

Rovnice a nerovnice s parametry

Diplomová práce

Bc. Vojtěch Rozehnal

Obsah

Úvod	1
Kapitola 1. Teoretické a didaktické východisko	3
Kapitola 2. Řešené příklady	5
2.1 Rovnice a nerovnice s absolutními hodnotami	5
2.2 Kvadratické a algebraické rovnice a nerovnice s parametry	24
2.3 Soustavy rovnic a nerovnic s parametry	34
2.4 Grafické řešení rovnic	46
2.5 Logaritmické a exponenciální rovnice a nerovnice	57
2.6 Iracionální rovnice a nerovnice	64
2.7 Racionální lomené rovnice a nerovnice s parametry	77
Závěr	85
Seznam zadání příkladů	87
Seznam použité literatury	93

Úvod

Motivací pro vznik této diplomové práce byla absence ucelené, česky psané sbírky řešených příkladů zaměřených na rovnice a nerovnice s parametry, která by přesahovala úroveň běžných středoškolských učebnic. Parametrické úlohy představují pro studenty významnou výzvu v algebrickém uvažování – vyžadují nejen technickou zdatnost, ale také schopnost případové analýzy, rozlišování mezi ekvivalentními a důsledkovými úpravami či grafického myšlení. Cílem této práce je proto sestavit sbírku, která může sloužit jako podklad pro rozšiřující výuku, práci v matematických kroužcích nebo přípravu na matematické olympiády a další soutěže.

Sbírka obsahuje celkem 36 úloh rozdělených do sedmi tematických skupin podle typické řešitelské strategie: práce s absolutní hodnotou, kvadratické a algebraické úpravy, soustavy rovnic a nerovnic, grafické metody, logaritmické a exponenciální vztahy, iracionální rovnice a racionální lomené výrazy. Každá skupina reflektuje jak typ rovnic, tak klíčové postupy potřebné pro jejich řešení. V rámci jednotlivých skupin jsou úlohy seřazeny i podle obtížnosti, což umožňuje postupné prohlubování porozumění. Některé příklady by bylo možné zařadit i do více skupin, přiřazeny jsou však tam, kde nejvíce vyniká jejich didaktický přínos.

Zadání několika příkladů bylo získáno prostřednictvím pana docenta Jaromíra Šimši; konkrétně se jedná o příklady 5.3, 5.4 a 6.7. Příklad 6.6 byl převzat z Mezinárodní matematické olympiády IMO 1963¹. Příklad 3.6 byl poskytnut panem profesorem Kučerou. Zbytek úloh je volně převzat a případně adaptován ze známých středoškolských sbírek s rovnicemi a nerovnicemi^{[2][3]}.

Text práce je vysázen v typografickém systému L^AT_EX a všechny obrázky byly vytvořeny v prostředí Mathcha. Věřím, že sbírka může být přínosná jak pro učitele matematiky, tak i studenty gymnázií a další zájemce o hlubší porozumění v řešení rovnic a nerovnic s parametry.

¹https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/1963_IMO_Problems/Problem_1

Kapitola 1

Teoretické a didaktické východisko

Rovnice a nerovnice s parametry představují specifickou skupinu algebraických úloh, ve kterých se kromě neznámých vyskytují i další proměnné – tzv. parametry. Taková úloha vlastně nevyjadřuje jediný problém, ale celou množinu úloh, které získáme dosazováním konkrétních hodnot parametru. Zatímco u běžných rovnic hledáme konkrétní řešení pro neznámou (například $x = 2$), v parametrických rovnicích se soustředíme na to, jak se množina řešení mění v závislosti na hodnotě parametru. Výstupem často není konkrétní hodnota, ale vztah, podmínka nebo případové rozdělení v podobě tabulky, která poskytuje tvar řešení pro konkrétní hodnoty parametru – taková řešení jsou v následující sbírce nejčastější. Typy úloh se také různí – někdy řešitele zajímá, kdy má úloha konkrétní, popřípadě nekonečný počet řešení, jindy zase, pro které hodnoty parametru nemá úloha řešení žádné.

Z didaktického hlediska jsou tyto úlohy mimořádně cenné – nutí žáky chápat souvislosti, přemýšlet o rovnicích jako o strukturách a nepracovat mechanicky. Zároveň však nepatří mezi oblíbené. Důvodem je právě jejich odlišná povaha: žáci jsou zvyklí hledat konkrétní hodnotu neznámé, ale zde se po nich chce rozbor celého případu, často bez pevného algoritmu. Na rozdíl od lineárních či kvadratických rovnic, se kterými se žáci již setkali, zde neexistuje univerzální ”kuchařka” – každá úloha vyžaduje individuální přístup, často odlišnou metodu i jinou míru abstrakce. Právě tato náročnost ale činí parametrické úlohy cennými – rozvíjejí analytické myšlení, schopnost práce s podmínkami a cit pro strukturu rovnice.

V běžných středoškolských sbírkách se úlohy s parametry často objevují pouze okrajově, případně bez didaktického komentáře. V matematických olympiádách však podle Váni^[4] patří rovnice a nerovnice s parametry k těm nejzajímavějším úlohám, neboť řešitelé při nich mohou uplatnit svůj vtip, znalost školské algebry i preciznost myšlení. Tato práce nabízí ucelenou sbírku náročnějších úloh na rovnice a nerovnice s parametry. K příkladům jsou připojeny podrobná řešení, která jsou doplněna o metodické komentáře a logické postupy, které mohou být inspirativní jak pro studenty, tak pro učitele. Cílem sbírky je nejen rozšířit nabídku řešených úloh rovnic a nerovnic s parametry, převyšující základní středoškolské příklady, ale také přispět k hlubšímu porozumění problematice parametrických rovnic a nerovnic a probudit vašeň a zalíbení v řešení těchto, dnes bohužel spíše nepopulárních, úloh.

Kapitola 2

Řešené příklady

2.1 Rovnice a nerovnice s absolutními hodnotami

V této podkapitole jsou zařazeny příklady, ve kterých se vyskytují absolutní hodnoty. Tyto příklady jsou didakticky významné, neboť práce s absolutní hodnotou bývá pro žáky často obtížná, a to jak po výpočtové stránce, tak také z hlediska schopnosti vyhodnotit správné větvení příkladu. Je zde potřeba důsledně rozlišovat podmínky pro jednotlivé větve řešení a správně pracovat s případovou analýzou (která je pro obecnou práci s parametry typická). Absolutní hodnota se v následujících příkladech objevuje jak v lineárním, tak kvadratickém kontextu.

Tato podkapitola obsahuje osm úloh zaměřených na řešení rovnic a nerovnic s absolutní hodnotou. Příklady 1.1 až 1.4 představují úvodní typy, ve kterých se absolutní hodnota vyskytuje pouze jednou a řešení probíhá výhradně algebraicky prostřednictvím případové analýzy. Příklady 1.5 a 1.6 komplikují situaci přítomností více absolutních hodnot, čímž nutí k pečlivější práci s podmínkami větvení. Příklad 1.5 navíc demonstrovuje situaci, kdy parametr ovlivňuje nejen počet, ale i polohu intervalů řešení. Příklady 1.7 a 1.8 rozšiřují předchozí úlohy o využití grafické metody, která slouží jak pro ilustraci řešení, tak pro jeho zpřesnění. Některé z těchto příkladů zároveň vedou k diskusi o počtu reálných řešení v závislosti na hodnotách parametru. Celá tato skupina příkladů systematicky rozvíjí dovednosti žáků při práci s absolutní hodnotou v různých kontextech a obtížnostech.

Příklad 1.1. Řešte rovnici s reálným parametrem a :

$$5 - 2a = |3x - a| - 3x.$$

Řešení:

Rozlišíme dva případy podle znaménka výrazu v absolutní hodnotě.

$$\boxed{\text{I. } 3x - a \geq 0}$$

Pokud $3x - a \geq 0$ (tedy $x \geq \frac{a}{3}$), platí

$$|3x - a| = 3x - a.$$

Po dosazení do rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} 5 - 2a &= 3x - a - 3x \\ 5 &= a \end{aligned}$$

V případě $a = 5$ budou řešením všechna čísla z určeného oboru $\langle \frac{a}{3}, \infty \rangle$, tedy $K_1 = \langle \frac{5}{3}, \infty \rangle$.

V případě $a \neq 5$ je $K_1 = \emptyset$.

$$\boxed{\text{II. } 3x - a < 0}$$

Pokud $3x - a < 0$ (tedy $x < \frac{a}{3}$), platí

$$|3x - a| = -3x + a$$

Po dosazení do rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} 5 - 2a &= -3x + a - 3x \\ 5 - 2a &= a - 6x \\ 6x &= 3a - 5 \\ x &= \frac{3a - 5}{6} \end{aligned}$$

Protože však má platit $x < \frac{a}{3}$, vyřešíme nerovnici

$$\begin{aligned} \frac{3a - 5}{6} &< \frac{a}{3} & | \cdot 6 \\ 3a - 5 &< 2a \\ a &< 5 \end{aligned}$$

V případě $a < 5$ je tedy $K_2 = \{ \frac{3a-5}{6} \}$.

V případě $a \geq 5$ je $K_2 = \emptyset$.

Výsledný tvar množiny $K = K_1 \cup K_2$ zapíšeme do tabulky:

a	K
$(-\infty, 5)$	$\{ \frac{3a-5}{6} \}$
5	$\langle \frac{5}{3}, \infty \rangle$
$(5, \infty)$	$\emptyset$

Příklad 1.2. V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici s reálným parametrem a :

$$|2x + 3| + |2x - 3| = ax + 6.$$

Řešení:

Nejprve určíme nulové body výrazů v absolutních hodnotách:

$$\begin{array}{ll} 2x + 3 = 0 & 2x - 3 = 0 \\ x = -\frac{3}{2} & x = \frac{3}{2} \end{array}$$

Sestavíme tabulku, která zpřehlední, v jakých intervalech jsou výrazy v absolutních hodnotách nezáporné a v jakých záporné:

x	$I_1 = (-\infty, -\frac{3}{2})$	$I_2 = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$	$I_3 = (\frac{3}{2}, \infty)$
$2x + 3$	–	+	+
$2x - 3$	–	–	+

Poznámka: V tabulce jsou do intervalu I_2 zahrnuty také nulové body $x = \pm\frac{3}{2}$. Pro tyto hodnoty jsou výrazy v absolutních hodnotách rovny nule, tedy nejsou ani kladné, ani záporné. Znaky v tabulce tak vyjadřují nezápornost, resp. nekladnost.

Po odstranění absolutních hodnot dostáváme na intervalech I_1 , I_2 a I_3 tři různé rovnice. Určíme jejich množiny řešení K_1 , K_2 , K_3 na daných intervalech a nakonec je sjednotíme do výsledné množiny řešení $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$.

$$\boxed{\text{I. } x \in (-\infty, -\frac{3}{2})} \longrightarrow -(2x + 3) - (2x - 3) = ax + 6$$

$$\begin{aligned} -4x &= ax + 6 \\ -4x - ax &= 6 \\ 4x + ax &= -6 \\ x(4 + a) &= -6 \end{aligned}$$

Vidíme, že v případě $a = -4$ dostáváme rovnici $0x = 6$, takže $K_1 = \emptyset$. V případě $a \neq -4$ má odvozená rovnice jediné řešení

$$x = -\frac{6}{a+4}.$$

Musíme ovšem zjistit, pro které hodnoty parametru a nabízené x skutečně leží v intervalu I_1 :

$$\begin{aligned} -\frac{6}{a+4} &< -\frac{3}{2} \quad | \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \\ \frac{1}{a+4} &> \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Aby $\frac{1}{a+4} > \frac{1}{4}$, musí nutně $a+4 > 0$, tedy $a > -4$, a současně $a+4 < 4$, neboli $a < 0$. Výše určené x tedy leží v I_1 , právě když $a \in (-4, 0)$.

Tedy $K_1 = \{-\frac{6}{a+4}\}$ pro $a \in (-4, 0)$, $K_1 = \emptyset$ pro $a \in (-\infty, -4) \cup (0, \infty)$.

$$\text{II. } x \in \left\langle -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle \quad \longrightarrow \quad 2x + 3 - (2x - 3) = ax + 6$$

$$6 = ax + 6$$

$$ax = 0$$

Pro $a = 0$ dostáváme rovnici $0x = 0$, což platí pro každé $x \in \mathbb{R}$. Jsme však omezeni intervalem I_2 , proto dostáváme $K_2 = \left\langle -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle$ pro $a = 0$.

Pro $a \neq 0$ musí nutně $x = 0 \in I_2$, tedy $K_2 = \{0\}$ pro $a \neq 0$.

$$\text{III. } x \in \left(\frac{3}{2}, \infty\right) \quad \longrightarrow \quad 2x + 3 + 2x - 3 = ax + 6$$

$$4x = ax + 6$$

$$4x - ax = 6$$

$$x(4 - a) = 6$$

Vidíme, že v případě $a = 4$ dostáváme rovnici $0x = 6$, odkud $K_3 = \emptyset$. V případě $a \neq 4$ má rovnice řešení $x = \frac{6}{4-a}$. Toto řešení však musí patřit do I_3 , tedy

$$\begin{aligned} \frac{6}{4-a} &> \frac{3}{2} & \Big| \cdot \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4-a} &> \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Aby $\frac{1}{4-a} > \frac{1}{4}$, musí nutně $4 - a > 0$, tedy $a < 4$, a současně $4 - a < 4$, neboli $a > 0$.

Tedy $K_3 = \left\{ \frac{6}{4-a} \right\}$ pro $a \in (0, 4)$, $K_3 = \emptyset$ pro $a \in (-\infty, 0) \cup \langle 4, \infty \rangle$.

Výsledek $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$ zapíšeme do tabulky:

a	K
$a \in (-4, 0)$	$\left\{ -\frac{6}{a+4}, 0 \right\}$
$a = 0$	$\left\langle -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle$
$a \in (0, 4)$	$\left\{ \frac{6}{4-a}, 0 \right\}$
$a \in (-\infty, -4) \cup \langle 4, \infty \rangle$	$\{0\}$

Příklad 1.3. V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici s reálným parametrem p :

$$|x^2 - p| = (p - 1)x.$$

Řešení:

Rozlišíme a odděleně vyřešíme dva případy: kdy $p \leq 0$ a kdy $p > 0$.

$$\boxed{\text{I. } p \in (-\infty, 0)}$$

Protože $p \leq 0$, bude výraz $x^2 - p$ zřejmě nezáporný, tj. můžeme rovnici přepsat do tvaru bez absolutní hodnoty:

$$\begin{aligned} x^2 - p &= (p - 1)x \\ x^2 - p &= px - x \\ x^2 + x(1 - p) - p &= 0 \end{aligned}$$

Odvozená kvadratická rovnice má diskriminant

$$D = (1 - p)^2 + 4p = 1 - 2p + p^2 + 4p = p^2 + 2p + 1 = (p + 1)^2.$$

Z takového vyjádření plyne, že $D \geq 0$ pro libovolné p s tím, že $D = 0$ pouze pro $p = -1$. Pro $p \neq -1$ tedy má rovnice dva kořeny

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{p - 1 \pm (p + 1)}{2}, \text{ tj.} \\ x_1 &= \frac{2p}{2} = p, \\ x_2 &= \frac{-2}{2} = -1. \end{aligned}$$

přitom pro $p = -1$ jde o jediný kořen $x_1 = x_2 = -1$.

