REPREZENTACE LIEOVÝCH ALGEBER A LIEOVÝCH GRUP

Jan Slovák

SEMINÁŘ 1994/1995

ZAPSÁNO S POMOCÍ ÚČASTNÍKŮ SEMINÁŘŮ

Masarykova universita
Brno

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

Úvod

Tento text je výsledkem společné práce účastníků semináře Martina Panáka, Michala Fikery, Ondry Kameníka, Michala Kunce, Ondry Klímy a Davida Krumla, kteří zachytili do písemné formy obsah mých seminářů. Ke konci semestru, s blížícím se zkouškovým obdobím, jsem převzal psaní textů na sebe, navíc jsem se snažil přidat alespoň ve stručnosti věci, které se (hlavně díky čtyřem odpadnutým pondělkům) nepodařilo přednést. Záměrem je poskytnout zájemcům základní přehled teorie konečněrozměrných reprezentací Lieových algeber (a grup), strukturní teorie Lieových algeber (a grup) a naznačit některé možné aplikace. Předpokládá se pouze základní zběžná znalost lineární algebry a reálné analýzy více proměnných, zato se ale počítá se samostatným aktivním přístupem. Řada tvrzení je pouze odkazována, často je místo podrobného důkazu podáván spíše návod, jak jej provést. Často je čtenář vyzván k doplnění důkazů poznámkou "cvičení" na okraji textu. Patrně text svojí náročností přesahuje standard běžných učebních textů. Přehled definic a základních vlastností týkajících se diferencovatelných variet a multilineární algebry je připojen v dodatcích.

Při přípravě seminářů jsem čerpal zejména z těchto zdrojů:

[FH] Fulton, W; Harris, Joe, *Representation Theory*, Springer-Verlag, GTM 129, 1991, pp. 551.

[HN] Hilgert; Neeb, K.H., *Lie Grupen*, Teubner, 1992?, pp. 350?.

[Ki] Kirillov, A.A., *Introduction to the Theory of Representations and Noncommutative Harmonic Analysis*, Překlad z ruštiny (to appear).

[KMS] Kolář, I.; Michor, P.W.; Slovák, J., *Natural operations in differential geometry*, Springer-Verlag, 1993, pp. 434.

[Sa] Samelson, Hans, *Notes on Lie Algebras, 2nd edition*, Springer-Verlag, Universitext, 1990, pp. 162.

[Zh] Zhelobenko, D. P., *Compact Lie groups and their representation*, in russian, Nauka, Moscow, 1970, pp. 664.

Předposlední kniha bude asi využívána nejvíce. Je v ní přehledný a stručný výklad strukturní teorie Lieových algeber a jejích reprezentací, založený na přednáškách autora. [HN] je více zaměřena na Lieovy grupy a je psána s "německou důkladností". Kniha [FH] je velmi pěkným úvodem do reprezentací grup, jedná se téměř o soubor konkrétních příkladů, lze tam tedy najít mnoho detailních informací o jednotlivých Lieových grupách a jejich reprezentacích. Budeme ji také velice často využívat. [Ki] je spíše širokým přehledem dostupných výsledků. Je to typický "ruský přístup", kde se hovoří více o výsledcích než o jejich důkazech. Přesněji, hovoří se o výsledcích a většina důkazů je rozepsána do cvičení, které ale vesměs považuji za obtížné. [Zh] je podrobnou učebnicí, výklad je ale více veden z hlediska reprezentací Lieových grup. Konečně, poslední z citovaných zdrojů, [KMS], není vůbec zaměřen na Lieovy grupy či algebry, obsahuje ale dobře čitelný úvod do Lieových grup z hlediska diferenciální geometrie (a aplikace v diferenciální geometrii). Uvádím jej mimo jiné proto, že je mi důvěrně znám (a proto jej rád využívám). Většinu používaných tvrzení z lineární algebry lze najít v mých učebních textech dostupných v naší síti.

Květen 1995 Jan Slovák

0. Prolog

V této části textu se budeme snažit naznačit důležité skutečnosti a konstrukce, na kterých je celá teorie Lieových grup a Lieových algeber založena. Hlavním smyslem je předvést čtenáři fascinující souvislosti zcela nelineárních objektů (Lieových grup a jejich homomorfismů) a odpovídající zcela lineární teorie (Lieovy algebry a jejich homomorfismy). Zde nebudeme hlavní tvrzení (formulované jako "principy") dokazovat, dostaneme se k tomu teprve mnohem později. Poskytnou nám ale potřebnou motivaci pro studium zmíněné lineární teorie.

0.1. Reprezentace grup. Je-li G nějaká grupa, V jistá matematická struktura a $\operatorname{Aut} V$ grupa všech automorfismů $V \to V$, pak reprezentací λ grupy G na V rozumíme grupový homomorfismus $\lambda\colon G \to \operatorname{Aut} V$. Nás bude zajímat výhradně případ, kdy V je vektorový prostor, tj. $\operatorname{Aut} V$ je grupa všech lineárních isomorfismů prostoru V. Této grupě říkáme *obecná lineární grupa*, značíme $GL(V)$, ve speciálním případě vektorového prostoru $\mathbb{K}^n$ píšeme $GL(n, \mathbb{K})$, případně jen $GL(n)$, pokud je pole skalárů zřejmé z kontextu nebo nepodstatné. V celém dalším výkladu bude $\mathbb{K}$ značit buď pole reálných čísel $\mathbb{R}$ nebo pole komplexních čísel $\mathbb{C}$.

0.2. Definice. *Lieova grupa* G je grupa jejíž nosná množina je vybavena strukturou hladké variety a operace grupového násobení $\mu\colon G \times G \to G$ i operace vzetí inverze jsou hladká zobrazení.

První princip. *Jsou-li G a H Lieovy grupy a G je souvislá, pak každý homomorfismus $\varphi\colon G \to H$ je jednoznačně určen tečným zobrazení $T_e\varphi\colon T_eG \to T_eH$ k φ v jednotce grupy G.*

Aby byl tento princip prakticky užitečný, musíme jej doplnit o informaci, jak rozpoznat ta lineární zobrazení $T_eG \to T_eH$, která skutečně odpovídají homomorfismům Lieových grup G a H. Navíc bychom také potřebovali hlubší souvislosti vlastností těchto homomorfismů. Odvodíme nyní právě tyto souvislosti.

0.3. Reprezentace Ad. Označme $\ell_g\colon G \to G$ násobení zleva v G prvkem $g \in G$, podobně $\ell_h\colon H \to H$, a r_g bude analogicky označovat násobení zprava. Přímo z definice homomorfismů plyne, že $\varphi\colon G \to H$ je homomorfismus právě když $\varphi \circ \ell_g = \ell_{\varphi(g)} \circ \varphi$, ekvivalentně $\varphi \circ r_g = r_{\varphi(g)} \circ \varphi$. Tyto vztahy nám zatím nepomohou, protože $T\ell_g\colon T_eG \to T_gG$. Můžeme ale použít zobrazení

$$\operatorname{Conj}_g\colon G \to G, \quad h \mapsto g.h.g^{-1}.$$

Zobrazení Conj je grupový homomorfismus $G \to \operatorname{Aut} G$. Z předchozího dostaneme

$$T_e\varphi \circ T_e(\operatorname{Conj}_g) = T_e(\varphi \circ \operatorname{Conj}_g) = T_e(\operatorname{Conj}_{\varphi(g)} \circ \varphi) = T_e(\operatorname{Conj}_{\varphi(g)}) \circ T_e\varphi$$

Protože tečná zobrazení zachovávají součiny je zobrazení $g \mapsto T_e \operatorname{Conj}_g$ grupový homomorfismus $G \to GL(T_eG)$. Budeme jej značit Ad, jeho hodnoty pak $\operatorname{Ad}(g)$ nebo zkráceně Ad_g.

Z předchozího vyplývá, že pro homomorfismus Lieových grup $\varphi\colon G \to H$ je $T_e\varphi \circ \operatorname{Ad}_g = \operatorname{Ad}_{\varphi(g)} \circ T_e\varphi$. Ani tento vztah nás nemůže úplně uspokojit, protože se v něm ještě stále objevuje zcela explicitně původní homomorfismus φ.

0.4. Reprezentace ad**.** Zobrazení $\mathrm{Ad}\colon G \to GL(T_eG)$ můžeme chápat jako zobrazení (které momentálně značíme stejným symbolem) $\mathrm{Ad}\colon G \times T_eG \to T_eG$. Předchozí komutační relace pro Ad můžeme pak přehledně zobrazit v diagramu a na všechna zobrazení aplikujeme tečný funktor T. Přitom je třeba si uvědomit, že tečné zobrazení k libovolnému lineárnímu zobrazení je v každém bodě vždy znovu původní zobrazení.

$$\begin{tikzcd}
G \times T_eG \arrow[r, dash, "\varphi \times T_e\varphi"] \arrow[d, dash, "\mathrm{Ad}"] & H \times T_eH \arrow[d, dash, "\mathrm{Ad}"'] \\
T_eG \arrow[r, dash, "T_e\varphi"] & T_eH
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T_eG \times T_eG \arrow[r, dash, "T_e\varphi \times T_e\varphi"] \arrow[d, dash, "T_e\,\mathrm{Ad}"] & T_eH \times T_eH \arrow[d, dash, "T_e\,\mathrm{Ad}"'] \\
T_eG \arrow[r, dash, "T_e\varphi"] & T_eH
\end{tikzcd}$$

Definujeme $\mathrm{ad} := T_e\,\mathrm{Ad} : T_eG \to T_{\mathrm{Id}}(GL(T_eG)) \simeq \mathrm{Hom}(T_eG, T_eG)$. Lineární zobrazení ad lze také chápat jako bilineární zobrazení $\widehat{\mathrm{ad}}\colon T_eG \times T_eG \to T_eG$, zavedeme si pro něj označení

$$\widehat{\mathrm{ad}}(X,Y) = \mathrm{ad}(X)(Y) =: [X,Y].$$

V pravém diagramu je ve sloupcích právě toto zobrazení. Jeho komutativnost nyní lze zapsat jako $T_e\varphi([X,Y]) = [T_e\varphi(X), T_e\varphi(Y)]$, kde nalevo se jedná o operaci v T_eG, napravo v T_eH.

Záhy uvidíme, že zobrazení ad je infinitesimální verzí násobení v G, zejména zachycuje "jak moc je grupa G nekomutativní".

0.5. Definice. Homomorfismus $\varphi\colon \mathbb{R} \to G$ Lieových grup, kde $\mathbb{R}$ chápeme jako aditivní grupu, se nazývá *jednoparametrická podgrupa* v G.

Podrobněji, jednoparametrická podgrupa v G je homomorfismus splňující

$$\varphi(t+s) = \varphi(t).\varphi(s), \quad \varphi(0) = e.$$

Tečný vektor $\frac{\partial}{\partial t}\big|_0 \varphi$ je vždy prvkem v T_eG. Ve skutečnosti, jsou to právě všechny prvky v T_eG, což je klíčem k předváděným základním principům.

0.6. Věta. *Nechť G je libovolná souvislá Lieova grupa. Pak G je komutativní právě tehdy když* ad *je identicky nulové zobrazení.*

Důkaz. Je-li G komutativní, pak Conj je konstantní zobrazení $g \mapsto \mathrm{Id}_G$. Je tedy i Ad konstantní zobrazení $g \mapsto \mathrm{Id}_{GL(T_eG)}$ a proto $\mathrm{ad} = 0$. Opačnou implikaci nebudeme nyní dokazovat.

0.7. Věta. *Nechť G je libovolná Lieova Grupa. Zobrazení* ad *splňuje*

(1) *je antisymetrické, tj.* $[X,Y] = -[Y,X]$ *pro všechny* $X, Y \in T_eG$.
(2) $[X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]]$ *pro všechny* $X, Y, Z \in T_eG$.

Důkaz. Přímo z definice plyne, že pro $X \in T_eG$, které je tečným vektorem k jednoparametrické podgrupě platí $[X,X] = 0$. Protože tak lze získat všechny $X \in T_eG$ plyne již odtud antisymetrie. Identitu (2) nebudeme nyní dokazovat. cvičení!

Identitě (2) se říká *Jacobiho identita.* Říká nám vlastně, že ad je derivace na algebře T_eG.

0.8. Definice. Vektorový prostor V spolu s bilineární operací $[\ ,\ ]\colon V \times V \to V$ splňující (1) a (2) z předchozí věty se nazývá *Lieova algebra.* Zobrazení $[\ ,\ ]$ říkáme *Lieova závorka* na V. Pro každou Lieovu Grupu G bude $\mathfrak{g}$ značit její Lieovu algebru T_eG s Lieovou závorkou ad.

Homomorfismy Lieových algeber V, W jsou lineární zobrazení $f\colon V \to W$ splňující $f([X,Y]) = [f(X), f(Y)]$.

Druhý princip. *Nechť G a H jsou Lieovy grupy, G souvislá a jednoduše souvislá, $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{h}$ nechť jsou jejich Lieovy algebry. Lineární zobrazení $\varphi'\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ je tečným zobrazením k nějakému homomorfismu $\varphi\colon G \to H$ právě tehdy, když je φ' homomorfismem Lieových algeber $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$.*

0.9. Příklad. Algebra všech čtvercových matic řádu n nad $\mathbb{K}$ s operací

$$[X,Y] = XY - YX$$

je Lieova algebra. Jak uvidíme hned v první kapitole, jde o Lieovu algebru grupy $GL(n,\mathbb{K})$, budeme ji značit $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$. Pro libovolný konečněrozměrný vektorový prostor V dostáváme analogicky Lieovu algebru $\mathfrak{gl}(V)$ všech endorfismů V, kde Lieova závorka je komutátor lineárních zobrazení. cvičení!

0.10. Definice. *Reprezentace Lieovy algebry* $\mathfrak{g}$ na vektorovém prostoru V je libovolný homomorfismus $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ Lieových algeber, tj. lineární zobrazení splňující $\varphi([X,Y]) = \varphi(X) \circ \varphi(Y) - \varphi(Y) \circ \varphi(X)$.

Jako důsledek druhého principu dostáváme možnost studovat reprezentace Lieových grup prostřednictvím representací Lieových algeber.

Ověřte si jako cvičení, že samo zobrazení ad chápané jako $X \mapsto \mathrm{ad}_X \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ je reprezentací Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ v automorfismech $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. (Přepsání Jacobiho identity.) cvičení!

Část I.
Příklady Lieových grup a algeber

Zaměříme se nyní na tzv. maticové grupy a algebry, tj. takové, které tvoří podgrupy grupě $GL(n,\mathbb{K})$ všech invertibilních matic nad $\mathbb{K}$ řádu n (s operací násobení matic), resp. Lieovy podalgebry v Lieově algebře všech čtvercových matic řádu n se závorkou danou komutátorem. V této situaci budeme moci podrobněji vysvětlit základní principy uvedené v předchozí části. Zároveň si na konkrétních příkladech připravíme motivaci pro další postup. Pole $\mathbb{K}$ bude pro nás vždy $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$, výrazy $GL(n)$ a $\mathfrak{gl}(n)$ označují buď reálné nebo komplexní maticové grupy a algebry v dimenzi n a jsou použity v případech, kdy tvrzení platí pro obě možnosti.

1. Lieova grupa $GL(n,\mathbb{K})$

1.1. Representace Ad. Máme $\mathrm{Conj}_A X = A.X.A^{-1}$. Musíme spočíst tečné zobrazení $T_E(\mathrm{Conj}_A)$. Vezměme tedy křivku $t \mapsto X(t)$, $\mathbb{R} \to GL(n)$ a počítejme $\frac{\partial}{\partial t}\big|_0 (A.X(t).A^{-1})$. Jde vlastně o matici (reálných nebo komplexních) funkcí jedné reálné proměnné a musíme derivovat každý prvek výsledné matice. Jednotlivé funkce jsou ale lineární výrazy v prvcích matice $X(t)$ a platí $X(0) = E$. Proto

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0 (A.X(t).A^{-1}) = A.(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0 X(t)).A^{-1}$$

a je-li $Y = \frac{\partial}{\partial t}\big|_0 X(t)$, pak $\mathrm{Ad}_A Y = A.Y.A^{-1}$. Je tedy reprezentace Ad opět dána konjugováním, na rozdíl od Conj ale na celé algebře matic $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$.

1.2. Reprezentace ad. Z definice je pro matice $X = \frac{\partial}{\partial t}\big|_0 A(t)$, $Y \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$, $\mathrm{ad}(X)(Y) = \frac{\partial}{\partial t}\big|_0 (\mathrm{Ad}(A(t))(Y)) = \frac{\partial}{\partial t}\big|_0 (t \mapsto A(t).Y.A(t)^{-1})$. Výpočet se opírá o dvě snadná tvrzení z diferenciálního počtu.

Lemma. *Pro libovolné křivky v $GL(n)$ a $Y \in \mathfrak{gl}(n)$ platí*

(1) $\frac{\partial}{\partial t}\big|_0 (A(t).Y.B(t)) = (\frac{\partial}{\partial t}\big|_0 A(t)).Y.B(0) + A(0).Y.(\frac{\partial}{\partial t}\big|_0 B(t))$
(2) *Je-li $A(0) = E$, pak* $\frac{\partial}{\partial t}\big|_0 (A(t)^{-1}) = -\frac{\partial}{\partial t}\big|_0 A(t)$.

Důkaz. První tvrzení plyne z vlastností derivování bilineárních funkcí a věty o derivování složených funkcí. Druhé tvrzení je okamžitým důsledkem prvého a vztahu $A(t).A(t)^{-1} = E$. cvičení!

Věta. *Pro libovolné matice X, Y v $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ platí $[X,Y] = X.Y - Y.X$. Zejména je* ad *antisymetrické a splňuje Jacobiho identitu.*

Důkaz. Podle předchozích pomocných tvrzení je

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0 (\mathrm{Ad}(A(t))(Y)) = (\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0 A(t)).Y.E - E.Y.(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0 A(t))$$

a zbylé vlastnosti nyní plynou přímo z tohoto vztahu. cvičení!

1.3. Exponenciální zobrazení. Pro libovolnou matici $X \in \mathfrak{gl}(n)$ definujeme

$$\exp(X) = E + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} \tag{1}$$

Lemma. exp *je dobře definované zobrazení* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$. *Nekonečná řada (1) je absolutně konvergentní pro každé* $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.

Důkaz. V definičním vztahu (1) jde vlastně o matici nekonečných řad. Máme tedy ověřit vlastnosti jednotlivých prvků výsledné matice. Nechť C je maximum absolutních hodnot prvků v X. Pak absolutní hodnota libovolného prvku v X^k je shora omezena výrazem $n^{k-1}C^k$ a proto je každá ze zmíněných řad majorizována řadou pro $e^{n.C}$. □ cvičení!

1.4. Lemma. *Nechť* X, $Y \in \mathfrak{gl}(n)$, $A \in GL(n)$.

(1) *Je-li* $X.Y = Y.X$ *(tj.* $[X, Y] = 0$*), pak* $(\exp X).(\exp Y) = \exp(X + Y)$.
(2) *Platí* $\exp\colon \mathfrak{gl}(n) \to GL(n)$ *a* $(\exp X)^{-1} = \exp -X$.
(3) $A.(\exp X).A^{-1} = \exp(A.X.A^{-1})$, *tj.* $\mathrm{Conj}_A \circ \exp = \exp \circ \mathrm{Ad}_A$.
(4) *Pro každé* $X \in \mathfrak{gl}(n)$ *je zobrazení* $\varphi\colon \mathbb{R} \to GL(n)$ *definované* $t \mapsto \exp(tX)$ *jednoparametrická podgrupa v* $GL(n)$ *a* $\frac{\partial}{\partial t}\big|_0 \varphi = X$.
(5) *Tečné zobrazení k* exp *v* $0 \in \mathfrak{gl}(n)$ *je identické zobrazení, tj.* $T_0 \exp = \mathrm{Id}_{T_E GL(n)}\colon \mathfrak{gl}(n) \to \mathfrak{gl}(n)$.

Důkaz. (1) Je-li $X.Y = Y.X$, pak

$$\begin{aligned} \exp(X+Y) &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(X+Y)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{\binom{k}{l} X^l Y^{k-l}}{k!} \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{X^l}{l!} \frac{Y^{k-l}}{(k-l)!} = \exp X \exp Y. \end{aligned}$$

Při výpočtu jsme samozřejmě využili absolutní konvergenci všech uvažovaných řad. Tím je dokázána rovnost (1).

(2) Protože X a $-X$ spolu vždy komutují, dostáváme

$$\exp X. \exp(-X) = \exp(X - X) = E.$$

(3) Vždy platí $(A.X.A^{-1})^k = A.X^k.A^{-1}$. Vztah tedy plyne přímo z definice exp. Vlastnost (4) je přímým důsledkem (1). cvičení!

(5) Pro důkaz posledního tvrzení zvolme libovolné

$$X = \tfrac{\partial}{\partial t}\big|_0 (t.X) \in T_0\mathfrak{gl}(n) = \mathfrak{gl}(n).$$

Protože řada $\exp tX$ konverguje absolutně a stejnoměrně, platí

$$\begin{aligned} T_0 \exp(X) &= \tfrac{\partial}{\partial t}\big|_0 (\exp tX) = \tfrac{\partial}{\partial t}\big|_0 \big(\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k X^k}{k!}\big) \\ &= \tfrac{\partial}{\partial t}\big|_0 (tX) + \tfrac{1}{2} \tfrac{\partial}{\partial t}\big|_0 (tX)^2) + \tfrac{1}{6} \tfrac{\partial}{\partial t}\big|_0 ((tX)^3) + \dots \\ &= \tfrac{\partial}{\partial t}\big|_0 tX = X. \qquad \square \end{aligned}$$

Za zdůraznění stojí, že jsme mimo jiné ukázali, že každá matice X v $\mathfrak{gl}(n)$ je tečným vektorem k jednoparametrické podgrupě.

1.5. Lemma.

(1) *Pro každé* $X \in \mathfrak{gl}(n)$ *je* $\det(\exp X) = e^{\operatorname{Tr} X}$, *kde* $\operatorname{Tr} X$ *je stopa matice* X.

(2) $\operatorname{Ad}(\exp X)Y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\operatorname{ad} X)^k Y = e^{\operatorname{ad} X} Y =$
$= Y + [X,Y] + \frac{1}{2!}[X,[X,Y]] + \frac{1}{3!}[X,[X,[X,Y]]] + \dots$

Důkaz. (1) Stopa i determinant matice se nezmění, jestliže zaměníme matici X maticí ekvivalentní. Počítejme proto přímo v $\mathbb{C}$ pro matici X v Jordanově tvaru, tj. $X = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) + Y_0$, kde Y_0 je ostře horní trojúhelníková matice. Pak $X^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) + Y_k$, kde Y_k je opět ostře horní trojúhelníková matice a tedy $\exp X = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) + Y$, kde Y je znovu ostře horní trojúhelníková. Celkem $\det(\exp X) = e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}$

(2) Plyne bezprostředně předchozích úvah, zejména pak z Lemmatu 1.4.(4). □ cvičení!

1.6. Věta.

(1) *Zobrazení* $\exp\colon \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}) \to GL(n,\mathbb{K})$ *není injektivní ani surjektivní*

(2) *Existuje okolí* $U \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ *vektoru* 0 *takové, že* $\exp|_U$ *je difeomorfismus na obraz.*

Důkaz. (1) Vždy platí $\det(\exp X) > 0$, tedy zobrazení není na. Dále uvažme nad $\mathbb{C}$ matici $X = \begin{pmatrix} 2\omega ik & 0 \\ 0 & 2\omega ik' \end{pmatrix}$, $k, k' \in \mathbb{Z}$, pro kterou je $\exp X = E$, tedy zobrazení není ani injektivní. Najděte reálný protipříklad! cvičení!

(2) Plyne z věty o inverzní funkci. □ cvičení!

1.7. Definice. Zobrazení inverzní k exp (definované na jistém okolí $E \in GL(n,\mathbb{K})$) značíme $A \mapsto \log A$. Hovoříme o *logaritmu matice* A.

Úvahami o řadách získáme podobně jako v analýze reálné proměnné

$$\log A = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} (A - E)^k$$

zejména o konvergenci se přesvědčíme majorizací geometrickou řadou.

Pro řadu podmnožin je logaritmus definován globálně. Uveďme několik příkladů:

1.8. Lemma.

(1) $n_p := \{X \in \mathfrak{gl}(n) \mid X^p = 0\}$, $N_p := \{A \in GL(n,K) \mid A = E + X\,,\ X \in n_p\}$
$\exp : n_p \to N_p$ *je difeomorfismus*

(2) $Sym :=$ {*symetrické matice v* $\mathfrak{gl}(n)$}
$\exp : Sym \to$ {*pozitivně def. sym. matice*} *je spojitá bijekce*

(3) $Herm :=$ {*hermiteovské matice*}
$\exp : Herm \to$ {*pozitivně def. hermiteovské matice*} *je bijekce*

Důkaz. (1) Vzhledem k Větě 1.6. stačí ukázat, že $\exp : n_p \to N_p$ je injektivní a surjektivní. Nejprve prověřme, že zobrazení vede tam, kam má:

$(\exp X - E)^p = (\sum_{k=1}^{p-1} \frac{X^k}{k!})^p = pol(X) = 0$, neb $pol(X)$ je polynom obsahující pouze p-té či vyšší mocniny X. Zároveň si všimněme, že funkce log je definována na celém N_p, protože v definiční sumě log se pro prvky z N_p vyskytuje pouze konečně mnoho sčítanců. Vcelku snadno se lze též přesvědčit, že tam, kde jsou definována, jsou zobrazení log a exp navzájem inverzní. Je tedy $\exp : n_p \to N_p$ difeomorfismus.

cvičení!

(2) Nechť $X \in Sym$. Pak lze X diagonalizovat pomocí ortogonální matice P: $PXP^{-1} = \operatorname{diag}(x_1, \dots, x_n)$ a

$$\begin{aligned}\exp(X) &= \exp(P^{-1}\operatorname{diag}(x_1,\dots,x_n)P) = P^{-1}\exp(\operatorname{diag}(x_1,\dots,x_n))P\\ &= P^{-1}\operatorname{diag}(e^{x_1},\dots,e^{x_n})P,\end{aligned}$$

což je pozitivně definitní matice a dokonce každou pozitivně definitní matici můžeme psát v této formě. Tedy zobrazení je na.

Nyní připomeňme známý fakt z lineární algebry, že dvě symetrické matice jsou diagonalizovatelné pomocí stejné matice, jestliže komutují. Nechť $\exp(X) = \exp(Y)$, $QYQ^{-1} = \operatorname{diag}(y_1,\dots,y_n)$ Zvolme polynom f takový, že$f(e^{x_j}) = x_j$, $j = 1,\dots n$.

$$\begin{aligned}f(\exp(X)) &= f(P^{-1}\operatorname{diag}(e^{x_1},\dots,e^{x_n})P)\\ &= P^{-1}\operatorname{diag}(f(e^{x_1}),\dots,f(e^{x_n}))P = X.\end{aligned}$$

Nyní si všimněme, že

$$\begin{aligned}X\cdot Y &= f(\exp X)\cdot Y = f(\exp Y)\cdot Y\\ &= Q^{-1}f(\exp(\operatorname{diag}(y_1,\dots,y_n)))Q\cdot Q^{-1}\operatorname{diag}(y_1,\dots,y_n)Q\\ &= Q^{-1}\operatorname{diag}(y_1,\dots,y_n)Q\cdot Q^{-1}f(\exp(\operatorname{diag}(y_1,\dots,y_n)))Q\\ &= Y\cdot f(\exp Y) = Y\cdot X\end{aligned}$$

Tedy X a Y lze diagonalizovat se stejnou maticí a konečně z $\exp(X) = \exp(Y)$ vyplývá $X = Y$. Tím jsme ukázali, že zobrazení je prosté, tedy celkem bijekce.

(3) Ukáže se analogicky jako (2). □ cvičení!

1.9. Poznámka.

(1) Komutátor nilpotentních matic je nilpotentní. Jak uvidíme později, díky tomu je N_p podgrupa $GL(n,K)$.
(2) Komutátor symetrických matic není symetrický a pozitivně definitní matice nejsou podgrupa $GL(n,K)$.

Prostřednictvím (aspoň lokálně definované) inverze log k zobrazení exp musí být násobení v podgrupách v $GL(n)$ vyjádřitelné na prvcích v Lieově algebře $\mathfrak{g}$. Následující důležité tvrzení ukazuje, že je dokonce vyjádřitelné pomocí vektorových operací a Lieovy závorky. To má zásadní význam pro celou teorii!

1.10. Bakerova-Campbellova-Hausdorffova formule. *Pro $z \in \mathbb{C}$ blízko 1 definujeme:*

$$f(z) = \frac{\log z}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(z-1)^n$$

Pro X, Y blízko $0 \in T_E GL(n,\mathbb{K})$ je dobře definována matice $X * Y$ vztahem $\exp(X*Y) = \exp X \cdot \exp Y$. Všude, kde mají výrazy smysl platí

$$\begin{aligned}X*Y &= Y + \int_0^1 f(e^{t\,\mathrm{ad}\,X}\cdot e^{\mathrm{ad}\,Y})X\,dt\\ &= X+Y+\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^n}{n+1}\sum_{\substack{k_1,\dots,k_n\geq0\\ l_1,\dots,l_n\\ k_i+l_i\geq1}}\frac{(\mathrm{ad}\,X)^{k_1}(\mathrm{ad}\,Y)^{l_1}\cdots(\mathrm{ad}\,X)^{k_n}(\mathrm{ad}\,Y)^{l_n}}{(k_1+\cdots+k_n)k_1!\cdots k_n!\,l_1!\cdots l_n!}X\\ &= X+Y+\frac12[X,Y]+\frac1{12}([X,[X,Y]]-[Y,[Y,X]])+\cdots\end{aligned}$$

Důkaz. Nebudu uvádět. Poměrně přehledný je k nalezení v [HN], krátký (ale dosti zhuštěný) je i v [KMS]. Koeficienty (u několika prvních členů) v závěrečném vztahu můžeme ověřit i přímým dosazením nekonečných sum pro exp a log. Celý problém vlastně spočívá v tom ukázat, že po tomto dosazení se vyruší vzájemně vše kromě výrazů v komutátorech. Ověřte výraz alespoň do druhého řádu! □ cvičení!

2. Lieovy podgrupy v $GL(n, \mathbb{K})$

2.1. Definice. Lieova podgrupa v Lieově grupě je podvarieta uzavřená jako množina vzhledem ke grupovým operacím.

Nechť $G \subset GL(m, \mathbb{K})$ je podgrupa. $T_E G \subset T_E GL(m, \mathbb{K})$ je podalgebra, $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(m, \mathbb{K})$

Naopak pro libovolnou podalgebru $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(m, \mathbb{K})$, uvažme zúžení exponenciálního zobrazení na malé okolí nuly U, kde je definováno násobení $X * Y$ z Věty 1.10. Obraz $\exp(\mathfrak{g})|_U \subset GL(m, \mathbb{K})$ je uzavřený k násobení v $GL(m, \mathbb{K})$, díky Větě 1.10. Pro každé malé U generuje ale $\exp(U \cap \mathfrak{g})$ (algebraickou) podgrupu v $GL(m, \mathbb{K})$. Ve skutečnosti je to vždy souvislá "skoro" Lieova podgrupa, v každém případě ale je to obraz homorfismu Lieových grup, a Lieova algebra vložené Lieovy grupy je právě $\mathfrak{g}$.[1] Doplňte si podrobnosti! cvičení!

Odvodili jsme tedy přímou souvislost mezi souvislými Lieovými (vloženými) podgrupami $G \subset GL(m, \mathbb{K})$ a Lieovými podalgebrami $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(m, \mathbb{K})$. Tato souvislost odráží daleko obecnější výsledek:

Třetí princip. *Existuje bijektivní korespondence mezi konečněrozměrnými Lieovými algebrami a souvislými a jednoduše souvislými konečněrozměrnými Lieovými grupami.*

Obtížná část důkazu této korespondence spočívá v konstrukci Lieovy grupy k předem dané Lieově algebře. Opírá se o Adovu větu, která říká, že každá Lieova algebra nad $\mathbb{K}$ je podalgebrou v $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ pro vhodné n. Tuto větu nebudeme dokazovat (přehledný důkaz lze najít v [FH, Appendix E]). Zbytek důkazu jsme ale vlastně již dosti podrobně naznačili.

Poznamenejme, že důsledkem zmíněné Adovy věty je skutečnost, že všechny Lieovy grupy jsou Lieovy podgrupy ve vhodné $GL(n)$. Vlastně tedy omezením studovaných objektů na maticové grupy a algebry nic neztrácíme!

Nyní si můžeme přímo ověřit vztah mezi homomorfismy Lieových grup a homomorfismy Lieových algeber pro podgrupy v $GL(m, \mathbb{K})$.

2.2. Věta. *Lineární zobrazení $\varphi' : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ je homomorfismus Lieových algeber tečný k (lokálně definovanému) homomorfismu příslušných podgrup G, H právě, když existuje lokálně definovaný homomorfismus $\varphi \colon G \to G$, pro který platí $exp|_{\mathfrak{h}} \circ \varphi' = \varphi \circ exp|_{\mathfrak{g}}$. Pokud je podgrupa G jednoduše souvislá, je příslušný homomorfismus grup definován globálně na souvislé komponentě jednotky.*

---

[1] Problém skrytý ve slově "skoro" je ten, že získaná je podmnožina je obrazem hladkého vložení Lieovy grupy do $GL(m, \mathbb{K})$, tento obraz ale nemusí být podvarietou. Je pouze vloženou podvarietou. Jako příklad si můžete představit komutativní Lieovu grupu vzniklou vynásobením dvou jednorozměrných kružnic (topologicky jde o torus), příslušná Lieova algebra je $\mathbb{R}^2$ s nulovou závorkou. Volba směru v této algebře s iracionální směrnicí povede k podgrupě na toru ve formě "hustě navinuté niti". To samozřejmě není podvarieta v našem smyslu, je to ale vložení přímky do toru.

