Extrémy funkce dvou proměnných

1. Stanovte rozměry pravoúhlé vodní nádrže o objemu 32 m^3 tak, aby dno a stěny měly nejmenší povrch.

   Označme rozměry pravoúhlé nádrže x, y, z (viz obr.). Pak objem této nádrže je dán vztahem:

$$V = xyz$$

   a pro velikost povrchu stěn a dna platí:

$$P(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz.$$

   Funkce $P(x, y, z)$ je funkcí tří proměnných, ale ty jsou vázány podmínkou např.

$$z = \frac{V}{xy}.$$

   Pro funkci $P(x, y, z)$ tedy dostáváme

$$P(x, y) = xy + 2x\frac{V}{xy} + 2y\frac{V}{xy} = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}.$$

   Naším úkolem je najít minimum této funkce dvou proměnných. Stacionární body obdržíme z rovnic

$$P_x = y - \frac{2V}{x^2} = 0, \qquad P_y = x - \frac{2V}{y^2} = 0.$$

   Řešíme tedy soustavu:

$$x^2y = 2V, \qquad xy^2 = 2V,$$

   tedy

$$x^2y = xy^2$$
$$xy(x - y) = 0.$$

   Řešením jsou body, pro které platí alespoň jedna z rovností:

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad x = y.$$

   Rozměry nádrže jsou pochopitelně nenulové, proto stacionárními body jsou body, pro které $x = y$. Pak tedy např. $2V = x^3$ a odtud $x = \sqrt[3]{2V} = y$. V našem případě tedy

$$x = \sqrt[3]{64} = 4 = y.$$

   Pro "hloubku" nádrže pak dostáváme

$$z = \frac{32}{16} = 2.$$

   Je třeba ověřit, že bod $[4, 4]$ je lokálním minimem funkce $P(x, y)$. Vypočteme druhé derivace

$$P_{xx}(x, y) = \frac{4V}{x^3}, \qquad P_{yy}(x, y) = \frac{4V}{y^3}, \qquad P_{xy}(x, y) = P_{yx}(x, y) = 1.$$

   Dostáváme

$$D(4, 4) = \frac{4V}{4^3}\frac{4V}{4^3} - 1 = 4 - 1 = 3 > 0.$$

   Protože $P_{xx}(4, 4) > 0$, je v bodě $[4, 4]$ lokální minimum.

   Rozměry nádrže jsou tedy 4x4x2 m, kde hloubka nádrže je 2 m.

2. Určete rozměry kvádru, který má při daném povrchu největší objem.

   Označme rozměry kvádru x, y a z. Povrch a objem tohoto kvádru jsou tedy rovny $P(x,y,z) = 2(xy + xz + yz)$, resp. $V(x,y,z) = xyz$. Snadno odvodíme, že např. pro rozměr z platí:

$$z = \frac{P - 2xy}{2(x+y)}.$$

   Dosadíme-li za z do vztahu pro objem V, dostaneme funkci dvou proměnných

$$V(x,y) = \frac{xy(P - 2xy)}{2(x+y)}.$$

   Určíme stacionární body. Po úpravě dostáváme

$$V_x = \frac{1}{2}\frac{y^2(P - 4xy - 2x^2)}{(x+y)^2} = 0, \qquad V_y = \frac{1}{2}\frac{x^2(P - 4xy - 2y^2)}{(x+y)^2} = 0.$$

   Řešíme tedy soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 4xy + 2x^2 &= P \\ 4xy + 2y^2 &= P, \end{aligned}$$

   ze které dostáváme $x^2 = y^2$. Protože obě hodnoty x a y jsou kladné, je tato rovnice splněna pouze pro $x = y$. Dostáváme tedy např. $4x^2 + 2x^2 = P$ a odtud

$$x = \sqrt{\frac{P}{6}} = y.$$

   Pro rozměr z dostáváme

$$z = \frac{P - 2\frac{P}{6}}{2(\sqrt{\frac{P}{6}} + \sqrt{\frac{P}{6}})} = \frac{\frac{2}{3}P}{2\sqrt{P}(\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}})} = \frac{\sqrt{P}}{3\frac{2}{\sqrt{6}}} = \sqrt{\frac{P}{6}}.$$

   I zde je třeba ověřit, že bod $[\sqrt{\frac{P}{6}}, \sqrt{\frac{P}{6}}]$ je lokálním minimem funkce $V(x,y)$. Tento úkol přenecháváme čtenáři.

