varietách, které mají řád jedna, lineární konexe pak jsou řádu dva.

0.8. Lieovské derivování. Obecně, buď F přirozený bandl na varietách a invertibilních morfismech s hodnotami ve fibrovaných varietách a jejich morfismech, viz. 0.7 nebo [KMS]. Zejména tedy předpokládáme, že pro každé N je FN fibrovaná varieta nad N a pro každé $f\colon M \to N$ je Ff morfismus nad f. Pro řez $s_N : N \to FN$ definujeme jeho *pullback* $f^*s_N : M \to FM$ vzhledem k difeomorfismu $f : M \to N$ předpisem $f^*s_N = Ff^{-1} \circ s_N \circ f$.

Pro vektorové pole $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ uvažme difeomorfismy $\mathrm{Fl}^\xi_t : M \to M$ (pro malá t). Pullback řezu $s : M \to FM$ je řez $(\mathrm{Fl}^\xi_t)^*s = F(\mathrm{Fl}^\xi_{-t}) \circ s \circ \mathrm{Fl}^\xi_t : M \to FM$. Nyní pro pevné $x \in M$ je $(\mathrm{Fl}^\xi_t)^*s(x)$ křivka v $p^{-1}(x)$ a

$$\mathcal{L}_\xi s = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_0 (\mathrm{Fl}^\xi_t)^*s$$

je řez $VFM \subset TFM$, který nazveme *Lieovská derivace* s podél vektorového pole ξ. Rozepsáním derivace složeného zobrazení podle proměnné t v definici Lieovské derivace dostaneme

$$\mathcal{L}_\xi s = Ts \circ \xi - \mathcal{F}\xi \circ s,$$

kde $\mathcal{F}\xi = \frac{\partial}{\partial t}\big|_0 F(\mathrm{Fl}^\xi_t) \in \mathfrak{X}(FM)$, viz. také odstavec 6.3.

V případě, že FM je vektorový bandl, je vertikální tečný prostor v každém bodě kanonicky ztotožněn s původním fibrem FM (standardní afinní struktura na každém vektorovém prostoru) a lze tedy $\mathcal{L}_\xi s$ uvažovat jako řez FM. Zejména, je-li F tečný funktor, platí $\mathcal{L}_\xi \eta = [\xi, \eta]$. Jinými slovy, naše obecné Lieovské derivování zobecňuje klasickou Lieovskou derivaci na tenzorových bandlech a na tečném prostoru splývá s Lieovou závorkou vektorových polí.

Všimněme si ještě podrobněji Lieovské derivace na tensorových polích. Platí totiž obdoba Leibnitzova pravidla pro derivaci tensorového součinu $s_1 \otimes s_2$ dvou tensorových polí

$$\mathcal{L}_\xi(s_1 \otimes s_2) = (\mathcal{L}_\xi s_1) \otimes s_2 + s_1 \otimes (\mathcal{L}_\xi s_2). \tag{1}$$

Přitom pro vyčíslení lineárních forem na vektorových polích platí

$$\mathcal{L}_\xi(\langle \eta, \alpha \rangle) = \langle \mathcal{L}_\xi \eta, \alpha \rangle + \langle \xi, \mathcal{L}_\xi \alpha \rangle$$

a celkem tedy dostáváme pro k–krát kovariantní tensorové pole T

$$(\mathcal{L}_\xi T)(\eta_1, \dots, \eta_k) = \mathcal{L}_\xi(T(\eta_1, \dots, \eta_k)) - \sum_{i=1}^{k} T(\eta_1, \dots, \mathcal{L}_\xi(\eta_i), \dots, \eta_k). \tag{2}$$

0.9. Distribuce a foliace. *Distribuce* $\mathcal{D}$ na varietě M je dána výběrem vektorového podprostoru $\mathcal{D}_x \subset T_x M$ v každém bodě variety M. Řekneme, že distribuce má konstantní hodnost k, jestliže je dimenze $\mathcal{D}_x$ rovna k pro všechny body x. *Involutivní distribuce* je taková $\mathcal{D}_x$, pro kterou platí, že Lieova závorka libovolných dvou polí v $\mathcal{D}$ je opět pole v $\mathcal{D}$. *Integrální podvarieta* dimenze s distribuce $\mathcal{D}$ je taková podvarieta, že její tečné prostory jsou pro všechny body obsaženy v $\mathcal{D}$.

Platí věta (viz. např. [KMS] i pro distribuce s nekonstantí hodností)

Věta. *Nechť $\mathcal{D}$ je distribuce na M s konstantní hodností k. Každým bodem $x \in M$ prochází integrální podvarieta maximální dimenze k právě, když je $\mathcal{D}$ involutivní. V takovém případě pak v každém bodě x existuje souřadna mapa na okolí $U \ni x$ taková, že maximální integrální podvariety jsou na U dány rovnicemi $x^j = 0$ pro $j = k+1, \dots, m$.*

Regulární *foliace* dimenze k na M je rozložení variety M na maximální integrální podvariety involutivní distribuce.

Část I. G–struktury a Γ–struktury

1. G-struktury

Buď M diferencovatelná varieta dimenze m, P^1M bandl lineárních repérů se strukturní grupou $GL(m,\mathbb{R})$ a s bází M. Je-li G podgrupa Lieovy grupy $GL(m,\mathbb{R})$, pak G*–strukturou* na varietě M nazveme hlavní bandl $P \subseteq P^1M$ se strukturní grupou G a s bází M, tj. redukci bandlu P^1M ke grupě G. Odtud pro libovolné $p \in P$ a $g \in GL(m,\mathbb{R})$ je $p \cdot g \in P \Leftrightarrow g \in G$.

Pro danou varietu M a strukturní grupu $G \subseteq GL(m,\mathbb{R})$ může a nemusí příslušná G–struktura existovat. V následující větě ukážeme, že existence takové G–struktury je podmíněna existencí globálního řezu jistého bandlu a obráceně. Oním bandlem je $P^1M/G \to M$, bandl všech orbit akce G na P^1M. Každé $u \in P^1M$ zadává zobrazení $P^1M/G \to GL(m,\mathbb{R})/G$, $[u \cdot g] \mapsto [g]$. Snadno se tedy přesvědčíme, že P^1M/G je $GL(m,\mathbb{R})$–bandl se standardním fibrem $GL(m,\mathbb{R})/G$ asociovaný k P^1M, tedy

$$P^1M/G \cong P^1M \times_{GL(m,\mathbb{R})} (GL(m,\mathbb{R})/G).$$

Poznámka. Jsou-li lokální trivializace $P^1M|U_\alpha \cong U_\alpha \times GL(m,\mathbb{R})$ zadány kocyklem hladkých funkcí $\varphi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to GL(m,\mathbb{R})$, pak přechodové funkce $\tilde{\varphi}_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \times GL(m,\mathbb{R})/G \to GL(m,\mathbb{R})/G$ definované $(x,[g]) \longmapsto [g \cdot \varphi_{\beta\alpha}(x)]$ pro každé $x \in M$ a $g \in GL(m,\mathbb{R})$ skutečně tvoří kocykl a zadávají lokální trivializace $(P^1M/G)|U_\alpha \cong U_\alpha \times GL(m,\mathbb{R})/G$.

1.1. Věta. *G-struktury na varietě M jsou v bijektivní korespondenci s globálními řezy bandlu P^1M/G.*

Důkaz. I. Buď $P \subseteq P^1M$ s atlasem lokálních trivializací určeným kocyklem $\varphi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to G \subseteq GL(m,\mathbb{R})$. Odpovídající lokální řezy $\sigma_\alpha : U_\alpha \to P$ definují globální řez $\sigma : M \to P^1M/G$ předpisem $x \longmapsto [\sigma_\alpha(x)]$, $x \in U_\alpha$.

Je-li současně $x \in U_\beta$ je $\sigma_\beta(x) = \sigma_\alpha(x) \cdot \varphi_{\alpha\beta}(x)$. Protože $\varphi_{\alpha\beta}(x) \in G$ pro každé $x \in M$, je $\sigma_\beta(x) \in [\sigma_\alpha(x)]$, tedy $[\sigma_\alpha(x)] = [\sigma_\beta(x)]$, a popsané přiřazení je dobře definováno.

II. Opačně, nechť $\sigma : M \to P^1M/G$ je pevný globální řez. Nad množinami (U_α) z pokrytí M zvolíme lokální řezy $\sigma_\alpha : U_\alpha \to P^1M$ tak, aby $[\sigma_\alpha(x)] = \sigma(x)$ pro libovolné $x \in U_\alpha$. Odtud pro libovolné $x \in U_{\alpha\beta}$ se hodnoty $\sigma_\alpha(x)$ a $\sigma_\beta(x)$ liší vždy o nějaký násobek $\varphi_{\alpha\beta}(x) \in G$. Je-li $x \in U_{\alpha\beta\gamma}$, splňují $(\varphi_{\alpha\beta})$ podmínku kocyklu a určují lokální trivializace jistého podbandlu $P \subseteq P^1M$ se strukturní grupou G. □

1.2. Příklady.

1. *Hladké variety*, $G = GL(m,\mathbb{R})$. $GL(m,\mathbb{R})$–struktura na varietě M je právě bandl P^1M. Každá hladká varieta M má kanonickou $GL(m,\mathbb{R})$–strukturu P^1M.

2. *Paralelizovatelné variety*, $G = \{e\}$, jednotka v $GL(m,\mathbb{R})$. $\{e\}$–struktura na M se nazývá *kompletní paralelismus*, je to globální řez bandlu $P^1M/\{e\} = P^1M$. Varieta připouštějící $\{e\}$–strukturu se nazývá *paralelizovatelná*.

3. *Orientované variety*, $G = GL^+(m,\mathbb{R})$, matice s kladným determinantem. Diferencovatelná varieta připouští $GL^+(m,\mathbb{R})$–strukturu právě, když je orientova-

telná, každou $GL^+(m,\mathbb{R})$–strukturu na varietě můžeme považovat za její orientaci, viz. elementární lineární algebra.

4. *Riemannovy variety*, $G = O(m,\mathbb{R})$, ortogonální matice. Volba systému ortonormálních bází tečného prostoru v každém bodě variety M definuje skalární součin na tečném prostoru. Opačně každá Riemannova metrika na M zadává bandl ortonormálních repérů nad M, tj. $O(m,\mathbb{R})$–strukturu. Odtud plyne, že zadání $O(m,\mathbb{R})$-struktury je ekvivalentní volbě Riemannovy metriky na M. Na každé varietě lze definovat Riemannovu metriku, každá varieta tedy připouští $O(m,\mathbb{R})$-strukturu. (Důkaz lze snadno provést pomocí tzv. rozdělení jednotky na pokrytí variety.)

1.3. Isotropní podgrupy. Buď S hladká varieta, $GL(m,\mathbb{R}) \to \mathrm{Diff}(S)$ levá akce na S. Podgrupa $G_y \subseteq GL(m,\mathbb{R})$ se nazývá *isotropní podgrupa* v bodě $y \in S$, je-li tvořena všemi takovými $g \in GL(m,\mathbb{R})$, že $g \cdot y = y$. Nyní každá G_y–struktura P na M, zadává globální řez asociovaného bandlu $P \times_{G_y} S$ dobře definovaným přiřazením $[p] \longmapsto \{p,y\}$, $p \in P$. V případě, že akce $GL(m,\mathbb{R})$ je na S transitivní, je $S \cong GL(m,\mathbb{R})/G_y$ a zobrazení $\{p,[g]\} \longmapsto [p\cdot g]$ z $P \times_{G_y} S$ do P^1M/G_y je prosté a dobře definované. Dohromady dostáváme

$$P^1M/G_y \cong P \times_{G_y} (GL(m,\mathbb{R})/G_y).$$

Speciálně pro $S = GL(m,\mathbb{R})/G$ a $y = [e]$ máme $G_y = G$, tedy

$$P^1M/G \cong P \times_G (GL(m,\mathbb{R})/G).$$

1.4. Homomorfismy G–struktur. Nechť je $P \subseteq P^1M$ G-struktura na varietě M, $Q \subseteq P^1N$ G–struktura na N. Hladké zobrazení $f : M \to N$ se nazývá *homomorfismus G–struktur $P \to Q$*, jestliže $P^1f(P) \subseteq Q$. P^1f je homomorfismus hlavních fibrovaných prostorů indukovaný zobrazením f. Je-li $f : M \to N$ difeomorfismus a $P^1f(P) = Q$, pojmenujeme f *isomorfismem*, a v případě, že $M = N$ a $P = Q$ nazveme isomorfismus f *automorfismem* G-struktury P.

1.5. Přípustné souřadnice. G–struktura $P \subseteq P^1M$ na varietě M se nazývá *integrovatelná*, pokud v každém bodě M existuje mapa $(U,(x^1,\dots,x^m))$ taková, že repér $\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^m}\right)$ patří do P pro všechny body z U. Každý výše zmíněný lokální souřadný systém $x^1,\dots,x^m$ nazveme *přípustné souřadnice* vzhledem k dané G-struktuře P. Jsou-li $x^1,\dots,x^m$ a $y^1,\dots,y^m$ přípustné souřadnice na otevřených množinách $U,V \subset M$, pak Jacobiho matice $\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$ patří do G pro všechny body z $U \cap V$.

Lokální difeomorfismus f mezi otevřenými množinami $U \subset M$ a $f(U) \subset \mathbb{R}^m$ tvoří přípustné souřadnice, jestliže je isomorfismem G-struktur $P|U$ a $(\mathbb{R}^m \times G)|f(U)$, tj. $P^1f(P|U) = (\mathbb{R}^m \times G)|f(U)$. Odtud G-struktura je integrovatelná, jestliže je lokálně isomorfní s plochou G-strukturou.

1.6. Infinitesimální automorfismy. Vektorové pole $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ nazveme *infinitesimální automorfismus*, jestliže jeho tok Fl^ξ_t je automorfismus G-struktury P pro každé $t \in \mathbb{R}$, pro které je definován.

Lokálně můžeme pro integrovatelné G-struktury klidně uvažovat $M = \mathbb{R}^m$ a $P = \mathbb{R}^m \times G$. Nechť ξ je infinitesimální automorfismus, tj. ξ generuje lokální 1–parametrickou grupu automorfismů (Fl^ξ_t), které označíme (φ_t). V okolí počátku $\mathbb{R}^m$ rozvineme komponenty φ_t do Taylorovy řady

$$\varphi^i_t(x) = \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{m} f^i_{j_1\dots j_k} \cdot x^{j_1} \dots x^{j_k}, \tag{1}$$

kde koeficienty $f^i_{j_1\dots j_k}$ jsou funkce t a jsou symetrické v indexech $j_1,\dots,j_k$. Taylorovy rozvoje jednotlivých komponent vektorového pole $\xi = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ získáme derivací (1) podle t, neboť

$$\xi^i(x) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_0 \varphi^i_t(x).$$

Dostáváme

$$a^i_{j_1\dots j_k} := \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} f^i_{j_1\dots j_k} = \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial x^{j_k}}\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{x=0,\,t=0}\varphi^i_t.$$

Protože ξ je infinitesimální automorfismus, je Jacobiho matice $\mathrm{J}(\varphi_t) = \left(\frac{\partial \varphi^i_t}{\partial x^j}\right) \in G$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R}^m$. Odtud $\frac{\partial}{\partial t}\big|_0 \mathrm{J}(\varphi_t) = \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial t}\varphi^i_t\right)\big|_0 \in \mathfrak{g}$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^m$. Z uvedeného již plyne, že pro libovolné pevné $j_2,\dots,j_k$ je matice $(a^i_{j_1\dots j_k})_{i,j_1}$ prvkem $\mathfrak{g}$, což motivuje následující definici.

1.7. Prodloužení Lieovy algebry. Obecně pro vektorové prostory $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ se definuje *k-té prodloužení* podprostoru $\mathbb{U} \subseteq \mathrm{Hom}(\mathbb{V},\mathbb{W})$ jako vektorový prostor všech $(k+1)$-lineárních zobrazení $T : \underbrace{\mathbb{V}\times\cdots\times\mathbb{V}}_{(k+1)\text{-krát}} \to \mathbb{W}$ takových, že pro libovolné pevné vektory $v_1,\dots,v_k \in \mathbb{V}$ je lineární zobrazení $t : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, definované předpisem $v \longmapsto T(v,v_1,\dots,v_k)$, prvkem $\mathbb{U}$.

Speciálně pro $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(m,\mathbb{R}) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m)$ je k-té prodloužení

$$\mathfrak{g}^{(k)} \cong (S^{k+1}\mathbb{R}^{m*}\otimes\mathbb{R}^m) \cap (S^k\mathbb{R}^{m*}\otimes\mathfrak{g}),$$

zejména $\mathfrak{g}^{(0)} \cong \mathfrak{g}$. Nejmenší k takové, že $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ se jmenuje *řád Lieovy algebry* $\mathfrak{g}$. Pokud je $\mathfrak{g}^{(k)} \neq 0$ pro všechna k, řekneme, že algebra $\mathfrak{g}$ je *nekonečného typu*.

Závěr předchozího odstavce můžeme nyní zformulovat — ξ je infinitesimální automorfismus právě když všechny koeficienty $a^i_{j_1\dots j_k} \in \mathfrak{g}^{(k-1)}$, $k \in \mathbb{N}$.

1.8. Tvrzení. *Jestliže Lieova algebra $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(m,\mathbb{R})$ obsahuje matici hodnosti 1, je nekonečného typu.*

Důkaz. Nechť $g \in \mathfrak{g} \subset \mathbb{R}^{m*}\otimes\mathbb{R}^m$ je hodnosti 1. Pak existují nenulové prvky $\alpha \in \mathbb{R}^{m*}$ a $w \in \mathbb{R}^m$ takové, že zobrazení g je zadáno $v \longmapsto \langle v,\alpha\rangle\cdot w$, $v \in \mathbb{R}^m$. Pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ definujme $T(v_0,v_1,\dots,v_k) = \langle v_0,\alpha\rangle\langle v_1,\alpha\rangle\cdots\langle v_k,\alpha\rangle\cdot w$, $v_i \in \mathbb{R}^m$. Nyní T je nenulový prvek $\mathfrak{g}^{(k)}$, algebra $\mathfrak{g}$ je nekonečného typu. □

1.9. Eliptické G–struktury. Algebra $\mathfrak{g}$ se nazývá *eliptická*, jestliže neobsahuje matici hodnosti 1. Zejména, je-li $\mathfrak{g}$ konečného typu, je eliptická. G–struktury nazýváme eliptické, jestliže jsou príslušné Lieovy algebry eliptické. Lze ukázat následující tvrzení, které název opravňuje:

Lemma. *Nechť $P \subset P^1M$ je eliptická G-struktura. Infinitesimální automorfismy $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ jsou řešením eliptických systémů parciálních diferenciálních rovnic.*

Důkaz. Viz. [Ko, str. 27]. □

Důsledkem pak je, že na kompaktních varietách M tvoří globálně definované infitesimální automorfismy konečněrozměrnou Lieovu algebru. Z dalších analytických úvah pak vyplývá, že grupa všech globálně definovaných automorfismů takových struktur je konečněrozměrná Lieova grupa. Obecné tvrzení tohoto typu bylo dokázáno v [Pa], viz. také [Ko, str. 22].

V příkladech uvidíme, že jsou důležité geometrické struktury, které nejsou konečného typu, přesto ale jsou eliptické.

1.10 Věta. *Nechť M a N jsou diferencovatelné variety, $G \subseteq GL(m,\mathbb{R})$. Označme s_M řez $FM = P^1M/G$ zadávající G-strukturu na M, podobně pro s_N. Platí:*

(1) *$f : M \to N$ je isomorfismus $\Leftrightarrow f^*s_N = s_M$*
(2) *$\xi \in \mathfrak{X}(M)$ je infinitesimální automorfismus $\Leftrightarrow \mathcal{L}_\xi s_M \equiv 0$*
(3) *G-struktura je integrovatelná $\Leftrightarrow$ v každém bodě M existují lokální souřadnice, v nichž má s_M konstantní vyjádření.*

Důkaz. Připomeňme, že Lieovské derivování bylo diskutováno v odstavci 0.8.

1. Tvrzení je zřejmé, neboť $f^*s_N = s_M \Leftrightarrow s_N \circ f = Ff \circ s_M$.

2. ξ je infinitesimální automorfismus $\Leftrightarrow (\mathrm{Fl}^\xi_t)^*s_M = s_M$. Odtud $\mathcal{L}_\xi s_M = 0$ pro všechna $x \in M$. Opačně, je-li $\mathcal{L}_\xi s_M \equiv 0$, je $(\mathrm{Fl}^\xi_t)^*s_M$ konstantní. Pro $t = 0$ však máme $(\mathrm{Fl}^\xi_0)^*s_M = s_M$, tedy $(\mathrm{Fl}^\xi_t)^*s_M = s_M$ pro libovolné t.

3. Konstantním vyjádřením ve zvolených souřadnicích rozumíme takovou volbu souřadnic $(x^1,\dots,x^m)$ na $U \subset M$, že s_M vyjádřené prostřednictvím souřadných repérů $u(x) = (\frac{\partial}{\partial x^1}(x),\dots,\frac{\partial}{\partial x^m}(x))$, je v každém bodě $x \in U$ dáno stejnou hodnotou $\tilde{s}_M(u(x)) \in GL(m,\mathbb{R})/G$. G–struktura P je integrovatelná právě, když v každém bodě variety M existuje souřadné okolí U s přípustnými souřadnicemi $x^1,\dots,x^m$, tzn. takovými souřadnicemi, že repér $u(x) = (\frac{\partial}{\partial x^1}(x),\dots,\frac{\partial}{\partial x^m}(x))$ patří do P pro všechny body $x \in U$. Řez s_M určující G–strukturu $P \subseteq P^1M$ pak na U dokážeme popsat konstantním vyjádřením $s_M = \{u(x),[e]\}$.

Naopak, jestliže lze najít konstantní vyjádření, pak je možné získat i $s_M = \{u(x),[e]\}$ pro vhodný řez $u : U \subset M \to P^1M$. Takový řez ovšem zadává isomorfismus $P_{|U} \to P^1\mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^m \times GL(m,\mathbb{R})$ na obraz. Přitom je řez $s_{\mathbb{R}^m}$ definující plochou G strukturu na $\mathbb{R}^m$ dán právě předpisem s konstantní hodnotou $[e]$ ve standardních souřadnicích a z první části věty vyplývá, že je P lokálně isomorfní s plochou strukturou, což jsme chtěli dokázat. $\square$

Pro ilustraci, v případě struktur zadaných pevně zvoleným tensorovým polem T jistého typu na M je G isotropická grupa takového tensoru v jednom fibru a požadavek konstantnosti není nic jiného, než že zadávající tensorové pole má konstantní koeficienty ve vhodných souřadnicích.

2. Příklady G-struktur

Nyní si uvedeme stručně několik příkladů G–struktur. V zásadě se u každé vždy spokojíme s několika poznámkami o existenci struktury, o řádu, o automorfismech. Určitě bude užitečné, když se čtenář pokusí o těchto příkladech přemýšlet podrobněji, je však třeba se mít na pozoru, protože v každém případě jsou nekteré problémy řešitelné snadno, jiné velmi težko. Vůbec už nediskutuji problém klasifikace všech přirozených bandlů (řekněme vektorových), který je víceméně problémem teorie reprezentací příslušných grup a algeber.