Důkaz. Situaci zachycuje diagram

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathfrak{gl}(m,\mathbb{K}) & \text{------} & \mathfrak{g} & \overset{\varphi'}{\text{------}} & \mathfrak{h} & \text{------} & \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}) \\
\Big|\exp & & \Big|\exp|_{\mathfrak{g}} & & \Big|exp|_{\mathfrak{h}} & & \Big|\exp \\
GL(m,\mathbb{K}) & \text{------} & G & \overset{\varphi}{\text{- - - -}} & H & \text{------} & GL(n,\mathbb{K})
\end{array}$$

Pokud je dán homomorfismus φ, je jeho tečné zobrazení v e vždy homomorfismus Lieových algeber. To jsme ukázali již v první části textu. Obtížnější je opačná implikace. Je-li však φ' homomorfismus, pak zobrazení definované na okolí jednotky vztahem $\exp|_{\mathfrak{h}} \circ \varphi' \circ (\exp|_{\mathfrak{g}})^{-1}$ je kompatibilní s násobením, protože násobení je vyjádřeno formulí z 1.10. Zbývá ověřit rozšíření tohoto zobrazení v případě jednoduché souvislosti G. To vynechám, vyžaduje to podrobnější diskusi pojmů týkajících diferencovatelných variet. Úplný důkaz je vcelku snadný, lze jej najít např. v [HN] nebo [KMS] $\square$

2.3. Horní trojúhelníkové matice. O matici říkáme, že je *horní trojúhelníková*, jestliže všechny její prvky pod diagonálou jsou nulové. Množinu všech takovým matic v $GL(m,\mathbb{K})$ značíme B_m. Násobení dvou horních trojúhelníkových matic je opět horní trojúhelníková matice:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & \dots \\ 0 & a_{22}b_{22} & \dots \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

Je tedy B_m podvarieta v $GL(m,\mathbb{K})$ dimenze $\frac{1}{2}m(m+1)$ nad $\mathbb{K}$.

Označme $\mathfrak{b}_m = \{$všechny horní trojúhelníkové matice v $\mathfrak{gl}(m,\mathbb{K})\}$. Podle předchozího výpočtu je $[\mathfrak{b}_m, \mathfrak{b}_m] = \{$ostře horní trojúhelníkové matice v $\mathfrak{gl}(m,\mathbb{K})\}$.

$\exp\colon \mathfrak{b}_m \to B_m$ a zúžení $\exp\colon [\mathfrak{b}_m,\mathfrak{b}_m] \to \{$unipotentní horní trojúhelníkové$\}$. Rovnost dimenzí zaručuje, že $\mathfrak{b}_m$ je Lieova algebra B_m.

Komplexifikace reálné $\mathfrak{b}_m \subset \mathfrak{gl}(m,\mathbb{R})$ je komplexní $\mathfrak{b}_m \subset \mathfrak{gl}(m,\mathbb{C})$.

2.4. Speciální grupy $SL(n,\mathbb{K})$. Definujeme

$$SL(n,\mathbb{K}) = \{A \in GL(n,\mathbb{K});\ \det A = 1\}$$
$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}); \operatorname{Tr} X = 0\}$$

Zřejmě jde o podgrupu, je třeba ale ověřit, že jde o Lieovu podgrupu. Nejsnadněji se to ukáže prostřednictvím věty o inverzním zobrazení (viz. standardní matematická analýza). Je-li totiž nějaká podmnožina ve varietě zadána jako vzor jednoho bodu v zobrazení, které má konstantní hodnost, pak právě věta o inverzní funkci poskytuje přímo potřebné souřadné mapy pro podvarietu. Protože vždy platí $A \cdot A^* = \det(A)E$, kde A^* je algebraicky adjungovaná matice, má tečné zobrazení $T_A \det$ konstantní hodnost 1 (nezávislou na A). cvičení!

Přímo z definice determinantu spočteme, že $\frac{\partial}{\partial t}|_0(\det(E+tX)) = \operatorname{Tr} X$. Je tedy stopa derivací deteminantu. Protože pro $X = \frac{\partial}{\partial t}|_0 A(t)$, $Y \in \mathfrak{gl}(n)$ platí $[X,Y] = \frac{\partial}{\partial t}|_0(A(t)YA(t)^{-1})$, dostáváme $\operatorname{Tr}[X,Y] = 0$ pro všechny $X, Y \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$. Podle vztahu 1.5.(1) $\exp\colon \mathfrak{sl}(n,\mathbb{K}) \to SL(n,\mathbb{K})$. Je tedy $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$ Lieova podalgebra a porovnáním dimenzí přímo plyne, že je to Lieova algebra podgrupy $SL(n,\mathbb{K})$.[2] cvičení!

Komplexifikace $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ je $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$.

---

[2] Také jsme mohli začít podalgebrou $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$ a zkonstruovat $SL(n,\mathbb{K})$ jako podgrupu, která je obrazem $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$ v exponenciálním zobrazení.

2.5. Nechť Q je bilineární forma na $\mathbb{R}^m$, $Q(v,w) = v^T \mathbb{J} w$, kde $\mathbb{J}$ je regulární matice. Definujeme $G_Q \subset GL(n,\mathbb{R})$ takových matic A, pro které $Q(A\cdot v, A\cdot w) = Q(v,w)$. Tzn. $v^T\mathbb{J}w = v^T A^T \mathbb{J} A w$, proto jde právě o matice splňující $A^T\mathbb{J}A = \mathbb{J}$, tj. $A^T\mathbb{J} = \mathbb{J}A^{-1}$. Zejména tvoří tyto matice podgrupu.

Spočtěme nyní tečné zobrazení k hladkému zobrazení $A \mapsto A^T\mathbb{J}A$ na $GL(m,\mathbb{K})$. Zvolme $\frac{\partial}{\partial t}\big|_0 A(t) = X$, $A(0) = B$ a počítejme

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0 (A(t)^T \mathbb{J} A(t)) = X^T\mathbb{J}B + B^T\mathbb{J}X = 0.$$

Odtud lze vyčíst dvě skutečnosti. Jednak je to pro regulární B systém rovnic konstantní hodnosti, je tedy vzor jednoprvkové množiny $\{\mathbb{J}\}$ podvarieta a tím máme ověřeno, že G_Q je Lieova podgrupa. Dále, volbou $B = E$ obdržíme rovnici pro Lieovu podlagebru této podgrupy: $X^T\mathbb{J} + \mathbb{J}X^T = 0$. Označme ji $\mathfrak{g}_Q$.

Můžeme také alternativně přímo začít s vektorovým podprostorem matic $\mathfrak{g}_Q$ splňujících tuto rovnost (kandidát na Lieovu algebru konstruované podgrupy). Skutečně

$$\mathbb{J}^{-1}\exp(X)^T\mathbb{J} = \mathbb{J}^{-1}\exp(X^T)\mathbb{J} = \exp(\mathbb{J}^{-1}X^T\mathbb{J}) = \exp(-X) = (\exp(X))^{-1}$$

a porovnáním dimenzí ověříme, že matice splňující tuto rovnici ($\mathbb{J}^{-1}A^T\mathbb{J} = A^{-1}$ je ekvivalentní výše uvedené rovnici) tvoří příslušnou Lieovu podgrupu.

Analogicky můžeme uvažovat bilineární formy na komplexním vektorovém prostoru $\mathbb{C}^m$. Obdržíme pak komplexní Lieovy algebry $\mathfrak{g}_Q$.

2.6. Ortogonální grupy $SO(k,l,\mathbb{R})$**.** Uvažujme bilineární formu $Q(v,w) = v^T\mathbb{J}w$, kde $\mathbb{J} = \begin{pmatrix} E_k & O \\ O & -E_l \end{pmatrix}$ a E_j je jednotková matice rozměru $j\times j$. Pak grupu G_Q definovanou v předcházejícím odstavci označujeme $SO(k,l,\mathbb{R})$ a příslušnou algebru $\mathfrak{so}(k,l,\mathbb{R})$. Zvláště pro $k=n$, $l=0$ píšeme

$$SO(n,0,\mathbb{R}) = SO(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}); A^{-1} = A^T\}$$
$$\mathfrak{so}(n,0,\mathbb{R}) = \mathfrak{so}(n,\mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}); X + X^T = 0\}$$

Dá se ukázat, že $SO(k,l,\mathbb{R}) \cong SO(l,k,\mathbb{R})$. cvičení!

Komplexifikace algebry: $\mathfrak{so}(k,l,\mathbb{R})\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \cong \mathfrak{so}(k+l,\mathbb{C})$. Pro komplexní vektorové prostory se symetrickou bilineární formou danou jednotkovou maticí dostaneme komplexní Lieovy algebry $\mathfrak{so}(m,\mathbb{C})$. Častější je v tomto případě použití jiné symetrické nedegenerované bilineární formy Q, např. formy s maticí $\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$ pro sudou dimenzi $m = 2n$.

2.7. Grupy $Sp(2n,\mathbb{K})$**.** Proveďme stejnou úvahu jako v odstavci **2.6.** s maticí $\mathbb{J} = \begin{pmatrix} O & F_n \\ -F_n & O \end{pmatrix}$. Zde F_j je matice $j\times j$, která má všude nuly jen na vedlejší diagonále má jedničky. Vzniklou grupu nazýváme *symplektická grupa v dimenzi* n a označujeme $Sp(2n,\mathbb{K})$.

$$Sp(2n,\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & F \\ -F & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & F \\ -F & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Uvážíme-li, že $\_\cdot F$ znamená zrcadlové obrácení řádků, $F\cdot\_$ znamená obrácení sloupců, tedy $F\cdot\_\cdot F$ znamená $\_^T$, dále $F^2=E$, můžeme psát:

$$Sp(2n,\mathbb{C})=\left\{\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}; AC=CA,\ DB=BD,\ AD-CB=E=DA-BC\right\}$$

Odtud, mimo jiné, přímo plyne $Sp(2,\mathbb{R})\cong SL(2,\mathbb{R})$.

Jinou volbou nedegenerované antisymetrické formy Q s maticí $\begin{pmatrix} 0 & E_n\\ -E_n & 0\end{pmatrix}$ dostáváme isomorfní Lieovu grupu. Z rovnice $X^T\cdot Q+Q\cdot X^T=0$ pro příslušnou Lieovu algebru dostaneme v tomto případě velmi přehledný popis algebry:

$$\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{R})=\{\begin{pmatrix} A & B\\ C & -A^T\end{pmatrix}; B,C\in S^2\mathbb{R}^n\}$$

Komplexifikace: $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{R})\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}=\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$.

2.8 Grupy $SU(n)$, $U(n)$. Nyní uvažujme grupu $U(n)$ komplexních lineárních automorfismů n-rozměrného komplexního vektorového prostoru V, které zachovávají pozitivně definitní Hermiteovskou formu H na V. (Pro Hermiteovskou formu H platí: $H(\lambda v,\mu v)=\bar{\mu}\lambda H(v,w)$, $H(w,v)=\overline{H(v,w)}$; je positivně definitní, když $H(v,v)>0$ pro $v\neq 0$.)

Stejně jako v předcházejících odstavcích je jednoduché určit, jak vypadá $U(n)$. Nechť tedy H odpovídá matici M. Potom[3]

$$H(v,w)=v^*\cdot M\cdot w,\quad \forall v,w\in\mathbb{C}^n,$$

tedy grupa $U(n)$ je grupa matic A splňujících

$$A^*\cdot M\cdot A=M.$$

Jestliže $M=E$ (tj. $H(v,w)=v^*\cdot w$), je $U(n)$ grupa matic A splňujících $A^*=A^{-1}$. Tato podmínka opět definuje Lieovu podgrupu v $GL(n,\mathbb{C})$. Derivací této podmínky dostáváme: $\mathfrak{u}(n)=\{X; X^*+X=0\}$, a to je jen reálný vektorový podprostor! (Důvodem je, že pro obecný komplexní násobek matice X bude platit $(\alpha X)^*+(\alpha X)=\bar{\alpha}X^*+\alpha X$.) Tato Lieova algebra je tedy reálná Lieova podalgebra v $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})\subset\mathfrak{gl}(2n,\mathbb{R})$. Podmínka $A^*A=E$ zaručuje, že $|\det A|=1$. Zejména $U(1)$ je komutativní grupa komplexních čísel na jednotkové kružnici v komplexní rovině.

Grupa $SU(n)\subset U(n)$ jsou matice automorfismů s determinantem 1. Potom v algebře $\mathfrak{s}u(n)\subset\mathfrak{u}(n)$ jsou právě matice v $\mathfrak{u}(n)$ s nulovou stopou.

Komplexifikace: $\mathfrak{su}(n)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\cong\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$. Skutečně, $\mathfrak{su}(n)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}=\mathfrak{su}(n)\oplus i\cdot\mathfrak{su}(n)$ a libovolnou matici $X\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ můžeme rozložit na součet Hermiteovské a anti-Hermiteovské matice: $X=\frac{1}{2}(X-X^*)+\frac{1}{2}(X+X^*)$. Přitom, je-li stopa X nulová, jsou nulové i stopy obou sčítanců. Je tedy první z nich v $\mathfrak{su}(n)$ a i-násobek druhého také. Celkem dostáváme $X=\frac{1}{2}(X-X^*)-i(\frac{i}{2})(X+X^*)$. Opačná inkluze je zřejmá z definice $\mathfrak{su}(n)$.

[3]Konjugování matic libovolné velikosti značíme pomocí hvězdičky, tj. $A^*=\bar{A}^T$.

3. Reprezentace algebry $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$

3.1. Algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \subset GL(2,\mathbb{C})$ je podprostor všech matic s nulovou stopou a (jako vektorový prostor) má bázi

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ X_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ X_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lieova závorka na bázi vypadá takto:

$$[H, X_+] = 2X_+,\ [H, X_-] = -2X_-,\ [X_+, X_-] = H,\ [H, H] = 0.$$

3.2 Příklady isomorfních algeber.
1. Bázové vektory v $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$ lze zvolit takto:

$$R_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ldots \text{ rotace o } \pi/2 \text{ kolem osy } x$$

$$R_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ldots \text{ rotace o } \pi/2 \text{ kolem osy } y$$

$$R_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ldots \text{ rotace o } \pi/2 \text{ kolem osy } z$$

Lieova závorka na bázi pak vypadá takto:

$$[R_x, R_y] = R_z, \quad [R_y, R_z] = R_x, \quad [R_z, R_x] = R_y.$$

2. Bázové vektory v $\mathfrak{su}(2)$ zvolíme

$$S_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ S_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ S_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Přímým výpočtem najdeme stejné relace mezi těmito bázovými prvky jako v případě předešlém, tj.

$$[S_x, S_y] = S_z, \quad [S_y, S_z] = S_x, \quad [S_z, S_x] = S_y.$$

Je tedy $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$. Protože již víme, že $\mathfrak{su}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, je i komplexifikace třírozměrné reálné ortogonální algebry rovna $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Dalším příkladem je $\mathfrak{sp}(2,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

3.3. Lemma. *Buď $\lambda : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(V)$ representace a v vlastní vektor operátoru $\lambda(H) : V \to V$ s vlastní hodnotou $\mu \in \mathbb{C}$. Pak $\lambda(X_+)(v)$ je buď 0 nebo vlastní vektor s vlastní hodnotou $\mu + 2$ a $\lambda(X_-)(v)$ je 0 nebo vlastní vektor s vlastní hodnotou $\mu - 2$ (obojí pro operátor $\lambda(H)$).*

Důkaz. Předpokládejme $\lambda(H)(v) = \mu v$. Pro X_+ platí

$$\begin{aligned} \lambda(H)(\lambda(X_+)(v)) &= (\lambda(X_+)\lambda(H) + \lambda([H, X_+]))(v) \\ &= \lambda(X_+)(\mu v) + 2\lambda(X_+)(v) = (\mu + 2)(\lambda(X_+)(v)). \end{aligned}$$

Pro X_- úplně stejně. $\square$

Víme, že nad komplexními čísly má každý lineární operátor vlastní vektor. Zvolme takový vektor v, tedy $\lambda(H)(v) = \alpha v$, $v \neq 0$. Sestavme posloupnost vektorů:

$$v,\ \lambda(X_+)(v),\ \dots,\ \lambda^k(X_+)(v),\ \dots,$$

Protože $\lambda(H)$ má pouze konečný počet různých vlastních hodnot, $\exists v_0\, \lambda(H)(v_0) = \mu v_0$, $v_0 \neq 0$, $\lambda(X_+)(v_0) = 0$.

Zvolme tedy pevně přímo takový vlastní vektor v_0 s vlastní hodnotou μ a $\lambda(X_+)(v_0) = 0$. Definujeme $v_1 = \lambda(X_-)(v_0), \dots, v_r = \lambda(X_-)(v_{r-1})$, kde $v_r \neq 0$ a $\lambda(X_-)(v_r) = 0$. Zřejmě $\lambda(H)(v_i) = (\mu - 2i)v_i$ pro $i = 0, \dots, r$. Protože

$$\lambda(X_+)(v_i) = \lambda(X_+)\lambda(X_-)(v_{i-1}) = \lambda(X_-)\lambda(X_+)(v_{i-1}) + \lambda([X_+, X_-])(v_{i-1}),$$

indukcí dostáváme $\lambda(X_+)(v_i) = \mu_i v_{i-1}$, kde $\mu_i = i(\mu + 1 - i)$, pro $i = 0, \dots, r+1$. Zejména pro $i = r+1$ máme $0 = \lambda(X_+)\lambda(X_-)(v_r) = (r+1)(\mu - r)v_r$. Přitom $r + 1 > 0$, a tedy $\mu = r$, z čehož plyne, že $\mu \in \mathbb{Z}$, $\mu \geq 0$.

Nyní vezměme libovolné $r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 0$, a libovolný vektorový prostor V dimenze $r+1$ s bazí $\{v_0, \dots, v_r\}$ a definujme na něm akci $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ předpisy $\lambda(X_-)(v_i) = v_{i+1}$ pro $i = 0, \dots, r-1$, $\lambda(X_-)(v_r) = 0$, $\lambda(H)(v_i) = (r - 2i)v_i$ a $\lambda(X_+)(v_i) = \mu_i v_{i-1}$, kde $\mu_i = i(r + 1 - i)$, pro $i = 0, \dots, r$. Získáme tak reprezentaci $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, označíme ji D_r.

3.4. Definice. Nechť $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra, $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ její reprezentace. Říkáme, že λ je
ireducibilní (irrep), jestliže ve V neexistuje netriviální $\mathfrak{g}$-invariantní podprostor.
reducibilní, jestliže ve V existuje netriviální $\mathfrak{g}$-invariantní podprostor.
rozložitelná, jestliže $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$, kde V_i jsou ireducibilní podprostory.
přímým součtem reprezentací $\lambda_i : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_i)$, je-li $\lambda(X)$ dáno součtem $\lambda_{\mathrm{i}}(X)$ na V_i, tj. pro $v \in V$, $v = v_1 + \dots + v_k$, $v_i \in V_i$, platí $\lambda(X)(v) = \lambda_1(X)(v_1) + \dots + \lambda_{\mathrm{k}}(X)(v_k)$.

3.5. Věta. *Ireducibilní reprezentace* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ *jsou (až na izomorfismus) právě* D_r *pro* $r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 0$.

Důkaz. Provedeme-li předchozí konstrukci D_r pro ireducibilní reprezentaci λ, získáme reprezentaci D_r s λ izomorfní. Zbývá ukázat, že každá reprezentace D_r je irrep. Mějme libovolný nenulový vektor $v = a_0 v_0 + \dots + a_k v_k$, $a_k \neq 0$, z V. Pak $(\lambda(X_+))^k(v)$ je násobek v_0, a tedy lineární kombinace vektorů $(\lambda(X_-))^l(\lambda(X_+))^k(v)$ pro $l = 0, \dots, r$ vygenerují celý prostor V. To znamená, že nemůže existovat netriviální $\mathfrak{g}$-invariantní podprostor V. $\square$

3.6. Věta. *Každá konečněrozměrná reprezentace* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ *je rozložitelná.*

Důkaz. Buď $\lambda : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(V)$ reprezentace. Důkaz provedeme indukcí vzhledem k $m = \dim(V)$. Předpokládejme, že věta platí pro všechny reprezentace dimenzí menších než m. Je-li V ireducibilní (pro $m = 1$ triviálně splněno), je tvrzení zřejmé. V opačném případě buď $V_1 \subset V$ netriviální ireducibilní podprostor (existuje díky konečnosti dimenze V) a označme $\pi : V \to V/V_1$ přirozenou projekci. Podle indukčního předpokladu je indukovaná reprezentace na $W = V/V_1$ rozložitelná, tj. $W = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$, W_i ireducibilní. Označíme-li $W_i' = \pi^{-1}(W_i)$, pak $V_1 \subset W_i'$ a $W_i = W_i'/V_1$. Stačí tedy dokázat tvrzení pro W ireducibilní. K tomu postačí, když nalezneme ve V invariantní komplement k V_1.

Nechť V_1 má dimenzi $r+1$ a bazi $\{v_0, \dots, v_r\}$, příslušná zúžená reprezentace je D_r. Podobně na W je indukovaná reprezentace rovna D_q s bazí $\{w_0, \dots, w_q\}$. Vlastní hodnoty $\lambda(H)$ jsou (včetně násobnosti) právě vlastní hodnoty v D_r a v D_q. Nyní rozlišíme 2 případy:

(1) *$q > r$ nebo parita r a q je různá:* Nechť u_0 je vlastní vektor $\lambda(H)$ s vlastní hodnotou q. Pak $u_0 \notin V_1$, protože buď je největší možná vlastní hodnota vektorů z V_1 menší nebo má q jinou paritu než všechny vlastní hodnoty v D_r. Přitom $\lambda(X_+)(u_0) = 0$, protože $q+2$ není vlastní hodnota $\lambda(H)$. Pak ovšem i $(\lambda(X_-))^i(u_0) \notin V_1$ a generují invariantní podprostor $U = \langle u_0, \dots, (\lambda(X_-))^q(u_0)\rangle$ komplementární k V_1.

(2) *$q \le r$ a parita r a q je stejná:* Označme $d = 2e = r - q$. Pak vlastní vektor v_e ve V_1 splňuje $\lambda(H)(v_e) = (r-2e)v_e = qv_e$. Ukážeme, že k této vlastní hodnotě existuje ještě jiný nezávislý vlastní vektor u_0, který navíc splňuje $\lambda(X_+)(u_0) = 0$. Ten potom jistě nepatří do V_1 a generuje proto invariantní podprostor komplementární k V_1.

Předpokládejme, že takový vektor neexistuje. Potom ale existuje vektor u_0 splňující $(\lambda(H) - q \cdot id_V)^2(u_0) = 0$ a $(\lambda(H) - q \cdot id_V)(u_0) \neq 0$, tedy i $\lambda(H)(u_0) = qu_0 + v_e$ (viz. věta o rozkladu na kořenové prostory z elementární lineární algebry, resp. existence Jordanova kanonického tvaru matice). Navíc můžeme požadovat $\pi(u_0) = w_0$.Definujeme $u_1 = \lambda(X_-)(u_0), \dots$ a indukcí (s použitím vztahu $\lambda(H)\lambda(X_-) = \lambda(X_-)\lambda(H) - 2\lambda(X_-)$) se ukáže $\lambda(H)(u_i) = (q-2i)u_i + v_{e+i}$. cvičení!

Je-li $q < r$, pak $u_{q+1} \in V_1$, neboť $\pi(u_{q+1}) = \lambda(X_-)(w_q) = 0$. Přitom ale $\lambda(H)(u_{q+1}) = (q - 2q - 2)u_{q+1} + v_{e+q+1}$, což nemůže žádná lineární kombinace $v_0, \dots, v_r$ splňovat, spor. cvičení!

Je-li $q = r$, tj. $e = 0$, potom $\lambda(H)(u_{r+1}) = (-r-2)u_{r+1}$. Jelikož však $-r-2$ není vlastní hodnota $\lambda(H)$, musí být $u_{r+1} = 0$. Indukcí ukážeme, že $\lambda(X_+)(u_i) = \mu_i u_{i-1} + iv_{i-1}$, kde $\mu_i = i(r+1-i)$. Protože

$$\lambda(H)\lambda(X_+)(u_0) = \lambda(X_+)\lambda(H)(u_0) + 2\lambda(X_+)(u_0) = (r+2)\lambda(X_+)(u_0)$$

a $r+2$ není vlastní hodnota $\lambda(H)$, platí $\lambda(X_+)(u_0) = 0$. Indukční krok se provede užitím vztahu $\lambda(X_+)\lambda(X_-) = \lambda(X_-)\lambda(X_+) + \lambda(H)$. Pro $i = r+1$ dostáváme $\lambda(X_+)(0) = 0 \cdot u_r + (r+1)v_r$, tj. $v_r = 0$, spor. cvičení!

Existuje proto jistě vlastní vektor $u_0 \notin V_1$ s vlastní hodnotou q. Vlastnost $\lambda(X_+)(u_0) = 0$ je pro $r = q$ automatická, pro $r > q$ plyne z lemmatu 3.3, protože násobnost vlastní hodnoty $q+2$ je 1. □

3.7. Definice. Nechť $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ je rozložitelná reprezentace. Tedy $\lambda = \lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \dots \oplus \lambda_k$ kde $\lambda_1, \dots, \lambda_k : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ jsou ireducibilní. Každá λ_i je isomorfní $\rho_r : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_r)$. Počet λ_i isomorfních pevné ρ_r nazýváme *násobností ρ_r* v λ. Píšeme $\lambda = \sum_r n_r \rho_r$ (pro konečně mnoho n_r nenulových).

Tenzorový součin dvou reprezentací $\lambda_1 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_1)$; $\lambda_2 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_2)$ definujeme vztahem

$$(\lambda_1 \otimes \lambda_2)(X)(v \otimes w) = (\lambda_1(X)(v)) \otimes w + v \otimes (\lambda_2(X)(w))$$

V dalším budeme předešlou rovnici psát podle konvence ve tvaru

$$X(v \otimes w) = Xv \otimes w + v \otimes Xw.$$

3.8. Důsledek. $D_{2s} \otimes D_{2t} = D_{2(s+t)} \oplus D_{2(s+t-1)} \oplus \ldots \oplus D_{2|s-t|}$.

Důkaz. Vzhledem k důkazu věty 3.6 nám stačí ukázat, že H má stejné vlastní vektory pro obě strany rovnice.

Nechť v_i a w_j jsou báze prostorů reprezentací D_{2s} a D_{2t} tvořené vlastními vektory operátoru H, viz. 3.3. Dále nechť je $v \otimes w = \sum_{i,j} a_{ij} v_i \otimes w_j$ vlastní vektor H na tenzorovém součinu. Pak podle definice $H(v \otimes w) = \alpha(v \otimes w)$. Podle definice tenzorového součinu máme

$$H(\sum_{i,j} a_{ij} v_i \otimes w_j) = \sum_{i,j} a_{ij}(2s - 2i + 2t - 2j)(v_i \otimes w_j) = \alpha \sum_{i,j} a_{ij} v_i \otimes w_j$$

z čehož máme $\alpha = 2(s + t - i - j)$ pro $a_{ij} \neq 0$. Vlastní hodnotě $\alpha = 2(s + t)$ tedy odpovídá $i = j = 0$, tedy jediný vlastní vektor, který je vlastním vektorem v $D_{2(s+t)}$. Podobně vlastní hodnotě $\alpha = 2(s + t - 1)$ odpovídá $i = 1; j = 0$ a $i = 0; j = 1$ tedy dva vlastní vektory, které jsou vlastními vektory v $D_{2(s+t)}$ a $D_{2(s+t-1)}$ atd. Promyslete, proč je poslední člen na pravé straně právě $D_{2|s-t|}$! cvičení!

Ověřili jsme, že si vlastní vektory odpovídají. $\square$

Tato rovnost je známá pod názvem Clebsch-Gordanova řada. Lze se s ní setkat např. ve fyzice v kvantové teorii.

3.9. Příklady.
1. Reprezentace D_0. Platí $Hv_0 = 0$; $X_- v_0 = 0$; $X_+ v_0 = 0$.
D_0 je triviální akce na $\mathbb{C}$.
2. Reprezentace D_1. Platí $Hv_0 = v_0$; $X_- v_0 = v_1$; $X_+ v_0 = 0$. D_1 je identická reprezentace $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ na $\mathbb{C}^2$.
3. Reprezentace D_2. Každý prvek $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^3$ lze psát ve tvaru $X = aX_+ + bH + cX_-$. Podle 3.1, v této bázi odpovídají akce prvků H, X_+, X_- maticím

$$\operatorname{ad} H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{ad} X_+ = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{ad} X_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Volíme-li $v_0 = X_+$ pak $Hv_0 = 2v_0$; $X_+ v_0 = 0$; $X_- v_0 = -H$; $X_- X_- v_0 = -2X_-$.
4. $D_1 \otimes D_1 = D_2 \oplus D_0$. Tento rozklad odpovídá přesně rozkladu bilineárních forem na symetrickou a antisymetrickou část, tj. $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 = S^2\mathbb{C}^2 \oplus \Lambda^2\mathbb{C}^2$, ale $\Lambda^2\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}$.
5. $(D_1 \otimes D_1) \otimes D_1 = D_3 \oplus 2D_1$.

Část II.
Základní algebraické vlastnosti Lieových algeber

Otázky, které jsme si kladli na konci předchozí části pro reprezentace $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, budeme chtít studovat pro obecné Lieovy algebry. Obecné reprezentace Lieových algeber přitom budeme zkoumat ve dvou krocích. Nejprve si musíme udělat "hrubý" rozbor struktury algeber. Zjistíme, že každá je tzv. polopřímým součinem dvou algeber se speciálními vlastnosti, přičemž ireducibilní reprezentace algeber prvního typu jsou vždy triviální. Později se budeme věnovat podrobněji vlastnostem algeber druhého typu, tzv. polojednoduchých Lieových algeber. V této části ukážeme zmíněný rozklad a zavedeme základní algebraické nástroje pro pozdější diskusi struktury algeber a jejich reprezentací.

4. Řešitelné a nilpotentní algebry

4.1. Definice. Nechť $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra nad $\mathbb{K}$.

Centrem Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ nazýváme její podalgebru

$$Z(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g};\ [X,Y] = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Podalgebru $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ nazýváme *ideál*, jestliže pro všechna $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{a}$ platí $[X,Y] \in \mathfrak{a}$. Nechť $\mathfrak{a}$ je ideál, pak vektorový prostor $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ s indukovanou Lieovou závorkou nazýváme *faktorová algebra.* (Prvky $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ jsou tvaru $X+\mathfrak{a}$ a Lieova závorka je definována vztahem $[X+\mathfrak{a}, Y+\mathfrak{a}] = [X,Y]+\mathfrak{a}$.)

Ideál $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$ definovaný $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ nazýváme *derivovaná algebra* algebry $\mathfrak{g}$. (Výraz $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ chápeme jako vektorový podprostor generovaný množinou $\{[X,Y];\ X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{g}\}$ a z definice je jasné, že jde o ideál.)

Nechť $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(k)} = [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}]$ pak $\mathfrak{g}^{(0)}, \mathfrak{g}^{(1)}, \dots, \mathfrak{g}^{(r)}, \dots$ nazýváme *derivovaná posloupnost podalgeber* v $\mathfrak{g}$.

Nechť $\mathfrak{g}_{(0)} = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{(k)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{(k-1)}]$ pak $\mathfrak{g}_{(0)}, \mathfrak{g}_{(1)}, \dots, \mathfrak{g}_{(r)}, \dots$ nazýváme *dolní centrální posloupnost* v $\mathfrak{g}$.

4.2. Cvičení. *Nechť G je souvislá Lieova grupa s Lieovou algebrou $\mathfrak{g}$.*

(1) $Z(\mathfrak{g})$ je Lieova algebra centra G.

(2) $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ je ideál, právě tehdy, když příslušná podgrupa je normální.

(3) $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ je Lieova algebra faktorové grupy G/A.

4.3. Věta. *Nechť $\mathfrak{g}$ je algebra. Pak libovolná $\mathfrak{g}^{(k)}$ je ideál a pro každý ideál $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ je i $\mathfrak{a}^{(k)}$ ideál v $\mathfrak{g}$.*

Důkaz. Buď $\mathfrak{a}$ ideál algebry $\mathfrak{g}$. Pak z definice derivované algebry plyne $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}$. Vezmu-li $Z \in \mathfrak{g}$, $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{a}$ libovolné, pak podle Jacobiho identity $[Z,[Z_1,Z_2]] = [[Z,Z_1],Z_2] + [Z_1,[Z,Z_2]] \in \mathfrak{a}'$. Protože prvky $[Z_1,Z_2]$ lineárně generují $\mathfrak{a}'$, plyne odtud, že $\mathfrak{a}'$ je ideál.

Indukcí se tímto postupem ukáže, že $\mathfrak{a}^{(k)}$ je ideál. Protože $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}$ je ideál, je ideál i $\mathfrak{g}^{(k)}$. $\square$ cvičení!

4.4. Definice. Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ nazýváme
nilpotentní, je-li $\mathfrak{g}_{(k)} = 0$ pro jisté k.
řešitelná, je-li $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ pro jisté k.
jednoduchá, jestliže neobsahuje netriviální ideály a nemá dimenzi 0 nebo 1.
polojednoduchá, jestliže neobsahuje nenulové řešitelné ideály.
perfektní, je-li $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$.

Přímo z definic plyne $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}_{(k)}$. Zejména, je-li algebra nilpotentní pak je i řešitelná. Jednoduchým použitím Jacobiho identity se navíc ukáže, že Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je řešitelná právě, když je její derivace $\mathfrak{g}'$ nilpotentní. cvičení!

Ukažte, že všechny vlastnosti z definice 4.4. se zachovávají při komplexifikaci! cvičení!