   Hledaný kvádr je tedy krychle o velikosti hrany $\sqrt{\frac{P}{6}}$.

3. Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.

   Funkce f je včetně všech svých parciálních derivací spojitá v celém oboru $\Re_2$, takže může mít extrémy pouze ve stacionárních bodech.

   Stacionární body určíme ze soustavy

$$\begin{aligned} f_x &: 6x^2 + 10x - y^2 = 0 \\ f_y &: -2xy + 2y = 2y(1-x) = 0. \end{aligned}$$

   Druhá rovnice je splněna pro $y = 0$ nebo $x = 1$. Dosazením těchto hodnot do první rovnice dostáváme: pro $x = 1$ je $6 + 10 - y^2 = 0$, tedy $y_{1,2} = \pm 4$. Pro $y = 0$ je $6x^2 + 10x = 0$, tedy $x_1 = -\frac{5}{3}$, $x_2 = 0$.

   Stacionární body tedy jsou $S_1 = [1,4], S_2 = [1,-4], S_3 = [-\frac{5}{3}, 0], S_4 = [0,0]$.

   Určíme druhé derivace funkce f

$$f_{xx} = 12x + 10, \qquad f_{yy} = -2x + 2, \qquad f_{xy} = f_{yx} = -2y.$$

V každém z těchto bodů $S = [x_0, y_0]$ určíme hodnotu výrazu $D(S) = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0)f_{yx}(x_0, y_0)$.

Dostáváme

$$D(S_1) = -64 < 0, \qquad D(S_2) = -64 < 0, \qquad D(S_3) = -\frac{160}{3} < 0, \qquad D(S_4) = 20 > 0.$$

Lokální extrém tedy existuje pouze v bodě $S_4 = [0, 0]$. Protože platí $f_{xx}(S_4) = 10 > 0$ je v bodě S_4 lokální minimum a platí $f(0, 0) = 0$.

4. Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + 4xy + 6y^2 - 2x + 8y - 5$.

   Funkce f je včetně všech svých parciálních derivací spojitá v celém oboru $\Re_2$, takže může mít extrémy pouze ve stacionárních bodech.

   Stacionární body určíme ze soustavy

$$f_x : 2x + 4y - 2 = 0$$
$$f_y : 4x + 12y + 8 = 0.$$

   Jedná se o soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, která má jako řešení stacionární bod $S = [7, -3]$.

   Určíme druhé derivace funkce $f(x, y)$

$$f_{xx} = 2, \qquad f_{yy} = 12, \qquad f_{xy} = f_{yx} = 4.$$

   V bodě S určíme hodnotu výrazu $D(S) = f_{xx}(7, -3)f_{yy}(7, -3) - f_{xy}(7, -3)f_{yx}(7, -3)$. Dostáváme $D(S) = 8 > 0$. Protože $f_{xx}(7, -3) = 2 > 0$, je bod S lokálním minimem funkce $f(x, y)$ a platí $f(7, -3) = -24$.

5. Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x, y) = -3x^4 - 5y^4$.

   Funkce $f(x, y)$ je včetně všech svých parciálních derivací spojitá v celém oboru $\Re_2$, takže může mít extrémy pouze ve stacionárních bodech.

   Stacionární body určíme ze soustavy

$$f_x : -12x^3 = 0$$
$$f_y : -20y^3 = 0.$$

   Stacionárním bodem je bod $S = [0, 0]$. Určíme druhé derivace funkce $f(x, y)$

$$f_{xx} = -36x^2, \qquad f_{yy} = -60y^2, \qquad f_{xy} = f_{yx} = 0.$$

   V bodě S určíme hodnotu výrazu $D(S) = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - f_{xy}(0, 0)f_{yx}(0, 0)$. Dostáváme $D(S) = 0$. Pomocí výrazu $D(S)$ nelze tedy rozhodnout, zda v bodě S má funkce $f(x, y)$ lokální extrém. Podívejme se tedy, jak se funkce chová v okolí bodu S. Pro libovolný bod $X = [x, y] \neq [0, 0]$ platí

$$f(x, y) - f(0, 0) = -3x^4 - 5y^4 - 0 = -(3x^4 + 5y^4) < 0.$$

   Podle definice lokálního maxima má naše funkce $f(x, y)$ v bodě $S = [0, 0]$ lokální maximum a platí $f(0, 0) = 0$.

6. Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x, y) = e^{x^2 - y}(5 - 2x + y)$.