Pro uvažovaná $p \in (-\infty, 0)$ tak množina K všech řešení x má tvar:

$$K = \{p, -1\} \text{ pro } p \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0),$$

$$K = \{-1\} \text{ pro } p = -1.$$

$$\boxed{\text{II. } p \in (0, \infty)}$$

Levá strana rovnice má tvar

$$|x^2 - p| = |(x - \sqrt{p})(x + \sqrt{p})|$$

takže výraz v absolutní hodnotě je nezáporný pro každé $x \leq -\sqrt{p}$ a každé $x \geq \sqrt{p}$, naopak záporný je pro $x \in (-\sqrt{p}, \sqrt{p})$. Rozlišíme proto dva případy:

$$\text{a) } x \in (-\infty, -\sqrt{p}) \cup \langle \sqrt{p}, \infty)$$

Dostáváme rovnici $x^2 - p = (p-1)x$, stejnou jako v případě I. Víme odtud, že pro každé $p \neq -1$ má dva různé kořeny $x_1 = p$ a $x_2 = -1$. Musíme zjistit, pro která $p > 0$ jednotlivé kořeny x_1 a x_2 leží v uvažované množině $x \in (-\infty, -\sqrt{p}) \cup \langle \sqrt{p}, \infty)$.

Pro (kladný) kořen $x_1 = p$ to nastane, právě když bude $p \in \langle \sqrt{p}, \infty)$, neboli $p \geq \sqrt{p}$, čili pro $p \in \langle 1, \infty)$. Pro (záporný) kořen $x_2 = -1$ to nastane, právě když bude $-1 \in (-\infty, -\sqrt{p})$, neboli $1 \geq \sqrt{p}$, čili pro $p \in \langle 0, 1)$.

$$\text{b) } x \in (-\sqrt{p}, \sqrt{p})$$

V tomto případě je $x^2 - p < 0$, tudíž dostáváme rovnici ve tvaru $p - x^2 = (p-1)x$, kterou dále upravíme:

$$\begin{aligned} p - x^2 &= (p-1)x \\ -x^2 - px + x + p &= 0 \\ x^2 + (p-1)x - p &= 0 \\ (x+p)(x-1) &= 0 \end{aligned}$$

Odtud dostáváme dva kořeny kvadratické rovnice $x_3 = 1$ a $x_4 = -p$. Obdobně jako v předchozím případě musíme zjistit, pro která $p > 0$ leží jednotlivé kořeny x_3 a x_4 v uvažovaném intervalu $(-\sqrt{p}, \sqrt{p})$. Pro (kladný) kořen $x_3 = 1$ to nastane, právě když bude $1 < \sqrt{p}$, čili pro $p > 1$. Pro (záporný) kořen $x_4 = -p$ to nastane, právě když $-p > -\sqrt{p}$, čili pro $p < 1$.

V případě II. jsme tedy dostali

$$K = \{-1, -p\} \text{ pro } p \in (0, 1),$$

$$K = \{-1, 1\} \text{ pro } p = 1,$$

$$K = \{1, p\} \text{ pro } p \in (1, \infty).$$

Všechny odvozené závěry shrneme v následující tabulce:

p	K
$\{-1\}$	$\{-1\}$
$(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$	$\{-1, p\}$
$(0, 1)$	$\{-1, -p\}$
$\{1\}$	$\{\pm 1\}$
$(1, \infty)$	$\{1, p\}$

Příklad 1.4. Najděte všechny hodnoty parametru b , při kterých rovnice

$$|x^2 + b| = a(x + b)$$

má řešení pro každou hodnotu reálného parametru a .

Řešení:

Rozlišíme jednotlivé případy na základě znaménka parametru $b \in \mathbb{R}$.

I. $b > 0$

Žádné $b > 0$ nevyhovuje. Pro $b > 0$ a pro $a = 0$ bude rovnice ve tvaru $|x^2 + b| = 0$, což nelze, neboť $x^2 + b > 0$ pro každé $b > 0$ a každé $x \in \mathbb{R}$.

II. $b = 0$

Hodnota $b = 0$ vyhovuje. Dostáváme totiž rovnici $|x^2| = ax$, odkud je již zřejmé, že pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ bude vždy řešením $x = 0$.

III. $b < 0$

Pro $b < 0$ si pro lepší porozumění přepíšeme zadání rovnice jako

$$|x^2 - (-b)| = a[x - (-b)]$$

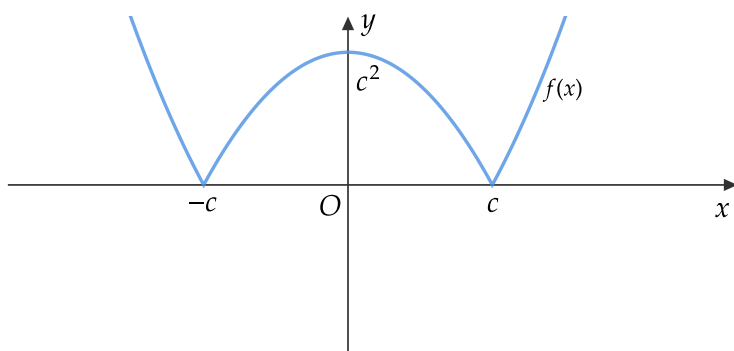
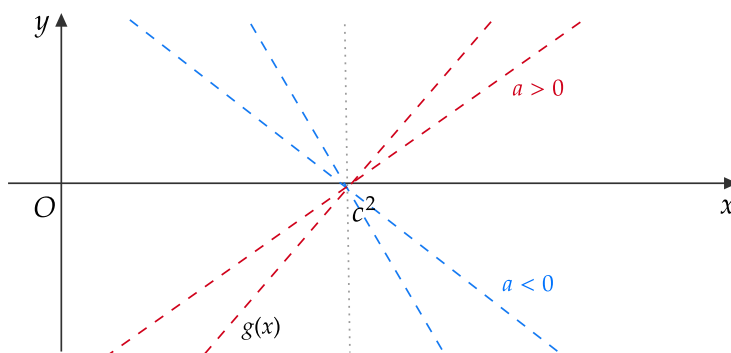
Zavedeme substituci $c = \sqrt{-b}$. Protože $b < 0$, tak $c > 0$, a současně $c^2 = -b$, proto naše rovnice získává tvar

$$|x^2 - c^2| = a(x - c^2).$$

Tuto rovnici s parametrem $c > 0$ budeme řešit graficky. Uvažme funkce

$$f(x) = |x^2 - c^2| \quad \text{a} \quad g(x) = a(x - c^2)$$

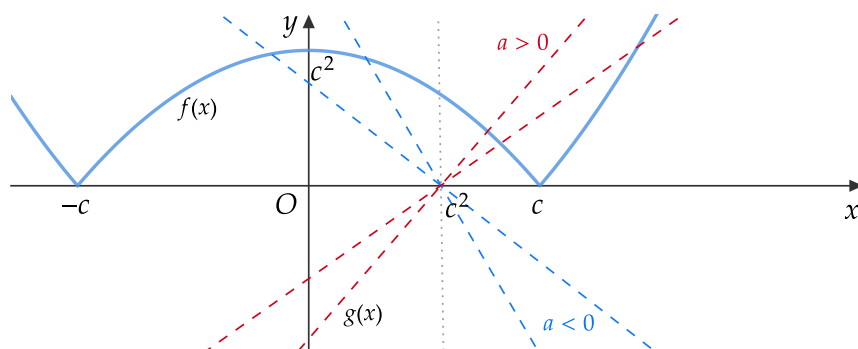
a budeme se zabývat vzájemnou polohou jejich grafů v závislosti na (kladném) parametru c . Nejprve představíme grafy obou funkcí odděleně.

Obrázek 2.1: Funkce $f(x) = |x^2 - c^2|$ s parametrem $c > 0$ Obrázek 2.2: Funkce $g(x) = a(x - c^2)$ pro různé hodnoty parametru a .

Nyní rozlišíme, jak může dopadnout na ose x vzájemná poloha intervalu $\langle -c, c \rangle$ z grafu funkce $f(x)$ s bodem c^2 z grafu funkcí $g(x)$. Mohou nastat tři možnosti:

I. $0 < c < 1$

Jelikož $0 < c^2 < c$, dostáváme vždy dva průsečíky obou grafů, bez ohledu na znaménko u koeficientu a (včetně hodnoty $a = 0$, kdy $g(x) = 0$).

Obrázek 2.3: Rozbor $|x^2 - c^2| = a(x - c^2)$ pro $0 < c < 1$.

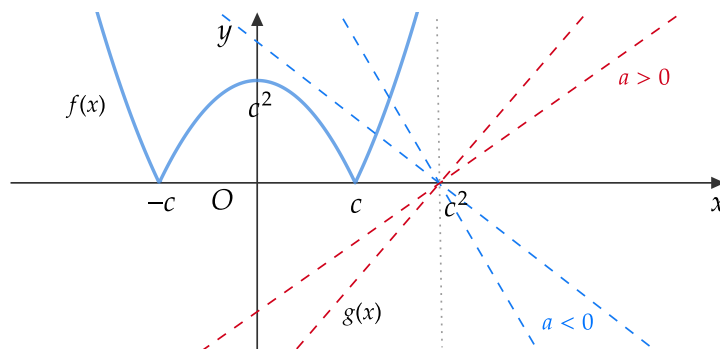
II. $c = 1$

Oba grafy se vždy protnou v bodě $[1, 0]$ (podle hodnoty parametru a mohou být průsečíky dokonce dva), neboť platí $c = c^2 = 1$. To odpovídá tomu, že $x = 1$ je řešení původní rovnice, která pro $b = -1$ má tvar $|x^2 - 1| = a(x - 1)$.

III. $c > 1$

Platí $c < c^2$, takže bude průsečík grafů existovat pro $c > 1$ určitě v případě, že $a \leq 0$ (viz modrá přímka). Potřebujeme ukázat, že pro každé $a > 0$ najdeme c takové, že grafy funkcí $f(x)$ a $g(x)$ se neprotnou. Z obrázku vidíme, že toto může nastat, pokud bude směrnice tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě c^2 větší (nebo rovna) směrnici přímky $y = a(x - c^2)$, tj. když $f'(c^2) = 2c^2 \geq a$. Současně požadujeme, aby $c > 1$, taková c jistě existují.

Zbývá vysvětlit, že tato podmínka nám skutečně zaručí, že se grafy funkcí $f(x)$ a $g(x)$ neprotnou. Z obrázku je jasné, že grafy funkcí by se mohly (za předpokladu $a > 0$) protnout pouze pro $x > c^2$. Protože $c > 1$, tak funkce f se tady chová jako $x^2 - c^2$, tedy hledáme-li průsečík grafů funkcí $f(x)$ a $g(x)$, řešíme rovnici $x^2 - c^2 = a(x - c^2)$. Je-li $0 < a \leq 1$, pro každé $x > c^2 > 1$ platí $x^2 - c^2 > x - c^2 \geq a(x - c^2)$. Je-li $a > 1$, pak kvadratická rovnice $x^2 - ax + c^2(a - 1) = 0$ nemá reálné kořeny, neboť pro její diskriminant platí $D = a^2 - 4c^2(a - 1) = a^2 - 2a(a - 1) = -a^2 + 2a < 0$ pro $a > 1$.



Obrázek 2.4: Rozbor $|x^2 - c^2| = a(x - c^2)$ pro $c > 1$.

Shrnutím situací I. až III. dostáváme, že rovnice $f(x) = g(x)$ má řešení pro každou hodnotu a právě tehdy, když $0 \leq c \leq 1$. Pro původní parametr b dostáváme $0 < \sqrt{-b} \leq 1$, tedy $-1 \leq b < 0$. Z prvního větvení úlohy však víme, že i pro $b = 0$ řešení existuje, a proto tuto hodnotu přidáme do finální odpovědi:

Hledané hodnoty b tvoří interval $\langle -1, 0 \rangle$.

Příklad 1.5. Určete všechny hodnoty reálného parametru a , při kterých má rovnice

$$|x^2 - 1| = |a + x|$$

maximální počet řešení.

Řešení:

Budeme se zabývat znaménky výrazů v absolutních hodnotách:

$$\boxed{\text{I. } x^2 - 1 \geq 0}$$

Pro $x^2 - 1 \geq 0$ můžeme absolutní hodnotu na levé straně rovnice odstranit a dostaneme kvadratickou rovnici

$$x^2 - 1 = |a + x|.$$

V závislosti na znaménku hodnoty výrazu $a + x$ dostáváme dvě rovnice:

Je-li výraz $a + x$ nezáporný, můžeme odstranit absolutní hodnotu a dostaneme kvadratickou rovnici:

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= a + x \\ x^2 - x - a - 1 &= 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Pokud je výraz $a + x$ záporný, bude rovnice po odstranění absolutní hodnoty vypadat následovně:

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= -a - x \\ x^2 + x + a - 1 &= 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\boxed{\text{II. } x^2 - 1 < 0}$$

Pro $x^2 - 1 < 0$ bude původní rovnice tvaru

$$-x^2 + 1 = |a + x|.$$

Podle znaménka hodnoty výrazu $a + x$ získáme dvě rovnice:

$$\begin{aligned} -x^2 + 1 &= a + x && \text{pro } a + x \geq 0 \\ -x^2 + 1 &= -a - x && \text{pro } a + x < 0 \end{aligned}$$

Vhodným přeskládáním členů bychom však získali rovnice shodné s (1.1), respektive (1.2). Zjistili jsme tak, že řešeními původní rovnice s dvěma absolutními hodnotami jsou právě ta reálná čísla, která splňují aspoň jednu z rovnic (1.1) nebo (1.2).

Můžeme tedy celkem získat až $2 + 2 = 4$ řešení. Nyní určíme podmínku pro parametr a , kdy tato situace nastane. Předně musí mít každá z obou kvadratických rovnic kladný diskriminant.

Vyřešíme jednotlivé rovnice:

$$x^2 - x - a - 1 = 0 \quad (1.1)$$

Tato rovnice má dvě řešení, právě když je diskriminant kladný:

$$D = 1 - 4(-a - 1) = 1 + 4a + 4 = 4a + 5 > 0$$

$$a > -\frac{5}{4}$$

Právě pro $a \in (-\frac{5}{4}, \infty)$ má rovnice (1.1) dvě různá řešení.

Obdobně řešíme druhou rovnici:

$$x^2 + x + a - 1 = 0 \quad (1.2)$$

I zde spočítáme diskriminant a dořešíme:

$$D = 1 - 4(a - 1) = 1 - 4a + 4 = -4a + 5 > 0$$

$$-4a + 5 > 0$$

$$a < \frac{5}{4}$$

Právě pro $a \in (-\infty, \frac{5}{4})$ má rovnice (1.2) právě dvě řešení.

Zjistili jsme, že oba diskriminanty jsou kladné, právě když $a \in (-\frac{5}{4}, \frac{5}{4})$. Aby uvažované kvadratické rovnice (každá se dvěma kořeny) měly dohromady 4 různé kořeny, nesmí mít tyto dvě rovnice společný kořen. Zjistíme, pro která a tato nepříjemná situace nastane a pak je z intervalu $(-\frac{5}{4}, \frac{5}{4})$ vyjmemme. Rovnici vyjadřující tuto situaci budeme řešit důsledkovými úpravami a pak pro nalezená a provedeme zkoušku:

$$\frac{1 \pm \sqrt{4a+5}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-4a+5}}{2}$$

$$1 \pm \sqrt{4a+5} = -1 \pm \sqrt{-4a+5}$$

$$2 \pm \sqrt{4a+5} = \pm \sqrt{-4a+5} \quad |^2$$

$$4 \pm 4\sqrt{4a+5} + 4a + 5 = -4a + 5$$

$$\pm 4\sqrt{4a+5} = -8a - 4$$

$$\pm \sqrt{4a+5} = -2a - 1 \quad |^2$$

$$4a + 5 = 4a^2 + 4a + 1$$

$$4a^2 - 4 = 0$$

$$a^2 - 1 = 0$$

$$(a-1)(a+1) = 0 \implies a_{1,2} = \pm 1$$

Zkouška: Pro $a = 1$ jde o rovnice $x^2 - x - 2 = 0$ a $x^2 + x = 0$ se společným kořenem $x = -1$.
Pro $a = -1$ jde o rovnice $x^2 - x = 0$ a $x^2 + x - 2 = 0$ se společným kořenem $x = 1$.