2.1. $G = GL(m,\mathbb{R})$**.** Lieova algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(m,\mathbb{R})$ jistě obsahuje matici hodnosti 1 a je tedy nekonečného typu. Každý difeomorfismus na M je automorfismus $GL(m,\mathbb{R})$-struktury, každé vektorové pole na M je infinitesimální automorfismus, každá $GL(m,\mathbb{R})$-struktura je integrovatelná.

2.2. $G = \{e\}$, $\mathfrak{g} = 0$**.** Absolutní paralelismus na M je totéž jako globální řez bandlu lineárních reperů P^1M. Existence této geometrické struktury na varietě je tedy ekvivalentní existenci $m = \dim M$ globálně definovaných lineárně nezávislých polí. Lze tedy spíše očekávat, že na mnoha varietách tato struktura existovat nemůže. Například na sféře S^2, jak je dobře známo z topologie, dokonce neexistuje ani jedno globálně definované a všude nenulové pole. Není ovšem ani pravda, že je absolutní paralelismus možný jen na takových varietách jako $\mathbb{R}^m$ — ve 2. části této přednášky uvidíme, že $\{e\}$–struktura existuje na každém bandlu lineárních repérů P^1M. Typickým příkladem je absolutní paralelismus na $\mathbb{R}^m$ daný standardní afinní strukturou. Automorfismy jsou potom právě všechny translace $t_x \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ o $x \in \mathbb{R}^m$.

2.3. $G = O(m, \mathbb{R})$**.** Struktura je tedy zadaná redukcí lineárních reperů k ortogonální podgrupě, tj. na každém tečném prostoru máme zadán skalární součin. Příslušná Lieova algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(m, \mathbb{R})$ je tvořena antisymetrickými maticemi . To se snadno ověří derivováním $A_t \cdot A_t^T = E$ a vyčíslením v nule. Zde A_t je křivka matic v $O(m, R)$, $A_0 = E$. Algebra $\mathfrak{pso}(m, \mathbb{R})$ neobsahuje matici hodnosti 1 a dokážeme, že je prvního řádu. Všimněme si přidaného písmene $\mathfrak{s}$ v označení algebry — odpovídá tomu, že ortogonální grupa se rozpadá na dvě komponenty, totiž na matice s determinantem jedna a minus jedna. G–struktury s grupou $SO(m, \mathbb{R})$ pak tedy odpovídají orientovaným varietám s $O(m, \mathbb{R})$–strukturou.

Nechť $(t^i_{jk}) \in \mathfrak{g}^{(1)}$ libovolně. Z definice $\mathfrak{g}^{(1)}$ je $t^i_{jk} = t^i_{kj}$ a pro pevné k je $t^i_{jk} \in \mathfrak{o}(m, \mathbb{R})$, tzn. $t^i_{jk} = -t^j_{ik}$. Odtud

$$t^i_{jk} = -t^j_{ik} = -t^j_{ki} = t^k_{ji} = t^k_{ij} = -t^i_{kj} = -t^i_{jk},$$

tedy $t^i_{jk} = 0$, což jsme chtěli ukázat.

O integrovatelnosti $O(m, \mathbb{R})$-struktur, automorfismech a infinitesimálních automorfismech se zmíníme později, případně viz [Kobayashi]. Zde pouze poznamenejme, že generickým případem je, když neexistuje žádný automorfismus kromě identity. Zejména tedy existence globálního infinitesimálního automorfismu (tzv. *Killingovo vektorové pole*) je velice silný požadavek na zvolenou strukturu. Kupodivu silně souvisí i s topologií podkladové variety M.

2.4. $G = SL(m, \mathbb{R})$**.** Jde o matice s determinantem 1. Označíme A_t křivku matic v $SL(m, \mathbb{R})$ a v okolí E budeme psát $A_t = E + tX$. Z definice determinantu plyne, že $\frac{\partial}{\partial t}|_0 \det(E + tX) = \operatorname{Tr} X$. Ale $\det A_t = 1$ nezávisle na t, tedy $\frac{\partial}{\partial t}|_0 \det A_t = 0$ a $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(m, \mathbb{R})$ tvoří matice s nulovou stopou. Algebra $\mathfrak{sl}(m, \mathbb{R})$ evidentně obsahuje matici hodnosti 1 a není tedy eliptická. Zejmména je tedy nekonečného typu.

Nyní ukážeme, že $SL(m, \mathbb{R})$–struktury na varietě M jsou v bijektivní korespondenci s formami objemu na M. Přirozená akce grupy $GL(m, \mathbb{R})$ na $\mathbb{R}^m$ indukuje akci $GL(m, \mathbb{R})$ na $\Lambda^m \mathbb{R}^{m*}$ — $A\,\omega = \det A^{-1} \cdot \omega$. Na $\Lambda^m \mathbb{R}^{m*} \setminus \{0\}$ je akce $GL(m, \mathbb{R})$ transitivní s isotropní podgrupou $SL(m, \mathbb{R})$ pro libovolné $\omega \in \Lambda^m \mathbb{R}^{m*}$. Platí tedy $GL(m, \mathbb{R})/SL(m, \mathbb{R}) \cong \Lambda^m \mathbb{R}^{m*} \setminus \{0\}$ a proto

$$P^1M/SL(m, \mathbb{R}) \cong P^1M \times_{GL(m, \mathbb{R})} \Lambda^m \mathbb{R}^{m*} \setminus \{0\} \cong \Lambda^m T^*M \setminus \{0\}.$$

Varieta připouští $SL(m, \mathbb{R})$–strukturu právě když je orientovatelná. V následujícím odstavci ukážeme, že každá $SL(m, \mathbb{R})$–struktura je integrovatelná.

Na souřadném okolí $U \subset M$ uvažme lokální souřadnice $x^1, \dots, x^m$. V nich je forma objemu odpovídající dané $SL(m, \mathbb{R})$-struktuře vyjádřena $\omega = f \cdot dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$, kde $f(x^1, \dots, x^m)$ je reálná, v každém bodě nenulová funkce. Na stejném okolí zvolme nové souřadnice $y^1,\dots,y^m$ tak, aby $y^2=x^2,\ \dots\ ,y^m=x^m$ a $\frac{\partial y^1}{\partial x^1}=f$. Poněvadž je $f\neq 0$, je Jacobián přechodu k novým souřadnicím zaručeně nenulový a $y^1,\dots,y^m$ skutečně tvoří souřadný systém. Navíc je

$$\begin{aligned}dy^1\wedge\cdots\wedge dy^m&=\left(\frac{\partial y^1}{\partial x^1}dx^1+\cdots+\frac{\partial y^1}{\partial x^m}dx^m\right)\wedge dx^2\wedge\cdots\wedge dx^m=\\&=f\cdot dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m=\omega,\end{aligned}$$

tedy $y^1,\dots,y^m$ jsou přípustné souřadnice vzhledem k dané $SL(m,\mathbb{R})$–struktuře.

Nyní, difeomorfismus na M je automorfismus $SL(m,\mathbb{R})$–struktury, právě když zachovává formu objemu na M, tj. právě když determinant matice tečného zobrazení je roven 1.

Je-li ξ vektorové pole na M, pojmenujeme funkci definovanou vztahem

$$\mathcal{L}_\xi\,\omega=(\mathrm{div}\xi)\,\omega$$

divergence xi vzhledem k ω. Potom ξ je infinitesimální automorfismus právě když $\mathrm{div}\xi=0$.

2.5. $G=GL(m,\mathbb{C})$**.** Zde uvažujeme grupu komplexně lineárních transformací na $\mathbb{C}^m=\mathbb{R}^{2m}$, tyto geometrické struktury jsou tedy možné na $2m$–rozměrných hladkých varietách. Podobně jako u ortogonální grupy lze redukci k této grupě snadno interpretovat jako volbu jitého tenzoru. Volba množiny bazí na $\mathbb{R}^{2m}$, které se jedna od druhé liší komplexně lineární transformací z $GL(m,\mathbb{C})$, je totéž jako volba (nové) komplexní struktury na $\mathbb{R}^{2m}$, tj. totéž jako volba násobení imaginární jednotkou i. Z tohoto pohledu je možné komplexní obecnou lineární grupu realizovat tak, že zvolíme lineární zobrazení (matici) $J\in GL(2m,\mathbb{R})$ splňující $J^2=-E$ (kde E značí jednotkovou matici dané dimenze) a $GL(m,\mathbb{C})$ je pak podgrupa všech matic A splňujících $AJ=JA$. Standardní realizaci (odpovídající násobení i v $\mathbb{C}^m$) dostaneme volbou blokové matice

$$J=\begin{pmatrix}0&-E\\E&0\end{pmatrix}.$$

Obecná matice v $GL(m,\mathbb{C})$ je pak dána rovností

$$X=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix},\quad XJ=JX\Rightarrow C=-B,\quad D=A.$$

Derivací křivek v G dostaneme tytéž rovnosti vymezující Lieovu podlagebru

$$X\in\mathfrak{gl}(m,\mathbb{C})\subset\mathfrak{gl}(2m,\mathbb{R})),\quad X=\begin{pmatrix}A&B\\-B&A\end{pmatrix}.$$

Tato algebra evidentně je eliptická.

Vidíme tedy, že redukce P^1M k podgrupě $GL(m,\mathbb{C})$ je totéž jako volba tenzoru $J\in T^*M\otimes TM$ splňujícího $J\circ J=-\mathrm{id}_{TM}$. Takovou strukturu nazýváme *skoro komplexní struktura* na M. Slovíčko skoro zde je pro odlišení od tzv. *komplexních struktur*, které se definují jako variety s atlasem tvořeným hladkými mapami $\varphi\colon\mathbb{C}^m\to M$ s holomorfními přechodovými funkcemi. Hovoříme častěji o *komplexních varietách*. Standardní komplexní struktura na $\mathbb{C}^m$ samozřejmě definuje

$GL(m,\mathbb{C})$–strukturu na každé komplexní varietě a přímo z definice je jasné, že se jedná o integrovatelnou strukturu (mapy z atlasu jsou samé přípustné souřadnice).

Vyvstává tedy problém, jak o dané skoro komplexní struktuře rozhodnout, jestli je nebo není komplexní. Jedna obstrukce se nabízí evidentně:

Uvažme komplexifikaci tečného prostoru $T_{\mathbb{C}} = TM \otimes \mathbb{R}$. Pro každou skoro komplexní varietu se jedná o komplexifikace jednotlivých komplexních vektorových prostorů T_xM, proto se celý $T_{\mathbb{C}}M$ rozloží na vlastní podprostory komplexifikovaného zobrazení J (po řadě s vlastními čísly i a $-i$)

$$T_{\mathbb{C}}M = T_{1,0}M \oplus T_{0,1}M.$$

Komplexní vektorová pole v $T_{1,0}M$ se nazývají *holomorfní*, ta v $T_{0,1}$ jsou *antiholomorfní*. Holomorfní pole jsou tvaru $\xi + iJ\xi$, kde $\xi \in \mathfrak{X}M$, J je tenzor definující skoro komplexní strukturu a i je imaginární jednotka, jíž lze násobit coby skalárem na komplexifikaci $T_{\mathbb{C}}M$. Antiholomorfní jsou všechna pole tvaru $\xi - iJ\xi$. Jestliže je M komplexní varieta, pak v komplexních souřadnicích $(z^1, \dots, z^m)$ jsou všechna holomorfní pole vyjádřena výhradně prostřednictvím diferenciálů $\frac{\partial}{\partial z}$, zatímco antiholomorfní jsou vyjádřena diferenciály $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. Zejména jsou Lieovy závorky dvou holomorfních polí opět holomorfní. Jinými slovy, $T_{1,0}M$ je involutivní podbandl v $T_{\mathbb{C}}M$. Analogicky je také antiholomorfní podbandl involutivní. Projekce na antiholomorfní tečný bandl má tvar $X \mapsto X - iJX$, $X \in T_{\mathbb{C}}M$, proto podmínku involutivity holomorfních polí můžeme psát

$$[\xi + iJ\xi, \eta + iJ\eta] - iJ[\xi + iJ\xi, \eta + iJ\eta] = 0$$

pro všechna pole $\xi \in \mathfrak{X}M$. Nyní si stačí povšimnout, že uvedené Lieovy závorky jsou ve skutečnosti komplexifikované závorky na hladkých polích a zejména tedy můžeme násobení skalárem i vytýkat před závorku. Reálná část podmínky tedy říká

$$[\xi, \eta] - [J\xi, J\eta] + J[\xi, J\eta] + J[J\xi, \eta] = 0 \tag{1}$$

a imaginární část téže podmínky je $(-J)$–násobek tohoto výrazu. Jestliže dosadíme za pole ξ násobek $f\xi$ pro libovolnou hladkou funkci f, členy s derivovanou funkcí f se vykrátí. Stejně tak pro η, takže je výraz na levé straně (1), vyčíslený v jednom bodě x variety M ve skutečnosti závislý pouze na hodnotách polí ξ a η v bodě x. Jedná se proto o tensor, kterému říkáme *Nijenhuisův tensor* N_J skoro komplexní struktury J.

Vysoce netriviální analytické úvahy vedou i k opačné implikaci a dostáváme tzv. Newlanderovu–Nirenbergovu větu

Věta. *Skoro komplexní struktura J na hladké varietě M je integrovatelná právě, když je Nijenhuisův tensor N_J identicky nulový*

Poznamenejme již teď, že Nijenhuisův tensor hraje roli jisté torze (ve smyslu torze lineárních konexí) a je skutečně nulový tehdy a jen tehdy, když skoro komplexní varieta připouští konexi bez torze. Na podrobnější rozbor bohužel nebude dostatek času ani až se budeme konexemi na G–strukturách blíže zabývat.

Homomorfismy skoro komplexních struktur jsou pravě ta differencovatelná zobrazení, jejichž diferenciál je v každém bodě komplexně lineární (vzhledem ke komplexním vektorovým strukturám na tečných prostorech). Říká se jim *holomorfní* *zobrazení*. U komplexních variet jsou to právě ta zobrazení, jejichž souřadná vyjádření v přípustných souřadnicích jsou obvyklá holomorfní zobrazení $\mathbb{C}^M \to \mathbb{C}^n$.

Praktickou podmínku pro infinitesimální automorfismy komplexních struktur lze snadno odvodit z obecného vztahu $\mathcal{L}_\xi J = 0$. Vyčíslením na dalším argumentu η totiž dostáváme (viz. 0.8(2))

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathcal{L}_\xi J)(\eta) = \mathcal{L}_\xi(J(\eta)) - J(\mathcal{L}_\xi \eta) \\ &= [\xi, J\eta] - J[\xi, \eta]. \end{aligned}$$

Protože je algebra $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{C})$ eliptická, je na kompaktních varietách Lieova algebra všech globálních infinitesimálních automorfismů konečněrozměrná. Jeden takový případ je dobře známý z komplexní analýzy jedné proměnné: *Na kompaktifikaci* $\mathbb{C}$, *tj. na Riemannově sféře, existují pouze konstantní globálně definované holomorfní funkce*. Zkuste si podrobněji zdůvodnit souvislost tohoto tvrzení s naší obecnou diskusí!

2.6. $G = U(m)$**.** Unitární grupa $U(m)$ je tvořena všemi unitárními lineárními zobrazeními v $\mathbb{C}^m$. Jde tedy o podgrupu

$$U(m) = O(2m, \mathbb{R}) \cap GL(m, \mathbb{C})$$

a stejně tak je i její Lieova algebra $\mathfrak{su}(m)$ podalgebrou v $\mathfrak{so}(2m, \mathbb{R})$. Zejména je tedy nutně $\mathfrak{su}(m)$ řádu 1, stejně jako ortogonální algebra.

Na $2m$–rozměrné hladké varietě M zadáme $U(m)$–strukturu tak, že zadáme skoro komplexní strukturu $P \subset P^1 M$ a současně ortogonální strukturu $P' \subset P^1 M$. Přitom musí být $Q = P \cap P' \neq \emptyset$. Jde tedy o zadání komplexního skalárního součinu na každém tečném prostoru (chápaném jako komplexní vektorový prostor). Z definic vyplývá, že $U(m)$ je integrovatelná právě, když je příslušná komplexní struktura integrovatelná a zároveň i ortogonální struktura je integrovatelná. To opět nastane poměrně zřídka a generickým případem je, že pro pevně zadanou $U(m)$ strukturu neexistují žádné automorfismy kromě identity.

2.7. $G = CO(m, \mathbb{R})$**.** *Konformní ortogonální grupa* se zdánlivě příliš neliší od $O(m, \mathbb{R})$. Ve skutečnosti se ale chovají tyto struktury úplně odlišně. Konformní lineární automorfismy $\mathbb{R}^m$ jsou ty, které zachovávají standardní skalární součin až na kladný násobek, tzn.

$$CO(m, \mathbb{R}) = \{A \in GL(m, \mathbb{R}); AA^T = cE,\ 0 < c \in \mathbb{R} \text{ libovolné}\}.$$

Odtud také vyplývá, že

$$\mathfrak{co}(m, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}); AA^T = cE,\ c \in \mathbb{R} \text{ libovolné}\}.$$

Speciálně $CO(2, \mathbb{R}) = GL(1, \mathbb{C})$, jsou tedy dvourozměrné konformní Riemannovské struktury totéž co jednorozměrné skoro komplexní. (To odpovídá známému faktu, že holomorfní funkce na $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ jsou právě ty, které zachovávají úhly.) Budeme se tedy v dalším zabývat $CO(m, \mathbb{R})$ s $m > 2$.

Z našich obecných úvah vyplývá, že zadání konformní struktury na varietě M je totéž, jako zadání třídy Riemannových metrik (tj. skalárních součinů na jednotlivých tečných prostorech), které se vzájemně liší o násobek kladnou hladkou reálnou funkcí. Můžeme ji tedy snadno zadat volbou jedné Riemannovy metriky, na konformní Riemannově varietě ovšem žádnou význačnou metriku už nemáme. Všechny metriky ze zadané třídy lze také chápat jako řezy význačného jednorozměrného afinního bandlu nad M.

Konformní ortogonální algebra také nemá řád 1, ukážeme že je řádu 2. Nejprve spočteme první prodloužení $\mathfrak{g}^{(1)}$. Budeme pracovat s tzv. *abstraktní indexovou notací*, kdy tensory zapisujeme ve tvaru $t^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_s}$ aniž bychom to chápali jako popis jednotlivých souřadnic v pevně zvolené bázi. Zato můžeme snadno explicitně zapisovat kontrakce a jiné invariantní operace na tensorech. Zejména budeme užívat konvence, že přes opakované indexy se sčítá.

Jádrem stopového zobrazení (kontrakce) $\mathrm{Tr}\colon \mathfrak{co}(m,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $X \mapsto \mathrm{Tr}(X)$ je právě $\mathfrak{so}(m,\mathbb{R})$. Protože je ortogonální algebra řádu 1, je zobrazení

$$\mathfrak{g}^{(1)} \ni t = (t^i_{jk}) \mapsto \alpha = \frac{1}{m} t^i_{ik} \in \mathbb{R}^{n*}$$

injektivní (jádro tohoto zobrazení je právě první prodloužení $\mathfrak{so}(m,\mathbb{R})$). Naopak, zvolíme-li pro pevně dané $\alpha = (\alpha_k) \in \mathbb{R}^{m*}$ tensor

$$t = (t^i_{jk}) = \delta^i_j \alpha_k + \delta^i_k \alpha_j - \delta_{jk}\alpha^i, \tag{1}$$

pak jeho stopa je $t^i_{ik} = \frac{1}{m}(m\alpha_k + \alpha_k - \alpha_k) = \alpha_k$. (Zde bychom správněji k popisu posledního členu v (1) měli užít posouvání indexů pomocí metriky a její inverze: $g_{sj} g^{it} \delta^s_k \alpha_t$ — přitom je sice metrika určená jen až na násobek, ale tím že ji užíváme jednou v původní a jednou v inverzní podobě, je celý výraz invariantní.) Vidíme, že je toto zobrazení i surjektivní a $\mathfrak{g}^{(1)} = \mathbb{R}^{m^*}$, kde identifikace s podmnožinou v $S^2\mathbb{R}^{m^*} \otimes \mathbb{R}^m$ je dána vztahem (1).

Uvažme nyní libovolný tensor $t = t^i_{jkh} \in \mathfrak{g}^{(2)}$. Pro každý pevně zvolený index h (to můžeme chápat jako "pro každé vyčíslení na pevně zvoleném příslušném argumentu) musíme dostat prvek z $\mathfrak{g}^{(1)}$, tj.

$$t^i_{jkh} = \delta^i_j \alpha_{kh} + \delta^i_k \alpha_{jh} - \delta_{jk}\alpha^i_h. \tag{2}$$

Přitom ale je t^i_{jkh} symetrické ve všech spodních indexech. Zejména proto $t^i_{ikh} = t^i_{ihk}$, což zaručuje $\alpha_{kh} = \alpha_{hk}$. Rovnost $t^i_{ikh} = t^i_{khi}$ pak dává (dosazením do (2))

$$(m-2)\alpha_{kh} = -\delta_{kh}\alpha^i_i \tag{3}$$

(kde opět platí výše uvedený komentář o posouvání indexů). Další kontrakce v poslední formuli dává

$$(m-2)\alpha^k_k = -m\alpha^k_k$$

a tedy zejména $\alpha^k_k = 0$. Konečně, dosazením do (3) nyní dostáváme

$$(m-2)\alpha_{kh} = 0$$

a to díky předpokladu $m > 2$ znamená, že α_{kh}, a proto i t^i_{jkh}, jsou identicky nulové.

Zobrazení $\varphi\colon M \to M'$ mezi varietami s konformními Riemannovskými strukturami je jejich homomorfismem právě, když pro jednu z metrik g' v konformní třídě na M' (a pak už pro každou) platí, že $\varphi^* g'$ je ve třídě komformních metrik na M.

Vektorové pole ξ na M je infinitesmální automorfismus právě, když pro některou (a pak už každou) konformní metriku g na M platí $\mathcal{L}_\xi g = f \cdot g$ pro nějakou hladkou reálnou funkci f na M. Zejména je každé Killingovo pole některé z metrik v konformní třídě infinitesimálním automorfismem.

Diskusi o Riemannovských a konformních Riemanovských strukturách můžeme snadno rozšířit na skalární součiny obecné signatury (p,q).

2.8. $G = Sp(m)$**.** Tento příklad je obzvlášť důležitý v klasické mechanice. Symplektická lineární grupa je tvořena transformacemi, ketré nechávají invariantní antisymetrickou regulární bilineární formu

$$x^1 \wedge x^{m+1} + \dots + x^m \wedge x^{2m},$$

tj. bilineární formu s maticí

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}.$$

Z elementární lineární algebry pak víme, že

$$Sp(m, \mathbb{R}) = \{A \in GL(2m, \mathbb{R}); A^T J A = J\}$$

a derivováním křivek v jednotce symplektické grupy

$$\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2m, \mathbb{R}); A^T J + JA = 0\}.$$

V blokovém vyjádření jsou matice v Lieově algebře $\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R})$ tvaru

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix}, \quad C^T = C, \quad B^T = B.$$

Evidentně lze v této algebře nalézt matici hodnosti 1, je to tedy algebra nekonečného typu.