   Funkce $f(x, y)$ je včetně všech svých parciálních derivací spojitá v celém oboru $\Re_2$, takže může mít extrémy pouze ve stacionárních bodech.

   Stacionární body určíme ze soustavy

$$f_x : e^{x^2-y}(-4x^2 + 2xy + 10x - 2) = 0$$
$$f_y : e^{x^2-y}(2x - y - 4) = 0.$$

Protože výraz $e^{x^2-y} \neq 0$, řešíme soustavu

$$-4x^2 + 2xy + 10x - 2 = 0$$
$$2x - y - 4 = 0.$$

Vyjádříme-li ze druhé rovnice $y = 2x-4$ a dosadíme-li do rovnice první, obdržíme rovnici $-2x+2 = 0$. Získáme tak stacionární bod $S = [1, -2]$. Určíme druhé derivace funkce $f(x, y)$:

$$f_{xx} = e^{x^2-y}(-8x^3+4x^2y+20x^2-12x+2y+10), f_{yy} = e^{x^2-y}(-2x+y+3), f_{xy} = f_{yx} = e^{x^2-y}(4x^2-2xy-8x+2).$$

V bodě S určíme hodnotu výrazu $D(S) = f_{xx}(1, -2)f_{yy}(1, -2) - f_{xy}(1, -2)f_{yx}(1, -2)$. Dostáváme $D(S) = -2e^3(-e^3) - 4e^6 = -2e^6 < 0$.

Funkce $f(x, y)$ nemá lokální extrém.

7. Určete největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - x - y$ na oblasti popsané nerovnicemi $x \geq 0$, $y \geq 0$ a $x + y \leq 3$.

Vyšetříme nejprve lokální extrémy funkce $f(x, y)$. Stacionární body určíme ze soustavy

$$f_x : 2x - y - 1 = 0$$
$$f_y : 2y - x - 1 = 0.$$

Snadno určíme, že jediným stacionárním bodem je bod $S = [1, 1]$. Platí $f(1, 1) = -1$. (Není třeba dokazovat, že jde o lokální minimum. Hodnotu v tomto bodě porovnáme s hodnotami získanými na hranici oblasti.)

Nyní budeme hledat největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x, y)$ na hranici trojúhelníka, který je tvořen úsečkami:

I. $y = 0$, $x \in [0, 3]$, II. $y = 3 - x$, $x \in [0, 3]$, III. $x = 0$, $y \in [0, 3]$.

I. $y = 0$, $x \in [0, 3]$. Dosazením dostáváme $f(x, y) = x^2 - x$ a hledáme absolutní extrémy této funkce jedné proměnné pro $x \in [0, 3]$. $f'(x) = 2x - 1 = 0$, odtud $x = \frac{1}{2}$. Funkční hodnoty ve stacionárním bodě a v krajních bodech intervalu jsou $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$, $f(0) = 0$ a $f(3) = 6$.

II. $y = 3 - x$, $x \in [0, 3]$. Dosazením dostáváme $f(x, y) = 3x^2 - 9x + 6$ a hledáme absolutní extrémy této funkce jedné proměnné pro $x \in [0, 3]$. $f'(x) = 6x - 9 = 0$, odtud $x = \frac{3}{2}$. Funkční hodnoty ve stacionárním bodě a v krajních bodech intervalu jsou $f(\frac{3}{2}) = -\frac{3}{4}$, $f(0) = 6$ a $f(3) = 6$.

III. $x = 0$, $y \in [0, 3]$. Dosazením dostáváme $f(x, y) = y^2 - y$ a hledáme absolutní extrémy této funkce jedné proměnné pro $y \in [0, 3]$. $f'(y) = 2y - 1 = 0$, odtud $y = \frac{1}{2}$. Funkční hodnoty ve stacionárním bodě a v krajních bodech intervalu jsou $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$, $f(0) = 0$ a $f(3) = 6$.

Vidíme, že platí: $f(1, 1) = -1$, $f(\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}$, $f(0, 0) = 0$, $f(3, 0) = 6$, $f(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = -\frac{3}{4}$, $f(0, 3) = 6$, $f(0, \frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$.

Porovnáním všech vypočtených hodnot vidíme, že funkce $f(x, y)$ nabývá na oblasti své nejmenší hodnoty v bodě $[1, 1]$ a své největší hodnoty v bodech $[3, 0]$ a $[0, 3]$. Platí $f(1, 1) = -1$, $f(3, 0) = f(0, 3) = 6$.