4.5. Příklady.
1. $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ je jednoduchá, viz. 3.1. cvičení!
2. $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$, $\mathfrak{su}(2)$ jsou jednoduché, viz. 3.1.
3. Horní trojúhelníkové matice tvoří v $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ řešitelnou algebru, která není nilpotentní.
4. Ostře horní trojúhelníkové matice tvoří v $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ nilpotentní algebru.
5. Afinní algebra na přímce $\mathfrak{aff}(1, \mathbb{R})$ je řešitelná a není nilpotentní. Její prvky můžeme chápat jako $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$.

4.6. Lemma.

(1) *Podalgebry a faktorové algebry nilpotentních (resp. řešitelných) algeber jsou nilpotentní (resp. řešitelné).*

(2) *Uvažujme exaktní posloupnost Lieových algeber*[4]

$$0 \longrightarrow \mathfrak{q} \xrightarrow{\ i\ } \mathfrak{g} \xrightarrow{\ j\ } \mathfrak{p} \longrightarrow 0$$

Pak $\mathfrak{g}$ je řešitelná právě tehdy, když $\mathfrak{q}$ a $\mathfrak{p}$ jsou řešitelné. (Je-li $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{g}$ řešitelný ideál, pak $\mathfrak{g}$ je řešitelná právě tehdy, když $\mathfrak{g}/\mathfrak{q}$ je řešitelná).

(3) *Jsou-li $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ nilpotentní (resp. řešitelné) ideály, pak i $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ je nilpotentní (resp. řešitelný) ideál. Stejné tvrzení platí i pro libovolné systémy řešitelných, resp. nilpotentních ideálů v konečněrozměrné $\mathfrak{g}$.*

Důkaz. (1): Pro podalgebru $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ platí $\mathfrak{a}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{(k)}$ a $\mathfrak{a}_{(k)} \subset \mathfrak{g}_{(k)}$. Je-li $\mathfrak{a}$ ideál, je

$$(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})' = \mathfrak{g}' + \mathfrak{a}, [(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})', (\mathfrak{g}/\mathfrak{a})'] = \mathfrak{g}^{(2)} + \mathfrak{a}, \dots$$
$$[\mathfrak{g}/\mathfrak{a}, (\mathfrak{g}/\mathfrak{a})'] = \mathfrak{g}_{(2)} + \mathfrak{a}, \dots$$

(2): V každé takové exaktní posloupnosti je $\mathfrak{p} \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{q}$ a tedy podle (1) jsou $\mathfrak{p}$ a $\mathfrak{q}$ řešitelné, je-li $\mathfrak{g}$ řešitelná. Předpokládejme naopak, že $\mathfrak{q}$ i $\mathfrak{p}$ jsou řešitelné. Všechny šipky jsou homomorfismy, tedy $\mathfrak{g}^{(r)}$ se zobrazí do $\mathfrak{p}^{(r)}$. Pro dostatečně velká s je $\mathfrak{g}^{(s)}$ v obrazu $\mathfrak{q}$. Protože $\mathfrak{q} \to \mathfrak{g}$ je injekce, $\mathfrak{q}^{(r)} = 0$ implikuje $\mathfrak{q}^{(r+s)} = 0$. (Všimněme si, že pro dolní centrální řadu poslední argument neprojde!) cvičení!

(3): $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ je ideál přímo z definice.

a) Pro řešitelné: Uvažme exaktní posloupnost $0 \to \mathfrak{a} \to \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \to (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{a} \to 0$, kde $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{b}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$je řešitelná podle (1). Podle (2) je tedy řešitelná i $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$. cvičení!

b) Pro nilpotentní: Jsou-li $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ nilpotentní, iterované závorky alespoň řekněme $s+1$

[4] Tzn. obraz každého homomorfismu je jádrem následujícího.

prvků, jsou nulové. Rozepsáním Jacobiho identity se přesvědčíme, že $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})_{(2s)}$ je nulové. cvičení!

Indukcí se předchozí tvrzení snadno dokážou pro libovolný konečný součet ideálů. Díky konečné dimenzi algebry $\mathfrak{g}$ odtud plynou tvrzení i pro nekonečné součty. □

4.7. Důsledek. *V každé Lieově algebře existuje právě jeden maximální řešitelný ideál $\mathfrak{r}\subset\mathfrak{g}$ (tzv. radikál) a právě jeden maximální nilpotentní ideál $\mathfrak{n}\subset\mathfrak{g}$ (tzv. nilradikál). Faktorová algebra $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ je polojednoduchá.*

Důkaz. Podalgebru $\mathfrak{r}$ (resp. $\mathfrak{n}$) obdržíme sečtením všech řešitelných (resp. nilpotentních) ideálů.

Předpokládejme, že v $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ je řešitelný ideál $\tilde{\mathfrak{a}}$. Pak je $\tilde{\mathfrak{a}}$ obrazem ideálu $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}$ a řešitelnost $\tilde{\mathfrak{a}}$ znamená, že $\mathfrak{a}^{(k)}\subset\mathfrak{r}$ pro dosti velká k. Z definice řešitelnosti plyne, že i $\mathfrak{a}$ je řešitelný. Pak ovšem je $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{r}$ a $\tilde{\mathfrak{a}}$ je triviální ideál. □

Pro nilradikál analogie této věty neplatí, viz. příklad v 4.10.

4.8. Polopřímé součiny. Mějme exaktní posloupnost Lieových algeber (příp. grup nebo jiných vhodných struktur s neutrálním prvkem)

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ i\ } B \underset{s}{\overset{j}{\rightleftarrows}} C \longrightarrow 0$$

kde s je řez homomorfismu j, tzn. homomorfismus s vlastností $j\circ s=\mathrm{id}_C$. Zejména je $B\simeq A\oplus C$ na úrovni vektorových prostorů. Libovolné $b\in B$ koresponduje s $(i^{-1}(b-s(j(b)),j(b))$, naopak k $(a,c)\in A\oplus C$ máme $i(a)+s(c)\in B$ a máme tak definovánu bijekci realizující zmíněný isomorfismus. Dále definujme zobrazení $\varphi\colon C\to\mathrm{Hom}(A,A)$ vztahem

$$\varphi(c)(a)=[s(c),i(a)],\ \ \varphi(c)\colon A\to A.$$

Protože je $i(A)\subset B$ ideál (je to jádro homomorfismu), je tímto vztahem skutečně φ definováno a z Jacobiho identity plyne $\varphi([c,c'])=\varphi(c)\circ\varphi(c')-\varphi(c')\circ\varphi(c)$. Je tedy φ homomorfismus Lieových algeber. Lieovu závorku na B nyní vyjádříme takto: cvičení!

$$[i(a)+s(c),i(a')+s(c')]=i([a,a'])+s([c,c'])-\varphi(c')(a)+\varphi(c)(a').$$

Říkáme, že $B=A\oplus C$ s takto definovanou závorkou je *polopřímý součin* algeber A a C.

Naopak, kdykoliv zadáme homomorfismus $\varphi\colon C\to\mathrm{Hom}(A,A)$ pro dvě algebry A, C, získáme prostřednictvím předchozí formule strukturu Lieovy algebry na vektorovém prostoru $A\oplus C$.[5]

4.9. Věta (Leviho rozklad). *Buď $\mathfrak{g}$ Lieova algebra s radikálem $\mathfrak{r}$. Pak existuje podalgebra $\mathfrak{l}\subset\mathfrak{g}$ taková, že $\mathfrak{g}\simeq\mathfrak{r}\oplus\mathfrak{l}$ (jako vektorový prostor) a Lieova závorka je dána kanonickým vložením $\mathfrak{l}\to\mathfrak{r}\oplus\mathfrak{l}$ v příslušné exaktní posloupnosti*

$$0\to\mathfrak{r}\to\mathfrak{r}\oplus\mathfrak{l}\to\mathfrak{l}\to 0.$$

Podalgebra $\mathfrak{l}$ je určena jednoznačně až na konjugaci. Každá Lieova algebra je tedy polopřímým součinem řešitelné a polojednoduché algebry.

Podalgebra $\mathfrak{l}$ z tvrzení věty se nazývá *Leviho faktor* algebry $\mathfrak{g}$.

Důkaz. Nebudu provádět (i když není příliš těžký), viz. [FH, str. 499–500].

[5] Analogická konstrukce na úrovni grup dá $a.c\in G$, $a\in A$, $c\in C$, a násobení je pak dáno rozepsáním $(a.c).(a'.c')=(a.(ca'c^{-1})).(cc')$. Jako jádro morfismu je $i(A)$ normální podgrupa a $\varphi(c)$ je v tomto případě tzv. vnitřní homomorfismus daný prvkem c.

4.10. Příklady.

(1) $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$, protože $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}); \operatorname{Tr} A = 0\}$ a $\mathbb{C}$ lze chápat jako skalární násobky jednotkové matice, tzv. stopová část. Máme tedy korespondenci (Leviho rozklad) $A \longleftrightarrow (A - \frac{\operatorname{Tr} A}{n} E, \operatorname{Tr} A)$.

(2) Faktorová algebra $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ může mít nenulový nilradikál. Např. v algebře $\mathfrak{aff}(1)$ matic $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ jsou v $\mathfrak{n}$ právě matice $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a $\mathfrak{aff}(1)/\mathfrak{n}$ je jednorozměrná (tedy abelovská).

4.11. Lemma. *Nechť $\mathfrak{g}$ působí na vektorovém prostoru V nilpotentními operátory. Pak existuje $v \in V$, $v \neq 0$ tak, že $X(v) = 0$ pro všechny $X \in \mathfrak{g}$.*

Důkaz. Indukcí vzhledem k dimenzi $\mathfrak{g}$. Pro $\dim \mathfrak{g} = 0$ je tvrzení zřejmé. Nechť nyní je $\dim \mathfrak{g} = 0$, $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n)(V)$ reprezentace. Pokud φ není injektivní, pak $\ker \varphi \subset \mathfrak{g}$ je ideál a indukovaná reprezentace $\tilde{\varphi} : \mathfrak{g}/\ker \varphi \to \mathfrak{gl}(n)(V)$ je injektivní a $\dim(\mathfrak{g}/\ker \varphi) < \dim \mathfrak{g}$, proto lze použít indukčního předpokladu. Pokud je φ prosté, můžeme uvažovat $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n)(V)$. Potom $\mathfrak{g}$ působí na $\mathfrak{gl}(n)(V)$ prostřednictvím ad a pro všechna X je $\operatorname{ad} X$ nilpotentní: $(\operatorname{ad} X)Y = XY - YX$, $(\operatorname{ad} X)^2 Y = X^2 Y - 2XYX + YX^2, \dots$. Protože pro každé X je $X^k = 0$ pro jisté $k \leq \dim V$, je $(\operatorname{ad} X)^{2k} \equiv 0$. Předpokládejme, že $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ je maximální vlastní podalgebra. Uvažme $\operatorname{ad}|_{\mathfrak{a}} : \mathfrak{a} \to \mathfrak{gl}(n)(\mathfrak{g})$. Protože $\mathfrak{a}$ je vzhledem k ad invariantní, máme indukovanou reprezentaci na $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, tj. homomorfismus $\mathfrak{a} \to \mathfrak{gl}(n)(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$, s hodnotami v nilpotentních operátorech. Podle indukčního předpokladu tedy existují společné nenulové vektory s triviální akcí. Nechť $X_0 + \mathfrak{a} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ je takový vektor. Pak $X_0 \notin \mathfrak{a}$ a $[X_0, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$ z čehož plyne $\langle X_0, \mathfrak{a} \rangle = \mathfrak{g}$. Označme $W \subset V$ množinu všech vektorů s triviální akcí $\mathfrak{a}$. $W \neq \{0\}$, $YX_0 = X_0 Y + [Y, X_0]$ pro $Y \in \mathfrak{a}$. Pro $w \in W$ je $YX_0 w = X_0 0 + 0 = 0$, tedy $X_0 W \subset W$. Přitom $X_0|_W$ je nilpotentní a proto musí existovat vlastní vektor $w \in W$, $X_0 w = 0$. Pak w je hledaný vektor.

4.12. Věta (Engelova). *Nechť $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n)(V)$, $\dim V \geq 1$ je podalgebra nilpotentních operátorů. Pak $\mathfrak{g}$ je nilpotentní. Navíc, $\mathfrak{g}$ je nilpotentní právě, když $\operatorname{ad} X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ je nilpotentní pro všechna X.*

Důkaz. Dle Lemmatu 4.11 existuje $v \in V$, $v \neq 0$, $\mathfrak{g}v = 0$. Předpokládejme, že už máme bázi $\langle v_1, \dots, v_k \rangle = W \subset V$ takovou, že $\mathfrak{g}.\langle v_1, \dots, v_l \rangle \subset \langle v_1, \dots, v_{l-1} \rangle$. To znamená, že zúžení operátorů na W má vždy ostře horní trojúhelníkovou matici. Pak akce $\mathfrak{g}$ na V/W má opět vektor $v + W \neq 0$ takový, že $\mathfrak{g}(v + W) = \{0 + W\}$. Přitom $v \notin W$ a $\mathfrak{g}.v \subset W$. Proto $\langle v_1, \dots, v_k, v \rangle$ je opět podprostor s požadovanou vlastností. Po $\dim \mathfrak{g}$ krocích dostaneme bázi na V, ve které všechny $X \in \mathfrak{g}$ mají ostře horní trojúhelníkovou matici a $\mathfrak{g}$ je podalgebra v nilpotentní algebře, tedy nilpotentní.

Je-li $\mathfrak{g}$ nilponetní, pak všechny $\operatorname{ad} X$ jsou nilpotentní přímo dle definice nilpotentnosti. Nechť tedy naopak $\operatorname{ad} X$ je nilpotentní pro všechna $X \in \mathfrak{g}$. Opakováním předchozí konstrukce získáme posloupnost $0 \subset W_1 \subset W_2 \subset \dots \subset W_n = \mathfrak{g}$ s vlastností $\operatorname{ad} X : W_k \to W_{k-1}$. Pak ovšem každá iterované závorka s $\dim \mathfrak{g} + 1$ prvky je nulová a $\mathfrak{g}$ je tedy nilpotentní. $\square$

4.13. Věta (Lieova). *Nechť $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n)(V)$ je komplexní řešitelná Lieova algebra. Pak existuje společný vlastní vektor $v_0 \in V$ pro všechny $X \in \mathfrak{g}$, tj. $Xv_0 = \lambda(X)v_0$ pro lineární formu $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$.*

4.14. Poznámka. Ekvivalentní formulace:

(1) Každá ireducibilní reprezentace komplexní řešitelné Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ je jednorozměrná.
(2) Každá komplexní řešitelná Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je izomorfní jisté podalgebře horních trojúhelníkových matic.

Pro reálnou řešitelnou $\mathfrak{g}$ uvažme $v + iw \in V^{\mathbb{C}}$ – vektor z Lieovy věty pro komplexifikovanou $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, tedy pro $\mathfrak{g}$ máme dvourozměrný invariantní podprostor $\langle v, w\rangle$ a zúžení $\mathfrak{g}$ na $\langle v, w\rangle$ je abelovské. Zejména odtud plyne, že ireducibilní reprezentace reálné řešitelné Lieovy algebry je abelovská a nejvýše dvojrozměrná.

Důkaz Lieovy věty je opřen o následující lemma.

4.15. Lemma (Dynkin). *Nechť $\mathfrak{g}$ působí na V, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ je ideál, $\lambda : \mathfrak{a} \to \mathbb{C}$ lineární forma. Nechť $W \subset V$ je generován společnými vlastními vektory pro zúžení akce na $\mathfrak{a}$, s vlastní hodnotou λ. Pak W je invariantní vzhledem k $\mathfrak{g}$.*

Důkaz. Vezměme $v \in W$, $A \in \mathfrak{a}$, $X \in \mathfrak{g}$. Pak

$$AXv = XAv + [A, X]v = \lambda(A)Xv + \lambda([A, X])v \tag{1}$$

$$A(X^k v) = XAX^{k-1}v + [A, X]X^{k-1}v. \tag{2}$$

Stačí tedy ukázat, že $\lambda([A, X]) = 0$.

Podprostor $U := \langle v_0 := v, v_1 := Xv, \dots , v_k := X^k v, \dots\rangle \subset V$ je invariantní vůči X. Ukážeme, že $\mathfrak{a}U \subset U$. Zřejmě $Av_0 = \lambda(A)v_0 \in U$. Předpokládejme, že pro všechna $A \in \mathfrak{a}$ je $A(X^{k-1}v) \in U$. Pak $XAX^{k-1} \in U$ a $[A, X]X^{k-1}v \in U$, tedy dle (2) $AX^k v \in U$. Nyní z (1) a (2) máme, že matice $A \in \mathfrak{a}$ v bázi v_0, $v_1, \dots$ bude horní trojúhelníková s $\lambda(A)$ na diagonále $\Rightarrow \forall A \in \mathfrak{a}$ je $\mathrm{Tr}(A|_U) = \dim U \cdot \lambda(A)$. Zároveň $[A, X] \in \mathfrak{a}$ a $\mathrm{Tr}[A, X] = 0$. Při $\dim U > 0$ máme $\lambda([A, X]) = 0$.

Důkaz 4.13. Provedem indukci přes dimenzi $\mathfrak{g}$. Pro $\dim \mathfrak{g} = 0$ věta zřejmě platí. Nechť nyní $\dim \mathfrak{g} = n > 0$ a předpokládejme, že věta platí pro algebry dimenze menší. Každý vektorový podprostor v $\mathfrak{g}$ obsahující $\mathfrak{g}'$ je ideál, tedy v $\mathfrak{g}$ existuje ideál $\mathfrak{a}$ kodimenze 1. Podle předpokladu existuje na V společný vlastní vektor $v \in V$ pro akci $\mathfrak{a}$ s vlastní hodnotou $\lambda \in \mathfrak{a}^*$. Dle 4.15 je prostor W všech těchto vlastních vektorů invariantní vůči $\mathfrak{g}$. Předpokládejme, že $X_0 \in \mathfrak{g}$, $X_0 \notin \mathfrak{a}$. Pak $\langle X_0 + \mathfrak{a}\rangle = \mathfrak{g}$. $X_0 W \subset W$, $X_0|_W$ má vlastní vektor v_0 (platí nad $\mathbb{C}$, ne nad $\mathbb{R}$) s vlastní hodnotou $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Pro obecný prvek $X = A + rX_0 \in \mathfrak{g}$, $A \in \mathfrak{a}$, $r \in \mathbb{C}$, nyní máme $Xv_0 = \lambda(A)v_0 + r\lambda_0 v_0$. $\square$

5. Cartanova-Killingova forma

5.1. Definice. Nechť $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra nad $\mathbb{K}$, nechť $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ je reprezentace. Zobrazení $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (X, Y) \mapsto \mathrm{Tr}(\varphi(Y) \circ \varphi(X)) \in \mathbb{K}$ nazýváme *stopová forma* reprezentace φ a značíme ji t_φ.
Pro $\varphi = \mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ mluvíme o *Cartanově-Killingově formě* $\mathfrak{g}$, stručně budeme hovořit o Killingově formě. Její hodnotu na $X, Y \in \mathfrak{g}$ budeme značit (X, Y), $B(X, Y)$ nebo $\langle X, Y\rangle$. Tato bilineární forma je vždy symetrická.

5.2. Lemma. *Killingova forma na $\mathfrak{g}$ je invariantní pro každý automorfismus $\alpha : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ a pro každou derivaci $\mathrm{D} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ splňuje $B(DX, Y) + B(X, DY) = 0$. Zejména pro $D = \mathrm{ad}_{\mathrm{X}}$ dostaneme $B(Z, [X, Y]) + B(X, [Z, Y]) = 0$.*

Důkaz. Platí

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}(\alpha(X))(Y) &= [\alpha(X), Y] = \alpha[X, \alpha^{-1}(Y)] = \alpha \circ \mathrm{ad}(X) \circ \alpha^{-1}(Y)\\ B(\alpha(X), \alpha(Y)) &= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(\alpha(X)) \circ \mathrm{ad}(\alpha(Y)))\\ &= \mathrm{Tr}(\alpha \circ \mathrm{ad}(X) \circ \alpha^{-1} \circ \alpha \circ \mathrm{ad}(Y) \circ \alpha^{-1})\\ &= \mathrm{Tr}(\alpha \circ \mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y) \circ \alpha^{-1}) =\\ &= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, Y \circ \alpha^{-1} \circ \alpha \circ \mathrm{ad}\, X) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, X \circ \mathrm{ad}\, Y).\end{aligned}$$

Každá derivace na Lieově algebře vznikne skutečným derivováním "křivky automorfismů". Odtud okamžitě plyne zbývající tvrzení. □ cvičení!

5.3. Příklady. 1. $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.
Obecný vektor je $X = aX_+ + bH + cX_-$, pro bázové vektory X_-, X_+, H, viz. 3.2. Odtud

$$\mathrm{ad}_X \sim \begin{pmatrix} 2b & -2a & 0\\ -c & 0 & a\\ 0 & 2c & -2b \end{pmatrix} \qquad (\mathrm{ad}_X)^2 \sim \begin{pmatrix} 4b^2+2ac & -4ab & -2a^2\\ -2bc & 4ac & -2ab\\ -2c^2 & -4bc & 4b^2+2ac \end{pmatrix}$$

a tedy dostáváme $B(X, X) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, X \circ \mathrm{ad}\, X) = 8b^2 + 8ac$.
2. $\mathfrak{su}(2)$.
Zde $X = \alpha S_Z + \beta S_Y + \gamma S_X$, viz. 3.2, přičemž

$$\mathfrak{su}(2) \ni X \sim \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i\alpha & -\beta + i\gamma\\ \beta + i\gamma & -i\alpha \end{pmatrix}$$

Dostáváme tedy, že jako prvek v podgrupě $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ má X souřadnice

$$a = 1/2(-\beta + i\gamma),\ b = 1/2 i\alpha,\ c = 1/2(\beta + i\gamma)$$

Odtud $B(X, X) = 2(-\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2)$, je tedy zúžení B na $\mathfrak{su}(2)$ negativně definitní.
3. $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) \cong \mathfrak{su}(2)$ a tedy vyjde totéž.
4. $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$. Spočtěme $(\mathrm{ad}_A)^2 : M \mapsto AM - MA \mapsto A^2M - 2AMA + MA^2$. Budeme pracovat s bazí e^i_j v prostoru matic, kde

$$e^i_j = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0\\ & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots\\ & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow j.\\ \uparrow i \end{array}$$

Každá matice je tvaru $M = m^j_i e^i_j$ (vynecháváme znaky pro sumaci) a zobrazení $\beta\colon M \overset{\alpha}{\mapsto} AM \mapsto AMA$ je na bázových vektorech dáno $e^i_j \mapsto a^k_j e^i_k \mapsto a^k_j a^i_l e^l_k$. Odtud

$$\mathrm{Tr}\,\alpha = \sum_{i,j} a^j_j = n\,\mathrm{Tr}\,A,\ \ \mathrm{Tr}\,\beta = \sum_{i,j} a^j_j a^i_i$$

a tedy $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, A)^2 = 2n\,\mathrm{Tr}(A^2) - 2(\mathrm{Tr}\, A)^2$.
5. Speciální lineární algebry.
Pro $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ dostaneme zúžením $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, A)^2 = 2n\,\mathrm{Tr}(A^2)$. Všimněme si, že podalgebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ je ideál v $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$, proto je zúžení Killingovy formy opravdu Killingovou formou na podalgebře. Obecně to tak neplatí! cvičení!
6. Pro libovolnou nilpotentní $\mathfrak{g}$ je $B \equiv 0$. (Podle Lieovy věty jsou ve vhodné bázi na $\mathfrak{g}$ všechny operátory ad_X dány ostře horní trojúhelníkovou maticí.)

5.4. Věta (1. Cartanovo kriterium). *Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je řešitelná právě, když $B|_{\mathfrak{g}'} \equiv 0$.*

Připomeňme $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Pro důkaz můžeme předpokládat $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, protože triviálnost B i řešitelnost zůstávají zachovány při komplexifikaci. Nejprve dokážeme pomocné tvrzení:

5.5. Lemma. *Nechť $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ a pro všechny $X, Y \in \mathfrak{g}$ platí $\mathrm{Tr}(X \circ Y) = 0$. Potom derivovaná algebra $\mathfrak{g}'$ je nilpotentní.*

Důkaz. $\forall X \in \mathfrak{g}$ platí $X = X_s + X_n$ s X_s diagonalizovatelným a X_n nilpotentním (Jordanův kanonický tvar), $X_s X_n = X_n X_s$, navíc X_s, X_n jsou hodnoty vhodných polynomů v X. Ukážeme-li, že $X_s = 0$ pro všechny $X \in \mathfrak{g}'$, pak podle Engelovy věty tím bude tvrzení dokázáno. Polojednoduchá část X_s má ve vhodné bázi tvar $X_s = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ a uvažujme také matici $\bar{X}_s = \mathrm{diag}(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n)$. Protože $\mathrm{Tr}(\bar{X}_s X_s) = \sum_i |\lambda_i|^2$, stačí ukázat, že je tato stopa nulová.

Předpokládejme nejprve, že $\mathrm{ad}\, \bar{X}_s(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$. Jistě existuje polynom P takový, že $P(\lambda_i) = \bar{\lambda}_i$, to tedy znamená, že $\bar{X}_s = P(X_s)$. Jako hodnoty jistých polynomů v téže matici X spolu jistě komutují $\bar{X}_s$ a X_n a tedy $\bar{X}_s X_n$ je nilpotentní, což znamená, že $\mathrm{Tr}(\bar{X}_s X_n) = 0$. Proto také $\mathrm{Tr}(\bar{X}_s \circ X) = \sum_i \lambda_i \bar{\lambda}_i$. Předpokládejme, že $X \in \mathfrak{g}'$, $X = \sum_k [A_k, B_k]$. Počítejme

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\bar{X}_s[A_k, B_k]) &= \mathrm{Tr}(\bar{X}_s A_k B_k - \bar{X}_s B_k A_k) \\ &= \mathrm{Tr}(\bar{X}_s A_k B_k) - \mathrm{Tr}(A_k \bar{X}_s B_k) = \mathrm{Tr}([\bar{X}_s, A_k] B_k).\end{aligned}$$

Protože $[A_k, \bar{X}_s] \in \mathfrak{g}$, je podle předpokladu věty $\mathrm{Tr}([A_k, \bar{X}_s] B_k) = 0$, ale zároveň

$$\mathrm{Tr}(\bar{X}_s X) = \sum_k \mathrm{Tr}(\bar{X}_s [A_k, B_k]) = \sum_i |\lambda_i|^2$$

což implikuje $\bar{X}_s = 0$ a to je to, co jsme chtěli dokázat.

Zbývá tedy ukázat, že $\mathrm{ad}\, \bar{X}_s(\mathfrak{g}) \subset g$. Platí

$$\mathrm{ad}\, X = \mathrm{ad}\, X_s + \mathrm{ad}\, X_n, \quad [\mathrm{ad}\, X_s, \mathrm{ad}\, X_n] = 0.$$

Přitom $\mathrm{ad}\, X_n$ je nilpotentní a $\mathrm{ad}\, X_s(e_i^j) = (\lambda_i - \lambda_j) e_i^j$. Proto $\mathrm{ad}\, X = \mathrm{ad}\, X_s + \mathrm{ad}\, X_n$ je opět Jordanův rozklad. Dále $\mathrm{ad}\, \bar{X}_s$ je diagonální s vlastními hodnotami $(\bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_j)$ u e_i^j a proto je $\mathrm{ad}\, \bar{X}_s$ opět polynom v $\mathrm{ad}\, X_s$, proto i v $\mathrm{ad}\, X$. To tedy znamená, že $\mathfrak{g}$ je invariantní vůči $\mathrm{ad}\, \bar{X}_s$. $\square$

Důkaz věty 5.4. Je-li $\mathfrak{g}$ řešitelná, je její derivovaná algebra nilpotentní a proto je na ní B identicky nulová, viz. příklad 5.3.(6).

Uvažme $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) := \mathrm{Ker}(\mathrm{ad})$ je centrum $\mathfrak{g}$. Dostaneme exaktní posloupnost $0 \to \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{q} \to 0$, kde $\mathfrak{q} = \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, a dobře definované injektivní zobrazení $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{q} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Můžeme proto $\mathfrak{q}$ ztotožnit s podalgebrou v $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

Z definice plyne, že je-li $B \equiv 0$ na $\mathfrak{g}'$, pak $(\mathrm{Tr}(Y \circ X) = 0\ \forall X, Y \in \mathfrak{q}')$. Podle předchozího lematu to znamená, že $(\mathfrak{q}')'$ je nilpotentní. Odtud plyne, že $\mathfrak{q}'$ je řešitelná a tedy i $\mathfrak{q}$ je řešitelná. Protože $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ je abelovská podalgebra, je také řešitelná. Podle 4.6.(2) je tedy $\mathfrak{g}$ řešitelná. $\square$

5.6. Věta (2. Cartanovo kriterium). *Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je polojednoduchá právě, když má kladnou dimenzi a Killingova forma B je nedegenerovaná.*[6]

Důkaz. Nedegenerovanost B a polojednoduchost $\mathfrak{g}$ se zachovávají při komplexifikaci, můžeme tedy předpokládat, že $\mathfrak{g}$ je komplexní. cvičení!
(1) Předpokládejme, že $\mathfrak{g}$ není polojednoduchá. Tedy obsahuje nenulový abelovský ideál $\mathfrak{a}$ (abelovská je totiž jistě poslední nenulová derivovaná algebra $\mathfrak{g}^{(k)}$). Uvažme $0 \neq A \in \mathfrak{a}$, $X \in \mathfrak{g}$. Pak $\mathrm{ad}_A \circ \mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{a} \to \mathfrak{a} \to 0$, proto $\mathrm{ad}_A \circ \mathrm{ad}_X$ je nilpotentní stupně 2, tedy $B(A,X) = 0$. Protože X je libovolné, pro indukované zobrazení $\hat{B} \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ platí $\hat{B}(A) = \{0\} \subset \mathfrak{g}^*$, je tedy B degenerovaná.
Je-li B degenerovaná, pak $\mathfrak{g}^\perp = \{X;\ B(X,Y) = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}\} \neq \{0\}$. Z invariantnosti B, tj. rovnosti $B(X,[Y,Z]) + B([Y,X],Z) = 0$, vyplývá že $\mathfrak{g}^\perp$ je ideál. Proto zúžení $B|\mathfrak{g}^\perp$ je Killingova forma $\mathfrak{g}^\perp$ a proto $\mathfrak{g}^\perp$ je řešitelný ideál. □

5.7. Důsledek. *Algebra $\mathfrak{g}$ je polojednoduchá $\iff$ je přímý součet jednoduchých.*

Důkaz. Nechť $\mathfrak{g}$ je polojednoduchá a $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ nenulový ideál. $\mathfrak{a}^\perp = \{X;\ B(X,Y) = 0,\ \forall Y \in \mathfrak{a}\}$. Z invariantnosti B plyne, že $\mathfrak{a}^\perp$ je opět ideál. Pak $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ je ideál s nulovou B, a proto $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ je řešitelný, tedy $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp = \{0\}$. Z toho plyne, že $\dim \mathfrak{a} + \dim \mathfrak{a}^\perp = \dim \mathfrak{g}$. Navíc $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^\perp] \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp = \{0\}$, proto $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$ jako Lieova algebra. Konečným počtem kroků získáme rozklad na přímé součty.

Naopak, Killingova forma přímého součtu jednoduchých algeber je nedegenerovaná. □

V důkazu jsme dokázali více:

5.8. Důsledek. *Každý polojednoduchý ideál $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ v libovolné algebře $\mathfrak{g}$ je přímým sčítancem.* cvičení!

5.9. Důsledek. *Ideály a homomorfní obrazy polojednoduchých algeber jsou polojednoduché.*

Důkaz. (1) Nechť $\mathfrak{g}$ je polojednoduchá, tedy $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^n \mathfrak{g}_i$, kde $\mathfrak{g}_i$ jsou jednoduché. Nechť $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ její ideál. Dokažme implikaci : $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_i \neq \{0\} \Rightarrow \mathfrak{g}_i \subseteq \mathfrak{a}$.

Jistě je $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_i$ ideál v $\mathfrak{g}_i$, ale $\mathfrak{g}_i$ je jednoduchá z čehož plyne, že $\mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{g}_i$. Ale to znamená, že $\mathfrak{g}_i \subseteq \mathfrak{a}$. Nyní je $\mathfrak{a} = \oplus\{\mathfrak{g}_i;\ \mathfrak{g}_i \subseteq \mathfrak{a}\}$.
(2) Nechť $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^n \mathfrak{g}_i$ je polojednoduchá a $f : \mathfrak{g} \to f(\mathfrak{g})$ homomorfismus. Jádro f je ideál, podle předchozí části důkazu je proto přímým součtem některých jednoduchých sčítanců. Můžeme proto rovnou předpokládat, že f je prosté. Protože f je homomorfismus, máme potom $f(\mathfrak{g}) = \oplus\{f(\mathfrak{g}_i);\ f(\mathfrak{g}_i) \neq \{0\}\}$. $\operatorname{Ker} f|\mathfrak{g}_i$ je ideál v $\mathfrak{g}_i$. Protože $\mathfrak{g}_i$ je jednoduchá, dostáváme $\operatorname{Ker} f|\mathfrak{g}_i = \{0\}$ a proto $f|\mathfrak{g}_i$ je izomorfismus $\mathfrak{g}_i$, a $f(\mathfrak{g}_i)$ je jednoduchá. Celkem jsme ukázali, že $f(\mathfrak{g})$ je součet jednoduchých algeber. □

5.10. Důsledek. *Každá derivace polojednoduché Lieovy algebry je vnitřní, tj. je rovna* $\mathrm{ad}\, X$ *pro vhodné* $X \in \mathfrak{g}$.