Z definice symplektické grupy vyplývá, že příslušné struktury na $2m$–rozměrných reálných varietách jsou zadány volbou nedegenerované 2–formy. Hovoříme o *skoro symplektických strukturách*. Opět se přímo nabízí obstrukce k integrovatelnosti. Jsou-li totiž $(x^1, \dots, x^{2m})$ přípustné souřadnice na m zadané mapou $\varphi\colon \mathbb{R}^{2m} \to U \subset M$ a ω forma zadávající strukturu na M, pak

$$\begin{aligned} d\omega &= d(\varphi^*(dx^1 \wedge dx^{m+1} + \dots + dx^m \wedge dx^{2m})) \\ &= \varphi^*(d(dx^1 \wedge dx^{m+1} + \dots + dx^m \wedge dx^{2m})) = 0 \end{aligned}$$

Naopak, existuje tzv. *Darbouxova věta*, která v našem případě ukazuje opačnou implikaci:

Lemma. *Je-li ω uzavřená vnější 2–forma na M hodnosti $2m = \dim M$ v bodě $x \in M$, pak existuje souřadné okolí bodu x takové, že v těchto souřadnicích má ω tvar*

$$dx^1 \wedge dx^{m+1} + \dots + dx^m \wedge dx^{2m}.$$

Důkaz. Je založen na Poincarého lemmatu, které říká, že uzavřené 2–formy jsou lokálně diferenciály 1–forem, tj. $\omega = d\alpha$ lokálně kolem x. Z nedegenerovanosti ω pak vyplyne, že forma α je opět v jistém smyslu nedegenerovaná a ověří se, že má ve vhodných souřadnicích tvar

$$\alpha = x^1 dx^{m+1} + \dots x^m dx^{2m}.$$

Detaily vynechávám , viz. např. dodatek v [Ko]. $\square$

Geometrické struktury zadané uzavřenou vnější 2–formou ω maximální hodnosti nazýváme *symplektické struktury*. Jejich automorfismy, tzv. *symplektomorfismy*, jsou difeomorfismy φ splňující $\varphi^*\omega = \omega$, infinitesimální automorfismy ξ jsou pak dány podmínkou $\mathcal{L}_\xi\omega = 0$. Jako obvykle, definující tensor ω určuje řadu důležitých geometrických objektů a vztahů. V našem případě je to zejména kanonický isomorfismus $TM \simeq T^*M$ zadaný pomocí operace vložení

$$\mathfrak{X}(M) \ni \xi \mapsto i_\xi\omega \in \Omega^1(M)$$

kde operace vložení je definována takto: $\langle \eta, i_\xi\omega\rangle = \omega(\xi,\eta)$. Odtud dostáváme také přiřazení vektorových polí funkcím

$$f \mapsto H(f), \quad i_{H(f)}\omega = df.$$

Pro Lieovskou derivaci vnějších forem platí $\mathcal{L}_\xi = i_\xi \circ d + d \circ i_\xi$, je tedy pro uzavřené symplektické formy ω

$$\mathcal{L}_{H(f)}\omega = i_\xi d\omega + d(i_\xi\omega) = d(df) = 0.$$

Odtud vidíme, že každá funkce zadává infinitesimální automorfismus. V mechanice takto popisujeme dynamiku systému zadaného Hamiltoniánem f.

Nejčastěji se využije kanonická symplektická struktura na kotečném prostoru. Ta je zadána vnějším diferenciálem tzv. Liouvillovy formy $\alpha \in \Omega^1(T^*M)$, která vektor $\xi \in T_\beta(T^*M)$ zobrazí na $\langle Tp(\xi), \beta\rangle$, kde $p\colon T^*M \to M$ je obvyklá projekce. V tomto případě je tedy symplektická forma nejen uzavřená, ale dokonce exaktní.

3. Γ-struktury

Nechť E je m-rozměrná varieta (většinou Euklidovský prostor), které budeme říkat *modelující prostor*. Definujeme *pseudogrupu transformací* na E jako množinu Γ lokálních difeomorfismů mezi otevřenými množinami z E splňujících:

(a) Nechť $U = \bigcup\limits_i U_i$, $U_i \subset E$. Difeomorfismus $f : U \to E$ patří do Γ právě když zúžení f ke všem U_i patří do Γ.

(b) Pro libovolnou otevřenou podmnožinu $U \subset E$ je $\mathrm{id}_U \in \Gamma$.

(c) Jestliže $f \in \Gamma$, pak $f^{-1} \in \Gamma$.

(d) Jsou-li $f : U \to V$ a $f' : U' \to V'$ difeomorfismy z Γ a $V \cap U' \neq \emptyset$, pak difeomorfismus $f' \circ f : f^{-1}(V \cap U') \to f'(V \cap U')$ opět patří do Γ.

Řekneme, že pseudogrupa Γ transformací modelujícího prostoru E je *tranzitivní*, jestliže pro libovolné $x, y \in E$ existuje difeomorfismus $f \in \Gamma$ takový, že $f(x) = y$.

Nechť Γ je tranzitivní pseudogrupa transformací E, M topologická varieta se systémem map (U_i, φ_i), kde (U_i) je otevřené pokrytí M a $\varphi_i : U_i \to E$ jsou lokální homeomorfismy. Tento systém (U_i, φ_i) nazveme Γ*–atlas* na M, jestliže každé zobrazení $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ je difeomorfismus z Γ.

Γ–atlas se nazývá *maximální*, jestliže není obsažen v žádném dalším Γ–atlasu. Maximální Γ–atlas nazveme Γ*–strukturou* na M. Je-li M Hausdorffův prostor, pak M spolu s pevnou Γ–strukturou se jmenuje Γ-*varieta*.

3.1 Příklady.

1. $E = \mathbb{R}^m$ a Γ je množina všech lokálních difeomorfismů na E. Pak Γ–varieta je obyčejná hladká varieta a Γ–struktura je její diferencovatelná struktura.

2. $E = \mathbb{R}^m$, $G \subseteq GL(m, \mathbb{R})$ a Γ je množina všech takových lokálních difeomorfismů f na E, že Jacobiho matice $\mathrm{J}(f) \in G$ pro všechny body z $\mathrm{Dom}(f)$. Pak Γ–struktury jsou ve vzájemně jednoznačné korespondenci s integrovatelnými G–strukturami.

3. Předpokládáme-li navíc, že $\mathrm{J}(f)$ je v každém bodě konstantní, pak Γ–struktury nazýváme *ploché* G–struktury a v případě $G = GL(m, \mathbb{R})$ mluvíme o *afinních strukturách.*

Buď E varieta, L Lieova grupa, jež působí na E tranzitivně a Γ množina všech lokálních difeomorfismů na E, které vznikly lokalisací akce L. Tento přístup zobecňuje předchozí příklad, který dostaneme, zvolíme-li $E = \mathbb{R}^m$ a $L =$ podgrupa $A(m, \mathbb{R})$ generovaná translacemi $\mathbb{R}^m$ a lineární grupou G.

4. Nyní, je-li $E = S^m$ a $L =$ grupa Möbiových (konformních) transformací S^m, nazýváme Γ–struktury *ploché konformní struktury.*

5. Je-li $E = \mathbb{P}_m(\mathbb{R})$ a $L = PGL(m, \mathbb{R})$ (projektivní obecná lineární grupa), pak Γ-struktury nazýváme *ploché projektivní struktury.*

3.2 Lieovy pseudogrupy. V modelujícím prostoru E zvolme pevný počátek označený 0. Zpravidla je $E = \mathbb{R}^m$ s obvyklým počátkem. Označme $P^rM :=$ inv $J^r_0(E, M)$ bandl r–repérů, tj. hlavní fibrovaný prostor se strukturní grupou $G^r_m =$ inv $J^r_0(E, E)_0$.

Nyní nechť Γ je tranzitivní pseudogrupa na E a mějme pevnou Γ-strukturu na M. Definujeme $P^r(M, \Gamma)$ jako množinu všech r-repérů $j^r_0(\varphi) \in P^rM$ takových, že $\varphi^{-1} : U \subset M \to E$ je mapa ze zvolené Γ-struktury. Podobně definujeme $P^r(E, \Gamma)$ vzhledem k přirozené Γ-struktuře na E.

Řekneme, že pseudogrupa Γ na E je *Lieova pseudogrupa*, jestliže platí:

(a) pro každé přirozené r je $P^r(E, \Gamma)$ podvarieta (tedy podbandl) P^rE,

(b) existuje $s \in \mathbb{N}$ takové, že lokální difeomorfismus f na E patří do Γ právě když $P^s\, f : P^s\, E \to P^s\, E$ zobrazí $P^s(E, \Gamma)$ na sebe.

Nejmenší s splňující podmínku (b) se nazývá *řád* Lieovy pseudogrupy Γ.

3.3. Poznámky. Teorii pseudogrup a příslušných Γ–struktur se nebudeme podrobněji zabývat. Zmínil jsem se o nich spíše okrajově. S tím, co už víme se snadno může ukázat, že Γ–struktury odpovídající Lieovým pseudogrupám obecně hrají roli integrovatelných G-struktur, ty však mohou být vyšího řádu. Tím myslím redukce reperů vyšších řádů k podgrupám jetových grup.

Zajímavé je také studium infinitesimálních automorfismů, které vytvářejí tzv. *filtrované Lieovy algebry.* Dlouhé serie prací popisujících filtrované algebry i jiná zobecnění geometrických struktur lze najít v časopisecké literatuře. Zmiňme alespoň nekolik jmen autorů: E. Cartan, V. Guillemin, S. Sternberg, S. Kobayashi, T. Nagano, N. Tanaka, T. Morimoto.

Část II. Konexe na G–strukturách

4. Maurer–Cartanova forma

Nechť G je Lieova grupa, $\mathfrak{g}$ její Lieova algebra, $l_g : G \to G$ značí násobení zleva na G, r_g násobení zprava. *Levá Maurer-Cartanova forma na G* je 1–forma na G s hodnotami v $\mathfrak{g}$, definovaná vztahem $\omega_g = \omega|_{T_g G} = T\, l_{g^{-1}} : T_g G \to T_e G = \mathfrak{g}$ pro všechna $g \in G$. Maurer–Cartanovu formu na G budeme značit občas ω^G. Slovem *levá* vyjadřujeme skutečnost, že ω^G je levoinvariantní, tj.

$$\omega^G \circ T\, l_h|_{T_g G} = T\, l_{(hg)^{-1}} \circ T\, l_h|_{T_g G} = \omega^G_g$$

pro každé $h \in G$.

4.1. Věta. *Maurer–Cartanova forma ω splňuje:*

(1) *ω je hladký absolutní paralelismus, tj. $\omega_g : T_g G \to \mathfrak{g}$ je lineární izomorfismus pro každé $g \in G$ a zobrazení $\pi \times \omega : TG \to G \times \mathfrak{g}$, kde $\pi : TG \to G$ je projekce na bod dotyku, je difeomorfismus,*

(2) *vektorové pole $\omega^{-1}(X)$ definované $\omega^{-1}(X)(g) = (\omega_g)^{-1}(X)$ je levoinvariantní vektorové pole na G pro každý pevně zvolený vektor $X \in \mathfrak{g}$,*

(3) *ω je G–ekvivariantní, tj. $r_g^* \,\omega = Ad_{g^{-1}} \circ \omega$,*

(4) *platí tzv. strukturní rovnice, $d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$.*

Důkaz. 1. Zobrazení ω lze podrobně rozepsat jako kompozici $TG \to G \times TG \to G \times TG \to TG \times TG \to T_e G$ například takto:

$$(g, v) \mapsto (g, (g, v)) \mapsto (g^{-1}, (g, v) \mapsto ((g^{-1}, 0), (g, v)) \mapsto (e, Tl_g^{-1}(v))$$

kde poslední krok je dán tečným zobrazením k násobení $m \colon G \times G \to G$, tj.

$$T\, m|_{T_g G \times T_h G}(u, v) = T\, r_h \cdot u + T\, l_g \cdot v.$$

Odtud je zřejmá hladkost ω, je tedy hladké i zobrazení $\pi \times \omega$ a porovnáním dimenzí vidíme, že musí jít o globálně definovaný difeomorfismus.

2. Levoinvariantní vektorová pole jsou dána $L_X(g) = \frac{\partial}{\partial t}\big|_0 g \cdot \exp tX = T_e l_g \cdot X$, $X \in \mathfrak{g}$. Chceme ukázat, že $\omega^{-1}(X) = L_X$, tj. $\omega(L_X(g)) = X$ pro všechna $g \in G$, což je zřejmé z definice Maurer–Cartanovy formy.

3. Pullback je dán vztahem $r_g^* \,\omega(\xi) = \omega(Tr_g \cdot \xi)$. Vektor $\xi(h) \in T_h G$ vyjádříme ve tvaru $\xi(h) = \frac{\partial}{\partial t}\big|_0 h \cdot \exp tX$, kde $X = \omega(\xi(h))$. Nyní

$$\begin{aligned}\omega(T_h r_g \cdot \xi(h)) &= \omega\left(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0 h \cdot \exp tX \cdot g \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_0 g^{-1} h^{-1} h \cdot \exp tX \cdot g = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X).\end{aligned}$$

4. Tvrzení dokážeme přímým výpočtem. Nejdřív obecně pro formy $\mu \in \Omega^k(M, \mathfrak{g})$ a $\nu \in \Omega^l(M, \mathfrak{g})$ definujeme závorku $[\mu, \nu]$ indukovanou závorkou na hodnotách v algebře $\mathfrak{g}$ jako

$$[\mu, \nu](\xi_1, \ldots, \xi_{k+l}) = \sum_\sigma \frac{1}{k!\, l!} \operatorname{sgn} \sigma [\mu(\xi_{\sigma(1)}, \ldots, \xi_{\sigma(k)}), \nu(\xi_{\sigma(k+1)}, \ldots, \xi_{\sigma(k+l)})],$$

což je $(k+l)$-forma na M s hodnotami v $\mathfrak{g}$. Zejména pro 1-formy μ, ν na M je $[\mu,\nu](\xi,\eta) = [\mu(\xi),\nu(\eta)] - [\mu(\eta),\nu(\xi)]$, tedy $[\omega,\omega](\xi,\eta) = 2\,[\omega(\xi),\omega(\eta)]$.

Nyní vyjádříme vektory $\xi(g)$ a $\eta(g)$ pomocí vhodných levoinvariantních polí $\xi(g) = L_X(g)$, $\eta(g) = L_Y(g)$ a počítáme

$$\begin{aligned} d\omega(L_X, L_Y) + \frac{1}{2}[\omega,\omega](L_X,L_Y) &= \\ &= L_X(\omega(L_Y)) - L_Y(\omega(L_X)) - \omega([L_X,L_Y]) + [X,Y] = \\ &= -\omega(L_{[X,Y]}) + [X,Y] = 0. \end{aligned}$$

□

4.2. Darbouxova derivace. Buď M hladká varieta a $f : M \to G$ hladké zobrazení. Pak *levá Darbouxova derivace* δf zobrazení f je 1-forma na M s hodnotami v $\mathfrak{g}$ taková, že $\delta f = f^*\omega^G$, tj.

$$\delta f(x) = T\,l_{f(x)^{-1}} \circ T_x f : T_x M \to \mathfrak{g}$$

pro každé $x \in M$. Tuto derivaci také často nazýváme *levá logaritmická derivace*, viz. příklad níže. Zobrazení f se nazývá *primitivní* k δf. Z přirozenosti vnějšího derivování diferenciálních forem plyne, že také Darbouxova derivace δf splňuje strukturní rovnici, tj. vždycky

$$d(\delta f) + \frac{1}{2}[\delta f, \delta f] = 0.$$

4.3. Příklady.

1. Je evidentní, že $\delta \mathrm{id}_G = \omega^G$. Zejména pro $G = (\mathbb{R},+)$ je $\delta\mathrm{id}_{\mathbb{R}} = dx$ a pro obecné $f : M \to \mathbb{R}$ je $\delta f = f'\,dx = d\,f$.

2. V grupě $G = (\mathbb{R}^+, .)$ je $e = 1$, $\omega_{\mathbb{R}^+}(x) = 1/x\,dx$ a pro $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ máme $\delta f = f'/f\,dx$. Odtud také název *logaritmická* derivace.

3. Nechť $G = GL(m,\mathbb{R})$. Pro libovolné $g \in GL(m,\mathbb{R})$ a $v \in T_h GL(m,\mathbb{R})$ je $T\,l_g(v) = g \cdot v \in T_{g\cdot h}GL(m,\mathbb{R})$. Odtud $\omega_{GL(m,\mathbb{R})}(g) = g^{-1}dg$, kde pro $g = (x_{ij})$ je $dg = (dx_{ij})$. Jinak řečeno, $dg \in \Omega^1(GL(m,\mathbb{R}), \mathfrak{gl}(m,\mathbb{R}))$ je zjevné ztotožnění $T_A GL(m,\mathbb{R}) \simeq \mathfrak{gl}(m,\mathbb{R})$ zadané $\frac{\partial}{\partial t}|_0(A+tX) \mapsto X$.

Speciálně pro $m = 2$ máme

$$\omega_{GL(m,\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} x_{22}/\mathrm{det}g & -x_{12}/\mathrm{det}g \\ -x_{21}/\mathrm{det}g & x_{11}/\mathrm{det}g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_{11} & dx_{12} \\ dx_{21} & dx_{22} \end{pmatrix}.$$

4.4. Věta *(O jednoznačnosti primitivního zobrazení). Nechť M je souvislá varieta, $f_1, f_2 : M \to G$ hladká zobrazení taková, že $\delta f_1 = \delta f_2$. Pak existuje prvek $c \in G$ (integrační konstanta) tak, že $f_2(x) = c \cdot f_1(x)$ pro všechny $x \in M$.*

Důkaz. Potřebujeme pomocné tvrzení, které lze ověřit přímým výpočtem (ponechávám jako cvičení, viz. také [Sha, str. 113]).

Lemma. *Je-li m násobení a i inverze na Lieově grupě G, pak*

$$\begin{aligned} m^*\omega_G|_{T_{g,h}(G\times G)} &= \mathrm{Ad}^{-1}(h)(\omega_G \circ T\pi_1) + \omega_G \circ T\pi_2 \\ i^*\omega_G|_{T_g G} &= -\,\mathrm{Ad}(g)\omega_G. \end{aligned}$$

kde π_1 a π_2 jsou zjevné projekce.

Nyní je vše jednoduché: Definujeme $h\colon M \to G$ předpisem

$$h(x) = f_2(x) \cdot (f_1(x))^{-1}.$$

Pokud ukážeme $h^*\omega_G = 0$, pak také $\omega_G \circ Th = 0$, ale to pro souvislé M znamená, že h je konstantní. Díky uvedenému pomocnému tvrzení

$$\begin{aligned} h^*(\omega_G)|_{T_xG} &= (f_2^*, f_1^* \circ i^*) \circ m^*(\omega_G)(x) \\ &= \mathrm{Ad}(f_1(x))(\omega_G \circ Tf_2) + (-\mathrm{Ad}(f_1(x))(\omega_G \circ Tf_1)) \\ &= \mathrm{Ad}\, f_1(x)(f_2^*\omega_G - f_1^*\omega_G) = 0 \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat. □

Nyní se budeme zabývat otázkou, za jakých podmínek existuje k dané 1-formě $\omega \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ primitivní zobrazení $f : M \to G$. Nejdřív lokálně.

4.5. Věta. *Jestliže 1-forma ω na M s hodnotami v $\mathfrak{g}$ splňuje strukturní rovnici $d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$, pak pro libovolný bod $x \in M$ existuje okolí $U \ni x$ a zobrazení $f : U \to G$ tak, že $\omega|_U = \delta f$.*

Důkaz. Myšlenka důkazu spočívá v setrojení grafu hledaného zobrazení f v součinu $M \times G$. K tomu účelu postačí skonstruovat integrabilní distribuci správné dimense s nedegenerovanou projekcí na M. Označme π_M a π_G součinové projekce a uvažme podprostory $\mathcal{D} \subset T(M \times G)$ zadané jako jádro formy

$$\Omega = \pi_M^*\omega - \pi_G^*\omega_G.$$

Nejprve ukážeme, že $T\pi_M\colon \mathcal{D} \to TM$ je tvořeno isomorfismy jednotlivých fibrů. Je-li $T\pi_M(\xi, \eta) = 0$ pro $(\xi, \eta) \in \mathcal{D}$, pak $\xi = 0$. Proto $\omega(\xi) = \omega_G(\eta) = 0$ a tedy $\eta = 0$, protože ω_G je na jednotlivých fibrech isomorfismus. Celkem nám vyšlo, že $T\pi_M|\mathcal{D}$ je isomorfismus. Tím jsme zároveň ukázali, že $\mathcal{D}$ má konstantní dimenze v jednotlivých fibrech, je to tedy distribuce.

Naším dalším úkolem je ukázat, že tato distribuce je integrabilní a hledaným grafem pak budou její maximální integrabilní podvariety. Použijeme kriterium integrability ve formě podmínek na definující formy.[1]

$$\begin{aligned} d\Omega = d(\pi_M^*\omega - \pi_G^*\omega_G) &= \pi_M^*(d\omega) - \pi_G^*(d\omega_G) \\ &= -\frac{1}{2}(\pi_M^*([\omega, \omega] - \pi_G^*[\omega_G, \omega_G]) \\ &= \frac{1}{2}([-\pi_M^*\omega, \pi_M^*\omega] + [\pi_G^*\omega_G, \pi_G^*\omega_G]) \end{aligned}$$

Dále můžeme dosadit $\pi_M^*(\omega) = \pi_G^*(\omega_G) + \Omega$

$$d\Omega = -\frac{1}{2}([\pi_G^*\omega_G, \Omega] - [\Omega, \pi_g^*\omega_G] - [\Omega, \Omega])$$

[1] Je-li ω hladká 1-forma na M s hodnotami ve vektorovém prostoru V s konstatní dimenzí jader $n = \ker \omega \subset T_xM$, $x \in M$, pak $\mathcal{D} = \ker \omega$ je integrabilní právě, když $d\omega(X, Y) = 0$ pro všechny X, Y z $\ker \omega$. To znamená, že za této podmínky prochází každým bodem M právě jedna maximální integrální podvarieta M. Viz. např. [KMS] nebo[Sha].

a vyčíslením na vektorech ξ, η splňujících $\Omega(\xi) = \Omega(\eta) = 0$ dostáváme nulu.