8. Určete největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x, y) = x^2 - y^2$ v kruhu $x^2 + y^2 \leq 4$.

Vyšetříme nejprve lokální extrémy funkce $f(x, y)$, která je včetně všech svých parciálních derivací spojitá v celém oboru $\Re_2$.

Stacionární body určíme ze soustavy

$$f_x : 2x = 0$$
$$f_y : -2y = 0.$$

Jediným stacionárním bodem je bod $S = [0,0]$. Obvyklým způsobem bychom nyní mohli ukázat, že v tomto bodě funkce $f(x,y)$ nemá lokální extrém. Hledáme-li největší a nejmenší hodnotu funkce na daném kruhu, stačí porovnat hodnotu $f(0,0) = 0$ s hodnotami, které získáme na hranici kruhu. Budeme tedy nyní hledat největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y)$ na kružnici $x^2 + y^2 = 4$. Tu si rozdělíme na dvě části, horní a dolní půlkružnici.

I. Horní půlkružnice je popsána rovnicí $y = \sqrt{4 - x^2}$, pro $x \in [-2,2]$. Dosazením do předpisu funkce $f(x,y)$ dostáváme

$$f(x,y) = x^2 - 4 + x^2 = 2x^2 - 4.$$

Obdrželi jsme funkci $f(x)$ jediné proměnné a její absolutní extrémy nyní najdeme (v tomto jednoduchém případě bychom to mohli snadno vyšetřit graficky). Jsou buď ve stacionárních bodech funkce $f(x)$ nebo v krajních bodech intervalu $[-2,2]$.

Položíme $f'(x) = 4x = 0$, odkud získáváme jediný stacionární bod $x_0 = 0$, pro který platí $f(0) = -4$. V krajních bodech intervalu $[-2,2]$ nabývá funkce $f(x)$ hodnot $f(-2) = f(2) = 4$.

II. Dolní půlkružnice je popsána rovnicí $y = -\sqrt{4 - x^2}$, pro $[-2,2]$. Po dosazení do předpisu funkce $f(x,y)$ dostáváme stejnou úlohu, jako v případě I.

Porovnáním všech vypočtených hodnot vidíme, že

$$f_{\min} = -4, \qquad \text{pro} \qquad [x,y] = [0, \pm 2],$$
$$f_{\max} = 4, \qquad \text{pro} \qquad [x,y] = [\pm 2, 0].$$

9. Určete největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y) = 3xy$ v kruhu $x^2 + y^2 \leq 2$.

   Vyšetříme nejprve lokální extrémy funkce $f(x,y)$, která je včetně všech svých parciálních derivací spojitá v celém oboru $\Re_2$.

   Stacionární body určíme ze soustavy

$$f_x : 3y = 0$$
$$f_y : 3x = 0.$$

   Jediným stacionárním bodem je bod $S = [0,0]$ a platí $f(0,0) = 0$. Budeme nyní hledat největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y)$ na hranici zadaného kruhu, tedy na kružnici $x^2 + y^2 = 2$. Tu si rozdělíme na dvě části, horní a dolní půlkružnici.

   I. Horní půlkružnice je popsána rovnicí $y = \sqrt{2 - x^2}$, pro $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Dosazením do předpisu funkce $f(x,y)$ dostáváme

$$f(x,y) = 3x\sqrt{2 - x^2}.$$

   Obdrželi jsme funkci $f(x)$ jediné proměnné a její absolutní extrémy nyní najdeme. Jsou buď ve stacionárních bodech funkce $f(x)$ nebo v krajních bodech intervalu $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

   Platí

$$f'(x) = 3\sqrt{2 - x^2} - \frac{3x^2}{\sqrt{2 - x^2}}.$$

   Dostáváme rovnici

$$\frac{3(2 - x^2) - 3x^2}{\sqrt{2 - x^2}} = \frac{6 - 6x^2}{\sqrt{2 - x^2}} = 0,$$

   ze které vidíme, že stacionárními body jsou body $x_{1,2} = \pm 1$. Platí $f(1) = 3$, $f(-1) = -3$. V krajních bodech intervalu $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ dostáváme $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = 0$. Vidíme tedy, že platí:

$$f(-1,1) = -3, \qquad f(1,1) = 3, \qquad f(-\sqrt{2},0) = 0, \qquad f(\sqrt{2},0) = 0.$$