Pro zjištění nevyhovujících hodnot parametru a můžeme použít i chytrou úvahu:

Předpokládejme, že nějaké číslo x splňuje obě uvažované rovnice, které přepíšeme nyní takto:

$$x^2 = x + a + 1 \quad \text{a} \quad x^2 = -x - a + 1 \quad (1.3)$$

Z rovnosti pravých stran $x + a + 1 = -x - a + 1$ zřejmě plyne $2x = -2a$, neboli $x = -a$. Dosazením této hodnoty do rovnice $x^2 = x + a + 1$ dostaneme $(-a)^2 = (-a) + a + 1$, tedy $a^2 = 1$ neboli $a = \pm 1$. To jsou dvě hodnoty, kdy rovnice (1.3) skutečně mají společný kořen.

Celkovým řešením je tedy množina $a \in \left(-\frac{5}{4}, -1\right) \cup (-1, 1) \cup \left(1, \frac{5}{4}\right)$.

Poznámka: Vzhledem ke skutečnosti, že pracujeme s dvěma absolutními hodnotami, z nichž každá tvoří jednu stranu rovnice, je nutné a stačí, aby oba výrazy v absolutní hodnotě měly buď stejnou hodnotu, nebo měly dvě navzájem opačné hodnoty. To je také důvod, proč nám potenciální čtyři rovnice splynuly do dvou. Stačí tedy sjednotit množiny řešení rovnic

$$x^2 - 1 = a + x \quad \text{a} \quad x^2 - 1 = -(a + x).$$

Příklad 1.6. V oboru $\mathbb{R}$ řešte nerovnici

$$|x^2 + 2px + 1| > 1$$

s reálným parametrem p , a to pouze v případech

- a) $p > \sqrt{2}$,
b) $p \in (0, 1)$.

Řešení:

Diskuzi o znaménku trojčlenu v absolutní hodnotě se lze vyhnout, uvědomíme-li si, že zadaná rovnice je splněna právě pro ta $x \in \mathbb{R}$, pro která platí jedna z nerovností

$$\begin{aligned} \text{I. } & x^2 + 2px + 1 > 1 \\ \text{II. } & x^2 + 2px + 1 < -1 \end{aligned}$$

Množina řešení původní nerovnice bude tedy sestávat ze sjednocení množin řešení rovnic I. a II., které nyní označené jako K_I a K_{II} pro dva zadané případy určíme.

a) $p > \sqrt{2}$

Nerovnici I. upravíme:

$$\begin{aligned} \text{I. } & x^2 + 2px + 1 > 1 \\ & x^2 + 2px > 0 \\ & x(x + 2p) > 0 \end{aligned}$$

S ohledem na $p > 0$ je množinou řešení nerovnice množina $K_I = (-\infty, -2p) \cup (0, \infty)$.
Nerovnici II. upravíme

$$\begin{aligned} \text{II. } & x^2 + 2px + 1 < -1 \\ & x^2 + 2px + 2 < 0 \end{aligned}$$

a přes diskriminant vyřešíme:

$$\begin{aligned} D &= 4p^2 - 8 = 4(p^2 - 2) \\ x_{1,2} &= \frac{-2p \pm 2\sqrt{p^2 - 2}}{2} = -p \pm \sqrt{p^2 - 2} \end{aligned}$$

Zdůrazněme, že díky předpokladu $p > \sqrt{2}$ platí $p^2 > 2$, tj. $D > 0$. Množinou řešení nerovnice II. je tedy interval $K_{II} = (-p - \sqrt{p^2 - 2}, -p + \sqrt{p^2 - 2})$.

Zbývá určit množinu řešení $K = K_I \cup K_{II}$. K tomu je nutné rozhodnout o pořadí krajních bodů intervalů, vystupujících v K_I a K_{II} . Z předpokladu $p > \sqrt{2}$ vyplývá $0 < p^2 - 2 < p^2$, po odmocnění $0 < \sqrt{p^2 - 2} < p$. V důsledku posledních dvou nerovností platí

$$-2p < -p - \sqrt{p^2 - 2} < -p + \sqrt{p^2 - 2} < 0$$

odkud již dostáváme pro případ a) odpověď

$$K = (-\infty, -2p) \cup (-p - \sqrt{p^2 - 2}, -p + \sqrt{p^2 - 2}) \cup (0, \infty).$$

b) $0 < p < 1$

Nerovnice I. přepsaná na tvar $x(x + 2p) > 0$ má opět množinu řešení $K_I = (-\infty, -2p) \cup (0, \infty)$. Nerovnice II. přepsaná na tvar $x^2 + 2px + 2 < 0$ má svůj diskriminant $D = 4(p^2 - 2)$ záporný, neboť z předpokladu $0 < p < 1$ plyne $p^2 < 1$. Proto nerovnice II. tentokrát neplatí pro žádné $x \in \mathbb{R}$, a tedy $K_{II} = \emptyset$. V případě b) je tedy odpověď

$$K = K_I \cup K_{II} = (-\infty, -2p) \cup (0, \infty).$$

Příklad 1.7. Určete všechny reálné hodnoty parametru a , při kterých má rovnice

$$|ax^2 + 4| = |3ax| + |a|$$

alespoň jedno řešení.

Řešení:

Posoudíme případy hodnoty parametru a podle jeho znaménka.

$$a = 0$$

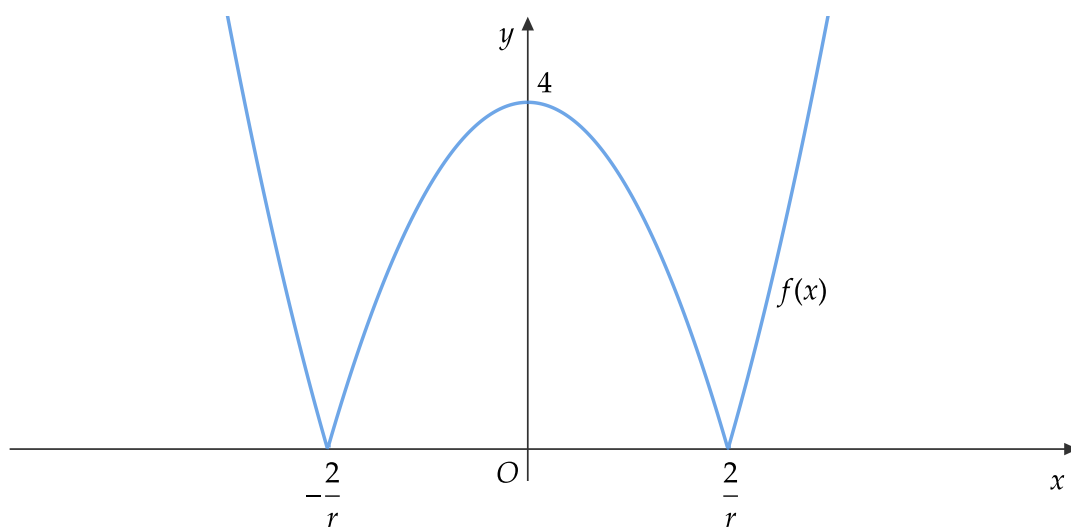
Pro $a = 0$ dostáváme rovnici

$$|4| = |0| + |0|,$$

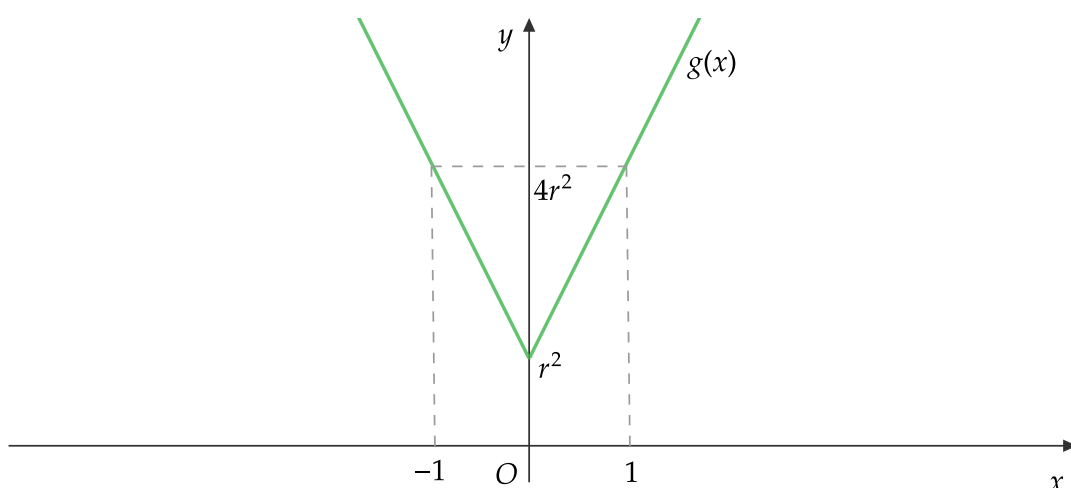
tedy rovnice nemá žádné řešení.

$$a < 0$$

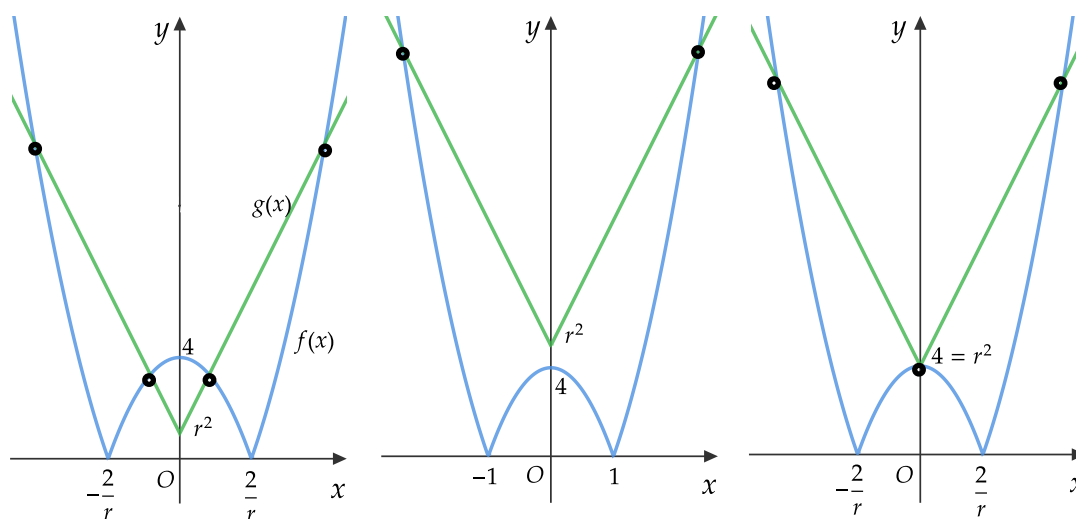
Ukážeme, že zadání úlohy vyhovuje každé $a < 0$. Zapišme ho jako $a = -r^2$, kde $r > 0$, a využijme grafy funkcí f a g levé, resp. pravé strany rovnice:



Obrázek 2.5: $f(x) = |ax^2 + 4| = |4 - r^2x^2|$

Obrázek 2.6: $g(x) = |3ax| + |a| = 3r^2|x| + r^2$

Protože kvadratická funkce roste pro $|x| \rightarrow \infty$ rychleji nežli funkce lineární, vidíme, že rovnice $f(x) = g(x)$ má 4, 2, resp. 3 řešení (průsečíky funkcí) podle toho, zda $0 < r^2 < 4$, $r^2 > 4$, respektive $r^2 = 4$:

Obrázek 2.7: Počet řešení v závislosti na hodnotě r .

$a > 0$

Pro $a > 0$ můžeme rovnici přepsat jako

$$ax^2 + 4 = 3a|x| + a. \quad (1.4)$$

V závislosti na hodnotě x dostáváme dvě rovnice:

$$\begin{aligned} ax^2 + 4 &= 3ax + a \\ ax^2 - 3ax + (4 - a) &= 0 \quad \text{pro } x \geq 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} ax^2 + 4 &= -3ax + a \\ ax^2 + 3ax + (4 - a) &= 0 \quad \text{pro } x < 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Aby měly rovnice (1.5) a (1.6) vůbec nějaké reálné kořeny, musí být jejich diskriminant nezáporný. Vzhledem k tomu, že se obě rovnice liší pouze lineárním členem, a to pouze jeho znaménkem, bude jejich diskriminant D stejný:

$$D = 9a^2 - 4a(4 - a) = 9a^2 - 16a + 4a^2 = a(13a - 16) \geq 0.$$

Odsud s ohledem na $a > 0$ plyne nutná podmínka $a \geq \frac{16}{13}$. Pro každé a , které ji splňuje, pro kořeny $x_{1,2}$ rovnice (1.5) podle Viètova vzorce platí $x_1 + x_2 = \frac{3a}{3} = 3$, takže aspoň jeden z kořenů x_1, x_2 je kladný. Podobně z rovnosti $x_3 + x_4 = -3$ pro kořeny rovnice (1.6) plyne, že aspoň jeden z kořenů x_3, x_4 je záporný. Proto pro každé $a \in \langle \frac{16}{13}, \infty \rangle$ má původní rovnice aspoň dva kořeny.

Celkově má tedy rovnice alespoň jedno řešení právě pro $a \in (-\infty, 0) \cup \langle \frac{16}{13}, \infty \rangle$.

Příklad 1.8. V závislosti na reálném parametru a určete počet řešení rovnice

$$a + 2|x| - x^2 = 0$$

Řešení:

Rovnice obsahuje absolutní hodnotu, takže se potýkáme s dvěma rovnicemi, v závislosti na znaménku výrazu v absolutní hodnotě:

$$\begin{aligned} a + 2x - x^2 &= 0 \\ x^2 - 2x - a &= 0 \quad \text{pro } x \geq 0 \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} a - 2x - x^2 &= 0 \\ x^2 + 2x - a &= 0 \quad \text{pro } x < 0 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Dostáváme dvě kvadratické rovnice, které budou mít sice každá jiná řešení, nicméně diskriminant D bude v obou případech stejný, neboť rozdíl rovnic je pouze ve znaménku lineárního členu, který se umocní na druhou:

$$D = (\pm 2)^2 - 4(-a) = 4 + 4a$$

Diskriminant určuje i počet řešení:

Pro $D = 4 + 4a < 0$, neboli pro $a < -1$, nemá žádná z rovnic reálná řešení. Tedy pro $a \in (-\infty, -1)$ nemá rovnice řešení.

Pro $D = 4 + 4a = 0$, neboli pro $a = -1$, má rovnice (1.7) jediné řešení $x = 1$, které přitom splňuje potřebnou podmínku $x \geq 0$, a rovnice (1.8) má jediné řešení $x = -1$, které přitom splňuje podmínku $x < 0$. Tedy celkově pro $a = -1$ dostáváme dvě řešení původní úlohy.