Důkaz. Nechť $D \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ je derivace polojednoduché $\mathfrak{g}$. Uvažme vektorový prostor $\mathfrak{g} \oplus \mathbb{K}D$ (tj. přidáme jeden generátor D) a definujme

$$[D,D] = 0, \quad [D,X] = -[X,D] = D(X),\ X \in \mathfrak{g}$$

[6]Nedegenerovanost bilineární formy $f : V \times V \to \mathbb{K}$ značí, že indukované lineární zobrazení $\hat{f} : V \to V^*$ je izomorfismus.

a definici závorky uvnitř $\mathfrak{g}$ ponecháme. Ověřte, že je takto dobře definována Lieova algebra. Z definice plyne, že $\mathfrak{g}$ je v ní polojednoduchý ideál. Proto existuje doplňkový ideál, nechť je generován prvkem $-Y + D$, $Y \in \mathfrak{g}$ (musí mít jako vektorový prostor dimenzi 1). Pak pro všechny $X \in \mathfrak{g}$ platí $[-Y + D, X] = 0$, tzn. $D(X) = [Y, X]$. $\square$ cvičení!

6. Rozložitelnost reprezentací polojednoduchých algeber

6.1. Univerzální obalující algebra $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$.
Buď $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ reprezentace. Definujme rozšíření zobrazení λ na celou tensorovou algebru $T(\mathfrak{g}) := \bigoplus_{i=0}^{\infty} \otimes^i \mathfrak{g}$:

$$\tilde{\lambda} \colon T(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{gl}(V)\,,$$
$$\tilde{\lambda}(X_k \otimes X_{k-1} \otimes \ldots \otimes X_1) := \lambda(X_k) \circ \lambda(X_{k-1}) \circ \ldots \circ \lambda(X_1) \in \mathfrak{gl}(V)$$

kde $\otimes^0 \mathfrak{g} = \mathbb{K}$ a $\otimes^1 \mathfrak{g} = \mathfrak{g}$. Položme $I = \langle \{X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y];\ X, Y \in \mathfrak{g}\} \rangle$ oboustranný ideál v $T(\mathfrak{g})$ a definujme $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g})/I$. Každé $\tilde{\lambda} : T(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{gl}(V)$ jednoznačně určuje homomorfismus $\overline{\lambda} : \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{gl}(V)$. V dalším nebudeme v zápisu rozlišovat mezi λ, $\tilde{\lambda}$, $\overline{\lambda}$.

Násobení v tenzorové algebře $T(\mathfrak{g})$ indukuje násobení na $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ a dostáváme tak asociativní algebru. Násobení v ní budeme značit tečkou.[7]

6.2. Casimirův operátor. Nechť $\mathfrak{g}$ je polojednoduchá, nechť $e_i \in \mathfrak{g}$, $e'_i \in \mathfrak{g}$ jsou báze duální vzhledem k B, tj. $B(e_i, e'_j) = \delta_{ij}$. Klademe

$$C := \sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}} e_i \cdot e'_i \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}).$$

Prvek $C \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ nazýváme Casimirův operátor.[8]

Lemma. *$C = \sum e_i \cdot e'_i$ je v centru $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ a nezávisí na volbě e_i, e'_i.*

Důkaz. Pro všechny $X \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ platí:

$$X \cdot C = X \cdot (\sum_i e_i \cdot e'_i) = \sum_i X \cdot e_i \cdot e'_i = \sum_i (e_i \cdot X \cdot e'_i + [X, e_i] \cdot e_i) =$$
$$\sum_i (e_i \cdot e'_i X + e_i \cdot [X, e'_i] + [X, e_i] \cdot e_i)$$

Potřebujeme tedy dokázat, že součet všech $(e_i \cdot [X, e'_i] + [X, e_i] \cdot e_i)$.

Definujme

$$\varphi : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V),\ \varphi(X \otimes Y)(Z) := B(Y, Z) \cdot X.$$

[7] Původní algebra $\mathfrak{g}$ je injektivně vložena univerzální obalující algebry $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, kterou lze definovat jako univerzální objekt pro zobrazení $\mathfrak{g} \to A$ do libovolné asociativní algebry A, které zobrazuje závorky na komutátory.

[8] Často se jako Casimirův operátor algebry $\mathfrak{g}$ označuje každý prvek centra univerzální obalující algebry.

Každý prvek v jádru φ lze zapsat $\sum_i X_i \otimes Y_i \in \operatorname{Ker}\varphi$ a můžeme přitom předpokládat, že vektory X_i jsou lineárně nezávislé. Pro takové prvky platí $\sum_i B(Y_i, Z)\cdot X_i = 0$ pro všechna Z a proto $B(Y_i, Z) = 0$ pro všechna i a Z. Proto $Y_i = 0$ a tedy φ je prosté. Je proto φ izomorfismus vektorových prostorů.

Dále $\varphi(\sum_i e_i \otimes e_i')(Z) = \sum_i B(e_i', Z)\cdot e_i = Z$, tj. $\varphi(\sum_i e_i \otimes e_i') = \mathrm{id}_{\mathfrak g}$ a protože je φ izomorfismus C nezávisí na volbě e_i, e_i'.

Spočtěme, že pro každé $Z \in \mathfrak g$ je $\varphi(\mathrm{ad}_Z X \otimes Y) + \varphi(X \otimes \mathrm{ad}_Z Y) = [\mathrm{ad}_Z, \varphi(X \otimes Y)]$:

$$\begin{aligned}
&(\varphi(\mathrm{ad}_Z X \otimes Y) + \varphi(X \otimes \mathrm{ad}_Z Y))(A) = \\
&\quad B(Y,A)\,\mathrm{ad}_Z(X) + B(\mathrm{ad}_Z Y, A)X = B(Y,A)[Z,X] + B([Z,Y],A)X = \\
&\quad [Z, B(Y,A)X] - B(Y,[Z,A])X = \mathrm{ad}_Z(B(Y,A)X) - \varphi(X\otimes Y)[Z,A] = \\
&\qquad\qquad \mathrm{ad}_Z(\varphi(X\otimes Y)(A)) - \varphi(X \otimes Y)\,\mathrm{ad}_Z A = [\mathrm{ad}_Z, \varphi(X\otimes Y)](A).
\end{aligned}$$

Nyní víme, že φ je izomorfismus a $[\mathrm{ad}_Z, \mathrm{id}_{\mathfrak g}] = 0$. Z předchozího výpočtu tedy vyplývá, že $\sum_i((\mathrm{ad}_X e_i)\otimes e_i') + e_i \otimes \mathrm{ad}_X e_i') = 0$, což je právě požadovaná rovnost $\square$

Pro libovolné dvě reprezentace Lieovy algebry $\mathfrak g$ na vektorových prostorech V, W rozumíme *homomorfismem* $\varphi\colon V \to W$ takové lineární zobrazení, které splňuje $\varphi(X.v) = X.\varphi(v)$ pro všechny $X \in \mathfrak g$. Hovoříme také o *modulech* nad $\mathfrak g$ a jejich homomorfismech.

6.3. Schurovo lemma. *Je-li $\varphi : V \to V$ homomorfismus ireducibilní reprezentace algebry $\mathfrak g$, potom φ je násobek identity.*

Důkaz. Předpokládejme, že $\mathfrak g$ je komplexní algebra. Vezměme libovolný vlastní vektor $v \in V$, tj. $\varphi(v) = \alpha \cdot v$. Pak jistě podmodul generovaný v je V, tedy každý prvek z V lze psát jako $\lambda(X)(v)$, přičemž máme $\varphi(\lambda(X)(v)) = \lambda(X)(\varphi(v)) = \alpha \cdot \lambda(X)(v)$.

Pro reálnou algebru použijeme proceduru komplexifikace. $\square$ cvičení!

6.4. Lemma. *Buď $\lambda : \mathfrak g \to \mathfrak{gl}(V)$ ireducibilní reprezentace polojednoduché algebry $\mathfrak g$, $\dim V > 1$. Potom Casimirův operátor C působí násobením nenulovým skalárem.*

Důkaz. Pokud λ není prosté, použijeme reprezentaci $\mathfrak g/\ker\lambda$. Přitom $\mathfrak g/\ker\lambda$ je opět polojednoduchá (viz. 5.9). Můžeme tedy předpokládat $\mathfrak g \subset \mathfrak{gl}(V)$. (Prověřte si podrobně!) Pak i Casimirův operátor C lze považovat za prvek $\mathfrak{gl}(V)$. Protože je C cvičení! v centru obalující algebry, jde o homomorfismus $V \to V$, proto podle předchozího lemmatu působí C násobením skalárem. Spočtěme stopu tohoto homomorfismu:

$$\operatorname{Tr} C = \sum_i \operatorname{Tr}(e_i \cdot e_i') = \sum_i B(e_i, e_i') = \dim \mathfrak g \neq 0. \qquad \square$$

6.5. Věta. *Buď $\lambda : \mathfrak g \to \mathfrak{gl}(V)$ reprezentace polojednoduché algebry $\mathfrak g$ a buď $W \subset V$ invariantní podprostor. Potom existuje invariantní podprostor $W' \subset V$ takový, že $V = W \oplus W'$.*

Důkaz.

1) Předpokládáme $W \subset V$ ireducibilní s kodimenzí 1. Akce C zúžená na W je násobení nenulovým skalárem, na V/W ovšem působí celá $\mathfrak g$ triviálně ($\mathfrak g = \mathfrak g'$ a na 1-dimenzionálním V/W působí každá závorka triviálně). Odtud $V = W \oplus \ker C$, přičemž $\ker C$ je invariantní, protože C je homomorfismus.

2) Indukcí přes dimenzi V dokážeme případ $W \subset V$, $\operatorname{codim} W = 1$ (tj. V nemusí být ireducibilní): Mějme $0 \neq Z \subset W$ invariantní. Pak podle indukčního předpokladu $V/Z = W/Z \oplus Y/Z$ pro vhodné $Y \subset V$ invariantní. Nyní $Z \subset Y$ a Z má v Y kodimenzi 1, tedy podle indukčního předpokladu $Y = Z \oplus U$ pro nějaké U invariantní. To ale dává $V = W \oplus U$.

3) Mějme nyní $W \subset V$ ireducibilní. Definujeme $\rho : \operatorname{Hom}(V, W) \to \operatorname{Hom}(W, W)$ jako zúžení. Na $\operatorname{Hom}(V, W)$ můžeme opět definovat akci $\mathfrak{g}$ předpisem: $(X\varphi)(v) = X(\varphi(v)) - \varphi(Xv)$ pro $X \in \mathfrak{g}$, $\varphi \in \operatorname{Hom}(V, W)$ a $v \in V$ (tj. uvažujeme standardní tenzorový součin reprezentací). Homomorfismy $\mathfrak{g}$-modulů $\operatorname{Hom}(W, W)^{\mathfrak{g}}$ tvoří 1-rozměrný podprostor $\operatorname{Hom}(W, W)$, viz. Lemma 6.3. Označíme D podprostor $\rho^{-1}(\operatorname{Hom}(W, W)^{\mathfrak{g}}) \subset \operatorname{Hom}(V, W)$. Vezměme podprostor A kodimenze 1 v D těch zobrazení, která se v ρ zobrazí na 0. Protože ρ je homomorfismus $\mathfrak{g}$-modulů, je A invariantní podprostor. Tedy k němu podle 2) existuje v D invariantní komplement dimenze 1. V něm zejména existuje $\psi : V \to W$ takové, že $\rho(\psi) = \mathrm{id}_W$. Přitom $\rho(X\psi) = X\rho(\psi) = 0$, protože jsme opět na 1-dimenzionálním prostoru. Je tedy ψ $\mathfrak{g}$-ekvivariantní projekce $V \to W$. Proto $V = W \oplus \ker \psi$ a $\ker \psi$ invariantní podprostor. □

æ

7. Cartanovy podalgebry, váhy a kořeny

V této kapitole předpokládáme všechny prostory nad $\mathbb{C}$.

7.1. Definice. Nilpotentní podalgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, která je rovna svému normalizátoru (tj. množině $\{X \in \mathfrak{g};\ [X, Y] \in \mathfrak{h}$ pro všechny $Y \in \mathfrak{h}\}$)[9], se nazývá *Cartanova podalgebra*.

7.2. Buď $\varphi\colon V \to V$ homomorfismus vektorových prostorů. *Kořenové prostory* V_λ, $\lambda \in \mathbb{C}$, jsou podprostory V definované předpisem:

$$v \in V_\lambda \iff \exists\, k \in \mathbb{N} : (\varphi - \lambda\, \mathrm{id}_V)^k(v) = 0\,.$$

Pro komplexní vektorové prostory vždy platí $V = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}} V_\lambda$, přičemž $V_\lambda \neq \{0\}$ právě, když λ je vlastní hodnota φ. Aplikujeme-li toto tvrzení na komplexní algebru $\mathfrak{g}$ a homomorfismus $\mathrm{ad}_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $X \in \mathfrak{g}$, dostáváme

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}} \mathfrak{g}_\lambda(X)\,.$$

Lemma. *Pro $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $X \in \mathfrak{g}$ platí:*

$$[\mathfrak{g}_\lambda(X), \mathfrak{g}_\mu(X)] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}(X).$$

Zejména pro $\lambda, \mu = 0$ to znamená, že $\mathfrak{g}_0(X)$ je podalgebra $\mathfrak{g}$.

---

[9] název odpovídá spíše terminologii grup – je to algebra odpovídající největší podgrupě A obsahující podgrupu B příslušnou dané podalgebře takové, že $B \subset A$ je normální podgrupa, proto se také někdy hovoří o *idealizátoru* – největší podalgebra ve které je daná ideálem.

Důkaz. Spočteme-li

$$\begin{aligned}(\operatorname{ad}_X - (\lambda+\mu)\operatorname{id}_{\mathfrak g})([Y,Z]) &= [X,[Y,Z]] - (\lambda+\mu)[Y,Z] \\ &= [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]] - [\lambda Y, Z] - [Y,\mu Z] \\ &= [(\operatorname{ad}_X - \lambda\operatorname{id}_{\mathfrak g})Y, Z] + [Y, (\operatorname{ad}_X - \mu\operatorname{id}_{\mathfrak g})Z]\end{aligned}$$

snadno vidíme, že další aplikací $(\operatorname{ad}_X - (\lambda+\mu)\operatorname{id}_{\mathfrak g})$ se budou mocniny u zobrazení v závorkách zvyšovat, a tedy se po dostatečném počtu iterací všechny závorky v součtu vynulují. □

7.3. Pro nenulové $X \in \mathfrak g$ rozepíšeme

$$\det(\operatorname{ad}_X - \lambda\operatorname{id}_{\mathfrak g}) = (-1)^n\lambda^n + D_1(X)\lambda^{n-1} + \ldots + D_{n-1}(X)\lambda + D_n(X)\,,$$

přičemž $D_n(X) = \det(\operatorname{ad}_X) = 0$, neboť $\operatorname{ad}_X X = 0$. Označme $r_0 \in \mathbb N$ největší číslo takové, že $\exists\, X \in \mathfrak g : D_{r_0}(X) \neq 0$ (tzn. $\forall\, X \in \mathfrak g$ je násobnost vlastní hodnoty 0 morfismu ad_X alespoň $n - r_0$).

Lemma. *Nechť $Y \in \mathfrak g$ je takové, že $D_{r_0}(Y) \neq 0$. Pak $\mathfrak h := \mathfrak g_0(Y)$ je Cartanova podalgebra $\mathfrak g$.*

Důkaz. Podle předchozího lemmatu je $\mathfrak h$ podalgebra a zřejmě $Y \in \mathfrak h$. Pro všechna $\lambda \neq 0$ je $\operatorname{ad}_Y|_{\mathfrak g_\lambda(Y)} : \mathfrak g_\lambda(Y) \to \mathfrak g_\lambda(Y)$ a je invertibilní. Navíc $\mathfrak g_\lambda(Y)$ je vždy $\mathfrak h$-modul. Díky spojitosti determinantu jistě existuje okolí U prvku Y v $\mathfrak h$ takové, že všechny jeho prvky působí na $\mathfrak g_\lambda(Y)$ invertibilními transformacemi. Současně všechna $Z \in U$ působí na $\mathfrak g_0(Y)$ nilpotentně, protože jinak by násobnost vlastní hodnoty 0 byla pro ad_Z menší než pro ad_Y. Přitom ale nilpotentnost je dána vynulováním jistého algebraického výrazu na $\mathfrak h$, a tedy z nilpotentnosti působení všech Z z otevřené množiny $U \subset \mathfrak h$ plyne nilpotentnost působení všech $Z \in \mathfrak h$. Podle Engelovy věty to znamená, že $\mathfrak h = \mathfrak g_0(Y)$ je nilpotentní.

Mějme $X \in \mathfrak g_\lambda(Y)$, $\lambda \neq 0$, takové, že $[X,Y] = -\operatorname{ad}_Y X \in \mathfrak g_0(Y)$. Pak současně $\operatorname{ad}_Y X \in \mathfrak g_\lambda(Y)$, což znamená $\operatorname{ad}_Y X = 0$, a tedy $X = 0$. Dostáváme, že $\mathfrak h$ je rovna svému normalizátoru, dohromady $\mathfrak h$ je Cartanova. □

7.4. Příklady.
(1) Uvažujme $\mathfrak g = \mathfrak{gl}(n,\mathbb C)$, a J nechť je Jordanův blok řádu k

$$J = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdot & 0 \\ & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & a \end{pmatrix}.$$

Pokud pro matici A platí $JA - AJ = 0$, pak A má pod diagonálou samé nuly a "další" diagonály jsou konstantní. Tj. pro matici v Jordanově kanonickém tvaru cvičení!

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & J_2 & \cdot & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdot & J_s \end{pmatrix}$$

má $\operatorname{Ker}\operatorname{ad}_A$ minimální dimenzi právě tehdy, když vlastní hodnoty příslušné blokům $J_1, \ldots, J_s$ jsou různé. Zvolme přímo diagonální Y s $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ na diagonále, $\lambda_i \neq \lambda_j$

pro $i \neq j$. Pak $\mathfrak{g}_0(Y)$ tvoří všechny diagonální matice, což je vlastně abelovská Lieova algebra $\mathbb{C}^n$.
(2) Je-li $\mathfrak{g}$ nilpotentní, potom $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$. ($\mathrm{ad}_X$ je nilpotentní pro všechna X, tzn. $\mathfrak{g}_0(X) = \mathfrak{g}$).
(3) Nechť $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Potom $\mathfrak{h} = \mathbb{C}\, H = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \subset \mathfrak{g}$.
(4) V $\mathfrak{aff}(1)$ je $\mathfrak{h} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7.5. Definice. Nechť $\mathfrak{h}$ je libovolná nilpotentní algebra, $\varphi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(V)$ reprezentace. *Váhový vektor reprezentace* φ je $v \in V$ takový, že pro všechny $H \in \mathfrak{h}$ platí $(\varphi(H) - \lambda(H)\,\mathrm{id}_V)^k(v) = 0$ pro dostatečně velké k a vhodné $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Lineární forma λ se nazývá *váha reprezentace* φ.[10]

Ve speciálním případě kdy $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ je Cartanova podalgebra a φ je zúžení operátoru ad hovoříme o *kořenech* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ algebry $\mathfrak{g}$ (příslušných volbě $\mathfrak{h}$).[11]

7.6. Věta. *Nechť $\mathfrak{h}$ je nilpotentní, $\varphi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(V)$ libovolná reprezentace a $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.*
(1) *Množina V_λ všech váhových vektorů příslušných $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ je vektorový podprostor.*
(2) *V_λ jsou invariantní vzhledem k φ a $V = \oplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$.*
(3) *Zúžení $\varphi|V_\lambda$ má jedinou váhu λ.*

Důkaz.
(1) Podle definice je V_λ průnikem kořenových prostorů zobrazení $\varphi(H)$ příslušným $\lambda(H)$ přes všechny $H \in \mathfrak{h}$, tedy V_λ je vektorový podprostor.
(2) Stačí ukázat invariantnost každého kořenového podprostoru $R_{\lambda(H)} \supset V_\lambda$. Nechť $v \in R_{\lambda(H)}$, $H' \in \mathfrak{h}$ a předpokládejme $(\mathrm{ad}_H)^k(H') = 0$. Potřebujeme ukázat, že pak také $\varphi(H')(v) \in R_{\lambda(H)}$. Dokážeme to indukcí přes potřebný exponent k. Platí

$$(\varphi(H) - \lambda(H)\,\mathrm{id}_V)(\varphi(H')(v)) = \varphi(H')(\varphi(H) - \lambda\,\mathrm{id}_V)(v) + \varphi([H, H'])(v).$$

Pro $k = 1$ je tedy tvrzení zřejmé, protože člen se závorkou v tomto případě zmizí a iterací akce získáme potřebné.

Iterováním předchozí rovnosti dostáváme:

$$(\varphi(H) - \lambda(H)\,\mathrm{id}_V)^s(\varphi(H')) = \varphi(H')(\varphi(H) - \lambda\,\mathrm{id}_V)^s + \\ + \sum_{m=0}^{s-1} (\varphi(H) - \lambda(H)\,\mathrm{id}_V)^{s-m-1} \varphi([H, H'])(\varphi(H) - \lambda(H)\,\mathrm{id}_V)^m.$$

Přitom $(\varphi(H) - \lambda(H)\,\mathrm{id}_V)$ má na $R_{\lambda(H)}$ stupeň nilpotentnosti nejvýše $\dim R_{\lambda(H)}$ (viz. Hamiltonova-Caleyova věta v lin. algebře). Podle indukčního předpokladu je $R_{\lambda(H)}$ invariantní vzhledem k $\varphi([H, H'])$, protože $(\mathrm{ad}_H)^k(H') = (\mathrm{ad}_H)^{k-1}([H, H'])$. Proto pro $s > 2 \dim R_{\lambda(H)}$ je

$$(\varphi(H) - \lambda(H)\,\mathrm{id}_V)^s(\varphi(H'))(v) = \varphi(H')(0) + 0 = 0.$$

---

[10] V lineární algebře se častěji používá názvů kořenové vektory a vlastní hodnoty nebo vlastní čísla. V teorii polojednoduchých algeber rezervujeme ale pojem "kořen" pro speciální případ.

[11] Ve skutečnosti uvidíme, že v rozumných algebrách jsou Cartanovy podalgebry určeny až na vnitřní automorfismus algebry, v praxi pak zpravidla uvažujeme jednu pevně zvolenou Cartanovu podalgebru.

Tím je ukázána invariantnost podprostorů V_λ. Zbývá ukázat, že generují celé V a $\oplus_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} V_\lambda$ je přímý:

Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathfrak{h}^*$ jsou váhy, pro něž je $V_\lambda \neq 0$. Potom existuje $H \in \mathfrak{h}$ takové, že $\lambda_i(H) \neq \lambda_j(H)$ pro všechny $i \neq j$ (rovnost $\lambda_i(H) = \lambda_j(H)$ definuje nadrovinu v $\mathfrak{h}$, je tedy pouze třeba vybrat vektor v $\mathfrak{h}$, který nepadne do konečného sjednocení nadrovin). Tedy $v_i \in R_{\lambda_i(H)}$ a proto jsou v_i nezávislé (viz. elementární lin. algebra). Indukcí přes dimenzi V nyní ukážeme, že váhové prostory generují celé V. Pro $\dim V = 0$ je to zřejmé. Předpokládejme, že to platí pro $\dim V < k$ a uvažme $\dim V = k$. Předpokládejme nejprve, že každé $\varphi(H)$ má právě jednu vlastní hodnotu $\lambda(H)$. Z Lieovy věty pak vyplývá $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ a $V = V_\lambda$.

Předpokládejme nakonec, že $\varphi(H)$ má různé vlastní hodnoty $\lambda_1(H), \dots, \lambda_r(H)$, $r > 1$. Pak $V = R_{\lambda_1(H)} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_r(H)}$ je rozklad na kořenové prostory. Ukázali jsme, že $R_{\lambda_i(H)}$ jsou invariantní, tj. V je přímým součtem invariantních podprostorů menší dimenze. Podle indukčního předpokladu se každý z nich rozkládá na přímý součet váhových podprostorů.

(3) Uvažujme zúžení reprezentace φ na V_λ a předpokládejme, že μ je váha příslušná nějakému společnému vlastnímu vektoru $v \in V_\lambda$ (existuje podle Lieovy věty). Pak pro každé $H \in \mathfrak{h}$ je $(\varphi(H) - \lambda(H)\operatorname{id}_{V_\lambda})$ nilpotentní a $\varphi(H) - \mu(H)\operatorname{id}_{V_\lambda}$ má nulovou vlastní hodnotu. Pro každé $v \in V_\lambda$, $H \in \mathfrak{h}$ je ale $v \in R_{\lambda(H)}$ odpovídajícímu $\varphi(H)$ a proto při $\mu \neq \lambda$ je $(\varphi(H) - \mu \operatorname{id}_V)|R_{\lambda(H)}$ invertibilní. Ukázali jsme ale, že tento operátor invertibilní není, proto $\lambda = \mu$. $\square$

Nyní můžeme předchozí výsledek aplikovat na reprezentaci $\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}$ Cartanovy podalgebry $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ na $\mathfrak{g}$. V tomto případě získáme i řadu dalších informací o kořenových prostorech. Pro každý kořen α označíme $\mathfrak{g}_\alpha = \cap_{X\in\mathfrak{h}} \mathfrak{g}_\alpha(X)$ příslušný kořenový podprostor v $\mathfrak{g}$. Množinu všech nenulových kořenů $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ budeme značit Δ, pro všechny kořeny budeme užívat symbol $\Delta_0 = \Delta \cup \{0\}$.

7.7. Věta. *Nechť $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ je Cartanova podalgebra. Potom*

(1) $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$ *a* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha$
(2) *Pro každé $\alpha \in \Delta$, $H \in \mathfrak{h}$ má $\operatorname{ad}_H|\mathfrak{g}_\alpha$ právě jednu vlastní hodnotu $\alpha(H)$*
(3) *Je-li $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Delta_0$ je $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, jinak je závorka nulová*
(4) *Jestliže $\alpha + \beta \neq 0$, $\alpha, \beta \in \Delta$, je $\mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g}_\beta$ vzhledem k Killingově formě B*
(5) *Pro všechny $H, H' \in \mathfrak{h}$ platí $B(H, H') = \sum_{\alpha\in\Delta} (\dim \mathfrak{g}_\alpha)\alpha(H)\alpha(H')$.*

Důkaz. (1): Dokážme $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$ zbytek pak plyne přímo z předchozí věty. Platí $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$, protože $\mathfrak{h}$ je nilpotentní. Uvažme akci $\mathfrak{h}$ na faktorovém prostoru $\mathfrak{g}_0/\mathfrak{h}$. Podle Lieovy věty buď existuje společný vlastní vektor nebo $\mathfrak{g}_0/\mathfrak{h} = 0$. Ale všechny vlastní hodnoty jsou 0, tedy pokud $\mathfrak{g}_0 \neq \mathfrak{h}$, pak existuje $Y \in \mathfrak{g}_0 \setminus \mathfrak{h}$ takové, že $[H, Y] \in \mathfrak{h}$ pro všechna $H \in \mathfrak{h}$, což je spor s definicí $\mathfrak{h}$. Proto nutně $\mathfrak{g}_0/\mathfrak{h}$ je triviální vektorový prostor, tj. $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$.

Tvrzení (2),(3) jsou důsledky předchozí věty a lemmatu 7.2.

(4): Podle (3) platí $[\mathfrak{g}_\lambda, [\mathfrak{g}_\mu, \mathfrak{g}_\nu]] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu+\nu}$ pro všechny $\lambda, \mu, \nu \in \Delta$. Pro pevná $X \in \mathfrak{g}_\lambda$, $Y \in \mathfrak{g}_\mu$ a $\lambda + \mu \neq 0$ je proto operátor $\operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y$ nutně nilpotentní. Odtud $B(X, Y) = 0$.

(5): Pro každý kořenový prostor $\mathfrak{g}_\alpha$ umíme podle Lieovy věty najít bázi, ve které jsou matice všech zobrazení $\operatorname{ad}_H|_{\mathfrak{g}_\alpha}$, $H \in \mathfrak{h}$, horní trojúhelníkové se skaláry $\alpha(H)$ na diagonále. Odtud ovšem

$$B(H, H') = \sum_{\alpha\in\Delta} \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} H \circ \operatorname{ad} H') = \sum_{\alpha\in\Delta} (\dim \mathfrak{g}_\alpha)\alpha(H)\alpha(H'). \quad \square$$

Pro polojednoduché algebry nyní snadno získáme velice silná tvrzení. Zejména si všimněme komutativnosti Cartanových podalgeber[12], nedegenerovanosti zúžení Killingovy formy na Cartanovu podalgebru a skutečnosti, že všechny kořenové vektory v $\mathfrak{g}$ jsou ve skutečnosti společné vlastní vektory pro všechna zobrazení $\mathrm{ad}(H)$, $H \in \mathfrak{h}$.

7.8. Věta. *Nechť $\mathfrak{g}$ je polojednoduchá Lieova algebra, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ její Cartanova podalgebra.*

(1) *Je-li $H \in \mathfrak{h}$ a $\alpha(H) = 0$ pro každé $\alpha \in \Delta$, pak $H = 0$.*
(2) *Kořeny generují celé $\mathfrak{h}^*$, tj. $\langle \Delta \rangle = \mathfrak{h}^*$.*
(3) *$\mathfrak{h}$ je abelovská Lieova algebra.*
(4) *Zúžení $B|\mathfrak{h}$ je nedegenerovaná symetrická forma.*
(5) *Pro každé $H \in \mathfrak{h}$ je $\mathrm{ad}_H X = \alpha(H)X$ pro všechny $X \in \mathfrak{g}_\alpha$.*
(6) *$\Delta = -\Delta$ (tzn. $\alpha \in \Delta \Leftrightarrow -\alpha \in \Delta$).*

Důkaz. (1): Je-li $H \in \mathfrak{h}$ a $\alpha(H) = 0$ pro všechna $\alpha \in \Delta$, pak pro každé $Y \in \mathfrak{g}_\alpha$ platí

$$B(H,Y) = \begin{cases} \sum_{\alpha \in \Delta} \dim \mathfrak{g}_\alpha \alpha(H)\alpha(Y) = 0 & Y \in \mathfrak{h} \\ 0 & Y \in \mathfrak{g}_\alpha, \alpha \in \Delta \end{cases}$$

viz. 7.7.(4), 7.7.(5). Je tedy $B(H,Y) = 0$ pro všechna $Y \in \mathfrak{g}$. Přitom ale B je nedegenerovaná (viz. 5.6) a proto $H = 0$.
(2): Plyne okamžitě z (1).
(3): Na $\mathfrak{g}_\alpha$ existuje báze, ve které má $\mathrm{ad}_H |\mathfrak{g}_\alpha$ horní trojúhelníkovou matici (z Lieovy věty). Pak každé $H \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ má na $\mathfrak{g}_\alpha$ vlastní hodnotu 0. Tato vlastní hodnota je jediná a tedy $\alpha(H) = 0$ pro každé α. Proto $H = 0$.
(4): Pro všechny kořeny $\alpha \in \Delta$ je $\mathfrak{h} \perp \mathfrak{g}_\alpha$. Přitom Killingova forma B polojednoduché algebry je nedegenerovaná, proto i její zúžení na $\mathfrak{h}$ musí být nedegenerované (představte si příslušnou matici formy B!).
(5): Nechť $H \in \mathfrak{h}$ a $\mathrm{ad}\, H = (\mathrm{ad}\, H)_s + (\mathrm{ad}\, H)_n$ je Jordanův rozklad. Zúžení $(\mathrm{ad}\, H)_s|_{\mathfrak{g}_\alpha}$ je násobení skalárem $\alpha(H)$ a podle 7.7.(3) platí pro $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Y \in \mathfrak{g}_\beta$

$$(\mathrm{ad}\, H)_s([X,Y]) = (\alpha + \beta)(H)([X,Y]) = [(\mathrm{ad}\, H)_s X, Y] + [X, (\mathrm{ad}\, H)_s(Y)].$$

Vidíme, že $(\mathrm{ad}\, H)_s$ je derivace a podle 5.10 proto musí existovat $S \in \mathfrak{g}$ takové, že $(\mathrm{ad}\, H)_s = \mathrm{ad}\, S$. Pro všechna $H' \in \mathfrak{h}$ je $[S, H'] = 0$ protože polojednoduchá část $\mathrm{ad}\, H$ působí na každém $\mathfrak{g}_\alpha$ násobením skalárem $\alpha(H)$. Je tedy S v normalizátoru $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$, tj. v $\mathfrak{h}$. Nyní $\mathrm{ad}\, H - \mathrm{ad}\, S = (\mathrm{ad}\, H)_n$ má na celém $\mathfrak{g}$ pouze nulové vlastní hodnoty, tj. pro všechny $\alpha \in \Delta$ je $\alpha(H - S) = 0$ a podle (1) je tedy $H = S$. Tím jsme ukázali, že nilpotentní část každého operátoru $\mathrm{ad}\, H$, $H \in \mathfrak{h}$, je nulová.
(6): Pro všechna $\mu \neq -\lambda$ je $\mathfrak{g}_\mu \perp \mathfrak{g}_\lambda$ a Killingova forma B je nedegenerovaná. Pro každé $\lambda \in \Delta$ musí proto být dimenze kořenového podprostoru $\mathfrak{g}_{-\lambda}$ rovna dimenzi $\mathfrak{g}_\lambda$. □ cvičení!

[12] ve skutečnosti je pro polojednoduché $\mathfrak{g}$ ekvivalentní definice Cartanových podalgeber jako maximálních komutativních diagonalizovatelných podalgeber

Část III. Polojednoduché algebry

Nyní máme připraveny všechny nástroje pro úplnou popis všech konečněrozměrných (komplexních) polojednoduchých Lieových algeber a jejich ireducibilních reprezentací. Protože již víme, že každá reprezentace takové algebry je úplně rozložitelná, můžeme tak (implicitně) získat popsat všechny reprezentace. Skutečně podrobné provedení klasifikace je ovšem technicky zdlouhavé, proto v této části již (s vyjímkou kapitoly 8) jen zřídka budeme uvádět úplné důkazy všech tvrzení. Budeme se zato snažit všechna tvrzení demonstrovat na konkrétních případech.