Zbývá zkonstruovat zobrazení f. Pro $(x, g) \in M \times G$ označme L maximální integrální podvarietu $\mathcal{D}$ procházející tímto bodem. Jak jsme viděli, je zúžení π_M na L lokálním difeomorfismem na nějakém okolí bodu (x, g), jistě tedy existuje inversní zobrazení $F \colon U \subset M \to L \subset M \times G$. Zřejmě je F tvaru $F(x) = (x, f(x))$ pro nějaké $f \colon U \to G$. Dále $F^*\Omega = \Omega \circ TF = 0$, protože TF má obraz v $\mathcal{D}$. To znamená

$$\begin{aligned} 0 = F^*\Omega &= F^*(\pi_M^*\omega - \pi_G^*\omega_G) \\ &= (\pi_M \circ F)^*\omega - (\pi_G \circ F)^*\omega_G \\ &= \omega - f^*\omega_G. \end{aligned}$$

Podle našich definic je to právě tvrzení $\omega|_U = \delta f$. $\square$

4.6. Důsledek. *V případě, že $M = [a, b] \subset \mathbb{R}$ a grupa G je libovolná, existuje k dané 1-formě $\omega \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ primitivní zobrazení globálně.*[2] *Navíc pro každé zadané $g \in G$ existuje právě jedna primitivní funkce f splňující $f(a) = g$.*

Důkaz. Protože je nyní varieta M jednorozměrná, jsou všechny 2-formy triviálně nulové. Zejména je tedy vždy splněna strukturní rovnice. Navíc z předchozí věty víme, že umíme pokrýt M konečně mnoha otevřenými intervaly, na nichž bude primitivní funkce definovaná. Na překryvech se přitom budou zvolené primitivní funkce lišit jen o násobení konstantou z G, viz. 4.4. Je je tedy možné upravit tak, aby měly na překryvech shodné hodnoty, čímž vzniká globálně definovaná primitivní funkce f. Následným vynásobením jednoznačně zadaným prvkem grupy G dosáhneme libovolné předem dané hodnoty $f(a)$. $\square$

Tento zdánlivě banální důsledek je mimořádně důležitý, protože nám umožňuje zkoumat globální otázky existence primitivních funkcí na složitějších varietách. Je samozřejmé, že půjde o topologické obstrukce při konstrukci primitivních funkcí. Jednoznačně zadaná křivka $c : [a, b]$ s hodnotou $c(a) = g$ a Darbouxovou derivací $\delta c = \omega$ se také nazývá *rozvinutí* ω s počátkem v $g \in G$. Je-li ω definována na větší varietě M a $c : [a, b] \to M$ je křivka, lze předchozí konstrukci provést pro pullback $c^*\omega$, opět tedy získáme pevně zadané zobrazení definované v bodech křivky na M.

Naše úvahy se budou opírat o pojem 1. homotopické grupy $\pi_1(M, x)$ (vázané v bodě $x \in M$).[3] Evidentně nám pro naši konstrukci stačí i po částech spojitá křivka $c : [a, b] \to M$. Opět budeme hovořit o rozvinutí formy $\omega \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ podél křivky $c : [a, b] \to M$.

Nejpodstatnější částí našich úvah je nyní prosté pozorování, že rozvinutí formy ω na M, která splňuje strukturní rovnici, podél dvou homotopických křivek c_0, c_1 se stejnými začátky $c_0(0) = c_1(0) = x_0$ a konci $c_0(1) = c_1(1) = x_1$ má také společnou hodnotu v x_1. Skutečně, je-li C homotopie daných křivek, pak $C^*\omega$ je forma na

[2] všimněme si, že pro případ aditivní grupy $G = \mathbb{R}$ dostáváme standardní větu o existenci primitivní funkce z elementární analýzy reálných funkcí jedné proměnné!

[3] Tyto grupy jsou třídy ekvivalence spojitých parametrizovaných křivek $c \colon [0, 1] \to M$, $c(0) = c(1) = x$, kdy za homotopicky ekvivalentní považujeme ty, které lze na sebe převést spojitou deformací. Tzn. $c_0 \simeq c_1$ jestliže existuje $C \colon [0, 1] \times [0, 1] \to M$ takové, že $C(0, t) = c_0(t)$ a $C(1, t) = c_1(t)$. Je zřejmé, že reparametrizace zadává ekvivalentní křivky a definujeme součin na našich homotopických třídách uzavřených křivek prostým navázáním křivek za sebe a následnou reparametrizací.

$[a,b]\times[a,b]$ splňující strukturní rovnici a kolem každého bodu (s,t) je na jistém okolí $C^*\omega$ Darbouxovou derivací jistého zobrazení $F: U\subset[a,b]\times[a,b]\to G$. Stejně jako v předchozím důkazu lze tato lokálně definovaná zobrazení spojit do jediného, globálně definovaného F. Přitom ale bude $F(a,a)=g$ a $F^*(\omega_G)=C^*\omega$. Dále, $C(b,t)=c_0(1)$ je konstantní pro všechny $t\in[a,b]$ a proto $C^*\omega=F^*\omega_G$ je nulové podél pravé hranice $[a,b]\times[a,b]$. Zejména je tedy F konstantní podél této hranice a $F(b,a)=F(b,b)$.

Předchozí konstrukce nám zadává (pro pevně zvolené $x\in M$) zobrazení

$$\Phi_\omega:\pi_1(M,x)\to G$$

které nazýváme *monodromie formy* ω. Snadno se ověří, že monodromie je vždy homomorfismus grup.

4.7. Věta. *1-forma ω na souvislé varietě M s hodnotami v $\mathfrak{g}$ je Darbouxova derivace globálně definovaného zobrazení $f: M\to G$ právě tehdy, když:*

1. $d\omega+\frac{1}{2}[\omega,\omega]=0$,

2. $\Phi_\omega:\pi_1(M,x)\to G$ je triviální.

Navíc, pokud jsou tyto podmínky splněny, pak f je dáno jednoznačně až na levou translaci prvkem $g\in G$.

Důkaz. Jestliže f existuje, pak samozřejmě musí být splněna první podmínka. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $f(x)=e\in G$. Pro jakoukoliv křivku $c:[a,b]\to M$, $c(0)=x$, $c(1)=y$, dostaneme $(f\circ c)^*\omega_G=c^*\omega$, je tedy $f\circ c$ rozvinutím ω podél křivky c a zejména je $f(c(1))=f(y)$. Při $c(1)=c(0)=x$ tedy dostáváme $\Phi_\omega([c])=e$ a vidíme, že celá monodromie musí být triviální.

Naopak, předpokládejme, že monodromie je triviální a definujme $f(y)$ jako cílovou hodnotu rozvinutí ω podél křivky $c:[0,1]\to M$ s $c(0)=x$, $c(1)=y$. To je nezávislé na volbě křivky v rámci homotopické třídy díky platnosti strukturní rovnice. Pokud zvolíme další křivku z jiné homotopické třídy, pak lze tuto volbu vždy zrealizovat tak, že složíme původní křivku c s nějakou křivkou reprezentující netriviální prvek první homotopické grupy v x. Rozvinutí podél křivek začínajících a končících v x však zadává identické zobrazení díky podmínce na triviální monodromii. Tím je dokázáno, že naše definice na volbě křivky nezávisí vůbec. Jednoznačnost až na levou translaci je zřejmá. □

4.8. Důsledek. *Jestliže $\omega\in\Omega^1(M,\mathfrak{g})$ splňuje strukturní rovnici a M je souvislá varieta, pak na univerzálním nakrytí $\pi:\tilde M\to M$ je dána indukovaná forma $\pi^*\omega\in\Omega^1(\tilde M,\mathfrak{g})$ (opět splňující strukturní rovnici) a globálně definované zobrazení $f:\tilde M\to G$ takové, že $\pi^*\omega=\delta f$.*

Důkaz. Univerzální nakrytí $\tilde M$ je souvislá a jednoduše souvislá varieta. Má proto triviální první homotopickou grupu a druhá z podmínek předchozí věty je splněna automaticky. Lokálně je přitom $\tilde M$ isomorfní M s pevně zadaným isomorfismy pristřednictvím projekce $\tilde\pi:\tilde M\to M$. Proto každá forma ω na M zadává s ní relovanou formu $\tilde\omega=\tilde\pi^*\omega$ na $\tilde M$, která splňuje strukturní rovnici, pokud ji splňuje ω. □

Předchozí výsledky můžeme nyní pěkně použít pro diskusi, kdy je varieta M se zadanou formou $\omega\in\Omega^1(M,\mathfrak{g})$ (alespoň lokálně) isomorfní s Lieovou grupou G. *Absolutní paralelismus* na M je vektorově-hodnotová forma $\omega\in\Omega^1(M,V)$, kde V

je vektorový prostor a $\omega|_{T_xM}: T_xM \to V$ je lineární isomorfismus pro každý $x \in M$. Každý absolutní paralelismus ω definuje *konstantní vektorová pole* $\omega^{-1}(X)$ na M pro všechna $X \in \mathfrak{g}$ předpisem $\omega(\omega^{-1}(X)(x)) = X$. Řekneme, že absolutní paralelismus je *úplný*, jestliže jsou všechna jeho konstantní vektorová pole úplná. Příkladem úplného absolutního paralelismu je Maurer–Cartanova forma na libovolné Lieově grupě G.

4.9. Věta. *Jestliže 1–forma ω na souvislé varietě M s hodnotami v $\mathfrak{g}$ je úplný paralelismus a splňuje strukturní rovnici, pak pro každou volbu bodu $e \in \tilde{M}$ v universálním nakrytí M existuje právě jedna struktura Lieovy grupy na $\tilde{M}$ tak, že $\pi^*\omega$ je levá Maurer-Cartanova forma.*

Důkaz. Předpokládejme přímo, že první homotopická grupa M je triviální, tj. $M = \tilde{M}$. Z předpokladů plyne, že existuje $\varphi: M \to G$ takové, že $\varphi^*\omega_G = \omega$, kde G je jednoduše souvislá a souvislá Lieova grupa s Lieovou algebrou $\mathfrak{g}$. Protože jsou M i G jednoduše souvislé a souvislé, a φ je lokální difeomorfismus, je jistě φ difeomorfismus na obraz.[4]

Počítejme $\varphi \circ \mathrm{Fl}_t^{\omega^{-1}(X)}(x)$ pro $x \in M$, $X \in \mathfrak{g}$.

$$\begin{aligned}\omega_G\left(\frac{\partial}{\partial t}|_0\varphi(\mathrm{Fl}_t^{\omega^{-1}(X)}(x))\right) &= \omega_G(T\varphi.\omega^{-1}(X)(x)) \\ &= \varphi^*\omega_G(\omega^{-1}(X)(x)) = X\end{aligned}$$

Vidíme, že tato kompozice zadává levoinvariantní pole na G, zejména tedy máme

$$\varphi \circ \mathrm{Fl}_t^{\omega^{-1}(X)}(x) = \varphi(x).\exp(tX).$$

Odtud ale plyne, že φ je surjekce. (Všimněme si, že tady jsme podstatným způsobem využili úplnost konstantních polí na M.)

Nyní můžeme přenést násobení z G na M tak, aby $x \cdot y = \varphi^{-1}(\varphi(x) \cdot \varphi(y))$ a obdržíme Lieovu grupu, jejíž jednoparametrické podgrupy jsou právě toky konstantních polí vzhledem k ω. Tím pádem je ω levou Maurer–Cartanovou formou pro tuto grupovou strukturu. □

4.10. Poznámka. Je-li v předchozí větě první homotopická grupa M netriviální, dostáváme tzv. monodromní reprezentaci $\Phi_\omega: \pi_1(M,x) \to G$ a obraz tohoto homomorfismu se nazývá *grupa period.* V realizaci struktury Lieovy grupy na nakrytí $\tilde{M} \to M$ pak zjevně grupa period působí nakrývajícími transformacemi.

Věta 4.9 také úzce souvisí s tzv. Palais-ho větou: *Je-li $\omega^{-1}: \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}M$ homomorfismus Lieových algeber pro konečněrozměrnou Lieovou algebru $\mathfrak{g}$, pak existuje akce $\lambda: G \times M \to M$ taková, že ω^{-1} zadává fundamentální pole této akce.*

4.11. Příklady aplikací.

1. Jak jsme už viděli, pro aditivní grupu reálných čísel a jednorozměrné variety jsou obě podmínky našich hlavních vět splněny. Tím dostáváme větu o existenci primitivní funkce známou ze základů analýzy v reálném oboru. Pro diferenciál na jednotkové kružnici $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ nám poslední věta automaticky zadává právě obvyklou aditivní strukturu na universálním nakrytí $\tilde{S}^1 = \mathbb{R}$.

[4] To je jenom přeformulování vlastnosti, že univerzální nakrytí variety existuje jednoznačně až na isomorfismus.

2. Ukážeme, že vektorové pole $\xi\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ na jednoduše souvislé otevřené podmnožině U je dáno potenciálem právě, když

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} - \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} = 0$$

pro všechny i, j. Položme $\omega = \sum_i \xi^i dx^i$. Pak

$$d\omega = \sum_{i,j} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j = \sum_{i<j} (\frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} - \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}) dx^i \wedge dx^j$$

zatímco $[\omega, \omega]$ je triviálně nulová, protože obor hodnot $\mathbb{R}^n$ chápeme jako triviální Lieovu algebru (s nulovou závorkou). Existuje tedy $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ takové, že $\xi^i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$.

3. Uvažme $G = GL(n, \mathbb{R})$, $U \subset \mathbb{R}^m$ jednoduše souvislé, $\omega \in \Omega^1(U, \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$. Pišme $\omega = (A_{ij})$, kde $A_{ij} \in \Omega^1(U, \mathbb{R})$. Dále budeme značit $\partial_p = \frac{\partial}{\partial x^p}$ a

$$A_p = (A_{ij}(\partial_p))\colon U \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}).$$

Spočítáme

$$\begin{aligned} d\omega(\partial_p, \partial_q) &= \partial_p \omega(\partial_q) - \partial_q \omega(\partial_p) - \omega([\partial_p, \partial_q]) \\ &= \partial A_p = \partial A_q \\ \frac{1}{2}[\omega, \omega](\partial_p, \partial_q) &= [\omega(\partial_p), \omega(\partial_q)] = [A_p, A_q] \end{aligned}$$

Strukturní rovnice tedy jsou rovnostmi

$$\frac{\partial A_q}{\partial x^p} - \frac{\partial A_p}{\partial x^q} + [A_p, A_q] = 0$$

pro všechny $1 \le p, q \le n$. Pokud budeme psát $A_p = \sum A_{ijp} e_{ij}$, kde e_{ij} je matice s jedinou jedničkou na příslušném místě a jinak nulová, dostáváme systém rovnic

$$\frac{\partial A_{ijq}}{\partial x^p} - \frac{\partial A_{ijp}}{\partial x^q} + \sum_k (A_{ikp} A_{kjq} - A_{ikq} A_{kjp}) = 0.$$

Splnění těchto podmínek je nutné a dostatečné pro existenci funkce $B\colon U \to GL(n, \mathbb{R})$ takové, že $\omega = B^{-1} dB$.

Můžeme tedy předchozí tvrzení vnímat jako větu o existenci a jednoznačnosti pro (zdánlivě ošklivý) systém pariálních rovnic

$$\frac{\partial B}{\partial x^p} = B \cdot A_p.$$

Podobné systémy rovnic se často vyskytovaly v různých aplikacích a celá teorie geometrických struktur vznikla hlavně ze snahy porozumět podmínkám pro řešitelnost a vlastnostem řešení takovýchto sytémů.

5. Homogenní prostory

Geometrii na souvislé varietě M můžeme chápat jako studium invariantů tranzitivní akce jisté Lieovy grupy G na M. Grupa G se pak nazývá *hlavní grupa geometrie*. Vybereme-li pevný bod $0 \in M$ a označíme-li jeho isotropní podgrupu H_0, je zřejmě $M \cong G/H_0$. Pokud je akce hlavní grupy na M efektivní, je podgrupa $K := \{g \in G; gx = x \text{ pro všechna } x \in M\}$ triviální. V opačném případě je K největší podgrupa v H_0, která je normální v G.

Nyní místo geometrie jako variety s akcí hlavní grupy a vybraným počátkem můžeme uvažovat geometrii jako dvojici (G, H_0). Volba jiného počátku vede pouze na konjungaci podgrupy H_0.

Pro názornost dalšího výkladu si hned uvedeme mimořádně důležitý případ afinního prostoru, dobře známého z elementární geometrie. Bodový afinní prostor $\mathbb{R}^n$ je definičním oborem všech afinních transformací $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto Ax + b$, kde A je libovolná invertibilní matice v $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ a $b \in \mathbb{R}^n$. Grupu všech takovýchto transformací označíme $A(n, \mathbb{R})$. Můžeme ji pěkně realizovat jako podgrupu v $GL(n+1, \mathbb{R})$ prvků tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix}, \quad A \in GL(n, \mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n$$

působících na body $(1, x)^T \in \mathbb{R}^n$. Z této reprezentace je evidentní, že isotropní podgrupa bodu $(1, 0, \dots, 0)^T$ je $GL(n, \mathbb{R})$, tzn. je tvořena prvky s $b = 0$ a že akce je transitivní. Lieovu algebru $\mathfrak{a}(n, \mathbb{R})$ je pak možno realizovat jako matice v $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ s nulovým prvním řádkem a závorka je dána

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & X \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w & Y \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Xw - Yv & XY - YX \end{pmatrix}.$$

Můžeme nyní shrnout několik vlastností:

1. $\mathbb{R}^n = A(n, \mathbb{R})/GL(n, \mathbb{R})$, $\mathbb{R}^n$ lze ztotožnit s translacemi jakožto komutativní podgrupou $\mathbb{R}^n \subset A(n, \mathbb{R})$ a adjungované zobrazení na příslušné komutativní podalgebře $\mathbb{R}^n \subset \mathfrak{a}(n, \mathbb{R})$ zadává akci $GL(n, \mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Av & 0 \end{pmatrix}$$

tj. standardní akci $GL(n, \mathbb{R})$ na $\mathbb{R}^n$.

2. Jednoparametrické podgrupy $\exp tX$ pro $X \in \mathbb{R}^n$ jsou

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & 0 \end{pmatrix}, \quad \exp tX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ tv & E \end{pmatrix}$$

tzn. jsou to přímky procházející vybraným počátkem (zadaným jednotkovým prvkem grupy $A(n, \mathbb{R})$).

3. Výše uvedený rozklad $\mathfrak{a}(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ je rozklad na přímý součet $GL(n, \mathbb{R})$–modulů (s akcí danou Ad).

4. $A(n, \mathbb{R})$ působí na afinním prostoru $\mathbb{R}^n$ efektivně, tzn. je-li akce nějakého prvku identická, pak jde o jednotku v afinní grupě.

5. Maurer–Cartanova forma $\omega_{A(n,\mathbb{R})}$ zobrazuje

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Av & 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial t}|_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ tv & E \end{pmatrix}$$

na $v \in \mathbb{R}^n \subset \mathfrak{a}(n, \mathbb{R})$.

Tento příklad snad bude vhodnou motivací pro sledování obecnějších definic.

5.1. Kleinova geometrie. Buď G Lieova grupa, $H \subset G$ uzavřená podgrupa taková, že G/H je souvislá. *Kleinova geometrie* s hlavní grupou G je dvojice (G,H). Rozklad $M = G/H$ se nazývá *prostor Kleinovy geometrie* (G,H) a největší podgrupa $K \subset H$, která je normální v G se nazývá *jádro* Kleinovy geometrie. Kleinovu geometrii nazveme *efektivní*, pokud je $K = \{e\}$ a *lokálně efektivní*, je-li K diskrétní. Dále řekneme, že (G,H) je *rozložitelný*, je-li $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ součet podalgeber a *reduktivní*, jestliže je $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ rozklad na Ad_H–moduly.

Poznámky. Protože je podgrupa $H \subset G$ uzavřená, existuje na G/H jednoznačně struktura hladké variety a G/H se nazývá *homogenní prostor* grupy G. Levá akce faktorgrupy G/K na G/H, indukovaná levou akcí G na G/H, je transitivní s isotropní podgrupou $(G/K)_{[e]} = H/K$. Je tedy $G/H \cong (G/K)/(H/K)$. Pro každou Kleinovu geometrii (G,H) takto sestrojíme tzv. *asociovanou* efektivní Kleinovu geometrii $(G/K, H/K)$; můžeme se zabývat jenom jimi. Z několika rozumných důvodů je však výhodné uvažovat i neefektivní Kleinovy geometrie.

K ověření, zda Kleinova geometrie (G,H) je reduktivní, potřebujeme ukázat, že $\mathrm{Ad}_h(\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{p}$ pro každé $h \in H$ ($\mathfrak{h}$ zřejmě Ad_H–modul je). Jestliže platí $\mathrm{Ad}_h(p) \in \mathfrak{p}$, pro všechna $h \in H$ a $p \in \mathfrak{p}$, je také $\mathrm{ad}(v)(p) = [v,p] \in \mathfrak{p}$ pro všechna $v \in \mathfrak{h}$ a $p \in \mathfrak{p}$, neboť $\mathrm{ad} = T_e\mathrm{Ad}$. Odtud, je-li $\mathfrak{p}$ Ad_H–modul, je také $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}$–modul, tj. ideál v $\mathfrak{g}$.

5.2. Hyperbolická rovina. Buď $M = \{x+iy; y>0\} \subset \mathbb{C}$ a $G = GL^+(2,\mathbb{R})$. Pro libovolné $z \in M$ je předpisem

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$$

popsána transitivní akce G na M (ověřte si, že jde skutečně o akci!). Isotropní podgrupa H_i je po snadném výpočtu

$$H_i = \mathbb{C}^* = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \right\} \subset GL^+(2,\mathbb{R}),$$

tj. grupa matic všech $\mathbb{R}$–lineárních transformací, které jsou současně $\mathbb{C}$–lineární. Dohromady máme $M = GL^+(2,\mathbb{R})/\mathbb{C}^*$. Tato geometrie není efektivní, neboť jádro je tvaru $K = \{aE; a \neq 0\} \subset \mathbb{C}^*$, a jistě je rozložitelná — komplement $\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \right\}$ prostoru $\mathfrak{c}^*$ je podalgebra. Asociovaná efektivní Kleinova geometrie na M je potom $(SL(2,\mathbb{R}), SO(2,\mathbb{R}))$. Je rozložitelná a není reduktivní, neboť

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \right\}, \ \mathfrak{so}(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

a například komplement $\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & -a \end{pmatrix} \right\}$ je podalgebra. Žádná podalgebra v $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ však není ideálem.

5.3. Eliptická rovina. 1. $M = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ s hlavní grupou $SO(3,\mathbb{R})$, jejíž akce na $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ je indukovaná standardní akcí $SO(3,\mathbb{R})$ na okolním vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$. Isotropní podgrupa např. v bodě $(1:0:0)$ je $O(2,\mathbb{R})$ v přirozeném vložení

$$O(2,\mathbb{R}) \ni A \longmapsto \begin{pmatrix} \det A^{-1} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in SO(3,\mathbb{R}).$$

Dohromady je $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) = SO(3,\mathbb{R})/O(2,\mathbb{R})$ efektivní a celkem snadno se ukáže, že není rozložitelná.