   II. Dolní půlkružnice je popsána rovnicí $y = -\sqrt{2 - x^2}$, pro $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Po dosazení do předpisu funkce $f(x,y)$ dostáváme prakticky stejnou úlohu, jako v případě I. Hledáme absolutní extrémy funkce

$$f(x) = -3x\sqrt{2 - x^2}$$

   na intervalu $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Také zde získáme stacionární body $x_{3,4} = \pm 1$ a platí

$$f(-1,-1) = 3, \qquad f(1,-1) = -3.$$

   Porovnáním všech vypočtených hodnot vidíme, že funkce $f(x,y)$ nabývá své nejmenší hodnoty v bodech $[1,-1]$ a $[-1,1]$. Největší hodnoty pak dosahuje v bodech $[1,1]$ a $[-1,-1]$.

10. Určete největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ na čtverci, který je určen vrcholy $A = [0,0]$, $B = [4,0]$, $C = [4,4]$ a $D = [0,4]$.

   Vyšetříme nejprve lokální extrémy funkce $f(x,y)$. Stacionární body určíme ze soustavy

$$f_x : 3x^2 - 9y = 0$$
$$f_y : 3y^2 - 9x = 0.$$

Z první rovnice dostáváme $y = \frac{x^2}{3}$. Dosazením do druhé rovnice obdržíme po úpravě rovnici $x^4 - 27x = x(x^3 - 27) = 0$. Stacionárními body funkce $f(x, y)$ jsou tedy body $[0, 0]$ a $[3, 3]$. Platí $f(0, 0) = 27$ a $f(3, 3) = 0$.

Nyní budeme hledat největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x, y)$ na hranici čtverce, která je tvořena čtyřmi úsečkami.

I. $y = 0$, $x \in [0, 4]$, II. $x = 4$, $y \in [0, 4]$, III. $y = 4$, $x \in [0, 4]$, IV. $x = 0$, $y \in [0, 4]$.

I. $y = 0$, $x \in [0, 4]$. Dosazením dostáváme $f(x, y) = x^3 + 27$ a hledáme absolutní extrémy této funkce jedné proměnné pro $x \in [0, 4]$. $f'(x) = 3x^2 = 0$, odtud $x = 0$. Funkční hodnoty ve stacionárním bodě a v druhém krajním bodě intervalu jsou $f(0) = 27$ a $f(4) = 91$.

II. $x = 4$, $y \in [0, 4]$. Dosazením dostáváme $f(x, y) = y^3 - 36y + 91$ a hledáme absolutní extrémy této funkce jedné proměnné pro $y \in [0, 4]$. $f'(y) = 3y^2 - 36 = 0$, odtud $y = \sqrt{12}$. Funkční hodnoty ve stacionárním bodě a v krajních bodech intervalu jsou $f(\sqrt{12}) = 91 - 24\sqrt{12} \doteq 7,8$, $f(0) = 91$ a $f(4) = 11$.

III. $y = 4$, $x \in [0, 4]$. Dosazením dostáváme $f(x, y) = x^3 - 36x + 91$ a hledáme absolutní extrémy této funkce jedné proměnné pro $x \in [0, 4]$. $f'(x) = 3x^2 - 36 = 0$, odtud $x = \sqrt{12}$. Funkční hodnoty ve stacionárním bodě a v krajních bodech intervalu jsou $f(\sqrt{12}) = 91 - 24\sqrt{12} \doteq 7,8$, $f(0) = 91$ a $f(4) = 11$.

IV. $x = 0$, $y \in [0, 4]$. Dosazením dostáváme $f(x, y) = y^3 + 27$ a hledáme absolutní extrémy této funkce jedné proměnné pro $y \in [0, 4]$. $f'(y) = 3y^2 = 0$, odtud $y = 0$. Funkční hodnoty ve stacionárním bodě a v druhém krajním bodě intervalu jsou $f(0) = 27$ a $f(4) = 91$.

Porovnáním všech vypočtených hodnot vidíme, že funkce $f(x, y)$ nabývá ve čtverci své nejmenší hodnoty v bodě $[3, 3]$, které je lokálním minimem této funkce, a největší hodnoty ve vrcholech čtverce $[4, 0]$ a $[0, 4]$. Platí $f(3, 3) = 0$, $f(4, 0) = f(0, 4) = 91$.