8. Kokořeny a Weylova grupa

8.1. Věta. *Pro kořenový rozklad polojednoduché Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ s Cartanovou podalgebrou $\mathfrak{h}$ platí*

(1) *Pro všechny $\alpha \in \Delta$ má vektorový podprostor $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ dimenzi 1 a zúžení $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ je na něm nenulové.*
(2) *Pro každý kořen $\alpha \in \Delta$ existuje právě jedno $h_\alpha \in \mathfrak{h}$ takové, že pro všechna $Z \in \mathfrak{h}$ splňuje Killingova forma $B(h_\alpha, Z) = \alpha(Z)$ a $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \langle h_\alpha \rangle$.*
(3) *Jsou-li $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ takové, že $B(X, Y) = 1$, pak $[X, Y] = h_\alpha$,*
(4) *Pro všechny kořeny $\alpha \in \Delta$ je $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ a násobek $t\alpha$ je nenulovým kořenem právě, když $t = \pm 1$.*
(5) *Pro všechny $X, Y \in \mathfrak{h}$ je $B(X, Y) = \sum_{\alpha\in\Delta} \alpha(X)\alpha(Y)$.*

Důkaz. (1): Předpokládejme, že $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ jsou dva komutující prvky. Protože $\alpha \neq 0$, jsou ad_X i ad_Y nilpotentní a tedy i $\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y$ je nilpotentní. Proto $B(X, Y) = 0$. Protože je ale B nedegenerovaná, existují takové prvky $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, pro které je $[X, Y] \neq 0$. Tím je ukázáno, že $\dim[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] > 0$.

Označme si nyní $\mathfrak{g}^\alpha_\beta := \oplus_{t\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta+t\alpha}$. Evidentně je g^α_β invariantní vzhledem k $\mathrm{ad}\,|_{\mathfrak{g}_\alpha}$, $\mathrm{ad}\,|_{\mathfrak{g}_{-\alpha}}$. Zejména má tedy smysl uvažovat stopu $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{[X,Y]}\,|_{\mathfrak{g}^\alpha_\beta})$ pro libovolné $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Protože jde o stopu závorky, musí být nulová. Přitom ale platí $\mathrm{ad}_Z X = \alpha(Z)X$ pro všechny $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Z \in \mathfrak{h}$, proto

$$Tr(\mathrm{ad}_Z\,|_{\mathfrak{g}^\alpha_\beta}) = (\dim \mathfrak{g}_\beta)\beta(Z) + q\alpha(Z)$$

pro vhodné $q \in \mathbb{Z}$. Pokud je přitom $\alpha([X, Y]) = 0$, pak dosazením $Z = [X, Y]$ dostáváme $\beta(Z) = 0$ pro všechna Z a všechny kořeny β, proto $Z = 0$. Celkem tedy je $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \cap \mathrm{Ker}\,\alpha = \{0\}$. Odtud ovšem $\dim[g_\alpha, g_{-\alpha}] \le 1$.

(2),(3): Z invariantnosti Killingovy formy dostaneme pro $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$

$$B([X, Y], Z) = -B(Y, [X, Z]) = B(Y, [Z, X]) = \alpha(Z)B(Y, X).$$

Vybereme-li tedy X, Y tak, aby $B(X, Y) = 1$, je nutně $[X, Y] = h_\alpha$. Jednoznačnost h_α plyne okamžitě z nedegenerovanosti zúžení $B|_\mathfrak{h}$, viz. 7.8.(3). Tím jsme dokázali obě tvrzení.

(4): Pro všechna $\alpha \in \Delta$ zvolme $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tak, že $h_\alpha = [X_\alpha, Y_\alpha]$. Platí

$$[h_\alpha, X_\beta] = \alpha(h_\alpha)X_\beta = B(h_\alpha, h_\alpha)X_\beta$$

Označme $V \subset \mathfrak{g}$ generovaný $Y_\alpha, h_\alpha, \mathfrak{g}_{t\alpha}$ pro všechna $t \in \mathbb{N}$. Tento podprostor je zřejmě invariantní vzhledem k ad_{X_α}, ad_{Y_α}, ad_{h_α}. Protože je h_α závorka dvou prvků z V, je stopa $\mathrm{ad}_{h_\alpha}|_V$ nulová. Přito zároveň

$$\mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}_{h_\alpha}|_V = \alpha(h_\alpha)(-1 + \dim \mathfrak{g}_\alpha + 2\dim \mathfrak{g}_{2\alpha} + \dots)$$

Odtud vyplývá, že $\dim g_\alpha = 1$ a všechny další násobky α již nejsou kořeny.

(5): Jde o vztah odvozený v 7.7.(5) z dosazenými hodnotami pro dimenze. □

8.2. Kokořeny. V důkazu předchozí věty se vyskytly koncepčně důležité pojmy. Podprostor $\mathfrak{g}^\alpha_\beta = \oplus_{t\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_{\beta+t\alpha}$, $\beta \neq -\alpha$, nazýváme *α-řetízek kořenu β.*

Komutační relace prvků h_α, X_α, Y_α velice připomínají relace mezi generátory $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Skutečně, podprostor $\langle X_\alpha\rangle \oplus \langle h_\alpha\rangle \oplus \langle Y_\alpha\rangle$ je podalgebra, a stačí zvolit násobek H_α prvku h_α tak, aby $\alpha(H_\alpha) = B(h_\alpha, H_\alpha) = 2$, tzn. volíme

$$H_\alpha = \frac{2}{B(h_\alpha, h_\alpha)} h_\alpha$$

a získáváme 3-rozměrnou podalgebru $g^{(\alpha)}$ generovanou X_α, Y_α, H_α takovou, že lineární zobrazení převádějící tyto generátory na generátory X_+, X_-, H algebry $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ je izomorfismus Lieových algeber. Vektory $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ (jednoznačně určené!) nazýváme *kokořeny*, vektory h_α nazýváme *kořenové vektory v* $\mathfrak{h}$, X_α nazýváme *kořenové prvky v* $\mathfrak{g}_\alpha$.

Pro případ $\beta = -\alpha$ definujeme $\mathfrak{g}^\alpha_\beta = \mathfrak{g}^{(\beta)}$.

8.3. Cartanova čísla. Roli řetízků $\mathfrak{g}^\alpha_\beta$ nyní můžeme pochopit lépe. Jsou totiž invariantní vůči akci $g^{(\alpha)}$ a ireducibilní (plyne přímo zdefinice). Proto musí být izomorfní s některou z reprezentací D_s algebry $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, viz. výsledky kapitoly 3. Přitom snadno poznáme, která reprezentace to bude, stačí zjistit vlastní hodnoty operátoru ad_{H_α}. Ty ale jsou právě $\beta(H_\alpha)+2t$ pro všechna t, pro která $\dim \mathfrak{g}_{\beta+t\alpha} \neq 0$. Protože dimenze všech $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Delta$, je 1, plyne z rozboru reprezentací D_s v kapitole 3, že v α-řetízku kořenu β nabývá t všech celočíselných hodnot z jistého intervalu. Označme $\beta(H_\alpha) - 2q$ nejmenší vyskytující se vlastní hodnotu. Potom $2q - \beta(H_\alpha) =: \beta(H_\alpha) + 2p$ je největší z nich a $p, q \in \mathbb{N}$, viz. 3.3. Dostáváme odtud

$$\beta(H_\alpha) = q - p, \quad g^\alpha_\beta = \oplus^p_{t=-q}\mathfrak{g}_{\beta+t\alpha}.$$

Zejména jsou tedy všechny hodnoty

$$a_{\beta\alpha} := \beta(H_\alpha) = q - p$$

celá čísla, nazýváme je *Cartanova čísla* polojednoduché algebry $\mathfrak{g}$. Důsledkem odvozených vztahů a 8.1.(5) je, že hodnoty Killingovy formy na kokořenech jsou celočíselné, tj. $B(H_\alpha, H_\beta) \in \mathbb{Z}$. Prostřednictvím vektorů h_α vyjádříme Cartanova čísla takto:

$$a_{\beta\alpha} = \beta(H_\alpha) = 2\frac{\beta(h_\alpha)}{B(h_\alpha, h_\alpha)} = 2\frac{B(h_\beta, h_\alpha)}{B(h_\alpha, h_\alpha)}.$$

8.4. Reálná Cartanova algebra. Celá $\mathfrak{h}^*$ je generována kořeny, proto množina kořenových vektorů v $\mathfrak{h}$, a tedy i množina kokořenů, generuje celou komplexní Lieovu (abelovskou) algebru $\mathfrak{h}$. Označme

$$\mathfrak{h}_0 = \langle H_\alpha; \alpha \in \Delta\rangle_\mathbb{R} = \langle h_\alpha; \alpha \in \Delta\rangle_\mathbb{R}$$

reálný vektorový podprostor generovaný kokořeny.

Lemma. *Zúžení Killingovy formy B na $\mathfrak{h}_0$ je reálná pozitivně definitní symetrická forma a $\mathfrak{h} = (\mathfrak{h}_0)_{\mathbb{C}}$.*

Důkaz. $B|_{\mathfrak{h}_0}$ je určena hodnotami na generátorech a ty jsou dokonce celočíselné. Navíc je $B(H_\alpha, H_\alpha) = \sum_{\gamma\in\Delta}(\gamma(H_\alpha))^2$, zbytek tvrzení je proto zřejmý. □

Protože je zúžení B na celou Cartanovu algebru $\mathfrak{h}$ nedegenerované, odpovídá reálné Cartanově podlagebře $\mathfrak{h}_0$ v indukovaném izomorfismu reálný vektorový podprostor $\mathfrak{h}_0^* \subset \mathfrak{h}^*$. Tento izomorfismus indukuje symetrickou positivně definitní reálnou formu na $\mathfrak{h}_0^*$. Obě tyto reálné definitní formy budeme značit stejně jako obvyklý euklidovský skalární součin $\langle\ ,\ \rangle$. Pomocí tohoto skalárního součinu můžeme snadno vyjádřit Cartanova čísla cvičení!

$$a_{\beta\alpha} = 2\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}.$$

Zejména si všimněme, že všechny kořeny leží v reálné části $\mathfrak{h}_0^*$.

8.5. Věta. *Množina $\Delta \subset \mathfrak{h}_0^*$ všech nenulových kořenů má následující vlastnosti*

(1) *Pokud $\alpha,\beta \in \Delta$, pak $2\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$ je celé číslo $a_{\beta\alpha}$*
(2) *Pro všechny $\alpha,\beta\in\Delta$ je také $\beta - a_{\beta\alpha}\alpha \in \Delta$*
(3) *Jsou-li $\alpha, t\alpha \in \Delta$, pak $t = \pm 1$*

Důkaz. Z definice α-řetízku kořenu β a Cartanových čísel je vidět, že $\mathfrak{g}_{\beta - a_{\beta\alpha}\alpha}$ do něj určitě patří. Ostatní tvrzení jsou pouze přeformulováním již dokázaných. □

8.6. Kořenové systémy. O libovolné konečné množině Δ v euklidovském prostoru řekneme, že je to *redukovaný kořenový systém*, platí-li pro ni všechny tři vlastnosti z předchozí věty.

Definiční vlastnosti 8.5.(1)-(3) můžeme zformulovat geometričtěji: Nechť V je euklidovský prostor. Pro $v \in V$ definujeme zobrazení $S_v V \to V$ jako reflexi vzhledem k nadrovině $\langle v\rangle^\perp$, tj.

$$S_v(u) = u - 2.(\text{průmět } u \text{ do } \langle v\rangle) = u - 2\frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}v.$$

Můžeme tedy přeformulovat první dvě vlastnosti takto

(1') Pro všechny $\alpha,\beta\in\Delta$ je $S_\alpha(\beta) - \beta$ celočíselný násobek α.
(2') Pro všechny $\alpha,\beta\in\Delta$ je také $S_\alpha(\beta)\in\Delta$

Konečné množiny v euklidovském prostoru, které splňují pouze první dvě vlastnosti se nazývají *kořenové systémy.*[13]

8.7. Definice. Nechť Δ je redukovaný kořenový systém. Konečná grupa W izometrií generovaná všemi reflexemi S_α, $\alpha\in\Delta$, se nazývá *Weylova grupa* tohoto kořenového systému.

Je-li $\mathfrak{g}$ polojednoduchá Lieova algebra s Cartanovou podalgebrou $\mathfrak{h}$, pak Weylovu grupu kořenového systému $\Delta \subset \mathfrak{h}_0^*$ nazýváme Weylovou grupou algebry $\mathfrak{g}$.[14]

---

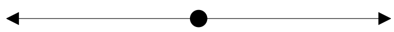
[13]Těmito a podobnými objekty se matematikové již dávno zabývali zejména v souvislosti s krystalografickými grupami symetrií.

[14]Samozřejmě lze ukázat, že (až na izometrii) je W plně určena algebrou $\mathfrak{g}$.

8.8. Poznámky. Již na první pohled by měl být zřejmý jeden z významů Weylovy grupy. Problém klasifikace polojednoduchých Lieových algeber je totiž podstatným způsobem zredukován do dvou kroků. Nejprve můžeme řešit zcela diskrétní problém jak vypadají všechny kořenové systémy v euklidovských prostorech – to není příliš těžké, v postatě jde o kombinatorické úvahy. Tím získáme (ve skutečnosti spočetný) seznam možností a zbývá ukázat pro které z nich skutečně existují Lieovy algebry a zda jsou určeny jednoznačně (až na izomorfismus) svým kořenovým systémem. K výsledkům této klasifikace se vrátíme později, plné důkazy nebudeme provádět vůbec, lze je najít např. v [FN], [Sa], [Zh].

Z praktického hlediska ovšem mají Weylovy grupy ještě daleko větší význam pro studium reprezentací příslušných algeber. V každé Weylově grupě je samozřejmě $S_\alpha = S_{-\alpha}$ a pro každý redukovaný kořenový systém je tedy zapotřebí ke generování Weylovy grupy jen polovina kořenů. Brzy uvidíme, že i pro popis reprezentací není příliš vhodné pracovat se všemi vahami. Naopak, je potřeba vybrat si jich jen vhodnou část a potom můžeme rozpracovat postup použitý pro studium reprezentací $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ v kapitole 3. I v tomto klasifikačním problému hraje Weylova grupa klíčovou roli, hraje ji i v problému rozkladů tenzorových součinů, určování násobností a dimenzí reprezentací, atd.

Zajímavější příklady kořenových systémů Lieových algeber a jejich Weylových grup uvedeme až v příští kapitole. Již nyní si ale připomeňme alespoň nejjednodušší případ – algebru $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Kořeny jsou tam pouze dva, jeden odpovídá kořenovému prvku X_+, druhý (opačný) kořenovému prvku X_-. Reálná část $\mathfrak{h}_0^*$ je jednorozměrný euklidovský prostor. Kokořen je tam právě jeden – $H \in \mathfrak{h}$. Weylova grupa této algebry je tedy triviální grupa obsahující jediný prvek.



Kořenový systém algebry $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$

Všimněme si nyní, že v tomto kořenovém systému jsme učinili ještě jeden dodatečný výběr: zvolili jsme, který z kořenů je "kladný" a který "záporný". Ireducibilní reprezentace pak odpovídaly "společným vlastním vektorům" pro $\mathfrak{h}$ (tj. vlastním vektorům pro H) s triviální akcí "všech kladných kořenů" (tj. kořenu X_+). Kupodivu to zrovna takto bude i obecně.

9. Jednoduché kořeny a fundamentální váhy

9.1. Nejprve chceme rozdělit kořeny v polojednoduché algebře $\mathfrak{g}$ s Cartanovou podalgebrou $\mathfrak{h}$ na kladné a záporné. Za tím účelem můžeme zvolit lineární formu L na $\mathfrak{g}^*$ takovou, že $L(\alpha) \neq 0$ pro všechny kořeny $\alpha \in \Delta$ a jednoduše definovat kladné a záporné kořeny takto

$$\Delta_+ = \{\alpha \in \Delta;\ L(\alpha) > 0\}, \quad \Delta_- = \{\alpha \in \Delta;\ L(\alpha) < 0\}.$$

Přímo z definice je vidět že každý kořen je buď kladný nebo záporný. Snadno se ověří, že

$$\mathfrak{b} := \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha$$

je maximální řešitelná podalgebra. Kladné kořeny jsou pak také charakterizovány vztahem, že příslušné kořenové prvky X_α patří do $\mathfrak{b}$. Všimněme si, že je vždy stejně kladných a záporných kořenů, protože $\Delta = -\Delta$. cvičení!

Maximální řešitelná podalgebra $\mathfrak{b}$ obsahující zvolenou Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ se nazývá *Borelova podalgebra.*[15]

9.2. Jednoduché kořeny. V dalším budeme stále předpokládat, že jsme nějakým způsobem pevně zvolili kladné a záporné kořeny. Kladné kořeny, které nejsou součtem dvou kladných kořenů nazýváme *jednoduché kořeny.* Kokořeny odpovídající jednoduchým kořenům se nazývají *jednoduché kokořeny.* Často se také používá název *prosté* kořeny či kokořeny. Protože všechny kořeny lineárně generují (nad $\mathbb{R}$) celou reálnou $\mathfrak{h}_0^*$ a jednoduché kořeny generují ostatní, zjišťujeme, že jednoduchých kořenů je nejméně $\dim \mathfrak{h}$. Pokud je pro dva různé kořeny $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$, pak také $a_{\alpha\beta} > 0$ a proto jsou i $\alpha - \beta$ a $\beta - \alpha$ kořeny, viz. 8.3. Jeden z nich musí být kladný, zejména tedy nemohou být α a β oba jednoduché kořeny. Skalární součin jednoduchých kořenů je proto vždy nekladný. Uvažme nyní nulovou lineární kombinaci $\sum_i c_i \alpha_i = 0$ jednoduchých kořenů. Předchozí rovnost můžeme přepsat jako

$$\lambda := \sum_j c_{i_j} \alpha_{i_j} = \sum_k c_{i_k} \alpha_{i_k} =: \rho$$

kde všechny nenulové koeficienty jsou kladné. Nyní podle předchozího je

$$0 \leq \langle \lambda, \lambda \rangle = \langle \lambda, \rho \rangle \leq 0$$

což znamená, že $\lambda = \rho = 0$. Přitom ale je hodnota naší formy L definující kladné a záporné kořeny na λ ostře kladná, protože jsou všechny koeficienty kladné. Proto odtud vyplývá, že všechny koeficienty c_i jsou nulové. Celkem jsme dokázali, že jednoduché kořeny tvoří bázi $\mathfrak{h}_0^*$.

Volba pořadí jednoduchých kořenů zadává tzv. *lexikografické uspořádání na* $\mathfrak{h}_0^*$. Podrobněji, pro dvě reálné váhy $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}_0^*$ je $\lambda > \mu$ jestliže je první nenulový koeficient ve vyjádření $\lambda - \mu$ jako lineárních kombinace jednoduchých kořenů větší než nula.

9.3. Případ $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$. V tomto případě je dimenze $\mathfrak{h} = \{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3;\ a + b + c = 0\}$ rovna 2. Uvažme standardní bázi e^1, e^2, e^3 v $\mathbb{C}^{3*}$, resp. $\mathbb{R}^{3*}$. Pak můžeme také psát

$$\mathfrak{h}_0^* = \{a e^1 + b e^2 + c e^3; a + b + c = 0\}$$

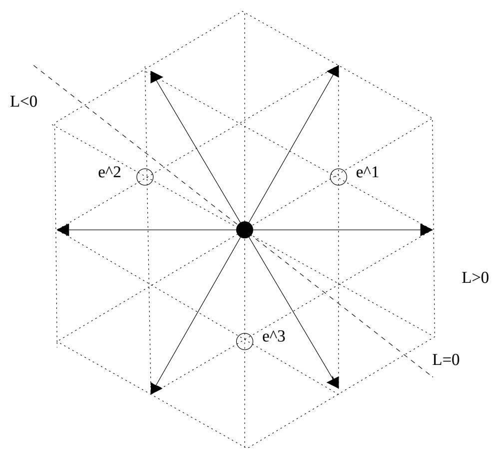
Pro Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ diagonálních matic snadno najdeme právě 6 kořenů $e^i - e^j$, $i \neq j$.

Volbě Borelovy podalgebry horních trojúhelníkových matic v $\mathfrak{g}$ obsahující $\mathfrak{h}$ odpovídají kladné kořeny

$$\Delta_+ = \{e^1 - e^2, e^2 - e^3, e^1 - e^3\}$$

a jednoduché kořeny jsou $e^1 - e^2$, $e^2 - e^3$ (třetí je součtem prvních dvou). Killingova forma je dána vztahem $B(X, X) = 6 \operatorname{Tr}(X^2)$ (viz. příklad 5.3.(5)), odtud $B(X, Y) =$

[15] Často se také postupuje naopak: zvolí se maximální řešitelná podalgebra $\mathfrak{b}$ (např. všechny horní trojúhelníkové matice v $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$), v ní nějaká Cartanova podalgebra (např. diagonální matice) a za kladné kořeny jsou prohlášeny ty, jejichž kořenové prvky X_α jsou v $\mathfrak{b}$.



Kořenový systém algebry $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$

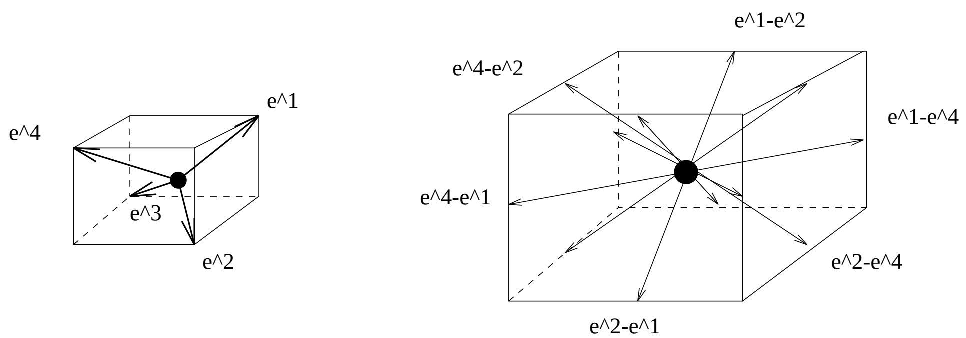
$6\,\mathrm{Tr}(X.Y)$. Je tedy zúžení B na $\mathfrak{h}_0 \subset \mathbb{R}^3$ až na násobek právě indukovaný skalární součin z $\mathbb{R}^3$.

Reflexe $S_{e^1-e^2} \in W$ we Weylově grupě zobrazuje

$$e^1 - e^2 \mapsto -(e^1 - e^2) \quad e^1 - e^3 \mapsto e^2 - e^3$$

Její akce na libovolném $H = ae^1 + be^2 + ce^3$ spočívá tedy ve výměně souřadnic u e^1 a e^2. Podobně pro zbylé kladné kořeny dostaneme ve W transpozice odpovídajích souřadnic. Celá Weylova grupa je pak izomorfní grupě permutací na 3 prvcích. cvičení!

Stejným postupem zjistíme, že při volbě Cartanovy podalgebry $\mathfrak{h}$ diagonálních matic v $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ a Borelově podalgebře horních trojúhelníkových matic jsou kořeny $e^i - e^j$, $i \neq j$, kladné jsou ty s $i < j$. Jednoduché kořeny jsou $e^i - e^{i+1}$ a příslušné jednoduché kokořeny jsou $H_i = e_i - e_{i+1}$ pro $1 \leq i \leq n-1$. Z příslušného rozkladu na kořenové podprostory $\mathfrak{g}_\alpha$ vidíme, že $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ je skutečně polojednoduchá. cvičení!



Kořenový systém algebry $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{C})$

9.4. Váhy reprezentace. Pro další úvahy nyní zvolme pevně polojednoduchou Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ s Cartanovou podalgebrou $\mathfrak{h}$. Zvolme dále pevně rozklad $\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-$ a pořadí jednoduchých kořenů v $\mathfrak{h}_0^*$. Dále budeme užívat značení

$$\mathfrak{n}_- = \oplus_{\alpha \in \Delta_-} \mathfrak{g}_\alpha \quad \mathfrak{n}_+ = \oplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha$$

tj. $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ (součet tří vektorových podprostorů, které jsou podalgebry).

Váhou reprezentace $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ rozumíme váhu zúžené reprezentace $\varphi|_{\mathfrak{h}}$, tj. takovou lineární formu $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, že existuje společný váhový vektor $v \in V$ pro všechny $H \in \mathfrak{h}$, tj. $\varphi(H)(v) = \lambda(H).v$. Dimenzi podprostoru V_λ všech váhových vektorů s vahou λ nazýváme násobností váhy λ.[16]

V 3. kapitole jsme výsledky o reprezentacích $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ odvodili z jednoduchého výpočtu akce závorky. Tentýž trik můžeme zopakovat i obecně: Nechť je λ váha a v k ní příslušný váhový vektor reprezentace φ a $\alpha \in \mathfrak{h}_0^*$ nechť je kořen. Pak

$$\varphi(H)\varphi(X_\alpha)(v) - \varphi(X_\alpha)\varphi(H)(v) = \varphi([H, X_\alpha])(v) = \alpha(H)\varphi(X_\alpha)(v)$$

a tedy je $\varphi(X_\alpha)(v)$ váhovým vektorem s vahou $\lambda+\alpha$. Toto jednoduché pozorování je klíčem k úplnému popisu všech ireducibilních reprezentací. Začneme podrobnějším zkoumáním vlastností vah.

9.5. Věta. *Nechť $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ je konečněrozměrná ireducibilní reprezentace komplexní polojednoduché Lieovy algebry $\mathfrak{g}$.*

(1) *Pro každou váhu λ reprezentace φ a všechny kokořeny H_α platí $\lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$.*
(2) *Existuje jen konečně mnoho vah reprezentace φ a V je generováno váhovými vektory.*
(3) *Množina vah reprezentace je invariantní vůči akci Weylovy grupy W.*
(4) *Násobnosti m_λ vah λ jsou invariantní vůči akci Weylovy grupy W.*

Důkaz. (1): Každé H_α je obsaženo v podalgebře $g^{(\alpha)}$ izomorfní $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, zúžení φ na $\mathfrak{g}^{(\alpha)}$ je opět reprezentace a zúžení λ na $H_\alpha\,\mathbb{C}$ je její váha. Proto musí být $\lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$.

(2): Dimenze V je konečná a váhové vektory odpovídající různým vahám jsou lineárně nezávislé, proto vah může být jen konečně mnoho. Pro všechny jednoduché kořeny α_i jsou $\varphi(H_{\alpha_i})$ diagonalizovatelné a přitom spolu komutují. Z elementární lineární algebry je známo, že v takovém případě jsou diagonalizovatelné všechny naráz. Všechny ostatní kořeny jsou jejich lineární kombinace, tím je tedy tvrzení dokázané.

(3): Předpokládejme nejprve $\lambda(H_\alpha) > 0$. Orbita $\mathfrak{g}^{(\alpha)}.v$ musí být ireducibilní reprezentace $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, vektory $(X_{\pm\alpha})^k.v$ jsou buď nezávislé nebo nulové a podle 9.4 jsou všechny váhovými vektory s vahami $\lambda \pm k\alpha$. Pokud by v byl vektor s triviální akcí X_α, pak by dimenze této orbity byla právě $\lambda(H_\alpha)+1$ a byla by generována všemi $(X_{-\alpha})^k.v$, $k = 0,\dots,\lambda(H_\alpha)$. Obecně je váha každého dalšího vektoru v takové posloupnosti vždy o dvě menší a vždy budou vektory $v, X_{-\alpha}v, \dots, (X_{-\alpha})^r v$ s $r = \lambda(H_\alpha)$ nezávislé, viz. 3.3. Zejména tedy existuje váhový vektor s vahou $\lambda - \lambda(H_\alpha)\alpha = S_\alpha(\lambda)$. Pro $\lambda(H_\alpha) = 0$ je tvrzení zřejmé, při $\lambda(H_\alpha) < 0$ si stačí uvědomit, že $H_{-\alpha} = -H_\alpha$ a $S_\alpha = S_{-\alpha}$.

(4): Protože je navíc zobrazení dané iterovanou akcí $(X_\alpha)^r$ na váhovém prostoru V_λ injektivní, splňují násobnosti $m_\lambda \le m_{S_\alpha\lambda}$. Protože je ale S_α involutivní, plyne odtud rovnost. □

[16] V uvažovaném případě reprezentací Cartanovy podlagebry jsou vždy všechny společné kořenové vektory (viz. definice váhy z 7.5), skutečně vlastní vektory. Za chvíli to odvodíme, obecně to plyne ihned i z toho, že u polojednoduchých algeber je Jordanův rozklad operátoru $\varphi(H)$ roven součtu reprezentací z Jordanova rozkladu H, ale H má nulovou nilpotentní část.

9.6. Nechť $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ je ireducibilní konečněrozměrná reprezentace. *Nejvyšší váha* reprezentace φ je největší z vah λ této reprezentace ve zvoleném uspořádání na $\mathfrak{h}_0^*$. *Vektorem nejvyšší váhy* rozumíme libovolný váhový vektor s nejvyšší vahou.

Protože má φ jen konečně mnoho vah, nejvyšší váha určitě existuje. Je to právě ta váha λ, pro kterou $\lambda + \alpha$ není vahou pro žádné $\alpha \in \Delta_+$. Ekvivalentně, nejvyšší váhový vektor $v \in V$ je takový vektor, pro který je $\mathfrak{n}_+.v = \{0\}$ a $\varphi(H) = \lambda(H).v$ pro všechny $H \in \mathfrak{h}$. Stejná definice nejvyšší váhy a vektorů nejvyšší váhy má smysl i pro libovolné konečněrozměrné reprezentace.

9.7. Lemma. *Nechť φ je libovolná konečněrozměrná reprezentace $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ a nechť $v \in V$ je vektor nejvyšší váhy. Potom orbita $\mathfrak{n}_-.v \subset V$ je ireducibilní a invariantní podprostor lineárně generovaný v a vektory*

$$v_{i_1\dots i_k} = X_{\alpha_{i_1}}.X_{\alpha_{i_2}}\dots X_{\alpha_{i_k}}.v$$

pro $k = 1, 2, \dots$.

Důkaz. Je zcela analogický jako v případě $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ v kapitole 3. □ cvičení!

9.8. Věta. *Nechť $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ je ireducibilní konečněrozměrná reprezentace.*

(1) *Existuje právě jedna nejvyšší váha λ reprezentace φ.*
(2) *Příslušný váhový vektor je určen jednoznačně až na násobek a $\lambda(H_{\alpha_i}) \geq 0$ pro všechny prosté kokořeny α_i.*
(3) *Všechny ostatní váhy reprezentace φ jsou pak tvaru $\lambda - \sum_i n_i\alpha_i$. Zejména se dvě různé váhy reprezentace φ mohou lišit jen o celočíselný násobek nějakého kořenu.*
(4) *Dvě ireducibilní reprezentace se stejnou nejvyšší vahou jsou isomorfní.*

Důkaz. (1)-(3): Podle předchozího existuje ve V vektor v nejvyšší váhy λ. Příslušný podprostor musí, díky předpokladu ireducibility, být roven celému V a z explicitního výrazu pro generátory v předchozím lemmatu vyplývá dokazované tvrzení o ostatních vahách. Zejména je vidět, že žádná z nich nemůže být rovna λ.

(4): Uvažme přímý součet reprezentací φ a φ' na vektorových prostorech V a V'. Nechť v a v' jsou příslušné (až na násobek jednoznačně dané) vektory společné nejvyšší váhy λ. Pak je $(v, v') \in V \oplus V'$ opět vektorem nejvyšší váhy λ a ekvivariantní projekce $V \oplus V' \to V$ zobrazuje $(v, v') \mapsto v$. Pak ovšem ireducibilní podprostor $W \subset V \oplus V'$ generovaný (v, v') je touto projekcí zobrazen na V a jádro této projekce je nutně nulové. Celkem je tedy W isomorfní s V, ale ze stejných důvodů je také isomorfní s V'. □

9.9. Definice. Označme $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, $k = \dim \mathfrak{h}$, všechny jednoduché kořeny ve zvoleném pořadí a $H_1, \dots, H_k$ odpovídající jednoduché kokořeny. Váhy $\lambda \in \mathfrak{h}_0^*$ splňující $\lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \Delta$, a $\lambda(H_i) \geq 0$ pro všechny $i = 1, \dots, k$, se nazývají *dominantní váhy* algebry $\mathfrak{g}$.[17] Dominantní váhy λ_i definované vztahem $\lambda_i(H_j) = \delta_{ij}$, tj. formy z duální báze v $\mathfrak{h}_0^*$ k bázi z jednoduchých kokořenů, nazýváme *fundamentální váhy.*

[17] Často se jim říká *algebraicky dominantní* pro odlišení od pojmu *analyticky dominantních* vah. Ve skutečnosti totiž každá algebraicky dominantní váha určuje reprezentaci Lieovy algebry, ale ta odpovídá pouze reprezentaci jednoduše souvislé Lieovy grupy s algebrou $\mathfrak{g}$. Pokud je uvažovaná Lieova grupa G jiná, je zapotřebí silnější požadavek analytické dominance.

9.10. Konstrukce reprezentací. Předpokládejme, že V a W jsou prostory ireducibilních reprezentací φ a ψ s nejvyššími vahami λ a μ. Uvažme tenzorový součin

$$\varphi \otimes \psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V \otimes W)$$

reprezentací φ a ψ. Jsou-li $v \in V$ a $w \in W$ příslušné vektory nejvyšší váhy a $X \in \mathfrak{n}_+$, $H \in \mathfrak{h}$ pak

$$(\varphi \otimes \psi)(X)(v \otimes w) = \varphi(X)(v) \otimes w + v \otimes \psi(X)(w) = 0$$
$$(\varphi \otimes \psi)(H)(v \otimes w) = \varphi(H)(v) \otimes w + v \otimes \psi(H)(w) = (\lambda + \mu)(H)(v \otimes w).$$

Jde tedy opět o vektor dominantní nejvyšší váhy v reprezentačním prostoru, proto generuje ireducibilní reprezentaci s touto nejvyšší váhou.