2. Na stejném prostoru můžeme definovat Kleinovu geometrii s naprosto odlišnými vlastnostmi, např. $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) = GL(3,\mathbb{R})/H$, kde

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & v \\ 0 & A \end{pmatrix} \right\} \subset GL(3,\mathbb{R})$$

je isotropní podgrupa bodu $(1:0:0)$. Taková geometrie není efektivní, neboť matice tvaru aE, $a \neq 0$, jsou jistě obsaženy v jádru. Je však rozložitelná — $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix} \right\} \cong \mathbb{R}^2$ je podalgebra.

5.4. Afinní rovina. $M = \mathbb{R}^2$ s afinní grupou

$$A(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & A \end{pmatrix} \right\} \subset GL(3,\mathbb{R})$$

je speciální případ našeho úvodního motivujícího příkladu. Připomeňme, že levá akce afinní grupy na $\mathbb{R}^2$ je při vložení $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longmapsto (1,x,y) \in \mathbb{R}^3$ dána přímo násobením matic a je efektivní. Isotropní podgrupa počátku $(1,0,0)$ je

$$H_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \right\} \cong GL(2,\mathbb{R})$$

a $\mathbb{R}^2 = A(2,\mathbb{R})/GL(2,\mathbb{R})$. Lieova algebra afinní grupy je $\mathfrak{a} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & A \end{pmatrix} \right\}$ a komplement $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix} \right\} \cong \mathbb{R}^2$ k $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})$ je ideál. Afinní geometrie na $\mathbb{R}^2$ je tedy reduktivní. Jinak přímým výpočtem se snadno ukáže, že adjungovaná akce pro $A \in GL(2,\mathbb{R})$ a $w \in \mathbb{R}^2$ je tvaru

$$\mathrm{Ad}_A(w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Aw & 0 \end{pmatrix},$$

tedy $\mathbb{R}^2$ je skutečně $\mathrm{Ad}_{GL(2,\mathbb{R})}$–modul.

5.5 Homogenní bandly. *Homogenní bandl* je asociovaný bandl $G \times_H S$ k hlavnímu bandlu $G \to G/H$ se stukturní grupou H, kde S je hladká varieta s levou akcí $\lambda : H \times S \to S$. Nejobvyklejší jsou homogenní vektorové bandly, které odpovídají lineárním reprezentacím H na vektorovém prostoru S. Jde tedy o speciální případ objektů, které jsme studovali už v 0.6.

Připomeňmem že řezy obecného asociovaného bandlu $\sigma : M \to P \times_H S$ často ztotožňujeme s hladkými zobrazeními, značenými stejným symbolem, $\sigma : P \to S$, která jsou H–ekvivariantní, tj. $\sigma(u \cdot h) = \lambda_{h^{-1}} \cdot \sigma(u)$ pro všechna $u \in P$, $h \in H$. Způsob konstrukce asociovaných bandlů je pěkně vidět na diagramu

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "id\times\sigma"] \arrow[d, "p"'] & P \times S \arrow[d, "q"] \\ M \arrow[r, "\sigma"'] & P \times_H S \end{tikzcd}$$

Zde q přiřazuje dvojici (u,s) třídu $\{u,s\}$.

Speciálně všechny řezy na homogenním bandlu $G \times_H S$ jsou dány právě H–ekvivariantními zobrazeními $\sigma : G \to S$ vztahem $[g] \longmapsto \{g, \sigma(g)\}$ a platí následující tvrzení.

Tvrzení. *Přiřazením $\sigma \longmapsto \sigma \circ l_{g^{-1}}$, $g \in G$, je dána levá akce na řezech homogenního bandlu indukovaná násobením zleva na G.*

Důkaz. Uvedeme pro osvěžení paměti alternativní důkaz k důkazu lemmatu v 0.6. Obecně každý automorfismus $\varphi : P \to P$ hlavního fibrovaného bandlu indukuje automorfismus $\tilde{\varphi}$ asociovaného bandlu dobře definovaným přiřazením $\{u, s\} \longmapsto \{\varphi(u), s\}$ a dále automorfismus na řezech asociovaného bandlu vztahem $\sigma \longmapsto \tilde{\varphi} \circ \sigma \circ \underline{\varphi}^{-1}$, kde $\underline{\varphi}$ je difeomorfismus na bázi komutující s φ.

Nyní automorfismem $l_g : G \to G$ hlavního bandlu $G \to G/H$ je pro každé $g \in G$ dán automorfismus l'_g na řezech homogenního bandlu a platí

$$l'_g(\sigma([h])) = l_g \cdot \{g^{-1}h, \sigma(g^{-1}h)\} = \{h, \sigma(g^{-1}h)\}$$

pro každé $h \in G$. Skutečně je l' levá akce, neboť $l'_{g\cdot h} = l'_g \circ l'_h$. $\square$

5.6 Tečný bandl homogenního prostoru. Označíme homogenní prostor $G/H = M$ a ukážeme, že tečný bandl homogenního prostoru je přirozeně isomorfní s vektorovým bandlem $G \times_H \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ vzhledem k adjungované akci H na $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Hledaná identifikace $G \times_H \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \to TM$ je dána předpisem $\{g, [X]\} \longmapsto Tp \cdot L_X(g)$, kde p je kanonická projekce $G \to G/H$ a L_X je levoinvariantní vektorové pole s $L_X(e) = X$, neboli $L_X(g) = \omega_G^{-1}(X)(g)$. Toto zobrazení je dobře definováno, neboť

$$\{gh, [\mathrm{Ad}_{h^{-1}} \cdot X]\} \longmapsto Tp \cdot L_{\mathrm{Ad}_{h^{-1}} \cdot X}(gh) = Tp\,(Tr_h \cdot L_X(g)) = Tp \cdot L_X(g)$$

podle věty 4.1. Dále je určitě prosté mezi prostory stejné dimenze, dohromady tedy skutečně platí $T(G/H) \cong G \times_H \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

Důsledkem této identifikace je, že vektorová pole na homogenním prostoru lze chápat jako H–ekvivariantní zobrazení $G \to (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$.

Odtud okamžitě také plyne, že kotečný prostor $T^*(G/H)$ je homogenní bandl příslušný k duální adjungované reprezentaci na $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*$ a lineární formy na G/H jsou H–ekvivariantní zobrazení $G \to (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*$. Vyčíslení forem na vektorových polích pak odpovídá přesně příslušnému vyčíslení na úrovni standardních fibrů.

6. Obecné konexe

Buď E fibrovaný bandl nad varietou M s projekcí označenou p. Jádro tečného zobrazení $Tp : TE \to TM$ nazveme *vertikální bandl* a označíme VE. *Obecná konexe* na bandlu E je distribuce $\mathcal{H}$ na E komplementární k VE. Je tedy

$$T_uE = \mathcal{H}(u) \oplus V_uE$$

pro každé $u \in E$ a $\mathcal{H}(u)$ se nazývá *horizontální prostor* konexe.

Ekvivalentně lze obecnou konexi na E definovat jako řez γ bandlu $J^1E \to E$. Skutečně, je-li σ řez bandlu $E \to M$, pak 1–jet $j^1_x\sigma$, $x \in M$, zadává horizontální prostor $\mathcal{H}(\sigma(x)) = T_x\sigma \cdot T_xM$.

Poznámky. Obecnou konexi na E můžeme rovněž zadat *vertikální projekcí* $\Phi : TE \to VE$, která určí horizontální prostor $\mathcal{H}(u) = \operatorname{Ker}\Phi_u$. Zobrazení definované $\chi = \mathrm{id}_{TE} - \Phi$ nazveme *horizontální projekce*. VE je zřejmě integrovatelná distribuce — pro každé $u \in E$ je V_uE tečný prostor k fibru, jež tento bod obsahuje. O integrovatelnosti horizontální distribuce se zmíníme později.

Dále je $J^1E \to E$ afinní bandl, na kterém lze najít globální řez[5], proto na každém bandlu $E \to M$ existuje obecná konexe.

6.1. Příklady.

1. Triviální bandl $E = M \times S$ má triviální (nulovou) konexi

$$(x,s) \longmapsto j^1_x(y \longmapsto (y,s)) \in J^1(M \times S).$$

Horizontální distribuce $\mathcal{H} \subset TM \times TS$ je tedy identifikována s pullbackem tečného bandlu TM vzhledem k $pr_1 : E \to M$, tj. $\mathcal{H}(x,s) = pr_1^* T_x M$. Obecně nám zadání horizontálních podprostorů infinitesimálním způsobem říká, jak se má "paralelně" pohybovat bod v E ve směru zadaném vektorem na bázi. V předešlém triviálním případě pak vždy volíme přesně to, co patrně intuitivně vnímáme jako "paralelní" podél M.

2. Plocha v euklidovském prostoru $M \in \mathbb{R}^3$, $E = TM$. Konexe na TM je automaticky dána strukturou euklidovského prostoru, tj. možností kolmého promítání posunutých vektorů. Pro každý tečný vektor $\xi \in T_xM$ a vektor $\eta \in T_xM$, ve kterém chceme určit horizontální podprostor v $T_\eta TM$, musíme určit $\tilde{\xi}(\eta) \in T_\eta TM$, který se promítne na ξ. To můžeme učinit tak, že zvolíme křivku reprezentující ξ a paralelně posouváme η podél této křivky v $\mathbb{R}^3$. Derivace kolmého průmětu do TM pak zadá právě hledaný vektor $\tilde{\xi}$. Později uvidíme, že přesvědčivěji lze vše popsat pomocí tzv. hlavní konexe na prostoru bazí tečného prostoru TM.

3. Je-li homogenní prostor $M = G/H$ prostorem rozložitelné Kleinovy geometrie, pak Maurer–Cartanova forma $\omega : TG \to \mathfrak{g}$ určuje obecnou konexi na bandlu $G \to G/H$ předpisem $\mathcal{H}(g) = \omega^{-1}(\mathfrak{p})(g)$. Je totiž $T_gG \cong \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{h}$ a $\mathfrak{h}$ je jeho vertikální část.

4. Pokračujme v předešlém příkladě pro reduktivní případ. Podle věty 4.1 je pro každé $g, h \in G$

$$\omega(Tr_g \cdot \xi(h)) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \cdot \omega(\xi(h)),$$

odtud pro $\omega(\xi(h)) = X \in \mathfrak{g}$ máme

$$Tr_g \cdot \omega^{-1}(X)(h) = \omega^{-1}(\mathrm{Ad}_{g^{-1}} \cdot X)(hg).$$

V případě, že Kleinova geometrie je reduktivní, tzn. $\mathfrak{p}$ je Ad_H–modul, platí

$$\omega^{-1}(\mathfrak{p})(hg) = Tr_g \cdot \omega^{-1}(\mathfrak{p})(h),$$

tedy

$$\mathcal{H}(hg) = Tr_g \cdot \mathcal{H}(h). \tag{6.1}$$

6.2. Věta. *Obecná konexe na bandlu $E \to M$ určuje:*

1. liftování vektorových polí $\gamma : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(E)$ takové, že $\gamma\xi(u) \in \mathcal{H}(u)$ a $Tp \circ \gamma\xi = \xi$. Mluvíme o γ–liftu či horizontálním liftu.

2. paralelní přenos bodu $u \in E$ podél křivek $c : (a,b) \to M$, kde $0 \in (a,b)$ a $p(u) = c(0)$. Jinými slovy lokálně kolem bodu u existuje jediná křivka $\tilde{c} : (a',b') \to$

[5]Důvodem je afinní struktura na fibrech prvního jetového prodloužení, lze tedy snadno slepit lokálně definované řezy pomocí rozkladu jednotky. Více podrobností lze najít např. v [KMS]

E, $0 \in (a', b')$, taková, že $\tilde c(0) = u$ a $p \circ \tilde c = c$. Dále je $\tilde c$ kompatibilní s reparametrizacemi křivky c a hladce závisí na jejích případných dalších parametrech.

Důkaz. 1. Tvrzení je zřejmé z faktu, že $Tp|_{\mathcal H} : \mathcal H \to TM$ je na fibrech prosté lineární zobrazení a $\operatorname{Im} Tp = TM$, tedy $\mathcal H \cong TM$. V lokálních souřadnicích (x^i, y^p) na fibrovaném prostoru E vyjádříme horizontální lift vztahem (jako obvykle užíváme smační konvenci)

$$\gamma\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \Gamma^p_i \xi^i \frac{\partial}{\partial y^p}, \tag{6.2}$$

kde $\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ je vektorové pole na M, $(\frac{\partial}{\partial y^p})$ je báze na VE a Γ^p_i jsou funkce na E, které budeme nazývat *Christoffelovy symboly* konexe γ.

2. Vektor $\xi(u) \in T_uE$ leží v $\mathcal H(u)$ právě když $\Phi(\xi(u)) = 0$. K dané křivce c hledáme takovou křivku $\tilde c$, aby $\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\big|_s \tilde c\right) = 0$. Řešíme tedy autonomní systém obyčejných diferenciálních rovnici prvního řádu — k počáteční podmínce $\tilde c(0) = u$ existuje lokálně právě jedno řešení. □

6.3. Invariantní (absolutní) derivování. Pro obecnou konexi $\gamma : E \to J^1E$ na bandlu $E \to M$, vektorové pole $\xi \in \mathfrak X(M)$ a řez $s : M \to E$ definujeme *invariantní derivaci* $\nabla^\gamma_\xi s : M \to VE$ řezu s ve směru vektorového pole ξ jako

$$\nabla^\gamma_\xi s = \mathcal L_{\gamma\xi} s = Ts \circ \xi - \gamma\xi \circ s = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_0 \mathrm{Fl}^{\gamma\xi}_{-t} \circ s \circ \mathrm{Fl}^\xi_t .$$

Zřejmě $\nabla^\gamma_\xi s = 0$ právě když $Ts \circ \xi \in \mathcal H$.

6.4. Lineární a hlavní konexe. Je-li $E \to M$ vektorový bandl, pak je J^1E také vektorový bandl s přirozenou vektorovou strukturou:

$$j^1_x\sigma + j^1_x\tau := j^1_x(\sigma + \tau), \quad a \cdot j^1_x\sigma := j^1_x(a\sigma).$$

Lineární konexi definujeme na vektorovém bandlu $E \to M$ jako lineární řez γ bandlu $J^1E \to E$. Konexe je tedy lineární právě když $\mathcal H(w) = T_x(a\sigma + b\tau) \cdot T_xM$, kdykoli $w = a\sigma(x) + b\tau(x)$ pro libovolné dva řezy σ a τ.

Buď $P \to M$ hlavní bandl se strukturní grupou G. Na J^1P je předpisem $(j^1_x\sigma) \cdot g := j^1_x(y \longmapsto \sigma(y) \cdot g)$, $g \in G$, dána pravá akce grupy G a *hlavní konexi* na P definujeme jako G–ekvivariantní řez $\gamma : P \to J^1P$. Jinak řečeno, γ je hlavní konexe na P právě když $\mathcal H(u \cdot g) = Tr_g \cdot \mathcal H(u)$ nebo také $Tr_g \circ \Phi = \Phi \circ Tr_g$.

Poznámky. Maurer–Cartanova forma v příkladu 6.1.4 určovala hlavní konexi na bandlu $G \to G/H$, viz vztah (6.1).

Vertikální bandl VP můžeme díky hlavní akci r ztotožnit s vektorovým bandlem $P \times \mathfrak g$. Označme $r_u : G \to P$ zúžení $r : \{u\} \times G \to P$. Je-li konexe na P dána vertikální projekcí Φ, pak předpisem

$$\gamma(\xi(u)) = T_u(r_u)^{-1} \cdot \Phi(\xi(u)) : T_uP \to T_eG,$$

definujeme 1–formu γ na P s hodnotami v $\mathfrak g$, která se nazývá *forma hlavní konexe* s vertikální projekcí Φ. Formu konexe γ jsme mohli také definovat rovností $\Phi(\xi) = \zeta_{\gamma(\xi)}$, kde $\zeta : \mathfrak g \to \mathfrak X(P)$ přiřadí každému $X \in \mathfrak g$ tzv. *fundamentální vektorové pole* $\zeta_X(u) = \frac{\partial}{\partial t}\big|_0 u \cdot \exp tX = T_e r_u \cdot X$. Platí tedy $\Phi = \zeta \circ \gamma$.

Tvrzení. *Forma hlavní konexe γ má následující vlastnosti:*

(1) *γ je G–ekvivariantní, tj. $r_g^*\gamma = Ad_{g^{-1}} \circ \gamma$.*
(2) *γ reprodukuje fundamentální pole, tj. $\gamma(\zeta_X(u)) = X$.*

Důkaz. 1. Tvrzení plyne z toho, že $T_e r_u : \mathfrak{g} \to V_u P$ je lineární isomorfismus pro každé $u \in P$ a při označení $\gamma(\xi(u)) = X$ platí

$$\begin{aligned} T_e r_{ug} \cdot r_g^*\gamma(\xi(u)) &= T_e r_{ug} \cdot \gamma(T_u r_g \cdot \xi(u)) = \Phi(T_u r_g \cdot \xi(u)) = T_u r_g \cdot \Phi(\xi(u)) \\ &= T_u r_g \cdot \zeta_X(u) = T_u r_g \cdot \frac{\partial}{\partial t}\Big|_0 u \cdot \exp tX = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_0 u \cdot \exp tX \cdot g \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_0 u \cdot g \cdot (g^{-1} \cdot \exp tX \cdot g) = \zeta_{\mathrm{Ad}_{g^{-1}} \cdot X}(ug) = \\ &= T_e r_{ug} \cdot (\mathrm{Ad}_{g^{-1}} \cdot X). \end{aligned}$$

2. Podobně pro libovolné $X \in \mathfrak{g}$ je

$$T_e r_u \cdot \gamma(\zeta_X(u)) = \Phi(\zeta_X(u)) = \zeta_X(u) = T_e r_u \cdot X.$$

□

6.5. Indukované konexe. Buď γ hlavní konexe na $P \to M$, $\mathbb{W}$ vektorový prostor, $\lambda : G \to GL(\mathbb{W})$ representace strukturní grupy G a $W = P \times_G \mathbb{W}$ asociovaný vektorový bandl k hlavnímu bandlu P. *Indukovaná konexe* na W je dána horizontální distribucí $\mathcal{H} \subset TW = TP \times_{TG} T\mathbb{W}$ následujícím způsobem[6]

$$\mathcal{H}(\{u, w\}) = \{\{\xi(u), 0\}; \xi(u) \in \mathcal{H}(u)\}.$$

Takto definovaná horizontální distribuce vystihuje intuitivní představu, že je-li $\{u, w\}$ chápáno jako "souřadnice" w v "repéru" u, pak je "paralelní" posunutí odpovídá ponechání "konstantních" souřadnic a "správnému" posunutí repérů. Že se takto skutečné podařilo vytvořit rozumný pojem indukované konexe je názorně vidět z tvrzení následující věty.

Věta.

(1) *Paralelní přenos c_W na W podél křivky c na M, s počáteční podmínkou $c_W(0) = \{\tilde{c}(0), w_0\}$, je dán vztahem $c_W(t) = \{\tilde{c}(t), w_0\}$, kde $\tilde{c}(t)$ je paralelní přenos bodu $\tilde{c}(0)$ na P podél křivky c.*
(2) *Invariantní derivaci řezu zadaného ekvivariantním zobrazením $s : P \to \mathbb{W}$ vzhledem k indukované konexi hlavní konexí γ dostaneme derivací s ve směru horizontálního liftu $\gamma(\xi)$. Zejména je tato derivace opět ekvivariantní vektorovou funkcí na P.*
(3) *Pro řezy asociovaného bandlu $s : P \to \mathbb{W}$ je invariantní derivace $\nabla_\xi^\gamma s$ opět řezem téhož bandlu a v souřadnicích je dána*

$$\nabla_\xi^\gamma s = \frac{\partial s}{\partial x^i}\xi^i - \lambda'(\Gamma_i \xi^i) \circ s,$$

kde $\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ a $\lambda' : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathbb{W})$ je representace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ na $\mathbb{W}$ daná representací $\lambda : G \to GL(\mathbb{W})$.

[6] TG je Lieova grupa s násobením $Tm : TG \times TG \to TG$, kde $m : G \times G \to G$ je násobení na G, viz 4.1.

Důkaz. 1. V projekci $p : W \to M$ je jistě $p \circ c_W = c$ a

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_s \{\tilde{c}(t), w_0\} = \{\frac{\partial}{\partial t}\Big|_s \tilde{c}(t), 0\} \in \mathcal{H}(\{\tilde{c}(s), w_0\})$$

pro každé s. K počáteční podmínce $c_W(0) = \{\tilde{c}(0), w_0\}$ je přenos c_W na W určený jednoznačně, je tedy naše formule tou správnou.

2. Řez máme lokálně zadaný vztahem $x \mapsto \{\sigma(x), s(\sigma(x))\}$ pro jakýkoliv řez $\sigma \colon M \to P$. Formule pro invariantní derivaci tedy dává

$$\nabla_\xi \{\sigma, s \circ \sigma\} = T\{\sigma, s \circ \sigma\}.\xi - \{(\gamma\xi) \circ \sigma, 0\}$$

a volbou σ tak, aby v pevně zvoleném $u \in P$ platilo $\gamma\xi(u) = T\sigma.\xi$ dostaneme

$$\nabla_\xi \{\sigma, s \circ \sigma\} = \{\gamma\xi(u), Ts \circ (\gamma\xi)(u)\} - \{\gamma\xi(u), 0\}$$

což popisuje právě vertikální vektor odpovídající prvku $Ts(\gamma\xi(u))$ ve standardním fibru. Na každém vektorovém bandlu E ovšem můžeme ztotožnit vertikální tečný prostor v jednom bodě s fibrem do něhož tento bod patří.

3. Podle předešlé části důkazu je invariantní derivace $\nabla^\gamma_\xi s = \mathcal{L}_{\gamma\xi} s$ derivace vektorové funkce s ve směru vektorového pole $\gamma\xi$. Také již víme, že $\nabla^\gamma_\xi s$ je pro každý řez s na W řezem téhož bandlu. Platí

$$\mathcal{L}_{\gamma\xi} s(ug) = \mathcal{L}_{\gamma\xi}(s \circ r_g)(u) = \mathcal{L}_{\gamma\xi}(\lambda_{g^{-1}} \circ s)(u) = \lambda_{g^{-1}} \cdot \mathcal{L}_{\gamma\xi} s(u),$$

kde jsme využili, že s je G–ekvivariantní a $\lambda_{g^{-1}}$ je lineární zobrazení na $\mathbb{W}$. Dohromady je $\nabla^\gamma_\xi s : P \to \mathbb{W}$ G–ekvivariantní zobrazení, tedy řez asociovaného bandlu W (viz lemma 0.6).