Pro $D > 4 + 4a = 0$, neboli $a > -1$, má každá z rovnic právě dvě reálná řešení. Tvary těchto řešení podrobněji rozebereme, abychom zjistili, která řešení splňují potřebné podmínky $x \geq 0$, resp. $x < 0$:

Vyjádřeme řešení rovnic (1.7), respektive (1.8):

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4a}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 + a} \\ x_{3,4} &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4a}}{2} = -1 \pm \sqrt{1 + a} \end{aligned}$$

Zjistíme, pro které hodnoty $a > -1$ platí jednotlivé podmínky $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 < 0$ a

$x_4 < 0$:

$$x_1 = 1 + \sqrt{1+a} \geq 0$$

$$\sqrt{1+a} \geq -1 \quad \text{platí pro každé } a \geq -1.$$

$$x_2 = 1 - \sqrt{1+a} \geq 0$$

$$1 \geq \sqrt{1+a} \quad |^2$$

$$1 \geq 1+a$$

$$0 \geq a \quad \text{platí pro } -1 < a \leq 0.$$

$$x_3 = -1 + \sqrt{1+a} < 0$$

$$\sqrt{1+a} < 1 \quad |^2$$

$$1+a < 1$$

$$a < 0 \quad \text{platí pro } -1 < a < 0.$$

$$x_4 = -1 - \sqrt{1+a} < 0$$

$$-1 < \sqrt{1+a} \quad \text{platí pro každé } a \geq -1.$$

Pro přehlednost sestavíme tabulku s příslušnými počty řešení:

a	Počet řešení
$(-\infty, -1)$	0
$\{-1\}$	2
$(-1, 0)$	4
$\{0\}$	3
$(0, \infty)$	2

2.2 Kvadratické a algebraické rovnice a nerovnice s parametry

V této podkapitole se zaměřujeme na kvadratické a obecně algebraické rovnice, v nichž vystupují reálné parametry. Jde o tematický okruh, který patří k základním stavebním kamenům algebraického myšlení, přesto skýtá řadu příležitostí k hlubší analýze. V souboru úloh kvadratické úlohy mnohdy vyvstanou až po provedení vhodných úprav, což zvyšuje obtížnost. Práce s parametrem zde nespočívá pouze ve formálním výpočtu diskriminantu, ale často vyžaduje komplexní případovou diskuzi, analýzu podmínek pro existenci řešení nebo práci s vlastnostmi součtu a součinu kořenů. Z didaktického hlediska je tato oblast velmi cenná – poskytuje prostor pro rozvoj strukturovaného uvažování a vyžaduje bezpečnou znalost mnoha vlastností spojených s kvadratickou funkcí.

Naleznete zde celkem pět úloh zaměřených na kvadratické a algebraické rovnice a nerovnice s parametry. Příklad 2.1, který pracuje s dvěma parametry p a q , ilustruje úpravu racionální rovnice na kvadratickou a analýzu platnosti řešení vzhledem k definičním podmínkám. V příkladu 2.2 určíme hodnoty parametru, pro něž má rovnice právě tři reálná řešení vzniklá spojením dvou kvadratických rovnic. Vyžaduje rozbor diskriminantů dílčích rovnic, po kterém je již snadné uhodnout správné řešení. Příklad 2.3 se soustředí na rozbor znamének a vzájemné polohy kořenů kvadratické rovnice pomocí Viètových vztahů. V příkladu 2.4 je rovnice čtvrtého stupně převedena substitucí na kvadratickou, přičemž důraz je kladen na rozbor kladnosti řešení v závislosti na parametrech. Poslední příklad 2.5 se věnuje parametrické nerovnici třetího stupně, která je řešena rozkladem na součin (užitím vlastností Viètových vztahů) a následnou analýzou nulových bodů podle hodnoty parametru.

Příklad 2.1. V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici s reálnými parametry p, q :

$$\frac{x+p}{x-q} + \frac{x+q}{x-p} = 2.$$

Řešení:

Rovnice má smysl, právě když $x \neq q \wedge x \neq p$. Pro taková x můžeme rovnici vynásobit jmenovateli a upravit:

$$\begin{aligned}(x-p)(x+p) + (x+q)(x-q) &= 2(x-q)(x-p) \\ x^2 - p^2 + x^2 - q^2 &= 2x^2 - 2px - 2qx + 2pq \\ 0 &= p^2 + q^2 + 2pq - 2x(p+q) \\ 0 &= (p+q)^2 - 2x(p+q) \\ 0 &= (p+q)(p+q-2x) \\ 0 &= 2(p+q)\left(\frac{p+q}{2} - x\right)\end{aligned}\tag{2.1}$$

Nyní se musíme zamyslet, jak budou vypadat jednotlivá řešení v závislosti na různých hodnotách parametrů:

I. $p+q=0$

Pokud $p+q=0$, neboli $p=-q$, pak platí rovnice (2.1) pro každé $x \in \mathbb{R}$. Podle úvodu však musíme vyloučit situace, kdy $x=q=-p$ a $x=p$. Hledaná x tak jsou zadána podmínkami $x \neq \pm p$, které se pro $p=0$ redukují na $x \neq 0$.

II. $p+q \neq 0$

Pokud $p+q \neq 0$, neboli $q \neq -p$, platí rovnice (2.1) pro jediné $x = \frac{1}{2}(p+q)$, které ovšem musí splňovat podmínky $\frac{1}{2}(p+q) \neq q \wedge \frac{1}{2}(p+q) \neq p$, které zřejmě znamenají totéž, co $q \neq p$. Tato podmínka není splněna, pokud $q=p$, což lze společně s předpokladem $p+q \neq 0$ zapsat jako $q=p \neq 0$.

Výsledná řešení sepíšeme do tabulky.

p, q	K
$p=q=0$	$\mathbb{R} - \{0\}$
$p \neq 0 \wedge q = -p$	$\mathbb{R} - \{\pm p\}$
$q \neq -p \wedge q = p$	$\emptyset$
$q \neq p \wedge q \neq -p$	$\{\frac{p+q}{2}\}$

Příklad 2.2. Určete, pro které reálné hodnoty parametru p má rovnice

$$|px^2 - x| = 1$$

právě tři řešení.

Řešení:

Pokud $p = 0$, tak dostáváme zřejmě nevyhovující rovnici $|-x| = 1$, která totiž má pouze dvě řešení $x = \pm 1$. Dále se proto zabýváme případem $p \neq 0$. Tehdy je množina řešení zadané rovnice sjednocením množin řešení dvou kvadratických rovnic

$$1) \quad px^2 - x = 1 \quad \text{neboli} \quad px^2 - x - 1 = 0,$$

$$2) \quad px^2 - x = -1 \quad \text{neboli} \quad px^2 - x + 1 = 0.$$

Protože žádné x nemůže vyhovovat oběma rovnicím současně, hledáme právě taková $p \neq 0$, při kterých má jedna z rovnic 1) a 2) dva různé kořeny a druhá z nich má jeden dvojnásobný kořen. Pro jejich diskriminanty platí

$$D_1 = 1 + 4p, \quad D_2 = 1 - 4p.$$

S neznámou $p \neq 0$ tak vyřešíme každou ze dvou soustav

$$\begin{array}{l} \text{I.} \quad D_1 = 1 + 4p > 0 \\ \quad \quad D_2 = 1 - 4p = 0 \\ \hline \text{II.} \quad D_1 = 1 + 4p = 0 \\ \quad \quad D_2 = 1 - 4p > 0 \end{array}$$

a nalezené množiny řešení pak sjednotíme. První soustavě ($p > -\frac{1}{4} \wedge p = \frac{1}{4}$) vyhovuje jediné p , a to $p = \frac{1}{4}$. Podobně, druhé soustavě ($p = -\frac{1}{4} \wedge p < \frac{1}{4}$) vyhovuje jediné $p = -\frac{1}{4}$. Obě nalezená p jsou různá od nuly, tudíž zadání příkladu vyhovují právě dvě hodnoty $p = \pm \frac{1}{4}$.

Příklad 2.3. Zjistěte, pro které hodnoty reálného parametru p má rovnice

$$p(x^2 + 1) - 3 = x(x - 2p)$$

v oboru $\mathbb{R}$ dva různé kořeny. Pro které z nalezených hodnot p jsou oba tyto kořeny

I. kladné,

II. záporné,

III. opačných znamének?

Řešení:

Nejprve rovnici upravíme na standardní tvar

$$(p - 1)x^2 + 2px + p - 3 = 0.$$

Odsud lze snadno vidět, že pro $p = 1$ se jedná o lineární rovnici ve tvaru $2x - 2 = 0$ s jediným kořenem, takže hodnota $p = 1$ zadání nevyhovuje. Dále se tedy budeme zabývat pouze případy, kdy $p \neq 1$.

Tato kvadratická rovnice má dva různé reálné kořeny právě tehdy, když pro její diskriminant D platí $D > 0$. Zjistíme, kdy to nastane:

$$D = b^2 - 4ac = 4p^2 - 4(p - 1)(p - 3) = 4p^2 - 4p^2 + 16p - 12 = 16p - 12$$

$$16p - 12 > 0$$

$$p > \frac{3}{4}$$

Vidíme, že hledaný parametr p všech podúloh musí vyhovovat podmínce $p \in (\frac{3}{4}, \infty) - \{1\}$.

Pro řešení dalších částí úlohy se nám budou hodit Viètovy vzorce. Pro kořeny x_1, x_2 kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ platí:

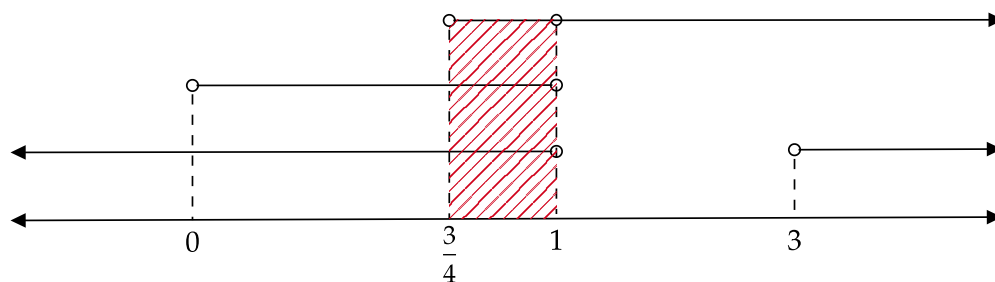
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad \wedge \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

I. $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$

Oba kořeny x_1, x_2 jsou kladné, právě když $x_1 + x_2 > 0$ a současně $x_1 \cdot x_2 > 0$, tj.:

$$\frac{c}{a} = \frac{p - 3}{p - 1} > 0 \quad \wedge \quad -\frac{b}{a} = -\frac{2p}{p - 1} > 0$$

Pomocí nulových bodů vyřešíme jednotlivé nerovnice. Řešením první nerovnice je $p \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ a řešením druhé nerovnice je $p \in (0, 1)$. Zároveň platí $p \in (\frac{3}{4}, \infty) - \{1\}$. Vše zaneseme do grafu:

Obrázek 2.8: Určení hodnot p pro případ I.

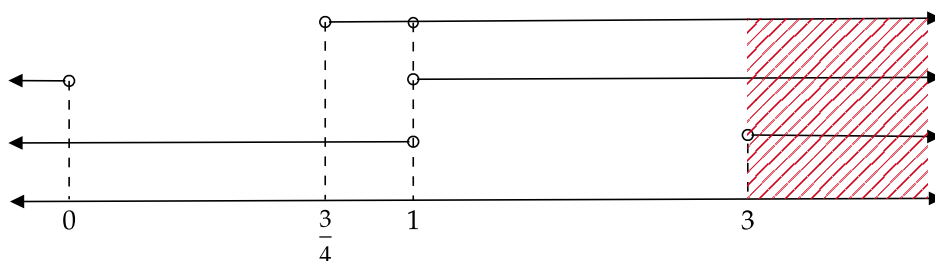
Průnikem všech tří množin získáváme $p \in (\frac{3}{4}, 1)$. Pro právě taková p má naše rovnice dva kladné kořeny $x_1 \neq x_2$.

II. $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^-$

Oba kořeny jsou záporné, právě když $x_1 \cdot x_2 > 0$ a $x_1 + x_2 < 0$:

$$\frac{p-3}{p-1} > 0 \quad \wedge \quad -\frac{2p}{p-1} < 0$$

První nerovnice platí pro $p \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$, druhá nerovnice platí pro $p \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$. Hledaná p tvoří množinu, která je průnikem určených dvou množin společně s dříve určenou množinou $(\frac{3}{4}, \infty) - \{1\}$.

Obrázek 2.9: Určení hodnot p pro případ II.

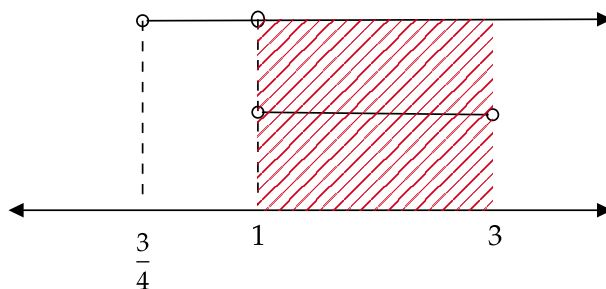
Průnikem všech tří množin je interval $(3, \infty)$, proto má naše rovnice dva záporné kořeny x_1, x_2 právě pro $p \in (3, \infty)$.

III. Dva kořeny opačného znaménka

Jeden z kořenů je kladný a druhý záporný právě tehdy, když $x_1 \cdot x_2 < 0$. Řešíme tedy jedinou nerovnici:

$$\frac{p-3}{p-1} < 0$$

Množinou řešení této nerovnice je interval $p \in (1, 3)$, který je podmnožinou množiny $(\frac{3}{4}, \infty) - \{1\}$ z první části řešení. Proto má naše rovnice kořeny x_1, x_2 opačných znamének právě pro $p \in (1, 3)$.



Obrázek 2.10: Určení hodnot p pro případ III.

Příklad 2.4. V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici $\frac{x^2}{a^3} + \frac{b^3}{x^2} = \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}$, kde a, b jsou nenulové reálné parametry.

Řešení:

Rovnice má smysl, pokud $x \neq 0$. Pro taková x se vynásobením součinem $a^3x^2 \neq 0$ ekvivalentně zbavíme zlomků:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^3} + \frac{b^3}{x^2} &= \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} & | \cdot x^2 a^3 \\ x^4 + a^3 b^3 &= a^2 b x^2 + a b^2 x^2 \end{aligned}$$

Protože v rovnici vystupují pouze členy s mocninami x^4, x^2 a x^0 , zvolíme substituci $y = x^2$. Po ní dostáváme kvadratickou rovnici, kterou vyřešíme přes diskriminant:

$$\begin{aligned} y^2 + a^3 b^3 &= a^2 b y + a b^2 y \\ y^2 + y(-a^2 b - a b^2) + a^3 b^3 &= 0 \\ D &= (-a^2 b - a b^2)^2 - 4 a^3 b^3 = a^4 b^2 + 2 a^3 b^3 + a^2 b^4 - 4 a^3 b^3 = \\ &= a^2 b^2 (a^2 - 2 a b + b^2) = a^2 b^2 (a - b)^2 \end{aligned}$$

Kořeny zasubstituované rovnice jsou $y_{1,2} = \frac{ab(a+b) \pm [ab(a-b)]}{2}$, neboli

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{a^2 b + a b^2 + a^2 b - a b^2}{2} = \frac{2 a^2 b}{2} = a^2 b \\ y_2 &= \frac{a^2 b + a b^2 - a^2 b + a b^2}{2} = \frac{2 a b^2}{2} = a b^2 \end{aligned}$$

Podle podmínek ze zadání platí $ab \neq 0$, tedy podmínka $a^2 b \neq a b^2$ různosti kořenů $y_{1,2}$ je ekvivalentní (po vydělení $ab \neq 0$) s podmínkou $a \neq b$. Právě tehdy má rovnice pro neznámou y dva různé kořeny; v případě $a = b$ je $y_1 = y_2 = a^3$.