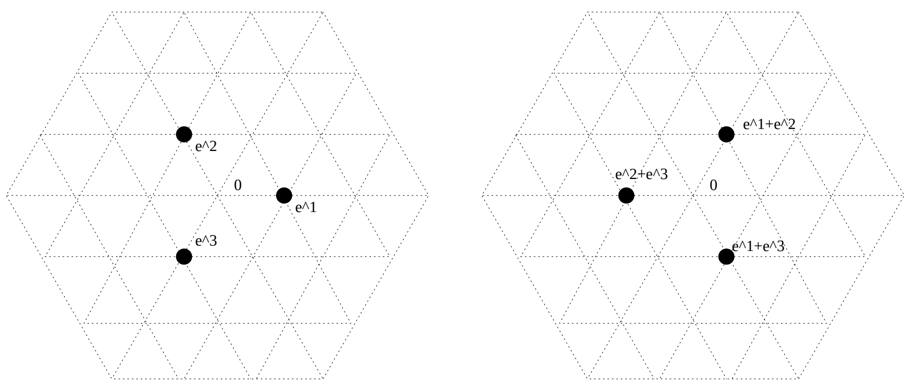
Celkem vidíme, že pokud se nám podaří sestrojit ireducibilní reprezentace s fundamentálními váhami, pak již máme dokázánu existenci a jednoznačnost ireducibilních reprezentací se všemi dominantními váhami.

9.11. Případ $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$.

V 9.3 jsme odvodili, že v tomto případě máme dva jednoduché kořeny $e^1 - e^2$ a $e^2 - e^3$ a jednoduché kokořeny jsou pak $e_1 - e_2$ a $e_2 - e_3$. Přitom je zúžení Cartanovy-Killingovy formy na $\mathfrak{h}_0^* \simeq \mathbb{R}^2$ až na násobek indukovaný skalární součin z $\mathbb{R}^3$ a proto jsou formy v duální bázi e^1 a $e^1 + e^2$. V tomto případě je snadné najít reprezentace s těmito nejvyššími vahami.

Uvažme nejprve standardní reprezentaci na $\mathbb{C}^3$ (tzn. zadanou vložením $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(3, \mathbb{C})$). Vektor $(1, 0, 0) \in \mathbb{C}^3$ pak je vlastním vektorem s vahou e^1. Protože je množina vah invariantní vůči Weylově grupě a ta v našem případě působí "permutacemi indexů", musí být e^2 a e^3 váhy. Tím ale už máme vyčerpánu dimenzi 3, proto žádné další už nejsou. Váha e^1 je nejvyšší, $v_1 = (1, 0, 0)$ je příslušný vektor nejvyšší váhy. Najděte si kořenové prvky, které dají další dva generátory $v_2 = X_\alpha.v = (0, 1, 0)$ a $v_3 = X_\beta.v = (0, 0, 1)$ s vahami e^2 a e^3. cvičení!

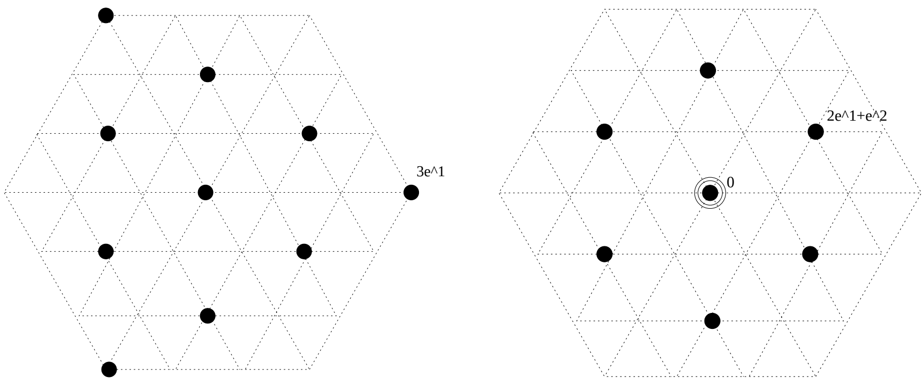
Dále uvažme prostor $\mathbb{C}^3 \wedge \mathbb{C}^3 \subset \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$ se zúžením tenzorového součinu standardní reprezentace. Pak vektor $v_1 \wedge v_2$ má váhu $e^1 + e^2$. Akcí Weylovy grupy obdržíme váhy $e^1 + e^3$ a $e^2 + e^3$. Dimenze uvažovaného prostoru je 3, více vah tam tedy již být nemůže. Všimněme si, že tato reprezentace je izomorfní duální reprezentaci k předchozí, tj. $\mathbb{C}^{3*}$: její váhy jsou opačné ($e^1 + e^2 = -e^3$ atd.) a tak to přesně má být, protože z definice $(\varphi^*(X)(v^*))(v) = -v^*(\varphi(X)(v))$.



Váhy standardní reprezentace $\mathbb{C}^3$ a její duální reprezentace

Celkem tedy vidíme, že existuje bijektivní korespondence mezi dominantními vahami $ae^1 + be^2$ a ireducibilními reprezentacemi. Přitom dominantní jsou právě lineární kombinace $ae^1 + be^2$ s $a \geq b \geq 0$. Navíc víme (alespoň přibližně) kde tyto reprezentace hledat: v tensorovém součinu $S^{a-b}\mathbb{C}^3 \otimes \otimes^b \mathbb{C}^{3*}$.

Uvedeme si ještě alespoň dva příklady, tenzorové součiny $S^3\mathbb{C}^3$ a $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^{3^*}$.



Váhy reprezentací $S^3\mathbb{C}^3$ a $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^{3*}$

V prvém případě jde o ireducibilní reprezentaci s nejvyšší vahou $3e^1$ (zkuste přímo dokázat, jak je tomu pro obecné $S^k(\mathbb{C}^3)$!) a násobnosti všech vah jsou opět cvičení! jedna, protože prostor reprezentace je právě desetirozměrný a z akce Weylovy grupy vyplývá že váhy ve vrcholech trojúhelníku na obrázku nutně jsou vahami studované reprezentace a pak už z teorie plyne, že všechny ostatní "opuntíkované" musí být mezi váhami také (součet váhových prostorů na přímce ve směru jednoho z kořenů α tvoří irep příslušné $\mathfrak{g}^{(\alpha)}$ a proto musí vyplnit celý "interval"). cvičení!

V druhém případě je situace složitější, protože prostor lineárních zobrazení je rozložitelný na stopovou a bezestopou část. Stopová část odpovídá ireducibilní triviální reprezentaci $\mathbb{C}$. Bezestopá zobrazení pak tvoří ireducibilní reprezentaci s nejvyšší vahou $2e^1 + e^2$. To že tam taková váha nutně musí být vyplývá z toho, že v tenzorovém součinu se nachází součty všech vah (stačí vzít tensorové součiny příslušných váhových vektorů). V našem případě tam tedy musí být $e^1 + (-e^3) = 2e^1 + e^2$. (Ještě lépe: $\mathbb{C}^{3*} \cong \mathbb{C}^3 \wedge \mathbb{C}^3$, tedy má nejvyšší váhu $e^1 + e^2$, proto je nyní $2e^1 + e^2$ dokonce nejvyšší vahou.) Stejnou úvahou jako v předešlém případě zjistíme, že tam musí patřit také váha $2e^1 - e^2$ (symetrie vůči kořenu $e^1 - e^2$), pak ovšem také nulová váha a váha $-e^1 + e^2$ (symetrie vůči $e^1 - e^3$), podobně se ověří, že i všechny ostatní váhy tam patří. Z toho, co jsme řekli ovšem ještě nevyplývá, že v bezestopé části by násobnost nulové váhy měla být tři. Otázka násobnosti vah je obecně dosti složitá, v našem případě je však přímo vidět, že v celém $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^{3*}$ jsou tři nezávislé vektory $e_i \otimes e^i$, $i = 1, 2, 3$, s vahou 0. V tomto trojrozměrném podprostoru je potom dvourozměrný podprostor v bezestopé části, jednorozměrná je právě stopová část. Celkem dohromady jsme již našli 9-ti rozměrný přímý součet cvičení! vlastních podprostorů, což je potřebná dimenze. Proto se další váhy již nemohou vyskytovat.

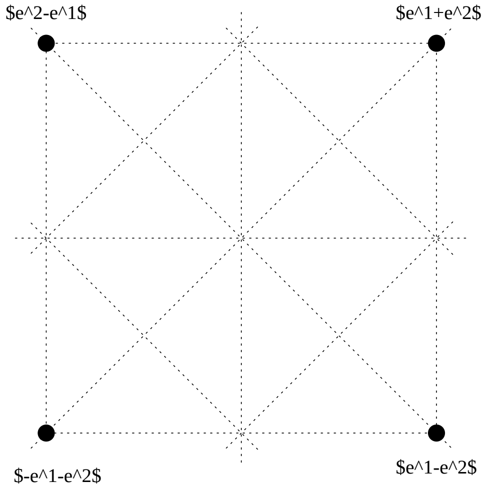
Bude pokračovat ještě stručný výklad o Weylově formuli pro charaktery, z ní vypývajících formulích pro násobnosti vah a zobecnění Clebsch-Gordanovy formule pro rozklad tenzorových součinů. Viz. např. [Sa].

9.12. Příklad $\mathfrak{so}(5,\mathbb{C})$. Algebra $\mathfrak{so}(2,\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$ není polojednoduchá. V 3.0 jsme ukázali, že $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

Cartanova podalgebra $\mathfrak{so}(4,\mathbb{C})$ je dvourozměrná, jde o matice tvaru

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \end{pmatrix}.$$

Najdeme zde čtyři kořeny $e^1 + e^2$, $e^1 - e^2$, $-e^1 + e^2$ a $-e^1 - e^2$, čímž vyčerpáme dimenzi 6 této algebry. Kořeny tvoří dvě na sebe kolmé přímky procházející počátkem. Díky kolmosti dostáváme výsledek, že algebru lze rozložit na přímý součet dvou podalgeber isomorfních s $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.



Kořenový systém algebry $\mathfrak{so}(4,\mathbb{C})$

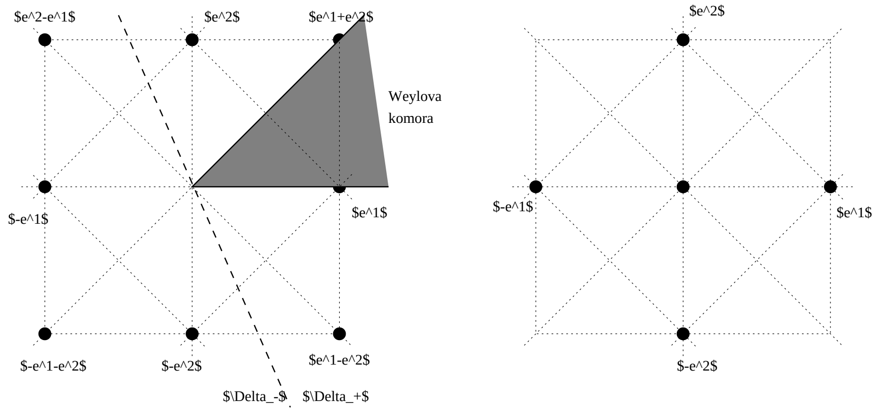
Konečně algebra $\mathfrak{so}(5,\mathbb{C})$ má Cartanovu podalgebru isomorfní Cartanově podalgebře $\mathfrak{so}(4,\mathbb{C})$:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Má proto tytéž kořeny, díky nové dimenzi přibývají další e^1, e^2, $-e^1$ a $-e^2$. Máme tedy celkem osm kořenů, spolu s dimenzí Cartanovy podalgebry dostáváme už dimenzi deset, tedy žádné další kořeny neexistují. Za kladné kořeny lze zvolit např. $e^1 - e^2$, e^1, $e^1 + e^2$ a e^2. V tomto případě jsou $e^1 - e^2$ a e^2 jednoduché. Jim odpovídající kokořeny jsou $e_1 - e_2$ a $2e_2$.

Zaměříme se nyní na reprezentace $\mathfrak{so}(5,\mathbb{C})$. Fundamentální váhy jsou e^1 a $\frac{1}{2}(e^1 + e^2)$. Všechny dominantní váhy jsou pak jejich nezáporné celočíselné kombinace, leží tedy v oblasti úhlu, který spolu obě fundamentální váhy svírají. (Této oblasti se říká *Weylova komora.*)

Je snadné ověřit, že standardní reprezentace $\mathfrak{so}(5,\mathbb{C})$, tedy vložení $i : \mathfrak{so}(5,\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(5,\mathbb{C})$, má nejvyšší váhu e^1, tedy jednu z fundamentálních. Další váhy dostaneme akcí Weylovy grupy: e^2, $-e^1$ a $-e^2$. To však nestačí, protože celková dimenze je 5. Je však zřejmé, že také nulový vektor je váhový v této reprezentaci, přestože není v orbitě nejvyšší váhy pro akci Weylovy grupy; tvoří samostatnou orbitu.



Kořenový systém a standardní reprezentace $\mathfrak{so}(5,\mathbb{C})$

Zajímavá je druhá antisymetrická tensorová mocnina standardní reprezentace, tedy $i \wedge i : \mathfrak{so}(5,\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^5 \wedge \mathbb{C}^5)$. Jde o reprezentaci s nejvyšší váhou $e^1 + e^2$, která je isomorfní reprezentaci ad. Váhy jsou totiž $\pm e^1$, $\pm e^2$ a $\pm e^1 \pm e^2$, k tomu navíc dvojnásobná váha nulová odpovídající Cartanově podalgebře.

Algebra $\mathfrak{so}(5,\mathbb{C})$ má také reprezentaci s nejvyšší váhou $\frac{1}{2}(e^1 + e^2)$, tedy tou druhou fundamentální. Jde o speciální typ, kterým se říká *spinové reprezentace.*

9.13. Charaktery. Formy v $\mathfrak{h}_0^*$ vyjádřitelné jako celočíselné lineární kombinace fundamentálních vah se nazývají *celočíselné váhy.* Množinu všech celočíselných vah budeme značit $\mathcal{I}$ a $\mathbb{Z}\mathcal{I}$ bude značit volný modul generovaný prvky $\mathcal{I}$ nad $\mathbb{Z}$, tzv. grupový okruh.

Aby se odlišilo sčítání v $\mathcal{I}$ a sčítání v $\mathbb{Z}\mathcal{I}$, budeme psát operaci v konstruovaném grupovém okruhu multiplikativně. Váhu $\mu \in \mathcal{I}$ budeme proto zapisovat jako e^μ v $\mathbb{Z}\mathcal{I}$, a součet vah $\mu + \nu \in \mathcal{I}$ se zapíše $e^\mu \cdot e^\nu = e^{\mu+\nu} \in \mathbb{Z}\mathcal{I}$.

Formální součet $\chi_\lambda = \operatorname{char} V(\lambda) = \sum_{\mu\in\mathcal{I}}(\dim V_\mu)e^\mu$ nazýváme *charakter reprezentace* λ, přičemž $V(\lambda)$ je ireducibilní reprezentace s nejvyšší váhou λ a V_μ jsou váhové prostory odpovídající jednotlivým vahám. Evidentně je tato formálně nekonečná suma ve skutečnosti konečná. Charakter nám tedy formálně popisuje váhy reprezentace společně s jejich násobnostmi.

Nechť $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V(\lambda))$ je reprezentace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ odpovídající reprezentaci $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V(\lambda))$ Lieovy grupy G. Máme tedy vztah: $\varphi(\exp X) = \exp\varphi(X)$. Nechť dále $\mathfrak{g}$ je polojednoduchá s váhami $\mu_1, \mu_2, \dots$ odpovídajícími váhovým vektorům $v_1, v_2, \dots \in V(\lambda)$. V bázi $V(\lambda)$ dané váhovými vektory má každý operátor $\varphi(H)$ pro $H \in \mathfrak{h}$ diagonální tvar s prvky $\mu_r(H)$ na diagonále. Operátor $\exp\varphi(H)$ má proto také diagonální tvar s prvky $\exp\mu_r(H)$ na diagonále, proto $\operatorname{tr}\varphi(\exp H) = \sum_\mu(\dim V_\mu)\exp\mu(H)$. Tomuto číslu se někdy říká charakter reprezentace φ Lieovy grupy G v bodě $\exp H \in G$. Přitom prvky $\mathbb{Z}\mathcal{I}$ lze chápat jako funkce $\sum_\nu m_\nu e^\nu$:

$\mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ podle předpisu $H \mapsto \sum_\nu m_\nu \exp \nu(H)$. Zejména tedy platí, že $\operatorname{tr} \varphi(\exp H) = \chi_\lambda(H)$.

Tuto konstrukci ještě modifikujme tak, že prvek $e^\nu \in \mathbb{Z}\mathcal{I}$ budeme chápat místo původního $\exp \nu(\_)$ jako funkci $\exp(2\pi i \nu(\_))$, spolu s homomorfním rozšířením na celé $\mathbb{Z}\mathcal{I}$. Uvažujme tedy funkce tvaru $\exp \circ 2\pi i\nu$ pro $\nu \in \mathcal{I}$, zúžené na $\mathfrak{h}_0$. Jsou to spojité homomorfismy $\mathfrak{h}_0$ na jednotkovou kružnici s nulovým prvkem $1 \in \mathbb{C}$. Víme, že na kokořenech jsou všechny váhy celočíselné, proto mřížka celočíselných lineárních kombinací kokořenů $\mathcal{T}$ leží v jádru zobrazení $\exp \circ 2\pi i\nu$. Je tedy definováno toto zobrazení na $\mathfrak{h}_0/\mathcal{T} = \mathbb{T}$, což je isomorfní toru $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\dim \mathfrak{h}_0}$. Charaktery jsou nyní u grup definovány jako komplexní funkce na torech. Dá se ukázat, že okruh $\mathbb{Z}\mathcal{I}$ je takto isomorfní okruhu $\mathcal{G}$ možných charakterů polojednoduché grupy G.

9.14. Weylova formule pro charaktery. Klíčovým výsledkem pro popis vlastností reprezentací pomocí seznamu jejich vah je tzv. Weylova formule. Abychom ji alepsoň zformulovali, musíme zavést několik pojmů.

Označme $\omega_1, \omega_2, \dots$ fundamentální váhy. Celočíselnou váhu nazveme *ostře dominantní*, jestliže je vyjádřitelná jako lineární kombinace fundamentálních vah s kladnými koeficienty. Nejmenší z ostře dominantních vah nazýváme *nejnižší váha algebry* $\mathfrak{g}$, značíme ji ρ. Je tedy ρ součtem všech fundamentálních vah, nebo také nejmenší dominantní váhou uvnitř (ne na okraji) Weylovy komory. Dá se ukázat, že ρ je zároveň polovinou součtu všech kladných kořenů, tedy $\rho = \sum \omega_i = 1/2 \sum_{\Delta_+} \alpha$.

Pro každý prvek S Weylovy grupy zavádíme jeho znaménko $\det S = \pm 1$ podle toho jestli zachovává nebo obrací orientaci (je to opravdu determinant příslušné lineární isometrie). Každý takový prvek indukuje operaci na $\mathbb{Z}\mathcal{I}$ předpisem $Se^\mu = e^{S(\mu)}$. Pro celou Weylovu grupu tak dostáváme operátor $\sum_{S \in W} (\det S) S$, který váze $\mu \in \mathcal{I}$ přiřadí prvek $\sum_{S \in W} (\det S)(Se^\mu) = \sum_{S \in W} (\det S)(e^{S(\mu)})$. Tuto operaci budeme značit A a nazýváme ji *alternující operátor* Weylovy grupy.

Věta (Weyl). *Pro dominantní váhu λ polojednoduché algebry $\mathfrak{g}$ platí:*

$$\chi_\lambda = A(\lambda + \rho)/A\rho$$

Věta tvrdí, že dělení $A(\lambda + \rho)$ prvkem $A\rho$ v okruhu $\mathbb{Z}\mathcal{I}$ dopadne beze zbytku, s výsledkem χ_λ.

Všimněme si krásy tohoto tvrzení: Na levé straně je výraz, který popisuje úplně váhy obsažené v prostoru reprezentace s nejvyšší vahou λ, napravo je výraz, který lze relativně snadno spočíst a nepotřebujeme k tomu nic, než obecné znalosti o Weylově grupě W a nejnižší váhu ρ.

Důkaz Weylovy formule neuvádíme pro jeho délku, přestože není příliš těžký. Tzv. "moderní" důkaz, který využívá vlastností Casimirova a Laplaceova operátoru, je podán v [Sa] i [FH]. Navíc [FH] uvádí původní "klasický" Weylův důkaz, jenž dochází k výsledku s pomocí integrování charakterů (jako komplexních funkcí) na kompaktních grupách.

Ukážeme si fungování Weylovy formule na příkladě.

9.15. Příklad. Uvažujme algebru $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ a její reprezentaci s nejvyšší váhou $\lambda = me^1 = m\omega_1$ pro libovolné $m \in \mathbb{N}$. V tomto případě máme $\rho = e^1 = \omega_1$ a Weylova grupa se skládá pouze ze dvou prvků, z nichž jeden je identita a druhý obrací znaménko. Celkem dostáváme

$$\chi_\lambda = \frac{A(\lambda+\rho)}{A\rho} = \frac{e^{(m+1)\omega_1} - e^{-(m+1)\omega_1}}{e^{\omega_1} - e^{-\omega_1}} = \\ = e^{m\omega_1} + e^{(m-2)\omega_1} + \cdots + e^{-(m-2)\omega_1} + e^{-m\omega_1}$$

To přesně souhlasí s výsledky kapitoly 3.

V důkazu Weylovy formule, ale i v důkazu následujícího jejího důsledku, se uplatňuje toto lemma.

Lemma. *Pro nejnižší váhu ρ platí:*

$$A\rho = \prod_{\alpha\in\Delta_+}(e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}) = e^{\rho}\prod_{\alpha\in\Delta_+}(1 - e^{-\alpha}) = e^{-\rho}\prod_{\alpha\in\Delta_+}(e^{\alpha} - 1)$$

Důkaz. Je zřejmé, že všechny tři výrazy se vzájemně sobě rovnají, stačí tedy ukázat, že jeden z nich je roven $A\rho$. K tomu je třeba (snadno dokazatelné) pozorování, že prvky $A\mu$ jsou antisymetrické vzhledem k W (tedy $S\cdot A\mu = \det S\cdot A\mu$ pro všechny $S\in W$), a dále že všechny takové antisymetrické prvky v $\mathbb{Z}\mathcal{I}$ tvoří podokruh generovaný výrazy tvaru $A\nu$ pro ostře dominantní váhy ν.

Protože parita prvku Weylovy grupy $S\in W$ je shodná s paritou počtu kladných kořenů, které jsou akcí S zobrazeny na záporné kořeny, je první ze tří výrazů tvrzení lemmatu antisymetrický. Druhý výraz evidentně obsahuje sčítanec e^ρ, a další sčítance tvaru $e^{\rho-\sum\alpha}$ pro nějaké kladné kořeny α. Proto jsou všechny tyto sčítance menší než ρ, a nemohou být ostře dominantní, jelikož ρ je nejmenší taková váha. Jako antisymetrický prvek $\mathbb{Z}\mathcal{I}$ je tvaru $\sum m_\nu A\nu$ pro ostře dominantní váhy ν, může však takto obsahovat jediný prvek tohoto tvaru, a to $A\rho$. □

9.16. Důsledek (Weylova formule pro dimenzi).

$$\dim V(\lambda) = \frac{\prod_{\alpha\in\Delta_+}\langle\lambda+\rho,\alpha\rangle}{\prod_{\alpha\in\Delta_+}\langle\rho,\alpha\rangle}$$

Demonstrujeme tuto formuli na standardní reprezentaci $\mathfrak{so}(5,\mathbb{C})$ z příkladu 9.12. Ta měla nejvyšší váhu $\lambda = e^1$, nejnižší váha algebry je $\rho = \frac{1}{2}(3e^1+e^2)$. Dostáváme

$$\begin{aligned}
\langle\rho,e^1\rangle &= \frac{3}{2} & \langle\lambda,e^1\rangle &= 1\\
\langle\rho,e^2\rangle &= \frac{1}{2} & \langle\lambda,e^2\rangle &= 0\\
\langle\rho,e^1+e^2\rangle &= 2 & \langle\lambda,e^1+e^2\rangle &= 1\\
\langle\rho,e^1-e^2\rangle &= 1 & \langle\lambda,e^1-e^2\rangle &= 1
\end{aligned}$$

$$\dim V(\lambda) = \frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2}{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1} = 5$$

a to je správný výsledek.

Důkaz. Dimenzi reprezentace $V(\lambda)$, která je rovna součtu všech koeficientů m_μ v charakteru $\chi_\lambda = \sum m_\mu e^\mu$, bychom mohli dostat pomocí homomorfismu $\mathbb{Z}\mathcal{I}$ do

$\mathbb{C}$ takového, který by každý prvek tvaru e^ν zobrazil na 1. V tomto případě však nemůžeme použít Weylovu formuli, protože obraz $A\rho$ by byl nulový.

Použijeme tedy jinou konstrukci. Zavedeme homomorfismus $j \circ \Psi : \mathbb{Z}\mathcal{I} \to \mathbb{C}$ jdoucí přes okruh mocninných řad:

$$\mathbb{Z}\mathcal{I} \xrightarrow{\Psi} \mathbb{C}[[t]] \xrightarrow{j} \mathbb{C}$$

Přitom j bude pouhým výběrem konstantního členu mocninné řady. Ψ definujeme pomocí sady homomorfismů Ψ_μ pro každou váhu $\mu \in \mathcal{I}$:

$$\Psi_\mu : \mathbb{Z}\mathcal{I} \to \mathbb{C}[[t]] \qquad e^\beta \mapsto \exp(\langle \mu, \beta\rangle \cdot t) = e^{\langle \mu,\beta\rangle \cdot t},$$

kde poslední výraz e^x značí exponenciální funkci na $\mathbb{C}$. Rozvinutím řad pro exponenciální funkci dostaneme ověření, že konstantní člen $\Psi_\mu(\chi_\lambda)$ pro každé μ je opravdu dimenzí reprezentace $V(\lambda)$.

Ukážeme, že $\Psi_\mu(A\nu) = \Psi_\nu(A\mu)$. Skutečně

$$\begin{aligned}\Psi_\mu(A\nu) &= \sum_{S\in W} (\det S) e^{\langle \mu, S(\nu)\rangle \cdot t} = \sum_{S\in W} (\det S) e^{\langle S^{-1}(\mu),\nu\rangle\cdot t}\\ &= \sum_{S\in W} (\det S) e^{\langle S(\mu),\nu\rangle\cdot t} = \Psi_\nu(A\mu)\end{aligned}$$

Klademe $\Psi = \Psi_\rho$ a máme

$$\begin{aligned}\Psi(A\mu) = \Psi_\rho(A\mu) = \Psi_\mu(A\rho) &= \prod_{\alpha\in\Delta_+} (e^{\langle\mu,\alpha\rangle\cdot t/2} - e^{-\langle\mu,\alpha\rangle\cdot t/2})\\ &= \left(\prod_{\alpha\in\Delta_+} \langle \mu,\alpha\rangle\right) t^{\#\Delta_+} + \text{členy vyššího stupně v } t,\end{aligned}$$

kde $\#\Delta_+$ je počet kladných kořenů. Odsud po vydělení dostáváme

$$\begin{aligned}\Psi(\chi_\lambda) &= \Psi(A(\lambda+\rho))/\Psi(A\rho)\\ &= \frac{\prod_{\alpha\in\Delta_+}\langle\lambda+\rho,\alpha\rangle}{\prod_{\alpha\in\Delta_+}\langle\rho,\alpha\rangle} + \text{členy kladného stupně v } t.\end{aligned}$$

□

9.17. Weylova formule má další důsledky. Uvedeme alespoň některé z nich.

Zavedeme tzv. *dělící funkci* na množině $\mathcal{I}$ takto: $\mathcal{P}(\mu)$ je počet způsobů, jak lze váhu μ rozepsat na celočíselný součet kladných kořenů. Zřejmě je $\mathcal{P}(\mu) = 0$ pro váhy, které nejsou kladné (mimo nulové váhy) a $\mathcal{P}(0) = 1$.

Důsledek (Konstantova formule). *Násobnost m_μ váhy μ je*

$$m_\mu = \sum_{S\in W} \det S \cdot \mathcal{P}(S(\lambda+\rho) - \rho - \mu).$$

Důkaz. Protože $1/(1-e^{-\alpha}) = 1 + e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + \dots$, dostáváme $(\prod_{\alpha\in\Delta_+}(1 - e^{-\alpha}))^{-1} = \sum_{\mathcal{I}} \mathcal{P}(\mu) e^{-\mu}$. (Nekonečné řady tohoto typu lze násobit díky jejich speciálním vlastnostem, které neuvádíme, viz např. [Sa].)

Díky lemmatu 9.15 lze Weylovu formuli pro charaktery zapsat $\chi_\lambda = A(\lambda + \rho)e^{-\rho}/\prod_{\alpha\in\Delta_+}(1-e^{-\alpha})$. Po dosazení máme

$$\chi_\lambda = \sum m_\mu e^\mu = \left(\sum_{S\in W} \det S \cdot e^{S(\lambda+\rho)-\rho}\right)\cdot\left(\sum_{\nu\in\mathcal{I}} \mathcal{P}(\nu)e^{-\nu}\right).$$

Roznásobíme-li výraz napravo, vidíme, že příspěvek pro m_μ (μ je pevné) dostaneme pro taková ν, pro něž $S(\lambda+\rho)-\rho-\nu=\mu$. Odtud již plyne tvrzení. $\square$

Tento výsledek je však velmi nepraktický, protože funkce $\mathcal{P}$ se nedá snadno vyčíslit. Existují však formule, jejichž algoritmizace je mnohem snadnější.

Pro celočíselné lineární formy μ zavádíme funkci $\varepsilon(\mu)=\varepsilon_\mu=\det T$, jestliže existuje prvek Weylovy grupy T takový, že $\mu=T(\lambda+\rho)-\rho$, a $\varepsilon_\mu=0$, jestliže takový prvek neexistuje. (Zobrazení $\lambda\mapsto T(\lambda+\rho)-\rho$ se nazývá *posunutá akce* grupy W s počátkem $-\rho$.)

Důsledek (Klimykova formule). *Násobnost m_μ váhy μ je*

$$m_\mu = \varepsilon_\mu - \sum_{1\neq S\in W} \det S\cdot m_{\mu+\rho-S(\rho)};$$

prvek $1\in W$ značí jednotku grupy W.

Důkaz. Přepíšeme Weylovu formuli na $\sum m_\mu e^\mu\cdot\left(\sum_W \det S\cdot e^{S(\rho)}\right)=\sum_W \det T\cdot e^{T(\lambda+\rho)}$. Budeme upravovat levou stranu na $\sum_W\left(\sum_{\mu\in\mathcal{I}}\det S\cdot m_\mu e^\mu e^{S(\rho)}\right)$, což se rovná $\sum_W\left(\sum_{\mu\in\mathcal{I}}\det S\cdot m_{S(\mu)}e^{S(\mu+\rho)}\right)$, protože pokud μ probíhá celé $\mathcal{I}$, pak $S(\mu)$ probíhá také celé $\mathcal{I}$ pro pevné $S\in W$. Dále pro každé S zavedeme ν výrazem $S(\mu+\rho)=\nu+\rho$, a ν probíhá v tomto případě také celé $\mathcal{I}$. Dostáváme tak levou stranu jako $\sum_W\left(\sum_{\nu\in\mathcal{I}}\det S\cdot m_{\nu+\rho-S(\rho)}e^{\nu+\rho}\right)$, což je rovno $\sum_{\mu\in\mathcal{I}}\left(\sum_W \det S\cdot m_{\mu+\rho-S(\rho)}\right)e^{\mu+\rho}$. Porovnáme-li tento výsledek s pravou stranou výše uvedené Weylovy formule, vidíme, že koeficient u $e^{\mu+\rho}$ je roven $\det T$, pokud $\mu+\rho=T(\lambda+\rho)$ pro nějaké (v tomto případě jediné) T, jinak je tento koeficient nulový. To je však právě hodnota ε_μ.

Celkem máme $m_\mu+\sum_{1\neq S\in W}\det S\cdot m_{\mu+\rho-S(\rho)}=\varepsilon_\mu$, což jsme chtěli ukázat. $\square$

Klimykova formule umnožňuje induktivní výpočet násobností jednotlivých vah. Všimněme si, že $\rho-S(\rho)$ je pro každé S nenulové dominantní (tedy nenulovou lineární kombinací kladných kořenů s nezápornými celočíselnými koeficienty). Pro násobnost m_μ proto dostáváme vyjádření s pomocí násobností vah vyšších než μ, plus výraz ε_μ, který vyžaduje test přes celou Weylovu grupu. Začneme-li tedy počítat násobnosti vah od $m_\lambda=1$, můžeme brát váhy dále sestupně a spočítat tak všechny násobnosti, až dorazíme k požadované váze μ. Efektivitu tohoto algoritmu snižuje pozorování, že díky faktoru $\det S$ se mnoho násobností v konečné sumě pro μ vzájemně odečte, a jejich příspěvek byl tedy spočítán zbytečně.