Vázané extrémy

1. Určete nezáporná reálná čísla x, y tak, aby jejich součin xy byl maximální za podmínky, že pro jejich součet platí $x + y = \text{konst.}$

   Hledejme maximum funkce $f(x, y) = xy$, definované pro $x > 0$ a $y > 0$. Předpokládejme, že platí $x + y = k$, kde k je kladná reálná konstanta. Vyjádříme-li z této rovnice (přímky) např. proměnnou y dostáváme $y = k - x$. Dosazením do předpisu funkce f získáváme funkci jedné proměnné $f(x) = x(k - x)$. Hledáme maximum této funkce na intervalu $(0, k)$. Stacionárním bodem funkce f je řešení rovnice $f'(x) = k - 2x = 0$, tedy bod $x_0 = \frac{k}{2}$. Druhá derivace $f''(x) = -2$ ukazuje, že v bodě $\frac{k}{2}$ nabývá funkce f svého maxima. Funkce $f(x, y) = xy$ dosahuje svého maxima, za podmínky $x + y = k$, v bodě $[\frac{k}{2}, \frac{k}{2}]$.

2. Určete nezáporná reálná čísla x, y tak, aby jejich součet $x + y$ byl minimální za podmínky, že pro jejich součin platí $xy = \text{konst.}$

   Hledejme minimum funkce $f(x, y) = x + y$, definované pro $x > 0$ a $y > 0$. Předpokládejme, že platí $xy = k$, kde k je kladná reálná konstanta. Vyjádříme-li z této rovnice (hyperboly) např. proměnnou y dostáváme $y = \frac{k}{x}$. Dosazením do předpisu funkce f získáváme funkci jedné proměnné $f(x) = x + \frac{k}{x}$. Hledáme minimum této funkce na intervalu $(0, \infty)$. Stacionárním bodem funkce f je řešení rovnice $f'(x) = 1 - \frac{k}{x^2} = 0$, tedy bod $x_0 = \sqrt{k}$. Druhá derivace $f''(x) = \frac{2k}{x^3}$ ukazuje, že v bodě $\sqrt{k}$ nabývá funkce f svého minima. Funkce $f(x, y) = x + y$ dosahuje svého minima, za podmínky $xy = k$, v bodě $[\sqrt{k}, \sqrt{k}]$.

Tečná rovina

1. Napište tečnou rovinu ke grafu funkce $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ v bodě $[1,1]$.

   Platí $f(1,1) = 3$. Normálový vektor tečné roviny v bodě $[x,y]$ má souřadnice

   $$\vec{n} = (2x, 4y, -1),$$

   tedy v bodě $[1,1]$ dostáváme $\vec{n} = (2,4,-1)$. Rovnici tečné roviny tedy máme

   $$2x + 4y - z + d = 0.$$

   Dosazením bodu $[1,1,3]$ získáme hodnotu $d = -3$. Rovnice tečné roviny je tedy $2x+4y-z-3 = 0$.

2. Napište tečnou rovinu ke grafu funkce $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ v bodě $[1,0]$.

   Platí $f(1,0) = 0$. Normálový vektor tečné roviny v bodě $[x,y]$ má souřadnice

   $$\vec{n} = (-2x, -2y, -1),$$

   tedy v bodě $[1,0]$ dostáváme $\vec{n} = (-2,0,-1)$. Rovnici tečné roviny tedy máme

   $$2x + z + d = 0.$$

   Dosazením bodu $[1,0,0]$ získáme hodnotu $d = -2$. Rovnice tečné roviny je tedy $2x + z - 2 = 0$.

3. Určete tečnou rovinu ke grafu funkce $f(x,y) = 36 - x^2 - 4y^2$, která je rovnoběžná s rovinou $\varrho : x + y - z = 0$.

   Normálový vektor roviny ϱ je $\vec{n_\varrho} = (1,1,-1)$. Normálový vektor tečné roviny ke grafu funkce $f(x,y)$ v bodě $[x,y]$ je $\vec{n} = (f_x(x,y), f_y(x,y), -1)$, tedy

   $$\vec{n} = \left(\frac{-x}{\sqrt{36 - x^2 - 4y^2}}, \frac{-4y}{\sqrt{36 - x^2 - 4y^2}}, -1\right).$$