Vrátíme-li se k původní neznámé x ze substituce $y = x^2$. S ohledem na $x \neq 0$ musí nutně platit $y > 0$, takže posoudíme, kdy jsou jednotlivé kořeny y_1, y_2 kladné:

- Podmínka $y_1 = a^2 b > 0$ platí právě tehdy, když $b > 0$ (jelikož $a^2 > 0$). Původní rovnici pak odpovídají dva různé kořeny

$$x = \pm \sqrt{y_1} = \pm \sqrt{a^2 b} = \pm a \sqrt{b}.$$

- Podobně, podmínka $y_2 = a b^2$ platí právě tehdy, když $a > 0$. Tehdy platí

$$x = \pm \sqrt{y_2} = \pm \sqrt{a b^2} = \pm b \sqrt{a}.$$

Zjištěné poznatky zapíšeme do tabulky. Nezapomeneme, že v případě $a = b > 0$ jsou kořeny původní rovnice odpovídající y_1, y_2 shodně rovny $\pm a\sqrt{a}$.

a, b	K
$a < 0, b < 0$	$\emptyset$
$a > 0, b > 0 \wedge a \neq b$	$\{\pm a\sqrt{b}, \pm b\sqrt{a}\}$
$a = b > 0$	$\{\pm a\sqrt{a}\}$
$a > 0, b < 0 \wedge a \neq b$	$\{\pm b\sqrt{a}\}$
$a < 0, b > 0 \wedge a \neq b$	$\{\pm a\sqrt{b}\}$

Příklad 2.5. Řešte nerovnici s reálným parametrem a :

$$x^3 - (3^a + 3^{1-a})x^2 + 3x \leq 0.$$

Řešení:

Nejprve danou kubickou nerovnici upravíme do součinnového tvaru:

$$\begin{aligned} x^3 - (3^a + 3^{1-a})x^2 + 3x &\leq 0 \\ x[x^2 - (3^a + 3^{1-a})x + 3] &\leq 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Nyní se zaměříme na výraz v hranaté závorce. Užitím Viětových vzorců se výraz pokusíme upravit na výraz $(x-p)(x-q)$. Hledáme tedy p a q , pro která platí:

$$\begin{aligned} p + q &= 3^a + 3^{1-a} \\ pq &= 3 \end{aligned}$$

Z první rovnice se nabízí $p = 3^a$ a $q = 3^{1-a}$. Při těchto hodnotách přechází obě rovnice do rovnosti; použijeme tedy tyto hodnoty p a q k úpravě rovnice (2.2) do součinnového tvaru:

$$x(x - 3^a)(x - 3^{1-a}) \leq 0. \quad (2.3)$$

Jelikož se jedná o součin tří činitelů a potřebujeme, aby byl nekladný, musí být buď právě jeden z činitelů nekladný, dva činitelé nulové, anebo právě všichni tři činitelé nekladní. Rozlišit však všechny možné situace by zabralo spoustu času. Zároveň připomeňme, že platí $3^t > 0$ pro každé $t \in \mathbb{R}$ a že funkce $f(t) = 3^t$ je rostoucí.

Navrháme nejprve vhodné a , pro které by nerovnice nabyla zajímavého tvaru. Pro $a = \frac{1}{2}$ jsou obě závorky shodné, neboť platí

$$3^a = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \wedge 3^{1-a} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3},$$

a tedy máme řešit nerovnici

$$x(x - \sqrt{3})^2 \leq 0.$$

Využijeme k tomu metodu nulových bodů, které jsou v tomto případě dva: $x = 0$ a $x = \sqrt{3}$.

I	$I_1 = (-\infty, 0)$	$I_2 = (0, \sqrt{3})$	$I_3 = (\sqrt{3}, \infty)$
znaménko	–	+	+

Do množiny řešení zahrneme interval, kdy je výraz na levé straně nerovnice záporný, společně s nulovými body, tedy pro $a = \frac{1}{2}$ je $K = (-\infty, 0) \cup \{\sqrt{3}\}$.

Pro obecné $a \neq \frac{1}{2}$ budeme mít vždy 3 různé nulové body $x = 0$, $x = 3^a$ a $x = 3^{1-a}$. Ty budou mít na číselné ose různá pořadí v případech $a < \frac{1}{2}$ a $a > \frac{1}{2}$.

I. $a < \frac{1}{2}$

Pro $a < \frac{1}{2}$ platí $a < 1 - a$, odkud plyne $0 < 3^a < 3^{1-a}$, proto metoda nulových bodů pro nerovnici (2.3) zafunguje následovně:

I	$I_1 = (-\infty, 0)$	$I_2 = (0, 3^a)$	$I_3 = (3^a, 3^{1-a})$	$I_4 = (3^{1-a}, \infty)$
znaménko	–	+	–	+

Pro $a < \frac{1}{2}$ dostáváme množinu řešení $K = (-\infty, 0) \cup \langle 3^a, 3^{1-a} \rangle$.

II. $a > \frac{1}{2}$

Pro $a > \frac{1}{2}$ platí $a > 1 - a$, tedy $0 < 3^{1-a} < 3^a$. Tabulka bude vypadat následovně:

I	$I_1 = (-\infty, 0)$	$I_2 = (0, 3^{1-a})$	$I_3 = (3^{1-a}, 3^a)$	$I_4 = (3^a, \infty)$
znaménko	–	+	–	+

Pro $a > \frac{1}{2}$ je tedy $K = (-\infty, 0) \cup \langle 3^{1-a}, 3^a \rangle$.

Všechna řešení napíšeme do finální tabulky.

a	K
$(-\infty, \frac{1}{2})$	$(-\infty, 0) \cup \langle 3^a, 3^{1-a} \rangle$
$\{\frac{1}{2}\}$	$(-\infty, 0) \cup \{\sqrt{3}\}$
$(\frac{1}{2}, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup \langle 3^{1-a}, 3^a \rangle$

2.3 Soustavy rovnic a nerovnic s parametry

Podkapitola se zaměřuje na soustavy rovnic a nerovnic, v nichž vystupují reálné parametry. Tato oblast je typická kombinací algebry a logické analýzy, často s důrazem na geometrii (té je v této práci věnována samostatná kapitola), množinové vztahy a speciální podmínky řešitelnosti. Parametr v soustavě neovlivňuje jen konkrétní počet řešení, ale často i jejich existenci, strukturu nebo vzájemnou závislost. Práce s těmito typy úloh přispívá k rozvoji schopnosti formulovat podmínky na existenci řešení a rozlišovat různé významové roviny matematického zadání – od algebraických úprav po interpretaci výsledků.

V této podkapitole je zařazeno šest příkladů. Příklad 3.1 ukazuje, jak lze pouhou úvahou určit hodnoty parametru, pro něž má soustava dvou nerovnic společné řešení. V příkladu 3.2 řešíme soustavu se dvěma proměnnými, kde parametr ovlivňuje počet i tvar řešení, a odhalujeme zvláštní případy. Příklad 3.3 se zabývá podmínkami neřešitelnosti kvadratické soustavy, přičemž analýza probíhá přes substituci a diskriminant. Zároveň autor nabízí alternativní, geometrické řešení úlohy. V příkladu 3.4 hledáme parametry, pro něž mají dvě různé soustavy rovnic shodnou množinu řešení. Příklad 3.5 propojuje kvadratickou rovnici s logaritmickou rovnicí a ukazuje důležitost práce s definičním oborem. Na závěr, příklad 3.6 představuje soustavu rovnic, která svým zadáním může působit až hrozivě – rovnice s rostoucími mocninami a obecný počet neznámých. Přesto má tato úloha překvapivě elegantní řešení, které ukazuje, jak může být zdánlivě složitá struktura ve skutečnosti důsledkem jednoduché a krásné myšlenky.

Příklad 3.1. Určete, pro které hodnoty reálného parametru a je aspoň jedno řešení nerovnice $2x - 3 > a$ rovněž řešením nerovnice $x - a < 3$.

Řešení:

Nerovnice $2x - 3 > a$ upravená do tvaru $x > \frac{a+3}{2}$ má za množinu řešení interval

$$K_1 = \left(\frac{a+3}{2}, \infty \right).$$

Nerovnice $x - a < 3$ upravená do tvaru $x < a + 3$ má za množinu řešení interval

$$K_2 = (-\infty, a + 3).$$

Intervaly K_1 a K_2 mají neprázdný průnik, právě když

$$\frac{a+3}{2} < a + 3,$$

tj. právě tehdy, když $a + 3 > 0$, neboli $a > -3$. Hledaná a tedy tvoří interval $(-3, \infty)$.

Příklad 3.2. Řešte soustavu s neznámými x, y (kde $a \neq 0$ je reálný parametr):

$$\text{I. } \frac{x}{a} + ay = a$$

$$\text{II. } ax + \frac{y}{a} = 1$$

Řešení:

Jelikož ze zadání víme, že $a \neq 0$, můžeme obě rovnice ekvivalentně vynásobit číslem a :

$$\text{I. } x + a^2y = a^2$$

$$\text{II. } a^2x + y = a$$

Z rovnice II. vyjádříme $y = a - a^2x$ a dosadíme do I.

$$\text{I. } x + a^2(a - a^2x) = a^2$$

$$x + a^3 - a^4x = a^2$$

$$x(1 - a^4) = a^2 - a^3$$

$$x(1 - a)(1 + a)(1 + a^2) = a^2(1 - a)$$

Nyní rozlišíme různé případy parametru $a \neq 0$.

I. $a = 1$

Po dosazení do rovnic I. a II. vychází

$$\text{I. } x + y = 1$$

$$\text{II. } x + y = 1$$

Lze vyjádřit $y = 1 - x$, tudíž pro každé $x \in \mathbb{R}$ dostáváme řešení v podobě uspořádané dvojice $(x, 1 - x)$, tedy $K = \{(x, 1 - x), x \in \mathbb{R}\}$.

II. $a = -1$

Po dosazení dostáváme

$$\text{I. } -x - y = -1$$

$$\text{II. } -x - y = 1$$

což není možné, tedy v tomto případě platí $K = \emptyset$.

III. $a \neq -1 \wedge a \neq 1$

Můžeme vydělit výrazem $(1-a)(1+a)(1+a^2)$ a dostáváme

$$x = \frac{a^2(1-a)}{(1-a)(1+a)(1+a^2)} = \frac{a^2}{(1+a)(1+a^2)}$$

Nyní můžeme dopočítat neznámou y :

$$y = a - a^2x = a - a^2 \frac{a^2}{1+a+a^2+a^3} = a - \frac{a^4}{1+a+a^2+a^3} =$$

$$= \frac{a+a^2+a^3+a^4-a^4}{1+a+a^2+a^3} = \frac{a(1+a+a^2)}{(1+a)(1+a^2)}$$

Řešením tedy bude jediná uspořádané dvojice tvaru $(x, y) = \left(\frac{a^2}{(1+a)(1+a^2)}, \frac{a(1+a+a^2)}{(1+a)(1+a^2)} \right)$.

Všechna řešení zapíšeme do tabulky:

a	K
$\{-1\}$	$\emptyset$
$\{1\}$	$\{(x, 1-x), x \in \mathbb{R}\}$
$\mathbb{R} - \{0, \pm 1\}$	$\left\{ \left(\frac{a^2}{(1+a)(1+a^2)}, \frac{a(1+a+a^2)}{(1+a)(1+a^2)} \right) \right\}$

Příklad 3.3. Určete všechny hodnoty reálného parametru a , při kterých soustava rovnic

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 4 \\ xy &= a\end{aligned}$$

nemá řešení.

Řešení:

$$\boxed{\text{I. } a = 0}$$

Pro takové $a = 0$ máme jednoduchou soustavu

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 4 \\ xy &= 0\end{aligned}$$

Ta má například řešení $x = 0$ a $y = 2$. Tedy hodnota $a = 0$ mezi hledané nepatří.

$$\boxed{\text{II. } a \neq 0}$$

Předpokládejme nyní, že $a \neq 0$. Pak z rovnice $xy = a$ nutně $x, y \neq 0$. Vyjádřeme si například neznámou $x = \frac{a}{y}$. Tu dosadíme do první rovnice:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 = 4 &\Rightarrow \left(\frac{a}{y}\right)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \frac{a^2 + y^4}{y^2} = 4 & \left| \cdot y^2 \quad [y \neq 0] \right. \\ & a^2 + y^4 = 4y^2 \\ & y^4 - 4y^2 + a^2 = 0\end{aligned}$$

Dostáváme rovnici čtvrtého stupně, která však obsahuje pouze kvartický, kvadratický a absolutní člen. To snadno navádí na substituci $z = y^2$, po jejímž zavedení dostaneme rovnici kvadratickou:

$$z^2 - 4z + a^2 = 0$$

Spočítáme, pro jaké hodnoty parametru a má rovnice reálné řešení, tedy hledáme, kdy je diskriminant této rovnice nezáporný.

$$\begin{aligned}D = 16 - 4a^2 &\geq 0 \\ 4 - a^2 &\geq 0 \\ (2 - a)(2 + a) &\geq 0\end{aligned} \tag{3.1}$$

Vidíme, že substituovaná kvadratická rovnice (3.1) má kořeny $z_{1,2}$ právě pro $a \in \langle -2, 2 \rangle$. Proto taková a z Viètova vzorce $z_1 + z_2 = 4$ při označení $z_1 \geq z_2$ plyne $z_1 > 0$, takže původní soustava bude mít například řešení $y = \sqrt{z_1}$ a $x = \frac{a}{\sqrt{z_1}}$. Zadaná soustava nemá řešení právě pro $a \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

Poznámka: Tato úloha je dobře interpretovatelná geometricky. Zatímco první rovnice reprezentuje Pythagorovu větu pravoúhlého trojúhelníka s přeponou délky 2 (bereme v potaz také "nekorektní" možnost, kdy jedna z odvěsen je délky 0 a druhá 2), druhá hledá možné obsahy obdélníka z daných odvěsen. Nesmíme však zapomenout na možná záporná znaménka hodnot x , y a a .

Příklad 3.4. Určete, pro které hodnoty reálných parametrů a, b mají obě soustavy rovnic

$$\begin{array}{l} \text{I)} \quad ax + 2y = b + 1 \\ \quad \quad x + y = 3 \\ \text{II)} \quad 2x + y = a^2 + 2 \\ \quad \quad x + 3y = 3 \end{array}$$

stejně množiny řešení.

Řešení:

Vyřešíme zvlášť obě soustavy. Množinu řešení I) označme K_I , množinu řešení II) označme K_{II} .

I. Soustava I)

Z druhé rovnice si vyjádříme například neznámou x a dosadíme do první rovnice:

$$\begin{aligned} x &= 3 - y \\ a(3 - y) + 2y &= b + 1 \\ 3a - ay + 2y &= b + 1 \\ y(2 - a) &= b + 1 - 3a \end{aligned}$$

Pro $a = 2$ dostáváme rovnici $0y = b + 1 - 6$, neboli $5 = b$. Pro $a = 2$ a $b \neq 5$ tedy soustava I. žádné řešení nemá. Pro $a = 2, b = 5$ je řešením každá dvojice $(x, 3 - x)$, tedy $K_I = \{(x, 3 - x), x \in \mathbb{R}\}$.