Vztah (6.2) přepíšeme pro hlavní bandl P v lokální trivializaci $P|_U = U \times G$ ve tvaru $\gamma\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \zeta_{\Gamma_i \xi^i}$. Zde Γ přiřadí každému $\xi \in T_x M$ prvek z agebry $\mathfrak{g}$. Nyní zderivujeme vektorovou funkci s ve směru pole $\gamma\xi$.

$$\begin{aligned}
\nabla^\gamma_\xi s(u) &= \frac{\partial s}{\partial x^i}\xi^i(u) + \frac{\partial}{\partial t}\Big|_0 (s\,(u \cdot \exp t(\Gamma_i \xi^i))) = \\
&= \frac{\partial s}{\partial x^i}\xi^i(u) + \frac{\partial}{\partial t}\Big|_0 \lambda(\exp t(-\Gamma_i \xi^i)) \circ s(u) = \\
&= \frac{\partial s}{\partial x^i}\xi^i(u) - \lambda'(\Gamma_i \xi^i) \circ s(u),
\end{aligned}$$

neboť s je G–ekvivariantní. $\square$

Příklady. Buď γ hlavní konexe na P. Pak konexe na W indukovaná k hlavní konexi γ je při libovolné representaci $\lambda : G \to GL(\mathbb{W})$ jistě lineární a od nynějška budeme *lineární konexí na M* rozumět právě indukovanou konexi na $W = P \times_G \mathbb{W}$. Zejména pro $P = P^1 M$, $\mathbb{W} =$ jistý tensorový prostor, jsou souřadnicová vyjádření lineárních konexí na M známé vzorce ze základního kursu diferenciální geometrie:

1. $\mathbb{W} = \mathbb{R}$ s triviální representací strukturní grupy. Zde jde o obyčejný diferenciál reálné funkce na varietě:

$$\nabla^\gamma_{\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}} s = \frac{\partial s}{\partial x^i}\xi^i - \lambda(\Gamma^p_i \xi^i) s = ds(\xi) - 0$$

2. $\mathbb{W} = \mathbb{R}^m$, $W = TM = P^1M \times \mathbb{R}^m$ se standardní representací obecné lineární grupy na $\mathbb{R}^n$.

$$\nabla^{\gamma}_{\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \left(s^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \left(\frac{\partial s^k}{\partial x^i} \xi^i - \Gamma^k_{ji} \xi^i s^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

3. $\mathbb{W} = \mathbb{R}^{m*}$, $W = T^*M = P^1M \times \mathbb{R}^*$ s duální representací ke standardní.

$$\nabla^{\gamma}_{\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}} (s_j dx^j) = \left(\frac{\partial s_k}{\partial x^i} \xi^i + \Gamma^j_{ki} \xi^i s_j \right) dx^k$$

Mělo by být nyní zcela zřejmé, jak budou vypadat formule pro libovolná tensorová pole.

6.6. Křivost konexe. Buď $E \to M$ fibrovaný bandl s obecnou konexí γ. *Křivost* R dané konexe definujeme pro $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$ pomocí γ–liftu $\mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(E)$ jako rozdíl

$$R(\xi, \eta) = [\gamma\xi, \gamma\eta] - \gamma[\xi, \eta] \in C^\infty(VE).$$

Zde závisí jen na hodnotách liftovaných polí a je tedy $R \in p^*(T^*M \wedge T^*M) \otimes VE$ a. Uvažujeme-li R jako tensor $R \in T^*E \wedge T^*E \otimes VE$, je

$$R(\xi, \eta) = \Phi([\chi\,\xi, \chi\,\eta])$$

striktně horizontální, tzn. $R(\xi, \eta) = 0$, kdykoli je jeden z vektorů $\xi, \eta \in TE$ vertikální. Dále je zřejmé, viz. 0.9, že je křivost obstrukce proti integrovatelnosti horizontálního podbandlu.

Protože má křivost vertikální hodnoty, budeme na hlavním bandlu $P \to M$ se strukturní grupou G definovat *formu křivosti* K jako 2–formu s hodnotami v $\mathfrak{g}$, podobně jako u formy konexe:

$$K(\xi(u), \eta(u)) = -T_u(r_u)^{-1} \cdot R(\xi(u), \eta(u)).$$

Zřejmě je $\zeta_{K(\xi,\eta)} = -R(\xi, \eta)$, tedy $R = -\zeta \circ K$, a $K(\xi, \eta) = -\gamma([\chi\,\xi, \chi\,\eta])$, kde $\gamma \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ je forma konexe. Smysl záporného znaménka v definici formy konexe bude patrný z důkazu druhé části následujícího tvrzení.

Tvrzení. *Forma křivosti $K \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$ hlavní konexe γ má následující vlastnosti:*

(1) *K je G–ekvivariantní, tj. $r_g^* K = Ad_{g^{-1}} \circ K$.*
(2) *$K = d\gamma + \frac{1}{2}[\gamma, \gamma]$.*

Důkaz. 1. Tvrzení plyne z G–ekvivariantnosti formy γ. Podrobněji, horizontální lifty hlavních konexí jsou pravoinvariatní vektorová pole a závorka pravoinvariantních polí je opět pravoinvariantní. Je tedy $K(\xi, \eta)$ pravoinvariantní vertikální pole na P a proto splňuje uvedenou rovnost.

2. Vnější diferenciál lineární formy se vyčísluje na vektorových polích takto

$$d\gamma(\xi, \eta) = \xi.\gamma(\eta) - \eta.\gamma(\xi) - \gamma([\xi, \eta]).$$

Zvolme nejprve fundamentální pole $\xi = \zeta_X$ za první argument a nějaké další pole η, které s ξ komutuje. (Dimenze P je aspoň dvě a lokálně lze taková lineárně nezávislá pole jistě najít pro každé zvolené hodnoty z nichž jedna je vertikální.) Výraz $(d\gamma + \frac{1}{2}[\gamma,\gamma])(\xi,\eta)$ je pak roven

$$\zeta_X.\gamma(\eta) - \eta.\gamma(\zeta_X) - \gamma(0) + [X,\gamma(\eta)].$$

Díky pravoinvariatnosti γ je první člen roven $-\operatorname{ad}(X)(\gamma(\eta))$, zruší se tedy s posledním. Druhý člen je derivací konstantního zobrazení, vynuluje se tedy také. Celkem vidíme, že je výraz $d\gamma + \frac{1}{2}[\gamma,\gamma]$ striktně horizontální, stejně jako křivost. Zbývá tedy ověřit rovnost na dvou vektorových polích v horizontální distribuci. Na těch ale je forma konexe nulová a z celého výrazu zůstává $-\gamma([\xi,\eta])$. Jsou-li zvolená horizontální pole lifty polí na M, dostáváme tak přesně naši původní definici křivosti. □

6.7. Konexe na G–strukturách. G–struktura na varietě M je redukce $\iota\colon P \hookrightarrow P^1M$ ke strukturní grupě $G \subset GL(m,\mathbb{R})$. *Konexe na G–struktuře P* je tedy hlavní konexe na hlavním bandlu P.

Lemma. *Každá hlavní konexe γ na P určuje jedinou hlavní konexi $\tilde\gamma$ na P^1M takovou, že $\iota^*\tilde\gamma = \gamma$.*

Důkaz. Hlavní konexe na P nechť je dána formou $\gamma : TP \to \mathfrak{g}$. Na repéry mimo P rozšíříme formu konexe γ pomocí pravého násobení

$$\tilde\gamma(Tr_g \cdot \xi) := r_g^*\gamma(\xi) : TP^1M \to \mathfrak{gl}(m,\mathbb{R}),$$

kde $\xi \in TP$ a $g \in GL(m,\mathbb{R})$. Jistě platí $\tilde\gamma|_{TP} = \gamma$. □

Poznámka. Opačně, zjistit, zda k hlavní konexi $\tilde\gamma$ na P^1M existuje konexe γ na nějaké G–struktuře taková, že $\iota^*\tilde\gamma = \gamma$, není již tak snadné. Odpověď pro obecný fibrovaný bandl dává Ambrose–Singerova věta, [KMS] 9.11.

6.8. Kanonické formy na G–strukturách. Na G–struktuře $P \subset P^1M$ se definuje tzv. *kanonická forma*[7] $\theta \in \Omega^1(P,\mathbb{R}^m)$ následovně. Pro $\xi \in T_uP$, kde $u = j^1_0\sigma$, $\sigma : \mathbb{R}^m \to M$ a $\sigma(0) = p(u) \in M$, položíme $\theta(\xi) = T\sigma^{-1}(Tp \cdot \xi)$.

Tvrzení. *Kanonická forma θ má následující vlastnosti:*

(1) *θ je G–ekvivariantní, tj. $r_g^*\theta = Ad_{g^{-1}} \circ \theta$.*
(2) *$\theta(\xi) = 0$ právě když je ξ vertikální.*

Důkaz. Druhá část tvrzení je zřejmá z definice kanonické formy, pro důkaz prvního uvažme $\xi = j^1_0 c$, $c : \mathbb{R} \to P^1M$ a $g = j^1_0\varphi$, $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Nyní můžeme psát $\theta(\xi(u)) = j^1_0(\sigma^{-1} \circ p \circ c)$ a vyjádříme

$$\begin{aligned} r_g^*\theta(\xi(u)) &= \theta(T_ur_g \cdot \xi(u)) = T_x\tilde\sigma^{-1}(T_{ug}p \cdot \xi(ug)) = \\ &= j^1_0(\varphi^{-1} \circ \sigma^{-1} \circ p \circ c) = j^1_0(\varphi^{-1}) \circ \theta(\xi(u)), \end{aligned}$$

neboť $j^1_0\tilde\sigma = u \cdot g = j^1_0(\sigma \circ \varphi)$. Platí tedy $r_g^*\theta = \operatorname{Ad}_{g^{-1}} \circ \theta$, viz příklad 5.4. □

Smysl následující konstrukce bude patrný až v další části této kapitoly.

[7] Anglicky *soldering form*.

6.9. Věta. *Nechť $\omega = \theta + \gamma \in \Omega^1(P, \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}(m,\mathbb{R}))$, kde γ je forma hlavní konexe na P. Forma ω má následující vlastnosti:*

(1) *ω je G–ekvivariantní, tj. $r_g^*\omega = Ad_{g^{-1}} \circ \omega$.*
(2) *ω reprodukuje fundamentální pole, tj. $\omega(\zeta_X(u)) = 0 + X = X$.*
(3) *ω je absolutní paralelismus, tj. $\omega|_{T_uP} : T_uP \to \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{g}$ je lineární isomorfismus pro každé $u \in P$.*

Důkaz. Všechna tři tvrzení jsou zřejmými důsledky již dokázaných vlastností θ a γ. $\square$

Formu ω z předchozí věty nazýváme *absolutním paralelismem na G-struktuře P* zadaným lineární konexí γ. Pro každý vektor $X \in \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{g}$ definujeme tzv. *konstantní vektorové pole* $\omega^{-1}(X)$ na P rovností $\omega(\omega^{-1}(X)) = X$.

6.10. Věta.

(1) *Pro každé $X \in \mathbb{R}^m$ je $\omega^{-1}(X)$ horizontální vektorové pole, pro $X \in \mathfrak{g}$ je $\omega^{-1}(X)$ fundamentální vektorové pole a platí*
$$\omega^{-1}(X)(ug) = Tr_g \cdot \omega^{-1}(Ad_g \cdot X)(u).$$
(2) *Buď $\xi_X(x) = \{u, X\} \in P \times_G \mathbb{R}^m = TM$, $x = p(u)$. Platí*
$$Tp \cdot \omega^{-1}(X)(u) = \xi_X(x) \text{ a } \gamma\xi_X(u) = \omega^{-1}(X)(u),$$
kde $\gamma\xi_X$ je γ–lift vektorového pole ξ_X.
(3) *Invariantní derivování je dáno vztahem*
$$\nabla^\gamma_{\xi_X} s(u) = \mathcal{L}_{\omega^{-1}(X)} s(u).$$
(4) *$K := d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$ zadává horizontální 2–formu $K \in \Omega^2(P, \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{g})$.*
(5) *Pro každé $u \in P$ je zobrazení $\varphi_u(X) := p \circ \mathrm{Fl}_1^{\omega^{-1}(X)}(u) : \mathbb{R}^m \to M$ difeomorfismus na okolí $0 \in \mathbb{R}^m$, který nazýváme normální souřadnice, a platí*
$$\varphi_{u \cdot g} = \varphi_u \circ Ad_g.$$
(6) *Geodetiky na M jsou křivky $\alpha_u^X(t) := p \circ \mathrm{Fl}_t^{\omega^{-1}(X)}(u)$. Platí*
$$\nabla^\gamma_{\dot\alpha}\dot\alpha = 0 \text{ a } \alpha_u^X = \alpha_{u \cdot g}^{\mathrm{Ad}_g \cdot X}.$$
Každý tečný vektor $\{u, X\} \in T_{p(u)}M$ určuje právě jednu geodetiku a v normálních souřadnicích jsou geodetiky obrazem přímek v $\mathbb{R}^m$.

Důkaz. 1. První část je zřejmá z definice formy ω, zbytek plyne z její G–ekvivariantnosti, podobně jako v příkladu 6.1.4.

2. Plyne z 1, $\omega^{-1}(X)$ je horizontální pole.

3. Plyne z 2, $\omega^{-1}(X)$ je γ–lift ξ_X.

4. $K = K_{\mathbb{R}^m} + K_{\mathfrak{g}}$, kde $K_{\mathfrak{g}}$ je křivost konexe γ definovaná v odstavci 6.6. Zřejmě K je horizontální a pro horizontální vektorová pole $\omega^{-1}(X)$ a $\omega^{-1}(Y)$, $X, Y \in \mathbb{R}^m$, je $K(\omega^{-1}(X), \omega^{-1}(Y)) = -\omega([\omega^{-1}(X), \omega^{-1}(Y)]) + [X, Y] =: \kappa(X, Y)$. Definovali jsme tak G–ekvivariantní křivostní funkci $\kappa : P \to \mathbb{R}^m \wedge \mathbb{R}^m \otimes (\mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{g})$.

5. Plyne bezprostředně z 1.

6. $\dot\alpha$ je vektorové pole na M nebo G–ekvivariantní zobrazení $P \to \mathbb{R}^m$, které je konstantní. Proto $\nabla^\gamma_{\dot\alpha}\dot\alpha = 0$. $\square$

7. Cartanovy konexe

Nechť $P \to M$ je obecný hlavní bandl se strukturní grupou $H \subset G$. Dále předpokládejme, že existuje rozklad $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{h}$ na podalgebry. *Cartanovou konexí* na P nazýváme 1–formu $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ s následujícími vlastnostmi.

(1) ω je H–ekvivariantní, tj. $r_g^*\omega = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \omega$, $g \in H$.
(2) ω reprodukuje fundamentální pole, tj. $\omega(\zeta_X(u)) = X$, $X \in \mathfrak{h}$.
(3) ω je absolutní paralelismus, tj. $\omega|_{T_uP} : T_uP \to \mathfrak{g}$ je lineární isomorfismus pro každé $u \in P$.

Platí analogická věta jako 6.10. Rozdíly jsou v případech, kdy se využívala reduktivnost $\mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{g}$, nyní je $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{h}$ pouze rozložitelná. Podobně jako v minulé části budeme psát $\omega = \omega_- + \omega_{\mathfrak{h}}$.

7.1. Věta.

(1) $\omega^{-1} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P)$, *konstantní pole. Každý vektor* $X \in \mathfrak{g}_-$ *zadává horizontální vektorové pole* $\omega^{-1}(X)$, *pro* $X \in \mathfrak{h}$ *je* $\omega^{-1}(X)$ *fundamentální vektorové pole a pro libovolné* $u \in P$, $g \in H$ *platí*

$$\omega^{-1}(X)(ug) = Tr_g \cdot \omega^{-1}(Ad_g \cdot X)(u).$$

(2) *Buď* $\xi_X(x) = \{u, X\} \in P \times_G \mathfrak{g}_- \cong TM$, $x = p(u)$. *Platí*

$$Tp \cdot \omega^{-1}(X)(u) = \xi_X(x) \text{ a } \omega_{\mathfrak{h}}\xi_X(u) = \omega^{-1}(X)(u),$$

kde $\omega_{\mathfrak{h}}\xi_X$ *je* $\omega_{\mathfrak{h}}$*–lift vektorového pole* ξ_X. *Zde již* $\omega_{\mathfrak{h}}$ *obecně nezadává hlavní konexi, zejména není obecně ekvivariantní.*

(3) *Invariantní derivování definujeme vztahem*

$$\nabla^{\omega}_{\xi_X} s(u) = \mathcal{L}_{\omega^{-1}(X)} s(u).$$

(4) $K := d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$ *zadává horizontální 2–formu* $K \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$. *Je-li* $K = 0$, *lze podle věty 4.9 lokálně ztotožnit hlavní bandl* $P \to M$ *s bandlem* $G \to G/H$ *tak, že* ω *je Maurer–Cartanova forma.*

(5) *Pro každé* $u \in P$ *je zobrazení* $\varphi_u(X) := p \circ Fl_1^{\omega^{-1}(X)}(u) : \mathfrak{g}_- \cong \mathbb{R}^m \to M$ *difeomorfismus na okolí* $0 \in \mathbb{R}^m$, *který nazýváme normální souřadnice. Neplatí však* $\varphi_{u \cdot g} = \varphi_u \circ Ad_g$.

(6) *Geodetiky na* M *jsou křivky* $\alpha_u^X(t) := p \circ Fl_t^{\omega^{-1}(X)}(u)$. *Platí* $\nabla^{\gamma}_{\dot\alpha}\dot\alpha = 0$, *ale neplatí* $\alpha_u^X = \alpha_{u \cdot g}^{\mathrm{Ad}_g \cdot X}$, *poněvadž obecně* $Ad_g \cdot X \notin \mathfrak{g}_-$. *Celkem k danému tečnému vektoru existuje mnoho geodetik, jednoznačně je každá určena až se zrychlením.*

Důkaz. Přesně jako u věty 6.10.

7.2. Ricciho a Bianchiho identity. Iterované užití definice invariantního derivování dává invariantní diferenciály vyšších řádů. Protože je $\nabla^{\omega}_{\xi_X} s(u) = \nabla^{\omega} s(u)(X)$ lineární v X, dostáváme

$$(\nabla^{\omega})^k s(u)(X_1, \dots, X_k) = \mathcal{L}_{\omega^{-1}(X_k)} \circ \dots \circ \mathcal{L}_{\omega^{-1}(X_1)} s(u).$$

Zejména, pro diferenciál druhého řádu a jeho následnou antisymetrizaci platí

$$\begin{aligned}\mathrm{Alt}(\nabla^\omega)^2 s(u)(X,Y) &= (\mathcal{L}_{\omega^{-1}(Y)} \circ \mathcal{L}_{\omega^{-1}(X)} - \mathcal{L}_{\omega^{-1}(X)} \circ \mathcal{L}_{\omega^{-1}(Y)})s(u) \\ &= \mathcal{L}_{[\omega^{-1}(Y),\omega^{-1}(X)]}s(u).\end{aligned}$$

Křivost K Cartanovy konexe ω se vyjadřuje pomocí funkce $\kappa\colon P \to \Lambda^2\mathfrak{g}_-^* \otimes \mathfrak{g}$,

$$\kappa(u)(X,Y) = [X,Y] - \omega([\omega^{-1}(X),\omega^{-1}(Y)])$$

a infinitesimální verze pravoinvariantnosti s říká, že Lieovská derivace ve směrech z $\mathfrak{h}$ je dána algebraickou akcí. Celkem jsme tedy odvodili obecnou Ricciho identitu:

$$\mathrm{Alt}(\nabla^\omega)^2 s(u)(X,Y) = \nabla^\omega s(u)(\kappa_{\mathfrak{g}_-}(u)(X,Y)) - \nabla^\omega s(u)([X,Y]) - \kappa_{\mathfrak{h}}(u)(X,Y)\cdot s(u).$$

Všimněme si, že pro konexe s komutativní podalgebrou $\mathfrak{g}_-$, tj. např. afinní konexe, dostáváme klasickou Ricciho identitu pro kovariantní derivace na libovolných tensorových bandlech (včetně případů s netriviální torzí).

Dalším jednoduchým důsledkem definice invariantního diferenciálu je následující vyjádření základních (obecně nelineárních diferenciálních) symetrií křivosti. Vyčíslením strukturní rovnice na konstantním poli $\tilde{Z} = \omega^{-1}(Z)$ a na závorce konstantních polí $[\tilde{X},\tilde{Y}]$ dostaneme

$$-\mathcal{L}_{\tilde{Z}}\omega([\tilde{X},\tilde{Y}]) - \omega([\tilde{X},\tilde{Y}],\tilde{Z}) + [[X,Y],Z] - [\kappa(X,Y),Z] = -\kappa(\kappa_{\mathfrak{g}_-}(X,Y),Z).$$

Aplikací cyklické sumace přes argumenty X, Y a Z vypadnou iterované závorky tří polí na P nebo tří prvků v $\mathfrak{g}$ a zůstane právě obecná Bianchiho identita

$$\sum_{\text{cycl}}\big([\kappa(X,Y),Z] - \kappa([X,Y],Z) - \kappa(\kappa_{\mathfrak{g}_-}(X,Y),Z) - \nabla^\omega_Z\kappa(X,Y)\big) = 0$$

Ještě stručněji ji zapíšeme s použitím diferenciálu ∂ z kohomologické teorie $H^*(\mathfrak{g}_-,\mathfrak{g})$

$$-\partial\kappa(X,Y,Z) = \sum_{\text{cycl}}\big(\nabla^\omega_Z\kappa(X,Y) + \kappa(\kappa(X,Y),Z)\big).$$

Formule se opět výrazně zjednoduší v klasickém případě afinních konexí bez torze, kde nejen vypadne kvadratický člen s torzí, ale navíc se celá Bianchiho identita rozpadne podle hodnot v $\mathfrak{g}_-$ a $\mathfrak{g}_h$ na dvě části známé pod názvy první a druhá Bianchiho identita. Protože je navíc i diferenciál ∂ v tomto případě pouho antisymetrizací, je první Bianchiho identita v souřadnicích právě $R^i_{[jkl]} = 0$, zatímco druhá říká že antisymetrizace zahrnující první kovariantní derivace křivosti mizí, tj. $R^i_{j[kl;m]} = 0$.

Zkuste najít explicitní souřadné vyjádření Binachiho identity pro afinní konexe s torzí a porovnejte snadnost našeho odvození s literaturou.