9.18. Tenzorové součiny reprezentací. Vezměme dvě ireducibilní reprezentace φ a ψ s nejvyššími váhami λ' a λ''. Jak jsme ukázali v 9.10, reprezentace $\varphi\otimes\psi$ má nejvyšší váhu $\lambda'+\lambda''$. Tuto úvahu lze zobecnit: Nechť μ (resp. ν) je váha reprezentace φ (resp. ψ) s násobností m'_μ (resp. m''_ν) a váhovým prostorem V_μ (resp. W_ν). (Máme tedy v charakteru $\chi_{\lambda'}$ sčítanec $m'_\mu e^\mu$ a v charakteru $\chi_{\lambda''}$

sčítanec $m''_\nu e^\nu$.) Pro vektory $v \in V_\mu$ a $w \in W_\nu$ platí: $\varphi(H)(v) = \mu(H) \cdot v$ a $\psi(H)(w) = \nu(H) \cdot w$. Tedy

$$(\varphi \otimes \psi)(H)(v \otimes w) = \varphi(H)(v) \otimes w + v \otimes \psi(H)(w) = (\mu + \nu)(H) \cdot v \otimes w.$$

Prostor $V_\mu \otimes W_\nu$, který je prvky tvaru $v \otimes w$ lineárně generován, je tedy váhovým prostorem reprezentace $\varphi \otimes \psi$ dimenze $m'_\mu \cdot m''_\nu$ pro váhu $\mu + \nu$. Přímým součtem těchto váhových prostorů je již celý vektorový prostor $V \otimes W$, na kterém se reprezentace $\varphi \otimes \psi$ realizuje. V charakteru reprezentace $\varphi \otimes \psi$ (která nemusí být ireducibilní) se proto vyskytují právě sčítance $m'_\mu m''_\nu e^{\mu+\nu} = (m'_\mu e^\mu) \cdot (m''_\nu e^\nu)$, což znamená, že charakter reprezentace $\varphi \otimes \psi$ je $\chi_{\lambda'} \cdot \chi_{\lambda''}$.

Reprezentace $\varphi \otimes \psi$ není obecně ireducibilní, musí však být rozložitelná na přímý součet ireducibilních reprezentací. Proto $\chi_{\lambda'} \cdot \chi_{\lambda''} = \sum_\lambda n_\lambda \chi_\lambda$, kde suma probíhá dominantní váhy a n_λ je násobnost ireducibilní reprezentace s nejvyšší váhou λ v reprezentaci $\varphi \otimes \psi$. Budeme hledat koeficienty n_λ. Z technických důvodů položíme $n_\lambda = 0$ také pro nedominantní váhy λ.

Věta (Steinbergova formule). *Pro každou dominantní váhu λ platí:*

$$n_\lambda = \sum_{S,T \in W} \det ST \cdot \mathcal{P}(S(\lambda' + \rho) + T(\lambda'' + \rho) - \lambda - 2\rho)$$

($\mathcal{P}$ je dělící funkce popsaná výše.)

Důkaz. Aplikací Weylovy formule dostáváme vyjádření $\chi_{\lambda'} \cdot A_{\lambda''+\rho} = \sum n_\lambda A_{\lambda+\rho}$. Použijeme definice charakteru a alternujícího operátoru:

$$\left(\sum_\mu m'_\mu \cdot e^\mu \right) \cdot \left(\sum_T \det T \cdot e^{T(\lambda''+\rho)} \right) = \sum_{\lambda,U} n_\lambda \det U e^{U(\lambda+\rho)}.$$

Za m'_μ dosadíme z Konstantovy formule (9.17) výraz $\sum_S \det S \cdot \mathcal{P}(S(\lambda'+\rho) - \rho - \mu)$:

$$\sum_{\mu,S,T} \det ST \cdot \mathcal{P}(S(\lambda' + \rho) - \rho - \mu) \cdot e^{T(\lambda''+\rho)+\mu} = \sum_{\lambda,U} n_\lambda \det U \cdot e^{U(\lambda+\rho)}.$$

Na pravé straně povolíme sčítání přes všechny váhy λ, čímž se součet nezmění, protože pro nedominantní λ je $n_\lambda = 0$. Pro pevné $U \in W$ zavedeme σ předpisem $U(\lambda+\rho) = \sigma+\rho$ a pravou stranu můžeme přepsat na $\sum_{\sigma,U} \det U n_{U^{-1}(\sigma+\rho)-\rho} \cdot e^{\sigma+\rho}$, což je rovno $\sum_{\sigma,U} \det U n_{U(\sigma+\rho)-\rho} \cdot e^{\sigma+\rho}$, protože $\det U = \det U^{-1}$. Na levé straně provedeme stejný trik: pro pevné $T \in W$ zavedeme σ tak, aby splňovalo $T(\lambda'' + \rho) + \mu = \sigma + \rho$. Levá strana má pak tvar $\sum_{\sigma,S,T} \det ST \cdot \mathcal{P}(S(\lambda' + \rho) + T(\lambda'' + \rho) - \sigma - 2\rho) \cdot e^{\sigma+\rho}$.

Dále, je-li σ dominantní, je $\sigma + \rho$ ostře dominantní a pro $U \neq 1$ není $U(\sigma+\rho) - \rho$ dominantní. Je tedy v tomto případě $n_{U(\sigma+\rho)-\rho} = 0$ a na pravé straně nám u $e^{\sigma+\rho}$ zbývá jediný koeficientu n_σ. To je tedy rovno koeficientu u $\sigma + \rho$ na levé straně, což dává tvrzení věty. □

Steinbergova formule je velmi explicitní, ale bohužel ne příliš praktická. Používá se zde totiž opět dělící funkce, která se těžko vyčísluje, a dále se vnořeně sčítá přes celou Weylovu grupu.

Jiný přístup k problému poskytuje Brauerův algoritmus. Ten předpokládá, že známe násobnosti všech vah jedné z obou reprezentací, nechť je to např. φ. Použitím Weylovy formule, podobně jako výše, dostáváme vztah

$$\Big(\sum m'_\mu e^\mu\Big) \cdot A_{\lambda''+\rho} = \sum n_\lambda A_{\lambda+\rho}$$

Na levé straně tedy násobíme symetrický prvek antisymetrickým, čímž dostáváme antisymetrický prvek, jehož vyjádření s pomocí alternujících operátorů na pravé straně hledáme.

Myšlenka Brauerova algoritmu spočívá v tom, že při výpočtu lze vzít v úvahu i členy s nedominantními váhami, které se liší od příslušných dominantních pouze znaménkem. K formulaci budeme potřebovat tomu odpovídající značení. Váhu τ nazveme *singulární,* jestliže platí $\langle \tau, \alpha\rangle = 0$ pro nějaký jednoduchý kořen α. Pro singulární τ je $S_\alpha(\tau) = \tau$, a tedy $A_\tau = A_{S_\alpha(\tau)} = \det S_\alpha \cdot A_\tau = -A_\tau$, z čehož plyne $A_\tau = 0$. V tomto případě položíme $\eta_\tau = 0$. Pro regulární váhu τ zavádíme $\eta_\tau = \det S$ pro takový prvek S Weylovy grupy, že $S(\tau)$ je dominantní (takový prvek je v každém případě jediný). Výrazem $[\tau]$ značíme dominantní prvek v orbitě váhy τ. Je tedy vždy $A_\tau = \eta_\tau A_{[\tau]}$.

Věta (Brauerův algoritmus).

$$\chi'_\lambda \cdot A_{\lambda''+\rho} = \sum m'_\sigma \cdot \eta_{\sigma+\lambda''+\rho} \cdot A_{[\sigma+\lambda''+\rho]},$$

přičemž suma na pravé straně probíhá všechny váhy σ reprezentace φ.

Důkaz. Nechť množina E obsahuje dvojice tvaru (e^μ, e^ν) pro všechny váhy μ reprezentace φ a všechny ν z orbity prvku $\lambda'' + \rho$. Každé takové dvojici přiřadíme člen $m'_\mu \det S \cdot e^\mu \cdot e^\nu$ pro takové S, že $\nu = S(\lambda'' + \rho)$. Součet všech těchto členů dává právě levou stranu dokazovaného vztahu.

Na E definujeme akci Weylovy grupy předpisem $S(e^\mu, e^\nu) = (Se^\mu, Se^\nu)$. Každá orbita pak obsahuje jediný prvek tvaru $(e^\sigma, e^{\lambda''+\rho})$, přičemž různá σ odpovídají různým orbitám. Pro každou orbitu dostáváme součet členů, které jí přiřadíme:

$$\sum_{S\in W} m'_{S\sigma} \cdot \det S \cdot e^{S\sigma} \cdot e^{S(\lambda''+\rho)},$$

kde jsme využili toho, že $m'_\sigma = m'_{S\sigma}$. To je ovšem právě $m'_\sigma A_{\sigma+\lambda''+\rho}$, a sečtením přes σ, tedy všechny orbity, dostáváme požadované. $\square$

Tento výsledek existuje také ve formulaci pana Klimyka:

Věta (Klimyk). *Pro dominantní váhu λ, násobnost n_λ ireducibilní reprezentace s nejvyšší váhou λ v tenzorovém součinu $\varphi \otimes \psi$ je rovna $\sum m'_\sigma \cdot \eta_{\sigma+\lambda''+\rho}$, přičemž se sčítá přes takové váhy σ reprezentace φ, pro které je $[\sigma + \lambda'' + \rho] = \lambda + \rho$.*

10. Dynkinovy diagramy komplexních algeber

10.1. Označíme jednoduché kořeny jako v předchozích kapitolách $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, Cartanova čísla $a_{ij} = 2 \cdot \frac{\langle \alpha_i, \alpha_j\rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j\rangle}$. Nechť θ_{ij} je úhel, který svírají vektory α_i a α_j. Pak zřejmě

$$a_{ij} \cdot a_{ji} = 4 \cdot \frac{\langle \alpha_i, \alpha_j\rangle \cdot \langle \alpha_j, \alpha_i\rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j\rangle \cdot \langle \alpha_i, \alpha_i\rangle} = 4 \cos^2 \theta_{ij}.$$

Zavedeme označení $n_{ij} = a_{ij} \cdot a_{ji}$ a vidíme, že n_{ij} může nabývat hodnot mezi 0 a 4. Kdyby však pro různá i a j bylo $n_{ij} = 4$, pak $\theta_{ij} = 0$, což není možné. Navíc víme, že a_{ij} jsou celá čísla, proto $n_{ij} \in \{0, 1, 2, 3\}$.

10.2. Definice. Pro každý kořenový systém Δ definujeme jeho *Dynkinův diagram* (neorientovaný) jako graf s m vrcholy $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ a hranami mezi α_i a α_j s násobností n_{ij}.

10.3. Příklad $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$. Máme dva jednoduché kořeny $e^1 - e^2$ a $e^2 - e^3$. Dostáváme Cartanova čísla $a_{12} = -1$, $a_{21} = -1$, tedy $n_{12} = n_{21} = 1$. Dostáváme tak Dynkinův diagram algebry $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$: $\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$.

10.4. Poznámka. Dynkinův diagram je souvislý právě tehdy, když algerba $\mathfrak{g}$ je jednoduchá.

Důkaz. Předpokládejme, že Dynkinův diagram algebry $\mathfrak{g}$ je nesouvislý, mějme dvě souvislé komponenty odpovídající rozkladu na kořenové systémy Δ_1 a Δ_2. Víme tedy, že pro všechna $\alpha \in \Delta_1$ a $\beta \in \Delta_2$ je $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$. Najdeme rozklad $\mathfrak{g}$ na přímý součet dvou podalgeber.

Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ lze díky kolmosti rozložit na přímý součet $\mathfrak{h} = \langle H_\alpha : \alpha \in \Delta_1 \rangle \oplus \langle H_\beta : \beta \in \Delta_2 \rangle$. Algebru $\mathfrak{g}$ rozložíme na dva podprostory

$$\mathfrak{g} = \left(\langle H_\alpha : \alpha \in \Delta_1 \rangle \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta_1} \mathfrak{g}_\alpha \right) \oplus \left(\langle H_\beta : \beta \in \Delta_2 \rangle \oplus \bigoplus_{\beta \in \Delta_2} \mathfrak{g}_\beta \right),$$

jejichž Lieova závorka je nulová, jak ukážeme.

Uvažme $\alpha + \beta$ pro $\alpha \in \Delta_1$ a $\beta \in \Delta_2$: kdyby to byl kořen, patřil by buď Δ_1 nebo Δ_2. Pokud nastane první případ, máme $0 = \langle \alpha + \beta, \beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \beta, \beta \rangle = \langle \beta, \beta \rangle$, což je spor s nedegenerovaností Killingovy formy na $\mathfrak{h}$. Podobně to dopadne i pro případ $\alpha + \beta \in \Delta_2$. Proto $\alpha + \beta$ není kořen, a tedy $[X_\alpha, X_\beta] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} = 0$. Zároveň $[h_\alpha, X_\beta] = \beta(h_\alpha) X_\beta = \langle \alpha, \beta \rangle \cdot X_\beta = 0$.

Je-li naopak algebra $\mathfrak{g}$ polojednoduchá, ale není jednoduchá, rozložíme ji na přímý součet jednoduchých komponent. Nechť jsou tyto komponenty dvě, a to $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$. Vezměme dva jednoduché kořeny α algebry $\mathfrak{a}$ a β algebry $\mathfrak{b}$. α rozšíříme na celé $\mathfrak{g}$ tak, že $\alpha(\mathfrak{b}) = 0$, podobně pro β. Přitom α i β zůstávají kořeny $\mathfrak{g}$ a $\alpha \perp \beta$, a jinak vzniklé kořeny algebra $\mathfrak{g}$ nemá. Dynkinův diagram tedy má dvě souvislé komponenty, jednu odpovídající kořenům $\mathfrak{a}$ a druhou kořenům $\mathfrak{b}$. $\square$

10.5. Každému konečnému neorientovanému grafu s m vrcholy a násobnostmi hran n_{ij} přiřadíme kvadratickou formu Q předpisem:

$$Q(x_1, \ldots, x_m) = 2 \cdot \sum_i x_i^2 - \sum_{i \neq j} \sqrt{n_{ij}} x_i x_j$$

Druhá suma přitom probíhá všechna i a všechna j, která jsou různá, proto např. výraz $x_1 x_2$ se vyskytuje dvakrát, jednou pro $i = 1$, $j = 2$, a podruhé pro $i = 2$, $j = 1$.

Algebra $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ z předchozího příkladu má formu $Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 x_2$.

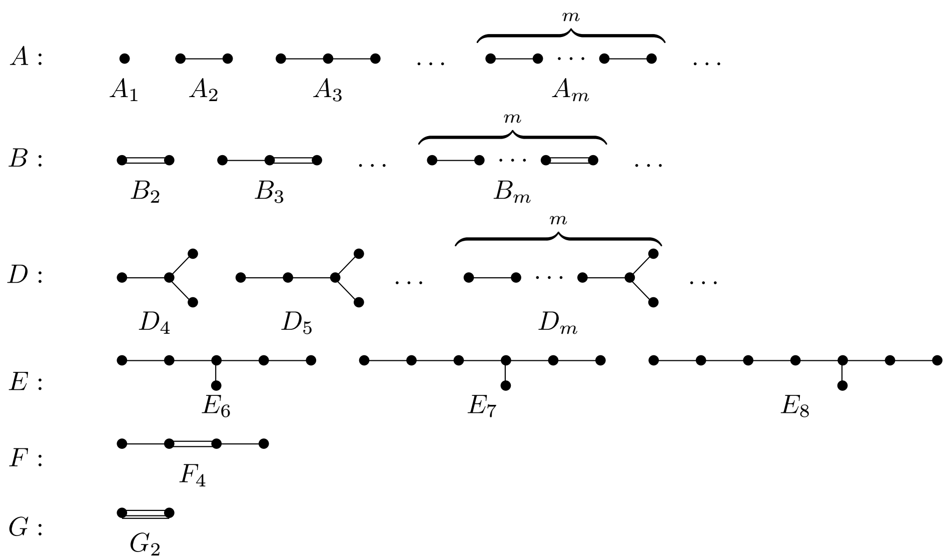
Lemma. *Každý Dynkinův diagram jednoduché komplexní Lieovy algebry zadává pozitivně definitní formu Q.*

Důkaz. Přímým výpočtem ukážeme, že

$$\begin{aligned} Q(x_1,\dots,x_m) &= 2\cdot\left\langle \sum_i \frac{\alpha_i x_i}{\sqrt{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}}, \sum_i \frac{\alpha_i x_i}{\sqrt{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}} \right\rangle \\ &= 2\cdot\sum_i x_i^2\cdot\frac{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle} - 2\cdot\sum_{i\neq j} x_i x_j\cdot\frac{\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\sqrt{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle\cdot\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle}} \\ &= \sum_i 2x_i^2 - \sum_{i\neq j}\sqrt{n_{ij}}x_i x_j \end{aligned}$$

$\square$

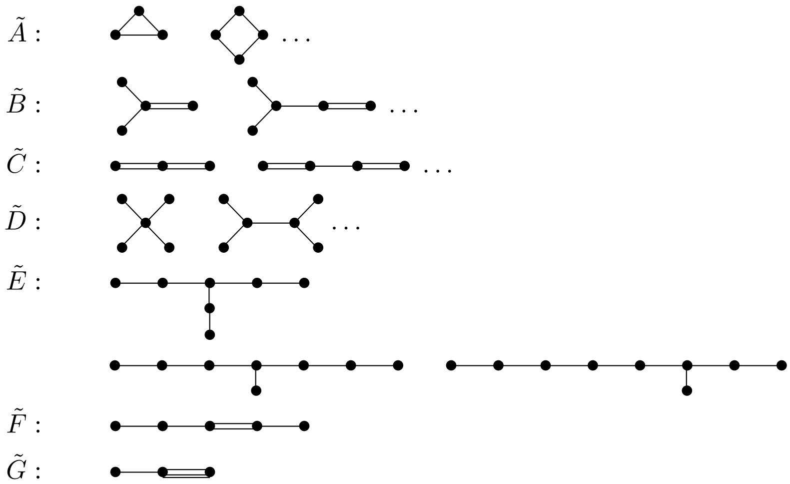
10.6 Věta. *Každý souvislý diagram s násobností hran 1, 2 nebo 3, jehož kvadratická forma je positivně definitní, je jedním z následujícího seznamu:*



Důkaz. Kvadratická forma Q má symetrickou matici

$$\begin{pmatrix} 2 & & -\sqrt{n_{ij}} \\ & \ddots & \\ -\sqrt{n_{ij}} & & 2 \end{pmatrix}$$

Zúžíme-li formu Q na nějaký podgraf Dynkinova diagramu, zůstane positivně definitní. $\blacksquare$ Dá se však snadno ukázat, že pro následující grafy má jejich forma singulární matici, tedy nemohou se vyskytnout jako podgrafy Dynkinových diagramů polojednoduchých algeber:

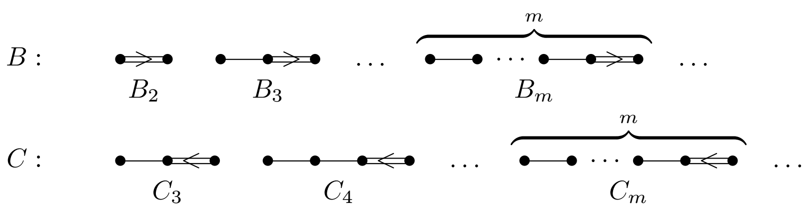


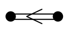
Diskusí možných Dynkinových grafů, které neobsahují tyto podgrafy, dostaneme snadno tvrzení věty. Přitom v některých řadách záměrně nezačínáme od jedničky, protože máme isomorfismy $G_1 \cong F_1 \cong E_1 \cong D_1 \cong B_1 \cong A_1$, $F_2 \cong B_2$, $E_2 \cong A_2$, $D_2 \cong A_1 \oplus A_1$, $F_3 \cong B_3$, $E_3 \cong D_3 \cong A_3$, $E_4 \cong A_4$ a $E_5 \cong D_5$. $\square$

10.7. Předchozí věta ukazuje, jaké jsou možné Dynkinovy diagramy pro jednoduché Lieovy algebry. Abychom s jejich pomocí tyto algebry úplně klasifikovali, zbývají dva kroky:

(1) Ukázat, že Dynkinův diagram identifikuje Lieovu algebru jednoznačně až na isomorfismus, a
(2) ke každému Dynkinovu diagramu najít jemu odpovídající Lieovu algebru.

První podmínka však zatím není splněna. U vícenásobných hran totiž není zřejmá orientace: pokud $n_{ij} = 2$, může být $a_{ij} = -1$ a $a_{ji} = -2$, nebo naopak. Potom $\frac{a_{ij}}{a_{ji}} = \frac{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle}$, tedy buď $\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle < \langle \alpha_j, \alpha_j \rangle$, nebo naopak. V případě trojnásobné hrany to dopadne stejně. Zorientujeme tedy tyto hrany šipkou, která povede od většího kořene k menšímu. V případě G_2 ovšem budou oba zorientované diagramy isomorfní. Dostáváme tedy pouze místo řady diagramů B dvě řady:



Případ $C_2 =$  je isomorfní diagramu B_2, proto se v seznamu neuvádí.

V případě $n_{ij} = 1$ existuje pouze jediná možnost, a to $a_{ij} = a_{ji} = -1$, není tedy nutná žádná orientace hran. Celkem dostáváme *orientovaný Dynkinův diagram.*[18]

---

[18]Některá literatura označuje až tento orientovaný diagram jako Dynkinův, bez přívlastku orientovaný.

10.8. Rekonstrukce jednoduché Lieovy algebry z jejího (orientovaného) Dynkinova diagramu se skládá ze dvou fází: rekonstrukce kořenového systému z Dynkinova diagramu a rekonstrukce Lieovy algebry z kořenového systému.

První část je snazší. Potřebujeme dostat všechny kladné kořeny, záporné pak získáme okamžitě. Z Dynkinova diagramu zjistíme všechny jednoduché kořeny, včetně úhlů mezi nimi a poměry jejich velikostí. Všechny kladné kořeny jsou tvaru $\beta = \sum m_i\alpha_i$ s nezápornými m_i. Označme $\sum m_i$ jako *stupeň* kořene β a postupujme indukcí vzhledem ke stupni. Kořeny stupně 1 známe, neboť jsou to právě jednoduché kořeny. Ve stupni 2 jsou vyloučeny případy $2\alpha_i$, tedy přichází v úvahu pouze tvar $\alpha_i + \alpha_j$. Ten nastane právě tehdy, pokud jsou α_i a α_j v Dynkinově diagramu spojeny hranou.

Dále předpokládejme, že již známe všechny kořeny stupně nejvýše m. Vezměme tedy kořen $\beta = \sum m_i\alpha_i$ stupně právě m a pro každý jednoduchý kořen $\alpha = \alpha_j$ uvažme, zda je také $\beta + \alpha$ kořenem. Podívejme se na α-řetízek kořenu β, viz 8.3. Máme kořeny

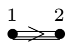
$$\beta - q\alpha, \dots, \beta, \dots, \beta + p\alpha,$$

přičemž $q - p = a_{\beta\alpha}$. Proto $\beta + \alpha$ je kořen, právě když $p > 0$, tedy

$$q > a_{\beta\alpha} = 2\frac{\langle \beta, \alpha\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle} = \sum m_i a_{\alpha_i\alpha}.$$

Číslo q přitom známe díky tomu, že $\beta - q\alpha$ musí být kladný kořen, neboť každý kořen se zapíše jako kombinace jedoduchých kořenů buď s výhradně kladnými nebo s výhradně zápornými koeficienty.

Zbývá ukázat, že každý kořen stupně $m + 1$ je tohoto tvaru. Nechť $\gamma = \sum r_i\alpha_i$ má stupeň $m + 1$. Díky pozitivní definitnosti Killingovy formy je $0 < \langle\gamma, \gamma\rangle = \sum r_i\langle\gamma, \alpha_i\rangle$, proto $\langle\gamma, \alpha_i\rangle > 0$ pro nějaké $r_i > 0$. Z výše uvedené diskuse α-řetízku pro β také vyplývá, že pokud $\langle\beta, \alpha\rangle > 0$, pak $q > p$ a proto $\beta - \alpha$ musí být také kořen. V našem případě je tedy $\gamma - \alpha_i$ kořen, který musí být kladný, protože $r_i > 0$. Je tedy γ součtem kořenů stupňů m a 1.

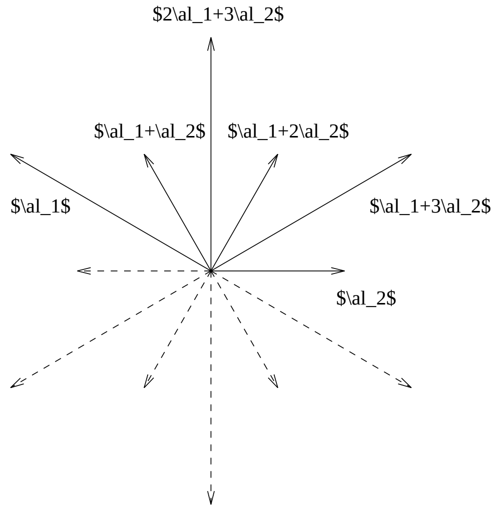
10.9. Příklad. Vezměme Dynkinův diagram . Tedy $a_{12} = -3$ a $a_{21} = -1$, proto $4\cos^2\theta = 3$ a $\cos\theta = -\sqrt{3}/2$, z čehož máme úhel mezi α_1 a α_2: $\theta = 5\pi/6$. Přitom poměr velikostí α_1 a α_2 je $\sqrt{3}$.

Jediným kandidátem na kořen stupně 2 je $\alpha_1+\alpha_2$, což je opravdu kořen, protože tyto dva vrcholy jsou spojeny hranou.

Pro stupeň 3 máme dvě možnosti: $2\alpha_1 + \alpha_2$ a $\alpha_1 + 2\alpha_2$. V obou případech je $\beta = \alpha_1 + \alpha_2$. Pro $\alpha = \alpha_1$ víme, že $\beta - \alpha = \alpha_2$ je kořen, ale $\beta - 2\alpha$ už není, proto $q = 1$. Potom $a_{\beta\alpha} = a_{11} + a_{21} = 2 - 1 = 1$ a $2\alpha_1 + \alpha_2$ není kořen. Pro $\alpha = \alpha_2$ je opět $q = 1$, ale $a_{\beta\alpha} = a_{12} + a_{22} = -3 + 2 = -1$ a $\alpha_1 + 2\alpha_2$ je jediný kořen stupně 3.

V případě čtvrtého stupně jsou opět dvě možnosti pro jediné $\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2$ a α může být α_1 nebo α_2. V prvním případě: $\beta - \alpha_1 = 2\alpha_2$ není kořen a $q = 0$, $a_{\beta\alpha} = a_{11} + 2a_{21} = 0$, proto $2\alpha_1 + 2\alpha_2$ není kořen. Pro případ $\alpha = \alpha_2$ je dokonce $\beta - 2\alpha = \alpha_1$ kořenem, tedy $q = 2$ a $a_{\beta\alpha} = a_{12} + 2a_{22} = 1$ a $\alpha_1 + 3\alpha_2$ je kořen.

Ve stupni 5 najdeme pro $\beta = \alpha_1 + 3\alpha_2$ a $\alpha = \alpha_1$ hodnoty $q = 0$ a $a_{\beta\alpha} = -1$, z čehož $2\alpha_1+3\alpha_2$ je kořen, zatímco pro $\alpha = \alpha_2$ je $q = 3$ a $a_{\beta\alpha} = 3$ a $\alpha_1+4\alpha_2$ kořenem není. Dále už nenajdeme žádný další kořen stupně 6, a tedy známe již všechny kladné kořeny algebry G_2: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 + 3\alpha_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_2$. Obrázek



Kořenový systém algebry G_2

znázorňuje celý kořenový systém této algebry, přitom plné čáry jsou použity pro kladné kořeny a přerušované pro záporné kořeny.

10.10. Rekonstrukce Lieovy algebry z jejího kořenového systému je uvedena např. v [Sa]. Klíčem je tzv. *Weyl–Chevalleyho normální forma* Lieovy algebry. Nechť máme již vybrány kokořeny H_α v Cartanově podalgebře. Hledáme doplnění báze na celou algebru prvky tvaru X_α a $X_{-\alpha}$ takovými, že $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$. Máme zde však jistou volnost: místo X_α a $X_{-\alpha}$ lze vzít $c_\alpha X_\alpha$ a $c_\alpha^{-1} X_{-\alpha}$ pro nenulovou konstantu c_α. V obou případech dostaneme jiný koeficient $N_{\alpha\beta}$ ve vyjádření $[X_\alpha, X_\beta] = N_{\alpha\beta} X_{\alpha+\beta}$. Weyl–Chevalleyho normální forma normuje tyto koeficienty na jisté celočíselné hodnoty a dá se zkonstruovat se znalostí kořenového systému dané Lieovy algebry. Je také třeba se ujistit, že celý postup je nezávislý na výběru Cartanovy podalgebry; skutečně platí tvrzení, že výběrem různých Cartanových poalgeber dostáváme automorfismus polojednoduché Lieovy algebry.

Výsledkem je pak následující tvrzení:

Věta. *Nechť $\mathfrak{g}_1$ a $\mathfrak{g}_2$ jsou dvě polojednoduché Lieovy algebry, jejichž kořenové systémy jsou izomorfní. Pak také $\mathfrak{g}_1$ a $\mathfrak{g}_2$ jsou izomorfní.*

10.11. Ke každému Dynkinovu diagramu navíc existuje odpovídající Lieova algebra. Algebry odpovídající řadám A, B, C a D jsou nám už známé příklady z kapitoly 2: $\mathfrak{sl}$, $\mathfrak{so}$ a $\mathfrak{sp}$. Pro zbylé diagramy se též dají zkonstruovat speciální algerby.

Můžeme tedy klasifikovat všechny Lieovy algebry:

Diagram	Algebra	Řád	Dimenze
A_ℓ	$\mathfrak{sl}(\ell+1,\mathbb{C})$	$\ell = 1, 2, \dots$	$\ell(\ell+2)$
B_ℓ	$\mathfrak{o}(2\ell+1,\mathbb{C})$	$\ell = 2, 3, \dots$	$\ell(2\ell+1)$
C_ℓ	$\mathfrak{sp}(\ell,\mathbb{C})$	$\ell = 3, 4, \dots$	$\ell(2\ell+1)$
D_ℓ	$\mathfrak{o}(2\ell,\mathbb{C})$	$\ell = 4, 5, \dots$	$\ell(2\ell-1)$
G_2	—	2	14
F_4	—	4	52

E_6	—	6	78
E_7	—	7	133
E_8	—	8	248

Algebrám A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ a D_ℓ se říká klasické Lieovy algebry, G_2, F_4, E_6, E_7 a E_8 se nazývají výjimečné Lieovy algebry.

10.12 Poznámka. Dynkinovy diagramy popisují také vnitřní strukturu jednotlivých algeber. Mají totiž tu pěknou vlastnost, že vložení Dynkinova diagramu do jiného odpovídá nějaké podalgebře. Zvláště je vidět, že vložení A_1 do všech diagramů odpovídá podalgebrám $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, které jsme našli v každé polojednoduché algebře. Navíc symetrie Dynkinových diagramů odpovídají automorfismům Lieových algeber. Např. v případě D_ℓ dostáváme automorfismy záměnou kokořenů odpovídajících dvěma pravým krajním vrcholům diagramu.

10.13 Značení reprezentací. Dynkinovy diagramy pomáhají také při značení reprezentací. Každá ireducibilní reprezentace je identifikována svou nejvyšší váhou, která je nezápornou celočíselnou lineární kombinací fundamentálních vah. Tyto fundamentální váhy lze ztotožnit s vrcholy Dynkinova diagramu. Označíme-li tedy každý vrchol celým nezáporným číslem, lze tak identifikovat každou ireducibilní reprezentaci odpovídající algebry. Např. $\overset{1}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{0}{\bullet}$ a $\overset{0}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{1}{\bullet}$ značí fundamentální reprezentace algebry $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$, nejnižší váha je $\rho = \overset{1}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{1}{\bullet}$. Libovolnou ireducibilní reprezentaci s nejvyšší váhou $\lambda = c_1\omega_1 + c_2\omega_2$ označíme $\overset{c_1}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{c_2}{\bullet}$.

Toto značení může sloužit také pro libovolné (nejen nejvyšší) váhy reprezentací, pokud u vrcholů Dynkinova diagramu povolíme také záporná celá čísla. S pomocí tohoto značení lze velmi snadno zjistit obraz dané váhy při některé Weylově reflexi. Spočtěme, jak dopadne obraz nějaké váhy $\lambda = c_1\omega_1 + \cdots + c_m\omega_m$ v reflexi S_{α_i}. Víme, že $S_{\alpha_i}(\lambda) = \lambda - \lambda(H_{\alpha_i})\cdot\alpha_i$, což je ovšem zřejmě rovno $\lambda - c_i\cdot\alpha_i$. Kořeny α_i lze snadno vyjádřit s pomocí Cartanových čísel a fundamentálních vah: víme, že $\alpha_i(H_{\alpha_j}) = a_{ij}$, proto $\alpha_i = \sum_j a_{ij}\omega_j$. Celkem dostáváme $S_{\alpha_i}(\lambda) = S_{\alpha_i}(\sum_j c_j\omega_j) = \sum_j c_j\omega_j - c_i\cdot\sum_j a_{ij}\omega_j$. Proto koeficient c_j u ω_j přejde při reflexi S_{α_i} na $c_j - a_{ij}\cdot c_i$.

Vidíme tedy, že při grafickém znázornění váhy λ s pomocí Dynkinova diagramu dostáváme jednoduchá pravidla pro Weylovu reflexi podle i-tého kořene: koeficienty c_j u vrcholů, které nejsou spojeny v Dynkinově diagramu hranou s i-tým vrcholem, zůstávají stejné (zde totiž $a_{ij} = 0$). Samotný i-tý koeficient c_i přejde na $c_i - a_{ii}\cdot c_i = c_i - 2c_i = -c_i$. Je-li j-tý vrchol spojen jednoduchou hranou s i-tým, pak $c_j \mapsto c_j + c_i$, protože zde $a_{ij} = -1$. V případě, že z i-tého vede dvojitá (resp. trojitá) hrana do j-tého (takto orientovaná), máme $c_j \mapsto c_j + 2c_i$ (resp. $c_j \mapsto c_j + 3c_i$), protože $a_{ij} = -2$ (resp. $a_{ij} = -3$). Pokud je orientace obrácená, je opět $c_j \mapsto c_j + c_i$, protože $a_{ij} = -1$.