Pro $a \neq 2$ má soustava I. jediné řešení

$$y = \frac{b + 1 - 3a}{2 - a} \quad \text{a} \quad x = 3 - y = \frac{b - 5}{a - 2},$$

$$\text{tedy } K_I = \left\{ \left(\frac{b-5}{a-2}, \frac{b+1-3a}{2-a} \right) \right\}.$$

II. Soustava II)

Také z druhé rovnice vyjádříme x a dosadíme do první rovnice:

$$\begin{aligned} x &= 3 - 3y \\ 2(3 - 3y) + y &= a^2 + 2 \\ 6 - 6y + y &= a^2 + 2 \\ -5y &= a^2 - 4 \\ y &= \frac{a^2 - 4}{-5} = \frac{4 - a^2}{5} \end{aligned}$$

Zpětně dosadíme a dopočítáme x :

$$x = 3 - 3y = 3 - 3 \frac{4 - a^2}{5} = \frac{15 - 12 + 3a^2}{5} = \frac{3 + 3a^2}{5}$$

Pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ je řešením jediná určená dvojice, tedy $K_{II} = \{(\frac{3+3a^2}{5}, \frac{4-a^2}{5})\}$. Nyní stačí porovnat dvojice z množin K_I a K_{II} . Pokud totiž existují taková a a b , pro která se dvojice z množin K_I a K_{II} rovnají, pak mají skutečně výše zmíněné soustavy stejné množiny řešení. Vzniká nám takto soustava dvou rovnic o dvou neznámých.

$$\begin{array}{rcl}
 x: & \frac{b-5}{a-2} = \frac{3+3a^2}{5} & / \cdot 5(a-2) \\
 y: & \frac{3a-b-1}{a-2} = \frac{4-a^2}{5} & / \cdot 5(a-2) \\
 \hline
 x: & 5(b-5) = (3a^2+3)(a-2) & \\
 y: & 5(3a-b-1) = (4-a^2)(a-2) & \\
 \hline
 x: & 5b-25 = 3a^3-6a^2+3a-6 & \\
 y: & 15a-5b-5 = 4a-8-a^3+2a^2 & \\
 \hline
 x: & 5b-19 = 3a^3-6a^2+3a & \\
 y: & -5b+3 = -a^3+2a^2-11a & \\
 \hline
 x+y: & -16 = 2a^3-4a^2-8a & \\
 & 0 = a^3-2a^2-4a+8 & \\
 & 0 = a(a^2-4)-2(a^2-4) & \\
 & 0 = (a^2-4)(a-2) &
 \end{array}$$

Kořeny získané rovnice jsou $a = \pm 2$. Kořen $a = 2$ jsme již dříve vyřadili, neboť soustava II) má vždy jednoprvkovou množinu řešení, zatímco soustava I) má pro $a = 2$ řešením každou dvojici $(x, 3-x)$. Protože je sčítání rovnic pouze důsledkovou úpravou, je nutné pro kořen $a = -2$ provést zkoušku :

$$\begin{array}{l}
 \frac{b-5}{-2-2} = \frac{3+12}{5} \\
 5(b-5) = -60 \\
 b-5 = -12 \\
 b = -7
 \end{array}$$

Dosadíme do druhé rovnice ($a = -2$ a $b = -7$):

$$\begin{array}{l}
 \frac{3a-b-1}{a-2} = \frac{-6+7-1}{-4} = 0 \\
 \frac{4-a^2}{5} = \frac{4-4}{0} = 0
 \end{array}$$

Závěr:

Soustavy mají stejnou množinu řešení, právě když platí $a = -2 \wedge b = -7$.

Příklad 3.5. Řešte soustavu rovnic s reálným parametrem a :

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & (x-a)^2 = 8(y-x+a-2) \\ \text{II.} \quad & \frac{1-\log_2 y}{1-\log_2 x} = 1. \end{aligned}$$

Řešení:

Nejdříve se zaměříme na druhou rovnici a její podmínky řešitelnosti:

$$\frac{1-\log_2 y}{1-\log_2 x} = 1 \implies 1-\log_2 x \neq 0 \implies \log_2 x \neq 1 \implies x \neq 2$$

Z podmínek pro argument logaritmu rovněž máme $x > 0$, celkem tedy $x > 0 \wedge x \neq 2$. Zároveň, podíl v druhé rovnici je roven jedné právě tehdy, když jsou si číselník a jmenovatel rovny. Tedy nutně musí být $1-\log_2 y = 1-\log_2 x$, odkud $x = y$. Celkem máme tedy tři podmínky, a to $x > 0 \wedge x \neq 2 \wedge x = y$. Tím je automaticky splněna podmínka pro argument logaritmu v čitateli.

Soustavu řešíme pomocí substituce $y = x$. Dosadíme do první rovnice a dostaneme:

$$\begin{aligned} (x-a)^2 &= 8(x-x+a-2) \\ x^2 - 2ax + a^2 &= 8a - 16 \\ x^2 - 2ax + a^2 - 8a + 16 &= 0 \end{aligned}$$

Danou kvadratickou rovnici řešíme přes diskriminant:

$$D = 4a^2 - 4(a^2 - 8a + 16) = 4a^2 - 4a^2 + 32a - 64 = 32a - 64 \geq 0, \text{ tedy } a \geq 2$$

$$x_{1,2} = \frac{2a \pm 4\sqrt{2a-4}}{2} = a \pm 2\sqrt{2a-4}$$

Dosazením původní proměnné dostáváme $x = y = a \pm 2\sqrt{2a-4}$. Pro $a = 2$ bude $x = y = 2$, což nelze, tedy vyplývá, že $a \in (2, \infty)$. Pro taková a ještě musíme posoudit splnění určených podmínek $x > 0$ a $x \neq 2$.

Užitím podmínky $x > 0$ dostáváme dvě nerovnice:

$$x_1 = a + 2\sqrt{2a-4} > 0 \quad \text{a} \quad x_2 = a - 2\sqrt{2a-4} > 0.$$

Jelikož platí $\sqrt{2a-4} \geq 0$ pro $a \geq 2$ a z předchozí podmínky víme, že parametr a je v tuto chvíli už jen z intervalu $(2, \infty)$, bude nerovnice $x_1 > 0$ platit vždy. Nyní posoudíme nerovnici $x_2 > 0$:

$$\begin{aligned} a - 2\sqrt{2a-4} &> 0 \\ a &> 2\sqrt{2a-4} & \quad |^2 \quad [a > 2] \\ a^2 &> 8a - 16 \\ a^2 - 8a + 16 &> 0 \\ (a-4)^2 &> 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Nerovnice (3.2) je splněna pro $a \neq 4$, tedy pro $a = 4$ připadá v úvahu pouze kořen x_1 .

Zbývá zjistit, pro která $a \geq 2$ vyjdou zakázané hodnoty $x_1 = 2$, resp. $x_2 = 2$:

$$x_1 = a + 2\sqrt{2a-4} = 2 \quad \text{a} \quad x_2 = a - 2\sqrt{2a-4} = 2$$

Pro x_1 dostáváme rovnici

$$a - 2 = -2\sqrt{2a-4}$$

s jediným řešením $a = 2$, neboť $a - 2 \geq 0$ a $-2\sqrt{2a-4} \leq 0$. Kořen $x_1 = 2$ je tedy vyloučen pro $a = 2$.

Rovnici pro x_2 vyřešíme ekvivalentními úpravami:

$$\begin{aligned} a - 2 &= 2\sqrt{2a-4} & |^2 & [a > 2] \\ 4 - 4a + a^2 &= 8a - 16 \\ a^2 - 12a + 20 &= 0 \\ (a - 10)(a - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Řešením rovnice $x_2 = 2$ jsou hodnoty $a = 2$ a $a = 10$, tedy pro $a = 10$ bude řešením úlohy také pouze kořen x_1 .

Shrneme poznatky z předchozích výpočtů. Úloha pro $a \in (-\infty, 2)$ nemá řešení. Pro $a \in (2, \infty)$ jsme zjistili, že pro $a = 4$ a $a = 10$ nevyhovuje kořen x_2 , tedy úloha bude mít pouze jedno řešení, a to $y = x = x_1$. Pro ostatní hodnoty tohoto intervalu má pak úloha řešení dvě, a to $y = x = x_{1,2}$.

Všechna řešení sepíšeme do tabulky:

a	K
$(-\infty, 2)$	$\emptyset$
$\{4, 10\}$	$x = y \in \{a + 2\sqrt{2a-4}\}$
$(2, 4) \cup (4, 10) \cup (10, \infty)$	$x = y \in \{a \pm 2\sqrt{2a-4}\}$

Příklad 3.6. Řešte soustavu rovnic s reálným parametrem a :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a \\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = a^2 \\ \vdots \\ x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n = a^n, \quad \text{kde } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Řešení:

Dokážeme, že množina všech řešení této soustavy je množina všech n -tic, v nichž právě jedna složka je rovna a a ostatní jsou nulové.

Předpokládejme, že $(x_1, \dots, x_n)$ je řešením této soustavy. Pro libovolné $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ určitě bude vyhovovat každé řešení tvaru

$$x_i = a, \quad x_1 = \cdots = x_{i-1} = x_{i+1} = \cdots = x_n = 0.$$

Nyní dokážeme, že zadaná soustava žádné další řešení nemá.

1) Pro $n = 1$ dostáváme zřejmě jediné řešení $x_1 = a$.

2) Pro $n = 2$ je soustava ve tvaru

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a, \\ x_1^2 + x_2^2 = a^2, \end{cases}$$

z čehož plyne podmínka

$$(x_1 + x_2)^2 - (x_1^2 + x_2^2) = 2x_1x_2 = 0.$$

Odsud plyne, že jedno z čísel x_1, x_2 se rovná nule, takže podle $x_1 + x_2 = a$ je druhé z nich rovno a .

3) Pro $n \geq 3$ se zaměříme pouze na druhý a třetí řádek soustavy. Ty budou vypadat takto:

$$\begin{cases} x_1^2 + \cdots + x_n^2 = a^2, \\ x_1^3 + \cdots + x_n^3 = a^3. \end{cases}$$

Pokud $a = 0$, musí také $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Pokud $a \neq 0$, vydělíme členem s parametrem a dostaneme $(x_1/a)^2 + \cdots + (x_n/a)^2 = 1$, odkud zřejmě pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí $|x_i/a| \leq 1$, navíc také $(x_i/a)^3 \leq (x_i/a)^2$. Tedy

$$1 = \sum_{i=1}^n (x_i/a)^3 \leq \sum_{i=1}^n (x_i/a)^2 = 1,$$

tudíž pro každé i platí rovnost

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_i}{a}\right)^3 &= \left(\frac{x_i}{a}\right)^2 \\ \left(\frac{x_i}{a}\right)^3 - \left(\frac{x_i}{a}\right)^2 &= 0 \\ \left(\frac{x_i}{a}\right)^2 \left(\frac{x_i}{a} - 1\right) &= 0, \end{aligned}$$

což znamená, že pro každé i platí buď $x_i = 0$ nebo $x_i = a$. Odtud už plyne, že právě jedno x_i je rovno a a ostatní x_i jsou rovna nule.

Celkem dostáváme n různých řešení takových, kdy pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí

$$x_i = a, \quad x_1 = \dots = x_{i-1} = x_{i+1} = \dots = x_n = 0,$$

tedy právě jedna složka je rovna a , ostatní jsou nulové.

2.4 Grafické řešení rovnic

Grafické řešení rovnic a nerovnic s parametry umožňuje žákům chápat rovnice nejen jako symbolické zápisy, ale jako objekty s geometrickým významem. V této podkapitole je důraz kladen na porozumění vzájemné poloze grafů funkcí a na schopnost vyjádřit množinu řešení jako množinu průsečíků. Tato metoda je obzvlášť cenná v případech, kdy algebraická řešení vedou ke složité případové analýze, zatímco grafické znázornění odhalí strukturu problému rychle a názorně. Žáci se tak učí propojit analytické a vizuální myšlení, což je dovednost ceněná i v soutěžních úlohách.

Podkapitola obsahuje tři úlohy. Příklad 4.1 porovnává dvě funkce s absolutními hodnotami a sleduje jejich průsečíky v závislosti na posunu jednoho z grafů, přičemž výsledkem je množina řešení odhadnutelná přímo z obrázku. V příkladu 4.2 se pracuje s funkcí danou předpisem s odmocninou, jejíž graf mění svůj tvar podle hodnoty parametru; řešení spočívá v určování počtu průsečíků s přímkou. Příklad 4.3 se zaměřuje na graf funkce obsahující součin proměnné s absolutní hodnotou lineárního výrazu – podle hodnoty parametru se pak mění počet řešení, což vede ke krásné a systematické klasifikaci jednotlivých případů.

Příklad 4.1. Rovnici $|x - p| = |x| - 1$ s reálným parametrem p řešte grafickou metodou.

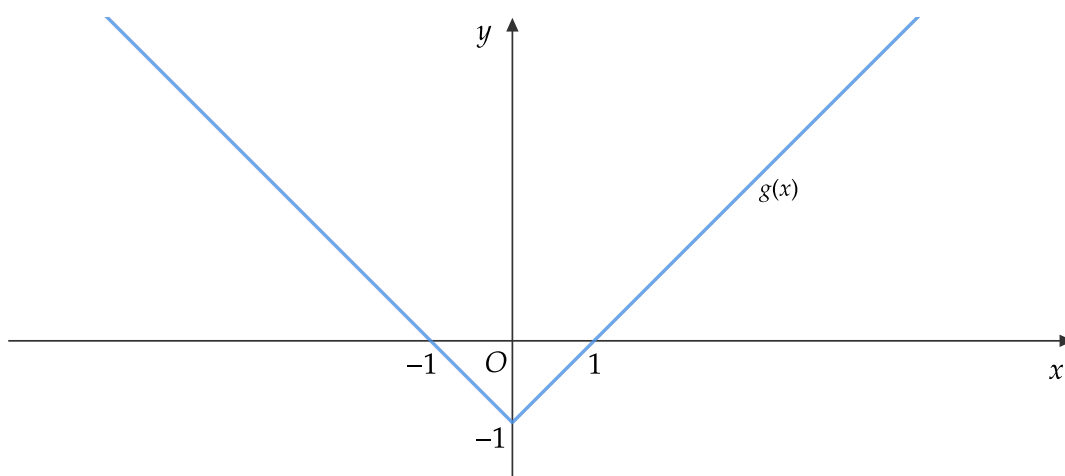
Řešení:

Obor pravdivosti K zadané rovnice, který bude záviset na parametru $p \in \mathbb{R}$, určíme jako množinu x -ových souřadnic všech společných bodů grafů dvou funkcí

$$f : y = |x - p|$$

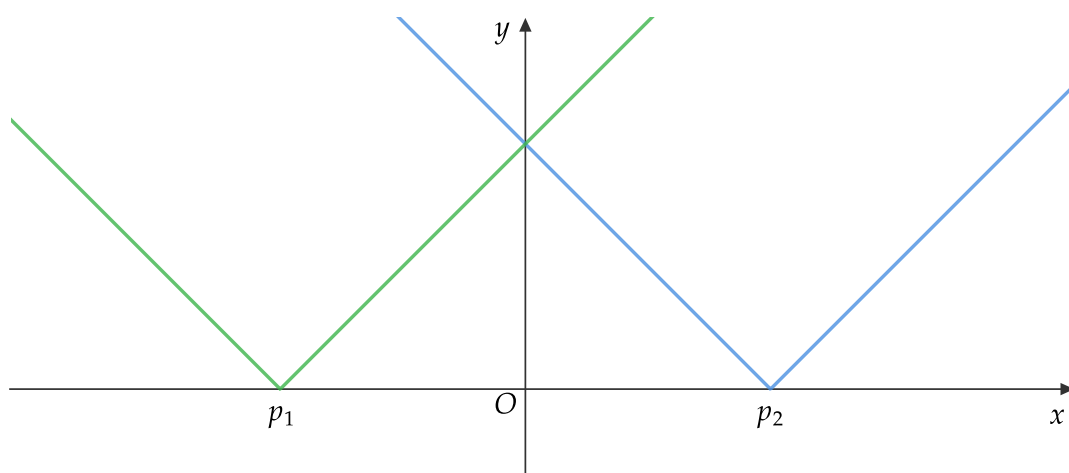
$$g : y = |x| - 1$$

Nejprve načrtneme graf G funkce g , která na parametru p nezávisí. Graf je tvořen dvěma polopřímkami se společným počátkem $[0, -1]$, které protínají osu x pod úhlem 45° .