7.3. Torze konexí na G–strukturách. Nechť γ je konexe na G–struktuře $P \subset P^1M$, θ kanonická forma a $K = K_- + K_{\mathfrak{g}} \in \Omega^2(P,\mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{g})$ forma zkonstruovaná ve větě 6.8. Pro $\xi,\eta \in \mathfrak{X}(M)$ a γ–lift $\mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(P)$ definujeme *torzi konexe* γ jako 2-formu $T \in \Omega^2(M,\mathbb{R}^m)$ předpisem

$$T(\xi,\eta)(x) = K_-(\gamma\xi,\gamma\eta)(u).$$

Rozepsáním dostáváme

$$\begin{aligned} T(\xi,\eta)(x) &= \big(d\theta(\gamma\xi,\gamma\eta) + \frac{1}{2}([\theta,\gamma]+[\gamma,\theta])(\gamma\xi,\gamma\eta)\big)(u) = \\ &= \big(\mathcal{L}_{\gamma\xi}\theta(\gamma\eta) - \mathcal{L}_{\gamma\eta}\theta(\gamma\xi) - \theta([\gamma\xi,\gamma\eta])\big)(u) = \\ &= \big(\nabla_\xi\eta - \nabla_\eta\xi - [\xi,\eta]\big)(x). \end{aligned}$$

Cestou jsme využili toho, že $[\theta,\theta]=0$, $[\gamma,\gamma]\in\mathfrak{g}$ a $\theta(\gamma\xi)$ vyjádří souřadnice vektoru ξ v bázi u. V lokálních souřadnicích je

$$\begin{aligned} T(\xi,\eta)(x) &= \left(\frac{\partial\eta^j}{\partial x^i}\xi^i - \Gamma^j_{ik}\eta^i\xi^k - \frac{\partial\xi^j}{\partial x^i}\eta^i + \Gamma^j_{ik}\xi^i\eta^k - [\xi,\eta]\right)\frac{\partial}{\partial x^j}(x) = \\ &= \left((\Gamma^j_{ik}-\Gamma^j_{ki})\xi^i\eta^k\right)\frac{\partial}{\partial x^j}(x), \end{aligned}$$

neboli $T^j_{ik} = \Gamma^j_{[ik]}$.

7.4. Konexe patřící G–struktuře. Podle vztahu (6.2) je obecná konexe γ dána přiřazením $\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}\longmapsto\Gamma^p_i\xi^i\frac{\partial}{\partial y^p}$, které určuje vertikální část liftovaného pole $\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}$. Pro konexe na G–strukturách je každý vertikální prostor ztotožněn s vektorovým prostorem $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{gl}(m,\mathbb{R})=\mathbb{R}^{m*}\otimes\mathbb{R}^m$ a konexi na G–struktuře pak identifikujeme s tensorem $\Gamma\in\mathbb{R}^{m*}\otimes\mathbb{R}^{m*}\otimes\mathbb{R}^m$ takovým, že pro pevné $X\in\mathbb{R}^m$ je $\Gamma(X,-)\in\mathfrak{g}$. Jinými slovy $\Gamma\in(\mathbb{R}^{m*}\otimes\mathbb{R}^{m*}\otimes\mathbb{R}^m)\cap(\mathbb{R}^{m*}\otimes\mathfrak{g})$.

Zadání konexe na G–struktuře P je nyní totéž, jako zadání globálního řezu asociovaného afinního bandlu $P\times_G S$ se standardním fibrem $S=(\mathbb{R}^{m*}\otimes\mathbb{R}^{m*}\otimes\mathbb{R}^m)\cap(\mathbb{R}^{m*}\otimes\mathfrak{g})$, který umíme rozložit na jeho symetrickou a antisymetrickou část

$$S=(\mathbb{R}^{m*}\odot\mathbb{R}^{m*}\otimes\mathbb{R}^m)\cap(\mathbb{R}^{m*}\otimes\mathfrak{g})\oplus(\mathbb{R}^{m*}\wedge\mathbb{R}^{m*}\otimes\mathbb{R}^m)\cap(\mathbb{R}^{m*}\otimes\mathfrak{g}).$$

Symetrická část je právě první prodloužení Lieovy algebry $\mathfrak{g}$, prvky z antisymetrické části odpovídají změně torze konexe γ, podobně jako prvky S představovali rozdíl konexe γ od pevně zvolené konexe γ_0 na P.

Důsledek. *Konexe s pevně danou torzí na G–struktuře P jsou v bijektivní korespondenci s globálními řezy asociovaného bandlu $P\times_G\mathfrak{g}^{(1)}$.*

8. Prodlužování G–struktur

V šesté kapitole jsme zkonstruovali afinní konexi $\omega=\theta\oplus\gamma\in\Omega^1(P,\mathbb{R}^m\oplus\mathfrak{g})$ na G–struktuře P, jejíž element v každém repéru $u\in P$ je lineární isomorfismus φ komutující s diagramem

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V_uP & \longrightarrow & T_uP & \longrightarrow & T_uP/V_uP & \longrightarrow & 0 \\ & & \zeta\big\uparrow\cong & & \big\uparrow\varphi & & \cong\big\downarrow\theta & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathbb{R}^m\oplus\mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathbb{R}^m & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Jinými slovy pro každé $A\in\mathfrak{g}$ a $X\in\mathbb{R}^m$ platí $\varphi(0,A)=\zeta_A(u)$ a $\theta(u)(\varphi(X,A))=X$. Je-li $\tilde\varphi$ jiný isomorfismus komutující s diagramem, pak obrazy φ a $\tilde\varphi$ se liší pouze ve vertikální složce — existuje takové lineární zobrazení $\psi:\mathbb{R}^m\to\mathfrak{g}$, že

$$(\tilde\varphi-\varphi)(X,A)=\zeta_{\psi(X)}(u).$$

Pomocí vnějšího diferenciálu kanonické formy θ definujeme *torzi* příslušnou φ, $t_\varphi \in \mathbb{R}^{m*} \wedge \mathbb{R}^{m*} \otimes \mathbb{R}^m$, následovně

$$t_\varphi(X,Y) := d\theta(u)(\varphi(X,0),\varphi(Y,0)).$$

Rozdíl torzí φ a $\tilde\varphi$ můžeme snadno vyjádřit pomocí zobrazení ψ.

8.1. Lemma. *V zavedeném označení platí pro každé $X,Y \in \mathbb{R}^m$*

$$t_{\tilde\varphi}(X,Y) - t_\varphi(X,Y) = -[\psi(X),Y] + [\psi(Y),X].$$

Důkaz. Tvrzení dokážeme přímým výpočtem. Po dosazení $\tilde\varphi(X,A) = \varphi(X,A) + \zeta_{\psi(X)}(u)$ je levá strana

$$d\theta(u)(\varphi(X,0),\zeta_{\psi(Y)}(u)) + d\theta(u)(\zeta_{\psi(X)}(u),\varphi(Y,0)) + d\theta(u)(\zeta_{\psi(X)}(u),\zeta_{\psi(Y)}(u)).$$

Poslední člen je nulový, neboť kanonická forma θ je striktně horizontální a závorka dvou vertikálních vektorových polí je opět vertikální. Znovu díky horizontálnosti formy θ pro libovolné $A \in \mathfrak{g}$ platí $\mathcal{L}_{\zeta_A}\theta = i_{\zeta_A} d\theta$ a z G–ekvivariantnosti θ plyne

$$\mathcal{L}_{\zeta_A}\theta = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_0 (Fl_t^{\zeta_A})^*\theta = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_0 (r^{\exp tA})^*\theta = -\mathrm{ad}(A)\circ\theta.$$

Odtud $i_{\zeta_A} d\theta = -\mathrm{ad}(A)\circ\theta$, zejména

$$d\theta(u)(\zeta_{\psi(X)}(u),\varphi(Y,0)) = -[\psi(X),\theta(u)(\varphi(Y,0))] = -[\psi(X),Y]$$

a podobně pro zbylý člen. $\square$

Protože $\mathfrak{g} \subset \mathbb{R}^{m*} \otimes \mathbb{R}^m$, budeme každé lineární zobrazení $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathfrak{g}$ chápat jako tensor z $\mathbb{R}^{m*} \otimes \mathbb{R}^{m*} \otimes \mathbb{R}^m$. Po alternaci v prvních dvou složkách dostáváme přirozené přiřazení $\partial : \mathbb{R}^{m*} \otimes \mathfrak{g} \to \mathbb{R}^{m*} \wedge \mathbb{R}^{m*} \otimes \mathbb{R}^m$ a zřejmě platí, že $\psi \in \operatorname{Ker}\partial$ právě když $\psi \in \mathfrak{g}^{(1)}$. Tvrzení předchozího lemmatu můžeme nyní přepsat

$$t_{\tilde\varphi}(X,Y) - t_\varphi(X,Y) = -(\partial\psi)(X,Y).$$

8.2. Strukturní funkce. Dosavadní úvahy nyní zaručí, že zobrazení $c : P \to (\mathbb{R}^{m*} \wedge \mathbb{R}^{m*} \otimes \mathbb{R}^m)/\partial(\mathbb{R}^{m*} \otimes \mathfrak{g})$,

$$c(u)(X,Y) := [d\theta(u)(\varphi(X,0),\varphi(Y,0))],$$

je dobře definováno. Jmenuje se *první strukturní funkce* G–struktury P. Zřejmě G–struktura P připouští konexi bez torze právě když $c \equiv 0$.

Příklad (důsledek). *Na ortogonální struktuře existuje právě jedna konexe bez torze.*

Důkaz. Tvrzení plyne z faktu, že $\mathfrak{o}(m,\mathbb{R})^{(1)} = \operatorname{Ker}\partial = 0$. Zobrazení ∂ je proto prosté mezi prostory stejné dimenze (algebru $\mathfrak{o}(m,\mathbb{R})$ tvoří antisymetrické matice), tudíž $\operatorname{Im}\partial = \mathbb{R}^{m*} \wedge \mathbb{R}^{m*} \otimes \mathbb{R}^m$ a existuje konexe bez torze. Podle důsledku 7.4 je taková konexe jediná. Její explicitní popis bude zřejmý z poznámky 8.4. $\square$

8.3. První prodloužení. Fibr $P_x \subset P$ nad bodem $x \in M$ je tvořen lineárními isomorfismy $u : \mathbb{R}^m \to T_xM$, z nichž každé dva se liší o nějaký prvek $g \in G \subset \mathbb{R}^{m*} \otimes \mathbb{R}^m$ (akce G je na fibrech transitivní).

Nyní definujeme $P_u^{(1)}$ jako množinu všech lineárních isomorfismů $\varphi : \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{g} \to T_uP$, které komutují s diagramem z úvodu této kapitoly a splňují $t_\varphi \in \mathcal{D}$, kde $\mathcal{D}$ je nějaký doplněk k $\partial(\mathbb{R}^{m*} \otimes \mathfrak{g})$ v prostoru $\mathbb{R}^{m*} \wedge \mathbb{R}^{m*} \otimes \mathbb{R}^m$. Zřejmě platí, že $\varphi, \tilde{\varphi} \in P_u^{(1)}$ právě když $\psi \in \mathfrak{g}^{(1)}$. Zkonstruovali jsme *první prodloužení* G–struktury P:

Lemma.

(1) *$P^{(1)} \neq \emptyset$ a $P^{(1)} \to P$ je hlavní fibrovaný bandl se strukturní grupou $\exp \mathfrak{g}^{(1)} \subset GL(\mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{g})$, kde $\exp \mathfrak{g}^{(1)}$ je vektorová grupa isomorfní s $\mathfrak{g}^{(1)}$.*

(2) *Je-li $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{m*} \wedge \mathbb{R}^{m*} \otimes \mathbb{R}^m$ G–invariantní podprostor, pak $P^{(1)} \to M$ je hlavní fibrovaný bandl se strukturní grupou $G \rtimes \exp \mathfrak{g}^{(1)}$, kterou budeme značit G^1.*

(3) *Kanonická forma θ na G–struktuře P se rozšiřuje na $\theta_- \oplus \theta_0 \in \Omega^1(P^{(1)}, \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{g})$, která je horizontální pro $P^{(1)} \to P$, G^1–ekvivariantní a reprodukuje fundamentální vektorová pole $\zeta_A \in TP^{(1)}$, $A \in \mathfrak{g}$.*

Důkaz. 1. První část tvrzení je zřejmá, druhá plyne z definice $P^{(1)}$. Zejména, pro $\varphi \in P_u^{(1)}$ je z předešlých úvah patrné, že všechny transformace $t \in GL(\mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{g})$ takové, že $\varphi \circ t \in P_u^{(1)}$ jsou určeny právě zobrazeními $\psi \in \mathfrak{g}^{(1)} \subset \mathbb{R}^{m*} \otimes \mathfrak{g}$. Explicitně $\exp \mathfrak{g}^{(1)}$ je grupa lineárních transformací t prostoru $\mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{g}$, která jsou tvaru

$$t(X, A) = (X, A + \psi(X, -)),$$

kde $\psi \in \mathfrak{g}^{(1)}$ a $X \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathfrak{g}$.

2. Nejdřív strukturní grupu G^1 popíšeme, pak budeme definovat pravou akci na $P^{(1)} \to M$. Buď G^1 podgrupa $J_0^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)_0$ obsahující 2–jety zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, která jsou automorfismy ploché G–struktury $\mathbb{R}^m \times G$ splňující $\varphi(0) = 0$ (viz 1.4). Je-li φ automorfismus G–struktury, je $j_0^1\varphi = g \in G$ a budeme psát $\varphi = g \circ g^{-1} \circ \varphi = g \circ \bar{\varphi}$, kde zřejmě $j_0^1\bar{\varphi} = j_0^1 \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}$, což implikuje, že $P^1\bar{\varphi}\big|_0 : \{0\} \times G \to \{0\} \times G$ je identita.

Každý $j_0^2\varphi$ nahradíme 1–jetem $j_{(0,e)}^1 P^1\varphi$, zejména $j_0^2\bar{\varphi}$ nahradíme $T_{(0,e)}P^1\bar{\varphi} : \mathbb{R}^m \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}^m \times \mathfrak{g}$. Z předešlých úvah plyne, že $T_{(0,e)}P^1\bar{\varphi}$ je tvaru

$$(X, A) \mapsto (X, A + Z(X)),$$

kde lineární zobrazení $Z : \mathbb{R}^m \to \mathfrak{g}$ je 2–jetem $j_0^2\bar{\varphi}$ jednoznačně určeno. Z konstrukce vyplývá, že Z je dáno druhými derivacemi zobrazení φ v počátku, zejména tedy je symetrické, když realizujeme vložení $\mathfrak{g} \subset \mathbb{R}^{m*} \otimes \mathbb{R}^m$. To ale právě znamená $Z \in \mathfrak{g}^{(1)}$.

Každý prvek $b = j_0^2\varphi \in G$ ztotožňujeme s dvojicí (g, Z), kde $g = j_0^1\varphi \in G$ a $\exp Z = j_0^2\bar{\varphi} \in \exp \mathfrak{g}^{(1)}$. Budeme psát také $b = g \exp Z$. Násobení v G^1 dané skládáním jetů funguje následovně

$$\begin{aligned}(g' \exp Z') \cdot (g \exp Z) &= j_0^2(\varphi' \circ \varphi) = j_0^2((g'gg^{-1}\bar{\varphi}')(g\bar{\varphi})) = \\ &= j_0^2((g'g)(\mathrm{Conj}_{g^{-1}}\bar{\varphi}')\bar{\varphi}) = g'g \exp\left(\mathrm{Ad}_{g^{-1}} Z' + Z\right).\end{aligned}$$

Odtud G^1 je skutečně polopřímý součin $G \rtimes \exp \mathfrak{g}^{(1)}$.

Na fibrovaném bandlu $P^{(1)} \to M$ definujeme pravou akci grupy G^1 předpisem

$$r^b(\varphi) = \varphi \cdot b = Tr^{b_0} \circ \varphi \circ \mathrm{Ad}_b$$

pro každé $b = b_0 \exp Z \ \in G^1$. Zde symbolem Ad označujeme zobrazení $G^1 \to GL(\mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{g})$ definované pro libovolné $X \in \mathbb{R}^m$ a $A \in \mathfrak{g}$ takto:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_{b_0}(X, A) &= (b_0(X), \mathrm{Ad}_{b_0} A) \\ \mathrm{Ad}_{\exp Z}(X, A) &= (X, A + Z(X)). \end{aligned}$$

V prvním řádku je $b_0(X) = \mathrm{Ad}_{b_0} X$ a $\mathrm{Ad}_{b_0} A$ skutečná adjungovaná akce grupy G na $\mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}(m, \mathbb{R})$, viz úvod páté kapitoly. Definice ze druhého řádku koresponduje se skutečným Ad[8] ve speciálních případech jako např. v odstavci 8.5.

Nyní dokážeme, že jsme definovali akci a že $P^{(1)} \to M$ je hlavní bandl.

a) Nejdřív ověříme, že $r^b : P^{(1)} \to P^{(1)}$ je pravá akce

$$(\varphi \cdot b) \cdot b' = Tr^{b'_0} \circ (\varphi \cdot b) \circ \mathrm{Ad}_{b'} = Tr^{b'_0} \circ Tr^{b_0} \circ \varphi \circ \mathrm{Ad}_b \circ \mathrm{Ad}_{b'} = \varphi \cdot (b'b).$$

b) Dokážeme transitivnost. Protože G působí transitivně na fibrech $P \to M$, stačí ověřit, že $\exp \mathfrak{g}^{(1)}$ působí transitivně na fibrech $P^{(1)} \to P$. To jsme ale diskutovali při dokazování první části tohoto lemmatu, fibr nad $u \in P$ je totiž právě množina $P^{(1)}_u = \{\varphi \circ \mathrm{Ad}_{\exp Z} = r^{\exp Z}(\varphi); Z \in \mathfrak{g}^{(1)}\}$, kde φ je nějaký isomorfismus $\mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{g} \to T_u P$, který komutuje s diagramem ze začátku kapitoly a splňuje $t_\varphi \in \mathcal{D}$.

c) Akce je efektivní, neboť uvážíme-li $\varphi \cdot b = \varphi$, je nutně $b_0 = e$ a $b = \exp Z$. Přepíšeme $\varphi \cdot b = \varphi \circ \mathrm{Ad}_{\exp Z} = \varphi$, neboli $\mathrm{Ad}_{\exp Z} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{g}}$ a b je neutrální prvek grupy G^1.

d) Ověříme, že $\varphi \cdot b \in P^{(1)}$, tj. $t_{\varphi \cdot b} \in \mathcal{D}$ pro libovolné $b = b_0 \exp Z \ \in G^1$ a $\varphi \in P^{(1)}_u$,

$$t_{\varphi \cdot b}(X, Y) = d\theta(u \cdot b_0)((\varphi \cdot b)(X, 0), (\varphi \cdot b)(Y, 0)).$$

Protože kanonická forma θ, tedy i $d\theta$, jsou G–ekvivariantní, je předchozí řádek roven

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ad}_{b_0^{-1}}(d\theta(u)(\varphi(\mathrm{Ad}_b(X, 0)), \varphi(\mathrm{Ad}_b(Y, 0)))) = \\ &= \mathrm{Ad}_{b_0^{-1}}(d\theta(u)(\varphi(\mathrm{Ad}_{b_0} X, 0) + \varphi(0, \mathrm{Ad}_{b_0} Z(X)), \varphi(\mathrm{Ad}_{b_0} Y, 0) + \varphi(0, \mathrm{Ad}_{b_0} Z(Y)))), \end{aligned}$$

což plyne z definice Ad, konkrétně

$$\mathrm{Ad}_{b_0 \exp Z}(X, 0) = \mathrm{Ad}_{b_0}(X, Z(X)) = (\mathrm{Ad}_{b_0} X, \mathrm{Ad}_{b_0} Z(X)).$$

Podobně jako při důkazu lemmatu 8.1 odvodíme

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ad}_{b_0^{-1}}(d\theta(u)(\varphi(\mathrm{Ad}_{b_0} X, 0), \varphi(\mathrm{Ad}_{b_0} Y, 0)) - \\ &\qquad\qquad - [\mathrm{Ad}_{b_0} Z(X), \mathrm{Ad}_{b_0} Y] + [\mathrm{Ad}_{b_0} Z(Y), \mathrm{Ad}_{b_0} X]) = \\ &= \mathrm{Ad}_{b_0^{-1}}(t_\varphi(\mathrm{Ad}_{b_0} X, \mathrm{Ad}_{b_0} Y)) + \mathrm{Ad}_{b_0}([Z(Y), X] - [Z(X), Y]) = \\ &\qquad = (\mathrm{Ad}_{b_0^{-1}} t_\varphi)(X, Y) + \mathrm{Ad}_{b_0}(\partial Z)(X, Y). \end{aligned}$$

[8] Pro obecnou Lieovu grupu G s Lieovou algebrou $\mathfrak{g}$ platí pro adjungovanou akci $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$ rovnost $\mathrm{Ad}_{\exp X}(Y) = Y + [X, Y] + \frac{1}{2}[X, [X, Y]] + \frac{1}{3!}[X, [X, [X, Y]]] + \cdots$.

Poněvadž $\partial Z = 0$, dokázali jsme, že $t_{\varphi \cdot b} = \mathrm{Ad}_{b_0^{-1}} t_\varphi$. Ale $\mathcal{D}$ je G–invariantní podprostor $\mathbb{R}^{m*} \wedge \mathbb{R}^{m*} \otimes \mathbb{R}^m$, tedy $t_{\varphi \cdot b} \in \mathcal{D}$.

3. Vzhledem k projekci $\pi : P^{(1)} \to P$ definujeme pro každý vektor $\xi_\varphi \in T_\varphi P^{(1)}$ hodnotu formy $\theta_- \oplus \theta_0 : TP^{(1)} \to \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{g}$ takto

$$(\theta_- \oplus \theta_0)(\xi_\varphi) = \varphi^{-1}(T\pi \cdot \xi_\varphi).$$

a) Z definice formy $\theta_- \oplus \theta_0$ je $\theta_-(\xi_\varphi) = \varphi_-^{-1}(T\pi \cdot \xi_\varphi)$. Zřejmě $T\pi \cdot \xi_\varphi = \varphi(X, A) \in T_{\pi(\varphi)} P$ pro vhodné X, A. Odtud $\theta_-(\xi_\varphi) = X = \theta(\varphi(X, A))$, tedy $\theta_- = \pi^* \theta$.

b) Horizontálnost je zřejmá.

c) Ukážeme, že forma je G^1–ekvivariantní. V zavedeném označení počítáme

$$(r^b)^*(\theta_- \oplus \theta_0)(\xi_\varphi) = (\theta_- \oplus \theta_0)(Tr^b \cdot \xi_\varphi) = (\varphi \cdot b)^{-1}(T\pi(Tr^b \cdot \xi_\varphi)),$$

Z působení grupy G^1 na bandlu $P^{(1)} \to M$ plyne, že $\pi \circ r^b = r^{b_0} \circ \pi$ a předchozí výraz je roven

$$(\varphi \cdot b)^{-1}(Tr^{b_0}(T\pi \cdot \xi_\varphi)) = (\mathrm{Ad}_{b^{-1}} \circ \varphi^{-1} \circ Tr^{b_0^{-1}})(Tr^{b_0}(T\pi \cdot \xi_\varphi)) = \mathrm{Ad}_{b^{-1}}(\theta_- \oplus \theta_0)(\xi_\varphi),$$

což jsme chtěli ukázat.

d) Pro $A \in \mathfrak{g}$ je $T\pi \cdot \zeta_A \in TP$ fundamentální vektorové pole odpovídající A, odtud

$$\theta_0(\zeta_A(\varphi)) = \varphi_0^{-1}(\varphi(0, A)) = A.$$

□

8.4. Poznámka. Pro G–struktury s $G \subseteq O(m, \mathbb{R})$ je zřejmě $\mathfrak{g}^{(1)} = 0$, odtud $P^{(1)} \cong P$. Forma $\theta_- \oplus \theta_0$ zkonstruovaná v předešlém lemmatu je pak kanonická afinní konexe zmiňovaná v odstavci 8.2. Speciálně pro $G = O(m, \mathbb{R})$ je to konexe bez torze.