Tyto výsledky shrneme graficky (kořeny pro přehlednost značíme zleva α, β a γ):

$$S_\beta(\overset{a}{\bullet}\!-\!\!\!-\!\overset{b}{\bullet}\!-\!\!\!-\!\overset{c}{\bullet}) = \overset{a+b}{\bullet}\!-\!\!\!-\!\overset{-b}{\bullet}\!-\!\!\!-\!\overset{c+b}{\bullet}$$

$$S_\beta(\overset{a}{\bullet}\!-\!\!\!-\!\overset{b}{\bullet}\!\Rightarrow\!\overset{c}{\bullet}) = \overset{a+b}{\bullet}\!-\!\!\!-\!\overset{-b}{\bullet}\!\Rightarrow\!\overset{c+2b}{\bullet}$$

$$S_\alpha(\overset{a}{\bullet}\!\Rrightarrow\!\overset{b}{\bullet}) = \overset{-a}{\bullet}\!\Rrightarrow\!\overset{b+3a}{\bullet}$$

11. Reálné formy

11.1. Definice. Reálná Lieova algebra $\mathfrak{g}_0$ se nazývá *reálná forma* komplexní Lieovy algebry $\mathfrak{g}$, pokud $\mathfrak{g}$ je (izomorfní) komplexifikaci $\mathfrak{g}_0$.

11.2. Poznámka. Komplexní Lieova algebra může mít různé neizomorfní reálné formy. Příkladem může být $\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$, jejíž reálné formy $\mathfrak{so}(2n,0,\mathbb{R})$ a $\mathfrak{so}(n,n,\mathbb{R})$ nejsou izomorfní. Podobně $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ a $\mathfrak{su}(n)$ jsou různé (tedy neizomorfní) reálné formy $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$.

11.3. Definice. Reálná forma $\mathfrak{g}_0$ komplexní Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ se nazývá kompaktní forma, jestliže její Killingova forma je negativně definitní.

11.4. Příklad. Algebra $\mathfrak{su}(2)$ z příkladu 3.0(2) je kompaktní formou $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Prvky S_x, S_y a S_z tvoří bázi a přímým výpočtem dostaneme

$$\langle S_x, S_x\rangle = \langle S_y, S_y\rangle = \langle S_z, S_z\rangle = -2.$$

Přitom podle 2.8 víme, že $\mathfrak{su}(2)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\cong\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

11.5. Poznámka. Význam kompaktních forem spočívá v tom, že podle výsledku pana Weyla je každá reálná Lieova grupa s Lieovou algebrou, která je kompaktní formou nějaké komplexní Lieovy algebry, automaticky kompaktní v topologickém smyslu. To je velmi užitečné, protože je pak možno integrovat na celé takové Lieově grupě.

11.6. Věta. *Každá komplexní polojednoduchá Lieova algebra má kompaktní formu.*

Důkaz. Jde o explicitní popis reálné formy, o které ukážeme, že je kompaktní. Bude třeba využít Weyl–Chevalleyho normální formu komplexní polojednoduché Lieovy algebry $\mathfrak{g}$.

Sestrojme $\mathfrak{u}$ jako reálný vektorový prostor generovaný prvky iH_α pro jednoduché kořeny α a dále prvky $U_\alpha = (X_\alpha - X_{-\alpha})$ a $V_\alpha = i(X_\alpha + X_{-\alpha})$ pro α jdoucí přes kladné kořeny α.

Nejprve ukážeme, že $\mathfrak{u}$ je reálná forma $\mathfrak{g}$, tedy že každý prvek $Y\in\mathfrak{g}$ lze zapsat jako $Y_1 + iY_2$ pro $Y_1, Y_2\in\mathfrak{u}$. Rozepíšeme

$$Y = H + X = \sum(k_\alpha + i\ell_\alpha)H_\alpha + \sum(y_\alpha + iz_\alpha)X_\alpha,$$

přičemž první suma jde přes jednoduché kořeny a druhá přes všechny. Snadným výpočtem zjistíme, že lze pak jednoznačně psát

$$\begin{aligned}Y = \Big(\sum \ell_\alpha\cdot iH_\alpha + \sum_{\alpha\in\Delta_+}\frac{y_\alpha - y_{-\alpha}}{2}\cdot U_\alpha + \sum_{\alpha\in\Delta_+}\frac{z_\alpha + z_{-\alpha}}{2}\cdot V_\alpha\Big) +&\\ i\Big(\sum -k_\alpha\cdot iH_\alpha + \sum_{\alpha\in\Delta_+}\frac{z_\alpha - z_{-\alpha}}{2}\cdot U_\alpha + \sum_{\alpha\in\Delta_+}\frac{y_\alpha + y_{-\alpha}}{2}\cdot V_\alpha\Big).&\end{aligned}$$

Musíme ověřit, že $\mathfrak{u}$ je Lieova algebra, tedy že je uzavřena na operaci závorky. Skutečně, $[iH_1, iH_2] = 0$, $[iH, U_\alpha] = \alpha(H)V_\alpha$, $[iH, V_\alpha] = -\alpha(H)U_\alpha$, což vše zůstává v $\mathfrak{u}$, protože $\alpha(H)$ jsou reálná čísla pro reálná H. Pro zbylé výpočty potřebujeme konstanty $N_{\alpha,\beta}$ z Weyl–Chevalleyho normální formy, které jsou reálné (dokonce celé) a navíc $N_{\alpha,\beta} = -N_{-\alpha,-\beta}$. Potom $[U_\alpha, U_\beta] = N_{\alpha,\beta}U_{\alpha+\beta} + N_{\alpha,-\beta}U_{\alpha-\beta}$, $[V_\alpha, V_\beta] = -N_{\alpha,\beta}U_{\alpha+\beta} - N_{\alpha,-\beta}U_{\alpha-\beta}$, $[U_\alpha, V_\beta] = N_{\alpha,\beta}V_{\alpha+\beta} + N_{\alpha,-\beta}V_{\alpha-\beta}$.

Zbývá tedy spočítat hodnotu Killingovy formy $\langle X, X\rangle$ pro libovolný prvek $X \in \mathfrak{u}$. Nechť $X = iH + \sum r_\alpha U_\alpha + \sum s_\alpha V_\alpha$ pro reálné H a reálná čísla r_α a s_α. Potom přímým výpočtem dostáváme

$$\langle X, X\rangle = -\sum_{\Delta} \alpha^2(H) - 4\sum_{\Delta_+} \frac{r_\alpha^2 + s_\alpha^2}{\langle \alpha, \alpha\rangle}.$$

Tedy tato forma je negativně definitní a proto $\mathfrak{u}$ je kompaktní forma $\mathfrak{g}$. $\square$

11.7 Poznámka. Dá se navíc ukázat, že dvě kompaktní formy jediné komplexní Lieovy algebry jsou izomorfní.

11.8. Jistým způsobem opačným případem reálné formy je tzv. *split form*.[19] Tu dostaneme tak, že reálnou část Cartanovy algebry $\mathfrak{h}_0$ rozšíříme o lineární obal prvků X_α, $X_{-\alpha}$ Weyl–Chevalleyho normální formy pro všechny kladné kořeny α. Jim odpovídají reálné Lieovy grupy, které jsou nekompaktní.

Killingova forma má v bázi tvořené bází $\mathfrak{h}_0$ a prvky $X_\alpha + X_{-\alpha}$, $X_\alpha - X_{-\alpha}$ signaturu $(|\Delta_+| + \dim \mathfrak{h}, |\Delta_+|)$, protože $\langle H, H\rangle = \sum \alpha^2(H)$, $\langle X_\alpha + X_{-\alpha}, X_\alpha + X_{-\alpha}\rangle = \frac{4}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$ a $\langle X_\alpha - X_{-\alpha}, X_\alpha - X_{-\alpha}\rangle = -\frac{4}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$. V případě kompaktní formy máme signaturu $(0, \dim \mathfrak{g})$. Dá se ukázat, že signatura Killingovy formy už nemůže být vyšší ve prospěch pozitivních prvků, tedy všechny reálné formy mají signaturu Killingovy formy mezi těmito dvěma extrémy.

11.9. Příklady. V případě $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ je její split form $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$. Pro $\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$ máme kompaktní formu $\mathfrak{so}(2n, 0, \mathbb{R})$ a split form $\mathfrak{so}(n, n, \mathbb{R})$. Podobně pro $\mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C})$ je $\mathfrak{so}(n, n+1, \mathbb{R}) \cong \mathfrak{so}(n+1, n, \mathbb{R})$ její kompaktní formou, zatímco split form je $\mathfrak{so}(2n+1, 0, \mathbb{R})$.

12. Reprezentace polojednoduchých Lieových grup

Poznámky o aplikacích teorie Lioeových algeber v teorii reprezentací Lieových grup

[19] Je zde použit původní anglický termín pro nedostatek odpovídajícího českého.

Dodatky

Následující dvě kapitoly obsahují velice stručný přehled pojmů z diferenciální geometrie a multilineární algebry a jejich základních vlastností.

13. Dodatek
Hladké variety

13.1. *Hladkou varietou* M v prostoru $\mathbb{R}^n$ nazýváme podmnožinu (značenou stejným písmenem) $M \subset \mathbb{R}^n$ spolu s nejvýše spočetným systémem otevřených podmnožin $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in A$, takových, že

(1) otevřené podmnožiny $V_\alpha := U_\alpha \cap M$ pokrývají M

(2) jsou dány difeomorfismy $\varphi_\alpha \colon \mathbb{R}^n \to U_\alpha$ takové, že $\varphi_\alpha^{-1}(M) = \{(a, 0) \in \mathbb{R}^n;\ a \in \mathbb{R}^m\}$ pro pevné $m \in \mathbb{N}$.

Číslo m se nazývá *dimenze* variety M. Zúžená zobrazení $\psi_\alpha := \varphi_\alpha|_{\mathbb{R}^m} \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \to V_\alpha$ se nazývají *mapy* nebo *souřadné systémy* na M. Pro dvě různé mapy ψ_α, ψ_β dostáváme difeomorfismus $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ definovaný na průniku $V_\alpha \cap V_\beta$, tzv. *transformaci souřadných systémů.* Pokrytí M množinami V_α spolu se zobrazeními ψ_α se nazývá *atlas.*

13.2. Definice. Nechť M a N jsou hladké variety dimenze m a n. Zobrazení $f \colon M \to N$ nazýváme *hladké* jestliže je pro každou mapu ψ_α na M a každou mapu η_β na N zobrazení $\eta_\beta^{-1} \circ f \circ \psi_\alpha \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ hladké.

13.3. Příklady.
1. Celý prostor $\mathbb{R}^n$ je pro každou dimenzi n hladkou varietou. Za atlas můžeme vzít jedinou mapu $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Obecněji, ukažte, že každá otevřená podmnožina v $\mathbb{R}^n$ je hladká varieta. cvičení!
2. Jednotková kružnice v $\mathbb{R}^2$ je hladká varieta, např. můžeme použít sférické souřadnice v $\mathbb{R}^2$ pro definici atlasu. cvičení!
3. *Hladká křivka* na varietě $M \subset \mathbb{R}^n$ je takové zobrazení $c \colon \mathbb{R} \to M$, že $\psi_\alpha^{-1} \circ c \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je hladké zobrazení pro každou mapu na M. Z definice je to ale ekvivalentní požadavku, že c je hladké jakožto zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.
4. *Hladká funkce* na varietě $M \subset \mathbb{R}^n$ je takové zobrazení $f \colon M \to \mathbb{R}$, že $f \circ \psi_\alpha \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je hladké pro každou mapu ψ_α. Všimněme si, že obecně nejsou hladké funkce na M zúžením hladkých funkcí na $\mathbb{R}^n$. Např. jestliže v příkladu 2 vypustíme z kružnice jeden bod, jistě obdržíme opět varietu. Promyslete si, jak na ní budou vypadat křivky a funkce.[20]

13.4. Tečné prostory. Prostor $\mathbb{R}^n$ berme jako bodový afinní prostor. Pro každý bod $x \in \mathbb{R}^n$ definujeme tečné vektory k $\mathbb{R}^n$ v bodě x jako body příslušného vektorového zaměření. Vektorový prostor všech tečných vektorů v x značíme $T_x\mathbb{R}^n$. Z definice je $T_x\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$ a tečné vektory v x můžeme chápat jako vektory derivace křivek $c \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $c(0) = x$, v bodě 0. Takový tečný vektor budeme značit $\frac{\partial}{\partial t}\big|_0 c(t) \in T_{c(0)}\mathbb{R}^n$.

[20] Obecně pro všechny hladké variety platí, že zobrazení mezi nimi je hladké právě tehdy, když se s libovolnou hladkou křivkou a libovolnou hladkou funkcí skládá na hladké zobrazení z $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Důkaz je velmi technický, patří do funkcionální analýzy.

Pro varietu $M \subset \mathbb{R}^n$ a bod $x \in M$ definujeme $T_xM \subset T_x\mathbb{R}^n$ jako vektorový podprostor vektorů odpovídajících křivkám $c\colon \mathbb{R} \to M \subset \mathbb{R}^n$. Ukažte, že jde opravdu o vektorový podprostor. cvičení!

13.5. Tečné zobrazení. Nechť $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ je diferencovatelné zobrazení. Definujeme $T_xf\colon T_x\mathbb{R}^m \to T_{f(x)}\mathbb{R}^n$, $T_xf.X$ je hodnota diferenciálu f na přírůstku $X \in \mathbb{R}^m$, tj. i-tá souřadnice $T_xf.X$ je $\sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x^j} X^j$, kde $X = (X^1, \dots, X^m)$. Ověřte, že je-li $X = \frac{\partial}{\partial t}\big|_0 c(t)$, pak $T_xf = \frac{\partial}{\partial t}\big|_0 (f \circ c(t))$, nezávisle na volbě c. cvičení!

Pro obecné variety $M \subset \mathbb{R}^n$ a $N \subset \mathbb{R}^k$ definujeme pro hladké zobrazení $f\colon M \to N$ a bod $x \in M$ *tečné zobrazení* T_xf tak, že jeho hodnotou na vektoru $\frac{\partial}{\partial t}\big|_0 c(t) \in T_xM$ je vektor $\frac{\partial}{\partial t}\big|_0 (f \circ c(t)) \in T_{f(x)}N$. Ověřte, že je tato definice nezávislá na volbě křivky c (můžete pracovat v souřadném okolí bodu x). cvičení!

Zejména, je nyní snadné zkonstruovat z atlasu ψ_α pro M atlas pro podmnožinu $TM := \cup_{x\in M} T_xM \subset \mathbb{R}^{2n}$. Stačí použít tečná zobrazení k $\varphi_\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Získaná varieta, spolu s projekcí $\pi_M\colon TM \to M$, $\pi_M(\frac{\partial}{\partial t}\big|_0 c) = c(0)$, se nazývá *tečný bandl* variety M. Tečná zobrazení T_xf v jednotlivých bodech $x \in M$ tvoří zobrazení $Tf\colon TM \to TN$, které je opět hladké. Doplňte si podrobnosti. cvičení!

Přímo z definice hladkosti zobrazení plyne, že kompozice dvou hladkých zobrazení je opět hladké zobrazení. Nechť jsou tedy $f\colon M \to N$ a $g\colon N \to P$ dvě hladká zobrazení. Potom z věty o derivování složené funkce okamžitě plyne, že $T_x(g \circ f)(\frac{\partial}{\partial t}\big|_0 c) = \frac{\partial}{\partial t}\big|_0 (g \circ f \circ c) = T_{f(x)}g \circ T_xf(\frac{\partial}{\partial t}\big|_0 c)$.[21] cvičení!

13.6. Součiny variet. Jsou-li $M \subset \mathbb{R}^n$ a $N \subset \mathbb{R}^k$ dvě hladké variety dimenzí m a p, pak na kartézském součinu jejich nosných množin je definována struktura hladké variety $(M \times N) \subset \mathbb{R}^{n+k}$ s atlasem obsahujícím $\varphi^M_\alpha \times \varphi^N_\beta\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. Dimenze této variety je $m + p$.[22]

Ověřte, že $T(M \times N) = TM \times TN$ jako hladká varieta a že tečné zobrazení zachovává součiny. cvičení!

13.7. Podvariety. Variety jsme definovali jako podmnožiny v $\mathbb{R}^m$ s jistými vlastnostmi. Snadným zobecněním této definice získáme pojem podvariety a naše původní definice bude definovat variety jako podvariety ve varietě $\mathbb{R}^m$:

Hladkou podvarietou Q v hladké varietě M nazýváme podmnožinu (značenou stejným písmenem) $Q \subset M$ takovou, že pro každý bod $x \in Q$ existuje souřadná mapa $\varphi_x\colon \mathbb{R}^m \to U_x$ variety M taková, že $\varphi_x^{-1}(U_x \cap Q) = \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^m$, kde $\mathbb{R}^k$ je vloženo do $\mathbb{R}^m$ pomocí doplnění nulami.

Z definice přímo plyne, že Q je varieta dimenze k a zúžená zobrazení $\psi_\alpha := \varphi_\alpha|_{\mathbb{R}^k}\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m \to U_\alpha$ jsou souřadné mapy variety Q. Zejména tak opět získáme nejvýše spočetný atlas

13.8. Vložené podvariety. Často se setkáváme také s podmnožinami ve varietách, které jsou velmi blízké podvarietám, podvariety ve smyslu předchozí definice to však nejsou. *Vloženou podvarietou* ve varietě M rozumíme obraz injektivního hladkého zobrazení variet $Q \to M$. Rozmyslete si příklady vložených podvariet, které nejsou podvarietami (např. osmička namalovaná v rovině nebo hustě namotaná niť na válci).

---

[21] Celkem lze obdržené poznatky shrnout do tvrzení, že jsme zkonstruovali funktor T definovaný na kategorii hladkých variet a hladkých zobrazení, který varietě M přiřazuje její tečný bandl TM a hladkému zobrazení f příslušné tečné zobrazení Tf

[22] Jde opravdu o součin ve smyslu kategorií.

cvičení!

Tečné prostory T_xQ v bodech $x \in Q$ jsou vektorové podprostory v tečných prostorech T_xM.

13.9. Topologie. V předchozím textu jsme implicitně předpokládali znalost pojmů jako otevřená množina. Všimněte si, že varieta $M \subset \mathbb{R}^n$ nemusí být ani otevřená, ani uzavřená podmnožina. V každém případě se ale na ní indukuje topologie z $\mathbb{R}^n$ a právě tuto budeme mít vždy na mysli. V textu budeme používat řadu dalších topologických pojmů, jako souvislost, jednoduchá souvislost, kompaktnost, ... Vysvětlení těchto pojmů lze najít ve kterémkoliv základním textu o topologii.

14. Dodatek Multilineární algebra

14.1. Tensorový součin. Nechť V a W jsou vektorové prostory nad stejným polem skalárů $\mathbb{K}$. *Tensorový součin* $V \otimes W$ je vektorový prostor spolu s bilineárním zobrazením $V \times W \to V \otimes W$, $v \times w \mapsto v \otimes W$, které má následující univerzální vlastnost: Pro každé bilineární zobrazení $\varphi\colon V \times W \to Z$ existuje právě jedno lineární zobrazení $\bar{\varphi}\colon V \otimes W \to Z$ takové, že $\varphi(v, w) = \bar{\varphi}(v \otimes w)$, pro všechny $v \in v$, $w \in W$.

Je snadné ověřit, že tensorový součin, pokud existuje, je touto vlastností určen jednoznačně až na isomorfismus.

14.2. Věta. *Nechť $(e_1, \dots, e_m)$ je báze V, $(f_1, \dots, f_n)$ je báze W. Pak $V \otimes W$ existuje a má bázi $(e_1 \otimes f_1, \dots, e_1 \otimes f_n, \dots, e_m \otimes f_n)$. Tato konstrukce je navíc funktoriální, tzn. pro dvě lineární zobrazení $\varphi\colon V \to V'$, $\psi\colon W \to W'$ dostáváme lineární zobrazení $\varphi \otimes \psi\colon V \otimes W \to V' \otimes W'$, $(\varphi \otimes \psi)(v \otimes w) = \psi(v) \otimes \psi(w)$.*

Důkaz. Proveďte jako cvičení. cvičení!

14.3. Důsledek. *Pro konečněrozměrné prostory V, Z a W platí*

(1) $V \otimes W \simeq W \otimes V$
(2) $(V \oplus Z) \otimes W \simeq (V \otimes W) \oplus (Z \otimes W)$
(3) $(V \otimes W) \otimes Z \simeq V \otimes (W \otimes Z)$

Bude-li nutné zdůraznit nad jakými skaláry tensorový součin uvažujeme, budeme příslušné pole označovat jako index u znaku pro tensorový součin (např. komplexní vektorové prostory lze chápat také jaké reálné a uvažovat příslušný tensorový součin, který budeme značit $\otimes_{\mathbb{R}}$).

Analogicky definujeme libovolné konečné tensorové součiny. Jedná-li se o tensorový součin k kopií téhož vektorového prostoru V, píšeme často $V^{\otimes k}$ nebo $\otimes^k V$.

14.4. Antisymetrická zobrazení. Připomeňme, že k-lineární zobrazení φ je *antisymetrické*, jestliže pro každou permutaci σ na k prvcích platí

$$\varphi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sgn}\sigma\varphi(v_1, \dots, v_k).$$

Není těžké ověřit, že ekvivalentní je (zdánlivě slabší) požadavek, $\varphi(v_1, \dots, v_k) = 0$ kdykoliv jsou alespoň dva z argumentů stejné.

Vnější tensorový součin $\Lambda^k V$ stupně k je vektorový prostor spolu s antisymetrickým k-lineárním zobrazením $V \times \ldots \times V \to \Lambda^k V$, $(v_1, \dots, v_k) \mapsto v_1 \wedge$

$\cdots \wedge v_k$, s univerzální vlastností: Pro každé antisymetrické multilineární zobrazení $\varphi\colon V \times \ldots \times V \to Z$ existuje jediné lineární zobrazení $\bar\varphi\colon \Lambda^k \to Z$ splňující $\varphi(v_1, \ldots, v_k) = \bar\varphi(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k)$. Z technických důvodů klademe $\Lambda^0 V = \mathbb{K}$.

Opět je snadné ověřit, že když prostor $\Lambda^k V$ existuje, je určen jednoznačně až na isomorfismus.

14.5. Věta. *Nechť V je vektorový prostor s bazí $(e_1, \ldots, e_m)$. Pak $\Lambda^k V$ existuje a má bázi tvořenou prvky $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$ s $i_1 < \cdots < i_k$. Zejména je $\Lambda^m V \simeq \mathbb{K}$ a $\Lambda^k V$ je triviální nulový prostor pro $k > m$.*

Důkaz. Snadno se ověří přímou konstrukcí. Lze také odvodit zavedením $\Lambda^k V$ jako faktorového prostoru $V^{\otimes k}/I$, kde vektorový podprostor I je generován výrazy $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ s alespoň dvěmi stejnými vektory v_i. $\square$

14.6. Důsledek. *Nechť V a W jsou dva konečněrozměrné vektorové prostory. Pak $\Lambda^k(V \oplus W) = \oplus_{j=0}^k \Lambda^j V \otimes \Lambda^{k-j} W$.*

Důkaz. Hledaný isomorfismus je dán přiřazením

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_j) \otimes (w_1 \wedge \cdots \wedge w_{k-j}) \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_j \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_{k-j}.$$

14.7. Symetrická zobrazení. Připomeňme, že multilineární zobrazení φ je symetrické, jestliže pro každou permutaci σ na k prvcích platí $\varphi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \varphi(v_1, \ldots, v_k)$.

Symetrický tensorový součin $S^k V$ stupně k definujeme jako vektorový prostor spolu se symetrickým k-lineárním zobrazením $V \times \ldots \times V \to S^k V$, $(v_1, \ldots, v_k) \mapsto v_1 \vee \cdots \vee v_k$, s univerzální vlastností: Pro každé symetrické lineární zobrazení $\varphi\colon V \times \ldots \times V \to Z$ existuje jediné lineární zobrazení $\bar\varphi\colon S^k \to Z$ splňující $\varphi(v_1, \ldots, v_k) = \bar\varphi(v_1 \vee \cdots \vee v_k)$. Z technických důvodů opět klademe $S^0 V = \mathbb{K}$.

Opět je snadné ověřit, že když $S^k V$ existuje, je určeno jednoznačně až na isomorfismus.

14.8. Věta. *Nechť V je konečněrozměrný vektorový prostor s bazí $(e_1, \ldots, e_m)$. Potom $S^k V$ existuje pro každé $k \geq 0$ a má bázi tvořenou prvky $e_{j_1} \vee \cdots \vee e_{j_k}$ s $j_1 \leq \cdots \leq j_k$.*

Důkaz. Ověří se přímou konstrukcí. Lze též definovat $S^k V$ jako faktorový prostor $V^{\otimes k}/I$ kde vektorový podprostor I je generován prvky $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k - v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}$ pro libovolnou permutaci σ na k prvcích. $\square$

Báze v $S^k V$ můžeme také zapsat ve tvaru $e_1^{i_1} \vee \cdots \vee e_n^{i_n}$, kde exponenty probíhají všechny multiindexy $(i_1, \ldots, i_n)$ a $\sum_{j=1}^n i_j = k$.

14.9. Důsledek. *Realizace $\Lambda^k V$ a $S^k V$ jako faktorových prostorů celého tensorového prostoru $V^{\otimes k}$ dává projekce* $\mathrm{Alt}\colon V^{\otimes k} \to \Lambda^k V$, $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ a $\mathrm{Sym}\colon V^{\otimes k} \to S^k V$, $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \mapsto v_1 \vee \cdots \vee v_k$. *Naopak, máme inkluze*

$$\iota\colon \Lambda^k V \to V^{\otimes k},\ v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \mapsto \sum_\sigma \operatorname{sgn} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}$$

$$\iota\colon S^k V \to V^{\otimes k},\ v_1 \vee \cdots \vee v_k \mapsto \sum_\sigma v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}$$

14.10. Věta. *Přiřazení* $(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) \otimes (v_{k+1} \wedge \dots \wedge v_{k+l}) \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_{k+l}$ *definuje antisymetrické bilineární zobrazení* $\wedge \colon \Lambda^k V \times \Lambda^l V \to \Lambda^{k+l} V$.

Podobně, přiřazení $(v_1 \vee \dots \vee v_k) \otimes (v_{k+1} \vee \dots \vee v_{k+l}) \mapsto v_1 \vee \dots \vee v_{k+l}$ *definuje symetrické bilineární zobrazení* $\vee \colon S^k V \times S^l V \to S^{k+l} V$.

Důkaz. Proveďte jako cvičení. cvičení!

14.11. Definice. Zobrazení $\wedge$ z předchozí věty nazýváme *vnější součin* a podobně $\vee$ nazýváme *symetrický součin*. Vektorový prostor $\Lambda(V) = \oplus_{k=0}^{m} \Lambda^k V$, $m = \dim V$, spolu s vnějším součinem, nazýváme *vnější algebra* (nad V). Vektorový prostor $S(V) = \oplus_{k=0}^{\infty} S^k V$, spolu se symetrickým součinem nazýváme *symetrická algebra* (nad V). Podobně máme obecnou *tensorovou algebru* $T(V)$, která je definována jako vektorový prostor $\oplus_{k=0}^{\infty} V^{\otimes k}$ se součinem daným tensorovým součinem $\otimes$. Tensory, které jsou vyjádřitelné jako součin příslušného počtu vektorů z V nazýváme *rozložitelné*.

14.12. Duální prostory. Nechť V je (konečněrozměrný) vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a V^* jeho duální prostor, tj. vektorový prostor všech lineárních forem na V. Pro $v^* \in V^*$ a $v \in V$ budeme často značit $\langle v, v^* \rangle$ hodnotu formy v^* na v. Prostor všech lineárních zobrazení $\varphi \colon V \to W$, kde W je libovolný další vektorový prostor konečné dimenze, můžeme ztotožnit s tensorovým součinem $W \otimes V^*$, a to prostřednictvím přiřazení $w \otimes v^* \mapsto (v \mapsto \langle v, v^* \rangle . w)$. Ověřte, že se opravdu jedná o lineární isomorfismus! cvičení!

Analogicky pak $W \otimes (V^*)^{\otimes k}$ je prostor všech k-lineárních zobrazení na V s hodnotami ve W, $W \otimes \Lambda^k V^*$ a $W \otimes S^k V^*$ jsou prostory všech k-lineárních antisymetrických zobrazení a k-lineárních symetrických zobrazení s hodnotami v W.

Specielně pro $W = \mathbb{K}$ dostáváme příslušné prostory multilineárních forem na V. Lineární automorfismy na V jsou pak právě tensory ve $V \otimes V^*$.

14.13. Báze. Nechť $e_1, \dots, e_n$ je báze V a $e^1, \dots, e^n$ duální báze ve V^*. Pak

$$\begin{aligned} e^*_{j_1} \otimes \dots \otimes e^*_{j_k}, &\qquad 1 \le j_1, \dots, j_k \le n \\ e^*_{j_1} \wedge \dots \wedge e^*_{j_k}, &\qquad j_1 < \dots < j_k \\ \tfrac{1}{i_1! \dots i_n!} (e^*_{j_1})^{i_1} \vee \dots \vee (e^*_{j_k})^{i_n}, &\qquad i_1 + \dots + i_n = k \end{aligned}$$

jsou příslušné duální báze ke standardním bazím na $(V^*)^{\otimes k}$, $\Lambda^k V$ a S^k. Ověřte! cvičení!

Jako jednoduché cvičení si ověřte, že v případě $V \otimes V^*$ tvoří souřadnice tensoru v příslušné standardní bázi právě matici odpovídajícího zobrazení v původní bázi na V. Obecné tensory pak dávají něco jako matice multilineárních zobrazení, ty však samozřejmě mohou mít mnoho indexů místo právě dvou. Vhodná konvence (standardně užívaná v geometrii) je, že u souřadnic tensorů píšeme indexy odpovídající kopiím V jako horní, indexy odpovídající kopiím V^* jako dolní. U označování bázových prvků je tomu pak naopak a implicitně se ve formulích sčítá, kdykoliv se objeví stejný index jednou nahoře a jednou dole.

Dále můžete ověřit, že při změně původní báze na V prostřednictvím matice A dostaneme příslušné transformační zákony pro souřadnice na prostorech tensorů tak, že pro každý výskyt V^* násobíme jednou maticí A^{-1}, pro každý výskyt V jednou maticí A.

14.14. Kontrakce. Vektorový prostor V lze také považovat za prostor lineárních forem na V^*, kde $v(v^*) = \langle v, v^* \rangle$. Kdykoliv uvažujeme tensorový součin $V^{\otimes k} \otimes$

$(V^*)^{\otimes \ell}$, $k, \ell > 0$, jako ℓ-lineární zobrazení s hodnotami ve $V^{\otimes k}$, máme pro každou vybranou kopii V ve $V^{\otimes k}$ a V^* ve $(V^*)^{\otimes \ell}$ definovánu tzv. *kontrakci*, která je tensorem ve $V^{\otimes (k-1)} \otimes (V^*)^{\otimes (\ell - 1}$:

Pro $\alpha \in V^{\otimes (k-1)} \otimes (V^*)^{\otimes (\ell-1)}$ je $\alpha(v_1^*, \dots, v_k^*, v_1, \dots, v_\ell) \in \mathbb{K}$ a kontrakci $\operatorname{Tr} \alpha$ i-té a j-té komponenty definujeme předpisem

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Tr} \alpha(v_1^*, \dots, v_{k-1}^*, v_1, \dots, v_{\ell-1}) = \\
&\qquad = \sum_p \alpha(v_1^*, \dots, v_{i-1}^*, e^p, v_{i+1}^*, \dots, v_k^*, v_1, \dots, v_{j-1}, e_p, v_{j+1}, \dots, v_\ell)
\end{aligned}$$

V případě $k = \ell = 1$ jde přesně o vyčíslení lineárních forem na vektorech.

Bez souřadnic lze kontrakci názorně definovat tak, že $V^{\otimes k} \otimes (V^*)^{\otimes \ell}$ chápeme jako $(V^{\otimes (k-1)} \otimes (V^*)^{\otimes (\ell-1]}) \otimes (V \otimes V^*)$, kde jsme dozadu přesunuli (isomorfismem) právě vybrané komponenty a kontrakce pak je definována na rozložitelných tensorech vztahem (pro jednoduchost uvažujeme $i = j = 1$)

$$\operatorname{Tr}(v_1^* \otimes \dots \otimes v_k^* \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_\ell) = \langle v_1, v_1^* \rangle v_2^* \otimes \dots \otimes v_k^* \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_\ell.$$

Je-li $k = \ell$, máme k dispozici tzv. *úplnou kontrakci* $V^{\otimes k} \otimes (V^*)^k \to \mathbb{K}$. Budeme ji značit stejně jako vyčíslení forem $\langle\ ,\ \rangle$, což je speciální případ.

14.15. Operátor i_X. V případech symetrických tensorů nezávisí kontrakce na výběru kopií V a V^*, u antisymetrických se mění pouze znaménko a zavádíme konvenci, že vždy kontrahujeme přes první indexy. Dostáváme tak pro $x \in \Lambda^p V$, resp. $y^* \in \Lambda^p V^*$ zobrazení splňující

$$\begin{aligned}
i_X &\colon \Lambda^{p+q} V^* \to \Lambda^q V^*, \quad \langle z, i_x(w^*) \rangle = \langle z \wedge x, w^* \rangle \\
i_{y^*} &\colon \Lambda^{p+q} V \to \Lambda^q V, \quad \langle i_{y^*}(w), z^* \rangle = \langle w, y^* \wedge x^* \rangle.
\end{aligned}$$

Ověřte si, že takto definovaná operace i je rovna kompozici

$$\tfrac{1}{p!q!} \operatorname{Alt} \circ c \circ (\iota \otimes \iota) \colon \Lambda^{p+q} V \otimes \Lambda^p V^* \to V^{\otimes (p+q)} \otimes (V^*)^{\otimes p} \to V^{\otimes q} \to \Lambda^q V$$

kde c je kontrakce přes prvních p kopií V.Analogická formule platí i pro duální případ (se stejným koeficientem). cvičení!

Podobně se definuje také operace vložení i_y pro symetrické tensory.

Index