Obrázek 2.11: Graf G

Graf F funkce f dostaneme posunutím grafu G , při kterém počátek $[0, -1]$ obou polopřímek přejde do bodu $[p, 0]$. Načrtněme dva případy grafu F : graf F_1 pro $p = p_1 < 0$ a graf F_2 pro $p = p_2 > 0$:

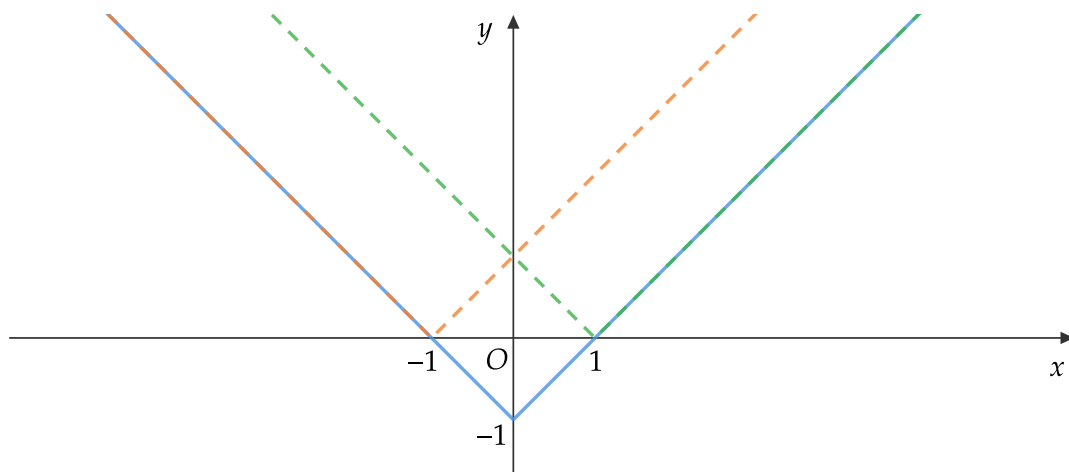


Obrázek 2.12: Grafy F_1 pro $p = p_1 < 0$ a graf F_2 pro $p = p_2 > 0$

Nyní si rozmyslíme, jaká bude vzájemná poloha grafu G a grafů F pro různé skupiny hodnot parametru p .

I. $p = -1$ a $p = 1$

Pro $p = -1$ a $p = 1$ budou mít grafy F a G nekonečně mnoho společných bodů, které vyplní celé levé, respektive pravé rameno grafu F :

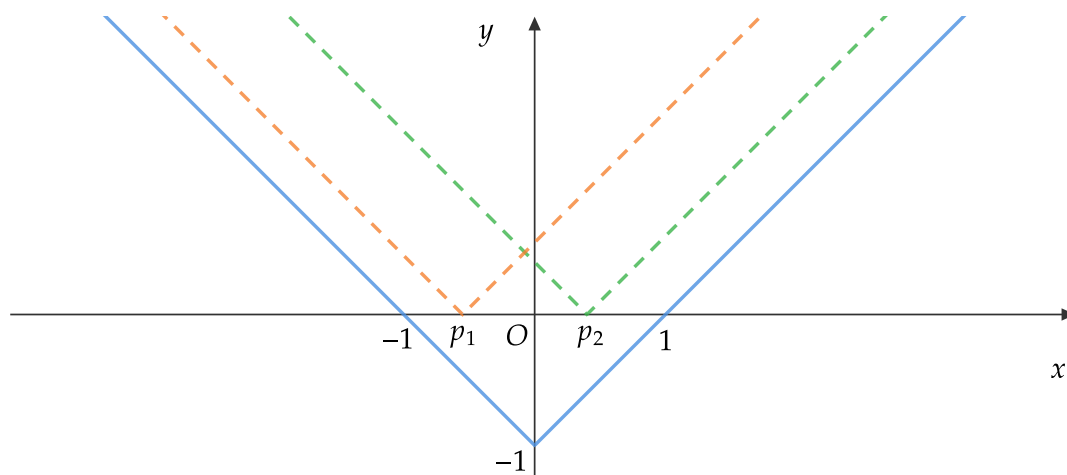


Obrázek 2.13: Průnikem grafů je celé levé rameno F_1 , respektive pravé rameno F_2 .

Vidíme, že $K = (-\infty, -1)$ pro $p = -1$ a $K = (1, \infty)$ pro $p = 1$.

II. $p \in (-1, 1)$

Pro žádné $p \in (-1, 1)$ se grafy F a G neprotínají:

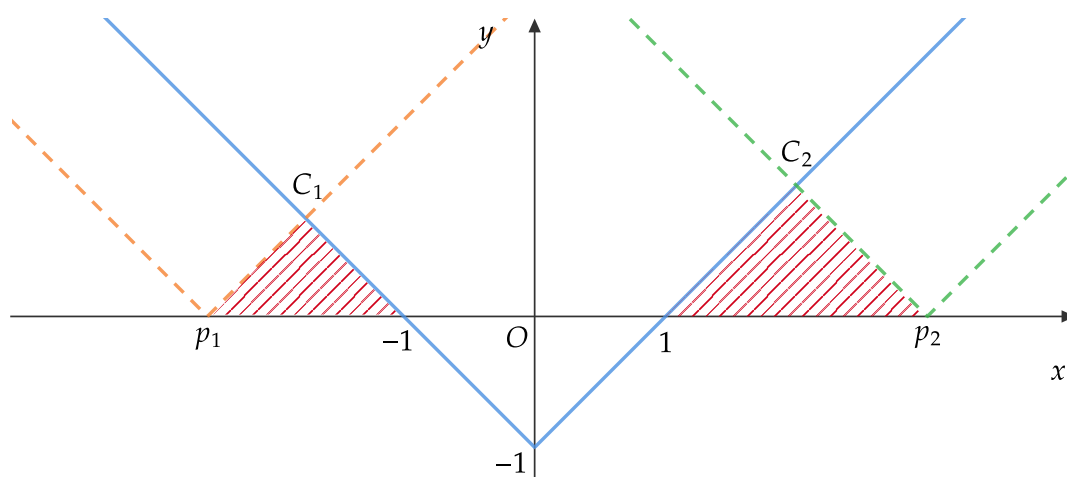


Obrázek 2.14: Průnikem grafů je prázdná množina.

Platí tedy $K = \emptyset$ pro každé $p \in (-1, 1)$.

III. $p \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

Pro každé $p \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ budou mít grafy F a G jediný průsečík, který označíme C_1 , respektive C_2 jako na obrázku:



Obrázek 2.15: Průniky grafů pro $p \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

Protože oba vyšrafované trojúhelníky jsou rovnoramenné, je hledaná x -ová souřadnice bodu C_1 rovna aritmetickému průměru čísel p_1 a -1 . Obdobně u čísla C_2 půjde o aritmetický průměr čísel 1 a p_2 .

Platí tedy $K = \left\{\frac{p-1}{2}\right\}$ pro $p < 1$ a $K = \left\{\frac{p+1}{2}\right\}$ pro $p > 1$.

Všechna řešení nakonec zaznamenejme do tabulky.

a	K
$(-\infty, 1)$	$\left\{\frac{p-1}{2}\right\}$
$\{-1\}$	$(-\infty, -1)$
$(-1, 1)$	$\emptyset$
$\{1\}$	$\langle 1, \infty$
$(1, \infty)$	$\left\{\frac{p+1}{2}\right\}$

Příklad 4.2. Graficky určete všechny hodnoty reálného parametru a , pro které má rovnice

$$x + \sqrt{x(a-x)} = 1$$

aspoň jedno řešení.

Řešení:

Začněme nejjednodušším případem, kdy $a = 0$. Tehdy rovnice vypadá následovně:

$$x + \sqrt{-x^2} = 1$$

Výraz $\sqrt{-x^2}$ je definován pouze pro $x = 0$. Pokud však do zapsané rovnice dosadíme $x = 0$, dostáváme $0 + 0 = 1$. Pro $a = 0$ tak zadaná rovnice nemá řešení.

Zabývejme se dále případy, kdy $a \neq 0$. Tehdy původní rovnici přepíšeme do tvaru

$$\sqrt{x(a-x)} = 1 - x.$$

Počet řešení takové rovnice určíme jako počet průsečíků grafu funkce $f : y = \sqrt{x(a-x)}$ s přímkou o rovnici $y = 1 - x$.

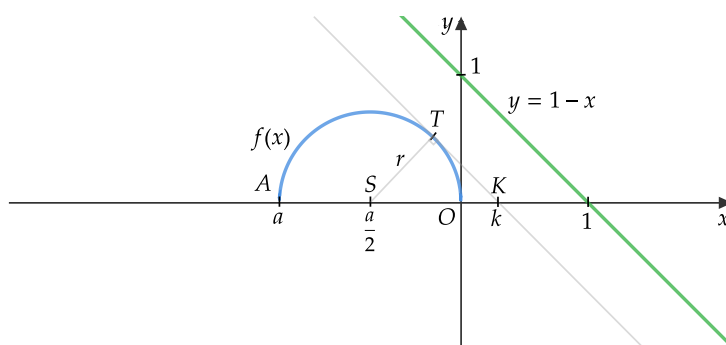
Graf funkce f zřejmě leží v polorovině určené nerovností $y \geq 0$. Je-li splněna, můžeme rovnost $y = \sqrt{x(a-x)}$ ekvivalentně umocnit a dále upravit:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x(a-x)} & |^2 \\ y^2 &= ax - x^2 \\ x^2 - ax + y^2 &= 0 \\ \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Poslední rovnice je rovnice kružnice se středem $S[\frac{a}{2}, 0]$ a poloměrem $r = \frac{|a|}{2}$, která zřejmě prochází bodem $A[a, 0]$ a počátkem $O[0, 0]$. Docházíme tak k závěru, že grafem funkce $f(x)$ je část této kružnice, která leží v polorovině $y \geq 0$, tedy polokružnice s krajními body A a O . Pro vykreslení této polokružnice bude vhodné rozlišit případy $a < 0$ a $a > 0$.

I. $a < 0$

Jednu z možných vzájemných poloh grafu funkce $f(x)$ a přímky $y = 1 - x$ znázorníme na obrázku:

Obrázek 2.16: Graf funkce $f(x)$ v případě $a < 0$.

Do obrázku jsme přikreslili tečnu TK ke grafu funkce $f(x)$ s bodem dotyku T , která je rovnoběžná s přímkou $y = 1 - x$, takže má stejnou směrnici rovnou -1 . Pro přeponu SK pravouhlého rovnoramenného trojúhelníku SKT tak platí $|SK| = r\sqrt{2}$. Jelikož s ohledem na $a < 0$ platí $r = \frac{-a}{2}$, pro kladnou souřadnici k bodu $K[k, 0]$ dostáváme vyjádření

$$k = x_S + |SK| = \frac{a}{2} - a \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a(1 - \sqrt{2})}{2}.$$

Z obrázku vidíme, že přímka $y = 1 - x$ bude mít s grafem funkce $f(x)$ aspoň jeden společný bod, právě když bude platit $1 \leq k$. Zbývá zjistit, pro která $a < 0$ odvozená nerovnost platí:

$$\begin{aligned} 1 &\leq k \\ 1 &\leq \frac{a(1 - \sqrt{2})}{2} \quad \Big| \cdot \frac{2}{1 - \sqrt{2}} < 0 \\ \frac{2}{1 - \sqrt{2}} &\geq a \end{aligned}$$

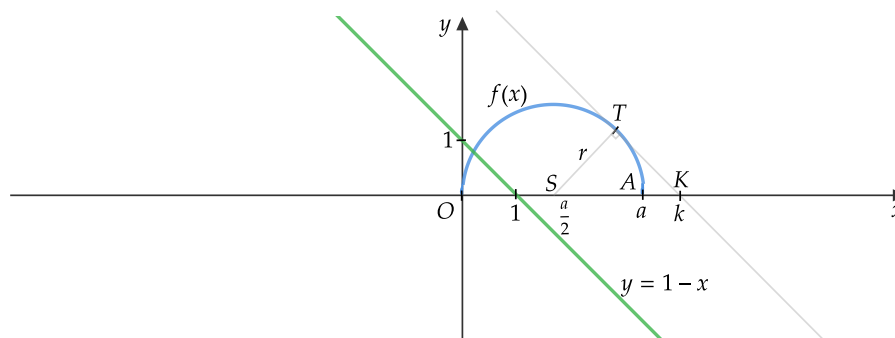
Záporný výraz na levé straně poslední rovnice zjednodušíme:

$$\frac{2}{1 - \sqrt{2}} = \frac{2(1 + \sqrt{2})}{(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})} = \frac{2(1 + \sqrt{2})}{-1} = -2 - 2\sqrt{2}$$

Závěr I.: Hledané záporné hodnoty a tvoří interval $(-\infty, -2 - 2\sqrt{2})$.

II. $a > 0$

Budeme postupovat obdobně jako v případě I.



Obrázek 2.17: Graf funkce $f(x)$ v případě $a < 0$.

Opět platí $|SK| = r\sqrt{2}$, tentokrát ovšem $r = \frac{a}{2}$, a proto

$$k = x_S + |SK| = \frac{a}{2} + a \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a(1 + \sqrt{2})}{2}.$$

Z obrázku je patrné, že přímka $y = 1 - x$ a graf funkce $f(x)$ mají aspoň jeden společný bod, právě když platí nerovnost $1 \leq k$:

$$\begin{aligned} 1 &\leq k \\ 1 &\leq \frac{a(1 + \sqrt{2})}{2} \quad \Big| \cdot \frac{2}{1 + \sqrt{2}} > 0 \\ \frac{2}{1 + \sqrt{2}} &\leq a \end{aligned}$$

Upravíme výraz na levé straně:

$$\frac{2}{1 + \sqrt{2}} = \frac{2(1 - \sqrt{2})}{(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})} = \frac{2(1 - \sqrt{2})}{-1} = -2 + 2\sqrt{2}$$

Závěr II.: Hledané kladné hodnoty a tvoří interval $\langle -2 + 2\sqrt{2}, \infty \rangle$.

Celkový závěr: Hodnoty parametru a , které splňují podmínku ze zadání příkladu, tvoří množinu $(-\infty, -2 - 2\sqrt{2}) \cup \langle -2 + 2\sqrt{2}, \infty \rangle$.

Příklad 4.3. V závislosti na hodnotě reálného parametru a určete graficky počet řešení rovnice

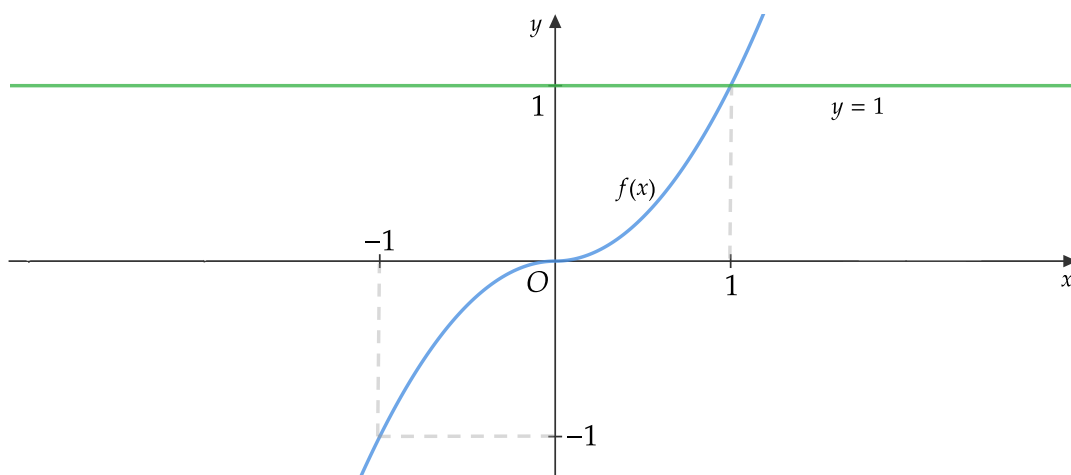
$$x|x - 2a| = a + 1.$$

Řešení:

Hledané počty řešení určíme jako počty průsečíků grafu funkce $f(x) = x|x - 2a|$ s přímkou o rovnici $y = a + 1$. S ohledem na předpis pro funkci $f(x)$ rozlišíme případy $a = 0$, $a < 0$ a $a > 1$.