8.5. Nerozložitelné parabolické geometrie. V tomto odstavci budeme studovat geometrické struktury, jejichž strukturní grupa G_0 je podgrupou nějaké polojednoduché Lieovy grupy G s gradovanou Lieovou algebrou $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$. Potom $[\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_{-1}] = 0$, tj. $\mathfrak{g}_{-1}$ je komutativní. Dále $\mathfrak{g}_0$ působí závorkou na $\mathfrak{g}_{-1} \cong \mathbb{R}^m$ a $\mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^m)$ je inkluse. Uvedeme dva příklady algeber tohoto typu.

1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(m+1, 1, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(m+2, \mathbb{R}); X^T S + SX = 0\}$, kde $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & E_m & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ je matice definující pseudometriky signatury $(m+1, 1)$ na $\mathbb{R}^{m+2}$. V blokovém vyjádření je

$$\mathfrak{g}_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \\ 0 & -q^T & 0 \end{pmatrix}; q \in \mathbb{R}^m \right\},$$

$$\mathfrak{g}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}; A \in \mathfrak{so}(m, \mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \mathfrak{co}(m, \mathbb{R}),$$

$$\mathfrak{g}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & -r^T \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}^{m*} \right\}.$$

Homogenním prostorem konformní geometrie je sféra $S^m = SO(m+1,1,\mathbb{R})/B$, kde B je (parabolická) Poincarého konformní grupa, s algebrou $\mathfrak{b} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$.

2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(p+q,\mathbb{R})$, algebra matic s nulovou stopou. Gradace vypadá následovně.

$$\mathfrak{g}_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ X & 0 \end{pmatrix}; X \in \mathbb{R}^{p*} \otimes \mathbb{R}^q \right\},$$
$$\mathfrak{g}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A + \frac{\lambda}{p} E_p & 0 \\ 0 & B - \frac{\lambda}{q} E_q \end{pmatrix}; A \in \mathfrak{sl}(p,\mathbb{R}), B \in \mathfrak{sl}(q,\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$
$$\mathfrak{g}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & Z \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; Z \in \mathbb{R}^{q*} \otimes \mathbb{R}^p \right\}.$$

Odtud $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(p,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(q,\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$. Speciálně pro $p = 1$ dostáváme standardní projektivní strukturu na q–rozměrné varietě.

V odstavci 8.1 jsme zkonstruovali zobrazení $\partial : \mathfrak{g}^*_{-1} \otimes \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}^*_{-1} \wedge \mathfrak{g}^*_{-1} \otimes \mathfrak{g}_{-1}$, o kterém ukážeme, že je diferenciálem v tzv. Spencerově kohomologii.

Spencerova kohomologie je kohomologie Lieovy algebry $\mathfrak{g}_{-1}$ s koeficienty v $(\mathfrak{g}_{-1})$–modulu $\mathfrak{g}$ zadaná komplexem

$$0 \xrightarrow{\partial} C^0(\mathfrak{g}_{-1},\mathfrak{g}) \xrightarrow{\partial} C^1(\mathfrak{g}_{-1},\mathfrak{g}) \xrightarrow{\partial} \cdots,$$

kde $C^k(\mathfrak{g}_{-1},\mathfrak{g})$ jsou *kořetězce* stupně k definované jako $C^k(\mathfrak{g}_{-1},\mathfrak{g}) = \Lambda^k \mathfrak{g}^*_{-1} \otimes \mathfrak{g}$ a diferenciál $\partial : C^k(\mathfrak{g}_{-1},\mathfrak{g}) \to C^{k+1}(\mathfrak{g}_{-1},\mathfrak{g})$ je zadaný předpisem

$$\begin{aligned}(\partial t)(X_0,\dots,X_k) = &\sum_{i=0}^{k} (-1)^i [X_i, t(X_0,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_k)] + \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} t([X_i,X_j], X_0,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_k).\end{aligned}$$

Protože je podalgebra $\mathfrak{g}_{-1}$ komutativní, je v našem případě diferenciál $\partial : \Lambda^k \mathfrak{g}^*_{-1} \otimes \mathfrak{g} \to \Lambda^{k+1} \mathfrak{g}^*_{-1} \otimes \mathfrak{g}$ tvaru

$$(\partial t)(X_0,\dots,X_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i [X_i, t(X_0,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_k)]$$

a gradace Lieovy algebry $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ indukuje diferenciál $\partial : \Lambda^k \mathfrak{g}^*_{-1} \otimes \mathfrak{g}_l \to \Lambda^{k+1} \mathfrak{g}^*_{-1} \otimes \mathfrak{g}_{l-1}$ a tzv. *bigradovanou Spencerovu kohomologii* $H^k_l(\mathfrak{g}_{-1},\mathfrak{g})$.

Speciálně $H^1_1(\mathfrak{g}_{-1},\mathfrak{g}) = \operatorname{Ker}\partial_2 / \operatorname{Im}\partial_1$ je první kohomologická grupa komplexu

$$0 \xrightarrow{\partial_0} \mathfrak{g}_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathfrak{g}^*_{-1} \otimes \mathfrak{g}_0 \xrightarrow{\partial_2} \mathfrak{g}^*_{-1} \wedge \mathfrak{g}^*_{-1} \otimes \mathfrak{g}_{-1} \xrightarrow{\partial_3} \cdots.$$

Nyní ∂_2 je právě zobrazení ∂ z odstavce 8.1, kde jsme ukázali, že $\operatorname{Ker}\partial_2 = \mathfrak{g}_0^{(1)}$.

Lemma. *Platí* $\mathfrak{g}_0^{(1)} = \mathfrak{g}_1$ *právě když* $H^1_1(\mathfrak{g}_{-1},\mathfrak{g}) = 0$.

Důkaz. Zobrazení $\partial_1 : \mathfrak{g}_1 \to \operatorname{Im}\partial_1 \subseteq \mathfrak{g}^*_{-1} \otimes \mathfrak{g}_0$ je zřejmě bijekce — explicitně pro libovolné $Z \in \mathfrak{g}_1$, $X \in \mathfrak{g}_{-1}$ je z definice $(\partial_1 Z)(X) = [X,Z] \in \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}^*_{-1} \otimes \mathfrak{g}_{-1}$ a $(\partial_1 Z)(X)(Y) = [[X,Z],Y]$. (Z Jacobiho identity je zřejmé, že $(\partial_1 Z)(X)(Y) = (\partial_1 Z)(Y)(X)$, tedy $\partial_1(\mathfrak{g}_1) \subseteq \mathfrak{g}^*_{-1} \odot \mathfrak{g}^*_{-1} \otimes \mathfrak{g}_{-1}$, což jsme věděli, neboť $\operatorname{Im}\partial_1 \subseteq \operatorname{Ker}\partial_2$). Je-li tedy $H^1_1(\mathfrak{g}_{-1},\mathfrak{g}) = 0$, skutečně platí $\mathfrak{g}_1 = \operatorname{Im}\partial_1 = \mathfrak{g}_0^{(1)}$ a opačně. $\square$

Tvrzení. *Ve všech případech kromě* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(1+q,\mathbb{R})$ *platí* $H^1_1(\mathfrak{g}_{-1},\mathfrak{g}) = 0$.

Toto tvrzení dokazovat nebudeme. V případě $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(1+q,\mathbb{R})$ (projektivní struktura) je $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(q,\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R} \cong \mathfrak{gl}(q,\mathbb{R})$, tedy $\mathfrak{g}_0^{(1)} = \mathfrak{g}^*_{-1} \odot \mathfrak{g}^*_{-1} \otimes \mathfrak{g}_{-1}$ a $\operatorname{Im}\partial_1 \subset \mathfrak{g}_0^{(1)}$. Odtud $H^1_1(\mathfrak{g}_{-1},\mathfrak{g})$ je netriviální.

8.6. Druhé prodloužení. Z odstavce 8.3 umíme pro každou G–strukturu $P \to M$ zkonstruovat její první prodloužení — hlavní $(\exp\mathfrak{g}^{(1)})$–bandl $P^{(1)} \to P$, tj. $(\exp\mathfrak{g}^{(1)})$–strukturu na varietě P. Stejným způsobem můžeme sestrojit $(k+1)$–*ní prodloužení* G–struktury $P \to M$ jako první prodloužení $G^{(k)}$–struktury $P^{(k)} \to P^{(k-1)}$, kde $G^{(k)} = \exp\mathfrak{g}^{(k)}$.

Ve zbylém textu podrobně ukážeme, že druhé prodloužení struktur stejného typu jako v minulém odstavci (kromě projektivní) je triviální, neboli $P^{(2)} \to P^{(1)}$ je $\{e\}$–struktura, tj. absolutní paralelismus. Tak získáme kanonickou Cartanovu konexi, podobně jako pro ortogonální strukturu z prodloužení prvního.

V označení z minulého odstavce je první prodloužení G_0–struktury $P \to M$ hlavní fibrovaný bandl $P^{(1)} \to P$ se strukturní grupou $G_1 = \exp\mathfrak{g}_1$. Současně pro G_0–invariantní volbu doplňku $\mathcal{D} \subset \mathfrak{g}^*_{-1} \wedge \mathfrak{g}^*_{-1} \otimes \mathfrak{g}_{-1}$ k podprostoru $\partial_2(\mathfrak{g}^*_{-1} \otimes \mathfrak{g}_0)$ je $P^{(1)} \to M$ hlavní bandl se strukturní grupou $G_0 \rtimes G_1$.

Pro dané $\varphi \in P^{(1)}$ uvažme lineární isomorfismy $\Phi : \mathfrak{g} \to T_\varphi P^{(1)}$ komutující s diagramem

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & V_\varphi P^{(1)} & \longrightarrow & T_\varphi P^{(1)} & \longrightarrow & T_\varphi P^{(1)}/V_\varphi P^{(1)} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \zeta\Big\uparrow\cong & & \Big\uparrow\Phi & & \cong\Big\downarrow\theta_-\oplus\theta_0 & & \\
0 & \longrightarrow & \mathfrak{g}_1 & \longrightarrow & \mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_1 & \longrightarrow & \mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Tj. pro každé $X \in \mathfrak{g}_{-1}$, $A \in \mathfrak{g}_0$ a $Z \in \mathfrak{g}_1$ má platit $(\theta_- \oplus \theta_0)(\varphi)(\Phi(X,A,Z)) = (X,A)$ a $\Phi(0,0,Z) = \zeta_Z(\varphi)$. Protože $P^{(1)} \to M$ je hlavní fibrovaný $(G_0 \rtimes G_1)$–bandl, budeme uvažovat pouze takové isomorfismy Φ, které splňují také jemnější požadavek $\Phi(0,A,Z) = \zeta_{A+Z}(\varphi)$. Důvod je zřejmý z důkazu věty 8.7 — chceme, aby $\Phi^{-1} : T\varphi P^{(1)} \to \mathfrak{g}$ rozšiřovala formu $\theta_- \oplus \theta_0$, kterou nyní budeme značit θ.

Torzi $t_\Phi \in (\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0)^* \wedge (\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0)^* \otimes (\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0)$ příslušnou Φ nyní definujeme přirozeně vztahem

$$t_\Phi((X,A),(Y,B)) = d\theta(\varphi)(\Phi(X,A,0),\Phi(Y,B,0)).$$

Lemma. *Pro každé* $X,Y \in \mathfrak{g}_{-1}$, $A,B \in \mathfrak{g}_0$ *a* $Z,W \in \mathfrak{g}_1$ *platí*

$$\begin{gathered} d\theta(\varphi)(\Phi(X,A,Z),\Phi(Y,B,W)) = \\ d\theta(\varphi)(\Phi(X,0,0),\Phi(Y,0,0)) - [X+A+Z, Y+B+W]_{\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0}. \end{gathered}$$

Důkaz. Indexem $\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0$ u závorky značíme projekci $pr : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0$. Z $(G_0 \rtimes G_1)$–ekvivariantnosti fromy θ plyne

$$i_{\zeta_{A+Z}} d\theta = -pr \circ \operatorname{ad}(A+Z) \circ \theta.$$

Odtud po dosazení

$$\Phi(X,A,Z) = \Phi(X,0,0) + \zeta_{A+Z}(\varphi)$$

z bilinearity formy $d\theta$ a závorky na $\mathfrak{g}$ obdržíme dokazovanou rovnost. $\square$

Z dokázaného lemmatu je hned vidět, že torze $t_\Phi((X,A),(Y,B))$ je zcela určena výrazem

$$d\theta(\varphi)(\Phi(X,0,0),\Phi(Y,0,0)) = -\theta(\varphi)([\Phi(X,0,0),\Phi(Y,0,0)]),$$

jež má hodnotu v $\mathfrak{g}_0$ — je totiž $[\Phi(X,0,0),\Phi(Y,0,0)] \in V_\varphi P^{(1)}$ vzhledem k projekci $p : P^{(1)} \to M$. Odtud torze příslušná Φ je zadána svojí částí v $\mathfrak{g}_{-1}^* \wedge \mathfrak{g}_{-1}^* \otimes \mathfrak{g}_0$.

8.7. Kanonická Cartanova konexe. Jsou-li Φ a $\tilde{\Phi}$ dva isomorfismy vyhovující našim požadavkům z minulého odstavce, pak zřejmě

$$\tilde{\Phi}(X,A,Z) = \Phi(X,A,Z) + \zeta_{\psi(X)}(\varphi)$$

pro vhodné $\psi \in \mathfrak{g}_{-1}^* \otimes \mathfrak{g}_1$. Stejným způsobem jako při dokazování lemmatu 8.1 můžeme odvodit, že změnu torze lze vyjádřit vztahem

$$t_\Phi((X,A),(Y,B)) - t_{\tilde{\Phi}}((X,A),(Y,B)) = -[\psi(X),Y] + [\psi(Y),X]$$

a pravou stranu budeme opět psát jako $-(\partial\psi)(X,Y)$, kde $\partial : \mathfrak{g}_{-1}^* \otimes \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_{-1}^* \wedge \mathfrak{g}_{-1}^* \otimes \mathfrak{g}_0$ je složenina inkluse $\mathfrak{g}_{-1}^* \otimes \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_{-1}^* \otimes \mathfrak{g}_{-1}^* \otimes \mathfrak{g}_0$ a alternace v prvních dvou složkách.

Označme $P_\varphi^{(2)}$ množinu všech lineárních isomorfismů $\Phi : \mathfrak{g} \to T_\varphi P^{(1)}$ s diskutovanými vlastnostmi, pro něž $t_\Phi \in \mathcal{D}$, kde $\mathcal{D}$ je doplňkový podprostor k $\operatorname{Im}\partial$ v $\mathfrak{g}_{-1}^* \wedge \mathfrak{g}_{-1}^* \otimes \mathfrak{g}_0$. Pak zřejmě $\Phi, \tilde{\Phi} \in P_\varphi^{(2)}$ právě když $\psi \in \operatorname{Ker}\partial$. Snadno lze ověřit, že $\operatorname{Ker}\partial$ je právě $\mathfrak{g}_0^{(2)}$, kdykoli $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_0^{(1)}$.

Poznámka. Než zformulujeme poslední větu, buď $C^*(\mathfrak{g}_{-1},\mathfrak{g})$ komplex zadávající Spencerovu kohomologii. Na $C^*(\mathfrak{g}_{-1},\mathfrak{g})$ existuje skalární součin tak, že $\partial : C^k \to C^{k+1}$ má vzhledem k němu adjungovaný diferenciál $\partial^* : C^{k+1} \to C^k$ [Kostant]. Odtud $\operatorname{Ker}\partial^*$ je kanonický doplňkový podprostor k $\operatorname{Im}\partial$.

Věta. *Ve všech případech kromě $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ existuje pro každé $\varphi \in P^{(1)}$ jediný lineární isomorfismus Φ vyhovující požadavkům z odstavce 8.6 takový, že $t_\Phi \in \operatorname{Ker}\partial^*$. Inverze $\Phi^{-1} : T_\varphi P^{(1)} \to \mathfrak{g}$ zadávají kanonickou Cartanovu konexi na $P^{(1)}$.*

Důkaz. Stejně jako v odstavci 8.5 je ∂ diferenciál ve Spencerově kohomologii a $\operatorname{Ker}\partial = \mathfrak{g}_0^{(2)}$ odpovídá kohomologické grupě $H_2^1(\mathfrak{g}_{-1},\mathfrak{g})$ komplexu

$$0 \longrightarrow \mathfrak{g}_{-1}^* \otimes \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_{-1}^* \wedge \mathfrak{g}_{-1}^* \otimes \mathfrak{g}_0 \longrightarrow \cdots.$$

Ve všech případech kromě $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ je tato grupa triviální [Ochiai], proto isomorfismus Φ s danou torzí je jediný.

Ověříme, že $\omega \in \Omega^1(P^{(1)},\mathfrak{g})$ definovaná $\omega_\varphi = \Phi^{-1}$ je Cartanova konexe. Díky rovnosti $\Phi(0,A,Z) = \zeta_{A+Z}(\varphi)$ zřejmě ω reprodukuje fundamentální vektorová pole, stačí ověřit už jen $(G_0 \rtimes G_1)$–ekvivariantnost formy ω. Nejdřív ukážeme, že pro $\Phi \in P_\varphi^{(2)}$ a libovolné $b \in G_0 \rtimes G_1$ je také $\Phi \cdot b \in P_{\varphi\cdot b}^{(2)}$, kde

$$\Phi \cdot b = Tr^b \circ \Phi \circ \operatorname{Ad}_b.$$

Potom $\omega_{\varphi\cdot b} = (\Phi\cdot b)^{-1}$ a dokážeme ekvivariantnost.

a) Z $(G_0 \rtimes G_1)$–ekvivariantnosti formy θ plyne

$$\theta(\varphi\cdot b)((\Phi\cdot b)(X,A,Z)) = \mathrm{Ad}_{b^{-1}}\theta(\varphi)(\Phi(\mathrm{Ad}_b(X,A,Z))) = \\ = \mathrm{Ad}_{b^{-1}}(\mathrm{Ad}_b(X,A)) = (X,A).$$

b) Protože $Tr^b\cdot\zeta_{(A,Z)}(\varphi) = \zeta_{\mathrm{Ad}_{b^{-1}}(A,Z)}(\varphi\cdot b)$, platí $(\Phi\cdot b)(0,A,Z) = \zeta_{A+Z}(\varphi\cdot b)$.

c) Chceme dokázat, že $t_{\Phi\cdot b}\in\operatorname{Ker}\partial^*$. Díky ekvivariantnosti θ máme

$$d\theta(\varphi\cdot b)((\Phi\cdot b)(X,0,0),(\Phi\cdot b)(Y,0,0)) = \mathrm{Ad}_{b^{-1}}(d\theta(\varphi)(\Phi(\mathrm{Ad}_bX),\Phi(\mathrm{Ad}_bY))).$$

Protože $b = b_0\exp Z$ pro $b_0\in G_0$ a $Z\in\mathfrak{g}_1$, je $\mathrm{Ad}_bX = \mathrm{Ad}_{b_0}(X+[Z,X]+\frac{1}{2}[Z,[Z,X]])$ (viz 8.3) a podle lemmatu 8.6 je předešlý výraz roven

$$\mathrm{Ad}_{b^{-1}}((d\theta(\varphi)(\Phi(\mathrm{Ad}_{b_0}X),\Phi(\mathrm{Ad}_{b_0}Y))) - [\mathrm{Ad}_bX,\mathrm{Ad}_bY]_{\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0}).$$

Druhý člen je projekce $\mathrm{Ad}_b[X,Y]$, tedy je nulový. Z důkazu lemmatu 8.3 se snadno odvodí, že $b^{-1} = b_0^{-1}\exp(-\mathrm{Ad}_{b_0}Z)$ a po rozepsání zbylého členu je $\mathfrak{g}_0$–část torze rovna

$$\mathrm{Ad}_{b_0^{-1}}[\mathrm{Ad}_{b_0}Z, d\theta_{-1}(\Phi(\mathrm{Ad}_{b_0}X),\Phi(\mathrm{Ad}_{b_0}Y))] - \\ -\mathrm{Ad}_{b_0^{-1}}(d\theta_0(\Phi(\mathrm{Ad}_{b_0}X),\Phi(\mathrm{Ad}_{b_0}Y))).$$

Zde druhý člen je právě $\mathrm{Ad}_{b_0^{-1}}t_\Phi$, tedy patří do $\operatorname{Ker}\partial^*$, neboť to je G_0–invariantní podprostor $\mathfrak{g}_{-1}^*\wedge\mathfrak{g}_{-1}^*\otimes\mathfrak{g}_0$. Dále v prvním členu je $d\theta_{-1}(\Phi(\mathrm{Ad}_{b_0}X),\Phi(\mathrm{Ad}_{b_0}Y)) = -\theta_{-1}([\mathrm{Ad}_{b_0}X,\mathrm{Ad}_{b_0}Y])\equiv 0$, tedy jistě leží v $\operatorname{Ker}\partial^*$. Z explicitního popisu diferenciálu ∂^*, který jsme zde neuváděli, bezprostředně plyne, že $\mathrm{ad}(Z)\circ\partial^* = \partial^*\circ\mathrm{ad}(Z)$ pro každé $Z\in\mathfrak{g}_1$. Odtud skutečně $t_{\Phi\cdot b}\in\operatorname{Ker}\partial^*\subset\mathfrak{g}_{-1}^*\wedge\mathfrak{g}_{-1}^*\otimes\mathfrak{g}_0$.

Nyní můžeme dokázat ekvivariantnost formy ω. Buď $\xi_\varphi\in T_\varphi P^{(1)}$ a $b\in G_0\rtimes G_1$,

$$(r^b)^*\omega(\xi_\varphi) = (\Phi\cdot b)^{-1}(Tr^b\cdot\xi_\varphi) = \mathrm{Ad}_b^{-1}\circ\Phi^{-1}(\xi_\varphi),$$

což jsme chtěli dokázat. □

Literatura

[Ko] Kobayashi, S., *Transformation groups in differential geometry*, ruský překlad Nauka, Moskva, 1986, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1972.

[Pa] Palais, R., *A global formulation of the Lie theory of transformation groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **22** (1957).

[KMS] Kolář, I; Michor P.; Slovák, J., *Natural operations in differential geometry*, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1993.

[NN] Newlander A.; Nirenberg L., *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds*, Annals of Math. **65** (1957), 391–404.

[Sha] Sharpe, R.W., *Differential geometry (Cartan's generalization of Klein's Erlangen program),*, GTM 166, Springer, 1996.

[Sl94] Slovák, J., *Natural operators on conformal Riemmanian manifolds*, rozšířená verze podaná jako habilitační spis, Lecture Notes, University of Vienna, 1994.

[Sl97] Slovák, J., *Reprezentace Lieových algeber a Lieových grup*, učební texty dostupné na webových stránkách www.math.muni.cz/˜slovak, 1997.