   Má-li být tečná rovina rovnoběžná s rovinou ϱ, musí platit $\vec{n} = k\vec{n_\varrho}$. V našem případě je $k = 1$ a rovnice tečné roviny je tedy $x + y - z + d = 0$. Hodnotu d určíme, až najdeme bod $[x,y]$, ve kterém platí

   $$\frac{-x}{\sqrt{36 - x^2 - 4y^2}} = 1, \qquad \frac{-4y}{\sqrt{36 - x^2 - 4y^2}} = 1.$$

   Po úpravě a umocnění dostáváme soustavu dvou rovnic

   $$\begin{aligned} 2x^2 + 4y^2 &= 36 \\ x^2 + 20y^2 &= 36. \end{aligned}$$

   Tato soustava má čtyři řešení $[4,1]$, $[4,-1]$, $[-4,1]$ a $[-4,-1]$. Protože umocnění je důsledková úprava, musíme provést zkoušku. Zjišťujeme, že původní soustava před umocněním má jako jediné řešení bod $[-4,-1]$, ve kterém $f(-4,-1) = 4$. Tečná rovina v bodě $[-4,-1]$ má rovnici $x+y-z+9 = 0$.

Tečná rovina — příklady k procvičení

1. Ve kterém bodě je tečná rovina k ploše $z = 4 - x^2 - y^2$ rovnoběžná s rovinou a) $z = 0$, b) $2x + 2y + z = 0$. Výsledky $T_a = [0,0,4]$, $T_b = [1,1,2]$

Derivace složené funkce

1. Využitím uvedené substituce najděte všechny funkce splňující danou rovnost:

$$yz_x - xz_y = 0; \qquad u = x, \qquad v = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Hledáme funkci $z(x, y)$, která splňuje uvedenou parciální diferenciální rovnici. Platí

$$z_x = z_u u_x + z_v v_x = z_u + z_v \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$z_y = z_u u_y + z_v v_y = z_v \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Dosazením dostáváme

$$yz_u + z_v \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - z_v \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = yz_u = 0.$$

Tedy $z_u = 0$. To znamená, že funkce $z(u, v)$ nezávisí na proměnné u a tedy $z(u, v) = g(v)$, kde g je libovolná diferencovatelná funkce jedné proměnné. Dosazením za v vidíme, že všechny funkce dvou proměnných, které splňují uvedenou rovnici, jsou tvaru $z(x, y) = g(\sqrt{x^2+y^2})$, kde g je libovolná diferencovatelná funkce jedné proměnné.

Zvolme například $g(v) = v^2$, pak dostáváme $z(x, y) = x^2 + y^2$. Snadno se přesvědčíme, že tato funkce je řešením diferenciální rovnice.

2. Využitím uvedené substituce najděte všechny funkce splňující danou rovnost:

$$xz_x + yz_y = 0; \qquad u = x, \qquad v = \frac{y}{x}.$$

Hledáme funkci $z(x, y)$, která splňuje uvedenou parciální diferenciální rovnici. Platí

$$z_x = z_u u_x + z_v v_x = z_u - z_v \frac{y}{x^2},$$

$$z_y = z_u u_y + z_v v_y = z_v \frac{1}{x}.$$

Dosazením dostáváme

$$xz_u - z_v \frac{xy}{x^2} + z_v \frac{y}{x} = xz_u = 0.$$

Tedy $z_u = 0$. To znamená, že funkce $z(u, v)$ nezávisí na proměnné u a tedy $z(u, v) = g(v)$, kde g je libovolná diferencovatelná funkce jedné proměnné. Dosazením za v vidíme, že všechny funkce dvou proměnných, které splňují uvedenou rovnici, jsou tvaru $z(x, y) = g(\frac{y}{x})$, kde g je libovolná diferencovatelná funkce jedné proměnné.

Zvolme například $g(v) = v^2$, pak dostáváme $z(x, y) = \frac{y^2}{x^2}$. Snadno se přesvědčíme, že tato funkce je řešením diferenciální rovnice.

Definiční obor, parciální derivace

1. Určete definiční obor funkce $f(x, y) = \ln(x + y)$.

   Definiční obor určíme z podmínky $x + y > 0$, tedy $y > -x$. Řešením jsou vnitřní body poloroviny obsahující bod $[0, 1]$, která je ohraničená přímkou $y = -x$.

2. Určete definiční obor funkce $f(x, y) = \sqrt{y^2 - 4x + 8}$.

   Definiční obor určíme z podmínky $y^2 - 4x + 8 \geq 0$, tedy $y^2 \geq 4x - 8$. Řešením jsou body části roviny, ohraničené parabolou $y^2 = 4x - 8$.