I. $a = 0$

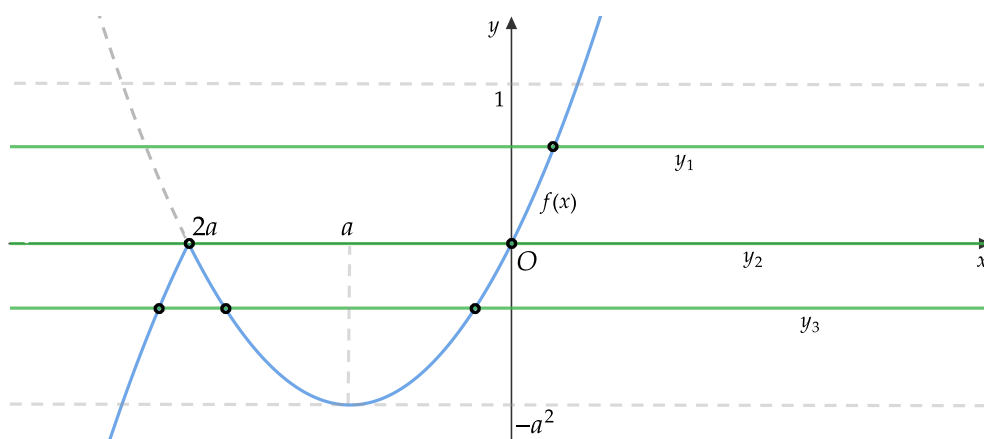
V tomto případě jde o funkci $f(x) = x|x|$ a přímku $y = 1$. Vidíme, že zadaná rovnice $x|x| = 1$ má jediné řešení $x = 1$.



Obrázek 2.18: Příklad $a = 0$.

II. $a < 0$

Uvědomíme si, že pro $x \geq 2a$ platí $f(x) = x^2 - 2ax$, zatímco pro $x < 2a$ platí $f(x) = -(x^2 - 2ax)$. Podle toho sestojíme graf funkce $f(x)$. Kromě toho si povšimneme, že vždy platí $a^2 + a + 1 > 0$, a tak pro hodnotu $a + 1$ z rovnice přímky $y = a + 1$ máme s ohledem na $a < 0$ odhady $-a^2 < a + 1 < 1$. Proto rozlišíme tři možné polohy přímky $y = a + 1$, a to podle toho, zda $-a^2 < a + 1 < 0$, nebo $a + 1 = 0$, nebo $0 < a + 1 < 1$.

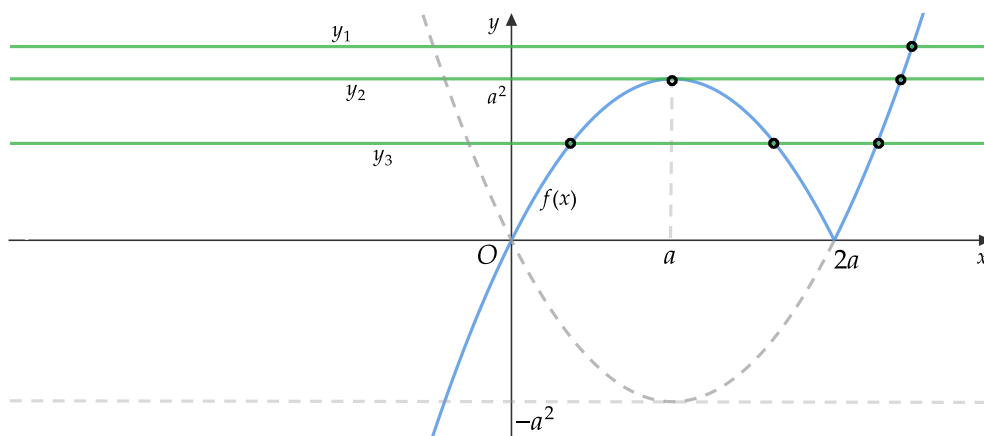
Obrázek 2.19: Příklad $a < 0$.

Vidíme, že platí tyto tři závěry: Zadaná rovnice má

- 3 řešení (přímka y_3), pokud $-a^2 < a + 1 < 0$, tj. $a \in (-\infty, -1)$,
- 2 řešení (přímka y_2), pokud $a + 1 = 0$, tj. $a = -1$,
- 1 řešení (přímka y_1), pokud $0 < a + 1 < 1$, tj. $a \in (-1, 0)$.

III. $a > 0$

I zde platí $f(x) = x^2 - 2ax$ pro $x \geq 2a$ a $f(x) = -(x^2 - 2ax)$ pro $x < 2a$. Pro hodnotu $a + 1$ z pravé strany rovnice přímky $y = a + 1$ víme jen to, že s ohledem na $a > 0$ platí $a + 1 > 1$. Naší úlohou bude dále určit, pro které hodnoty a má přímka $y = a + 1$ jeden ze tří možných poloh z obrázku.

Obrázek 2.20: Příklad $a > 0$.

Tentokrát platí tyto tři závěry: Zadaná rovnice má

- 3 řešení (přímka y_3), pokud $1 < a + 1 < a^2$,
- 2 řešení (přímka y_2), pokud $1 < a + 1 = a^2$,
- 1 řešení (přímka y_1), pokud $a + 1 > a^2$.

Rovnice $a + 1 = a^2$ má jen jediný kladný kořen $a_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Odtud úvahou o nerovnosti mezi čísly $a + 1$ a a^2 dostáváme, že 3 řešení budou existovat pro $a \in (a_0, \infty)$, 2 řešení pro $a = a_0$ a jedno řešení pro $a \in (0, a_0)$.

Získané výsledky shrneme do jedné tabulky, přitom závěry o jednom řešení ze tří případů I, II, III shrneme do jednoho řádku: $a \in \{0\} \cup (-1, 0) \cup (0, a_0) = (-1, a_0)$.

a	Počet řešení
$(-\infty, -1)$	3
-1	2
$(-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$	1
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	2
$(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty)$	3

2.5 Logaritmické a exponenciální rovnice a nerovnice

Logaritmické a exponenciální rovnice a nerovnice s parametry na první pohled vzbuzují respekt; základní školní intuice na ně často nestačí – a to kvůli jejich technické náročnosti a menší praktické frekvenci. O to větší je však překvapení, když se složité výrazy rozpletou díky správně zvolené substituci nebo jednoduché úpravě. Tato kapitola ukazuje, že i technicky náročné rovnice mohou mít řešení, která jsou nejen správná, ale i krásná. Úlohy v této kapitole vyžadují pečlivou práci s definičním oborem, přesné algebraické úpravy a cit pro transformace výrazů. Řešitel se učí pracovat s různými základy logaritmů, vnímat jemné rozdíly mezi podobnými strukturami a často dospěje k překvapivě elegantnímu závěru.

V této podkapitole jsou zařazeny čtyři příklady. Příklad 5.1 ukazuje řešení nerovnice s logaritmy o různých základech a proměnnými výrazy v argumentech – důraz je kladen na správné užití vzorců s logaritmy, přesné odlogaritmování a rozbor smyslu výrazů. Příklad 5.2 pracuje se substitucí složitého zlomku v argumentech logaritmů a přechází na kvadratickou rovnici s parametrem. V příkladu 5.3 vedou úpravy exponenciální nerovnice k parametrické kvadratické nerovnici, která se řeší v omezeném oboru. Lehčí příklad 5.4 pak uzavírá tuto část úlohou se dvěma logaritmy různých základů, kde je cílem určit všechna reálná řešení dané rovnice – řešení je zde založeno na převodních vzorcích.

Příklad 5.1. Řešte nerovnici s kladným parametrem $a \neq 1$:

$$\log_a(x-a) > \log_{\frac{1}{a}}(x+a).$$

Řešení:

Podle zadané rovnice musí platit $x+a > 0$ a $x-a > 0$, aby oba logaritmy měly smysl. Obě upravené nerovnosti $x > -a$ a $x > a$ s ohledem na předpoklad $a > 0$ platí, právě když $x > a$. Danou nerovnici proto budeme řešit v oboru $x \in (a, \infty)$.

Podle známého převodního vzorce

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

můžeme v pravé straně nerovnice přejít k základu a :

$$\log_{\frac{1}{a}}(x+a) = \frac{\log_a(x+a)}{\log_a \frac{1}{a}} = \frac{\log_a(x+a)}{\log_a 1 - \log_a a} = \frac{\log_a(x+a)}{-1} = -\log_a(x+a)$$

Nově získanou pravou stranu dosadíme zpět a upravíme s využitím toho, že $\log_a 1 = 0$:

$$\begin{aligned} \log_a(x-a) &> -\log_a(x+a) \\ \log_a(x-a) + \log_a(x+a) &> 0 \\ \log_a(x^2 - a^2) &> 0 \\ \log_a(x^2 - a^2) &> \log_a 1. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Protože funkce $y = \log_a x$ je v případě $0 < a < 1$ klesající a v případě $a > 1$ rostoucí, získanou nerovnici (5.1) podle toho odlogaritmuje:

I. $a \in (0, 1)$

Nerovnice (5.1) je platná, právě když $0 < x^2 - a^2 < 1$. Poslední dvě nerovnosti splňují právě ta kladná x , pro která platí $a^2 < x^2 < 1 + a^2$, neboli $a < x < \sqrt{1 + a^2}$. Protože celý interval $(a, \sqrt{1 + a^2})$ leží v určeném oboru (a, ∞) , platí $K = (a, \sqrt{1 + a^2})$.

II. $a \in (1, \infty)$

Nerovnice (5.1) je platná, právě když $x^2 - a^2 > 1$, tedy $x^2 > 1 + a^2$. Protože výraz $1 + a^2$ je kladný a nerovnici řešíme v oboru $x \in (a, \infty)$ s kladným a , musí být i x kladné, celkově tedy $x > \sqrt{1 + a^2}$. Současně $\sqrt{1 + a^2} > a$, neboť pro $a > 0$ po umocnění dostáváme $1 + a^2 > a^2$. Tedy opět získaný interval $(\sqrt{1 + a^2}, \infty)$ leží v určeném oboru (a, ∞) , platí $K = (\sqrt{1 + a^2}, \infty)$.

Výsledky obou případů jsou natolik přehledné, že je nebudeme shrnovat do tabulky.

Příklad 5.2. Řešte rovnici s kladným parametrem a :

$$\log_5 \left(\frac{(x+1)^2}{x} - a \right) = \log_5 \left(\frac{(x+1)^2}{x} \right) - \log_5(a).$$

Řešení:

Všimněme si podobných výrazů v argumentech logaritmů. Navíc neznámá x se v rovnici nachází pouze na dvou místech, a to ve stejných zlomcích. Je možné tedy zvolit vhodnou substituci $t(x) = \frac{(x+1)^2}{x}$. Po ní obdržíme rovnici, kterou rovnou ekvivalentně upravíme:

$$\begin{aligned} \log_5(t - a) &= \log_5(t) - \log_5(a) \\ \log_5(t - a) &= \log_5\left(\frac{t}{a}\right) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Protože ze zadané podmínky $a > 0$ plyne $t - a < t$, oba logaritmy v rovnici (5.2) budou existovat, právě když bude platit $t - a > 0$, neboli

$$t \in (a, \infty). \quad (5.3)$$

Pro taková t můžeme rovnici odlogaritmovat a dále řešit rovnici

$$t - a = \frac{t}{a} \quad (5.4)$$

Je očividné, že tato rovnice nemá řešení pro $a = 1$. Totéž platí pro každé $a \in (0, 1)$, neboť kvůli nerovnostem $t - a < t < \frac{t}{a}$ je rovnost v (5.4) vyloučena. Pro každé $a \in (0, 1)$ je tak množina řešení původní rovnice prázdná.

Dále se budeme zabývat případem $a \in (1, \infty)$. Pro tento interval řešíme rovnici (5.4):

$$\begin{aligned} t - a &= \frac{t}{a} \\ at - a^2 &= t \\ at - t &= a^2 \\ t(a - 1) &= a^2 \\ t &= \frac{a^2}{a - 1} \end{aligned}$$

Skutečnost, že získaný výraz je opravdu řešením rovnice (5.2) lze dokázat snadno. Díky tomu, že $a > 1$, je nalezená hodnota t kladná (znovu to potvrzuje, že pro $a \leq 1$ původní rovnice nemá řešení – pro $a = 1$ není výraz definován, pro $a < 1$ je výraz záporný). Bude to skutečně řešení rovnice, pokud splňuje vztah (5.3), tj. $t > a$. Zdůvodníme ho užitím nerovností $0 < a - 1 < a$:

$$t = \frac{a^2}{a - 1} > \frac{a^2}{a} = a$$

Hodnotu t dosadíme do rovnosti $t = t(x)$ a rovnici pro neznámou x za předpokladu $x \neq 0$ ekvivalentně upravíme:

$$\begin{aligned} t(x) = \frac{(x+1)^2}{x} &\implies \frac{(x+1)^2}{x} = \frac{a^2}{a-1} \\ x^2 + 2x + 1 &= x \frac{a^2}{a-1} \\ x^2 + \left(2 - \frac{a^2}{a-1}\right)x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Kvadratickou rovnici vyřešíme použitím diskriminantu:

$$\begin{aligned} D &= \left(2 - \frac{a^2}{a-1}\right)^2 - 4 = 4 - 4 \cdot \frac{a^2}{a-1} + \frac{a^4}{(a-1)^2} - 4 = -\frac{4a^2}{a-1} + \frac{a^4}{(a-1)^2} = \\ &= \frac{a^4 - 4a^2(a-1)}{(a-1)^2} = \frac{a^4 - 4a^3 + 4a^2}{(a-1)^2} = \frac{a^2(a^2 - 4a + 4)}{(a-1)^2} = \frac{a^2(a-2)^2}{(a-1)^2} \end{aligned}$$

Dopočítáme reálné kořeny kvadratické rovnice:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-\frac{2a-2-a^2}{a-1} \pm \sqrt{\frac{a^2(a-2)^2}{(a-1)^2}}}{2} = \frac{-2a+2+a^2 \pm a(a-2)}{2(a-1)} \\ x_1 &= \frac{-2a+2+a^2+a^2-2a}{2(a-1)} = \frac{a^2-2a+1}{a-1} = a-1, \\ x_2 &= \frac{-2a+2+a^2-a^2+2a}{2(a-1)} = \frac{2}{2(a-1)} = \frac{1}{a-1}. \end{aligned}$$

Jelikož $a > 1$, obě hodnoty x_1, x_2 splňují potřebnou podmínku $x \neq 0$. Rovnost $x_1 = x_2$ přitom nastane, právě když $D = 0$, což splňuje jediné $a > 1$, přesněji $a = 2$, pro které $x_1 = x_2 = 1$.

Všechny výsledky shrneme do tabulky.

a	K
$(0, 1)$	$\emptyset$
$(1, 2) \cup (2, \infty)$	$\left\{a-1, \frac{1}{a-1}\right\}$
2	$\{1\}$

Příklad 5.3. Řešte nerovnici s reálným parametrem a :

$$9^{x+1} + 8a \cdot 3^x - a^2 < 0.$$

Řešení:

Nerovnice navádí na substituci $y = 3^x > 0$. Vyjádříme touto substitucí člen 9^{x+1} :

$$9^{x+1} = 9^x \cdot 9 = (3^2)^x \cdot 9 = (3^x)^2 \cdot 9 = 9y^2$$

Po dosazení substituce dostáváme nerovnici ve tvaru

$$9y^2 + 8ay - a^2 < 0. \quad (5.5)$$

Máme kvadratickou nerovnici, kterou řešíme pro $y > 0$. Nejprve spočteme diskriminant:

$$\begin{aligned} D &= (8a)^2 + 4 \cdot 9 \cdot a^2 = 64a^2 + 36a^2 = 100a^2 \geq 0. \\ y_{1,2} &= \frac{-8a \pm \sqrt{100a^2}}{18} = \frac{-8a \pm 10a}{18}. \\ y_1 &= \frac{2a}{18} = \frac{a}{9} \\ y_2 &= -a \end{aligned}$$

Nyní si rozdělíme úlohu na tři případy v závislosti na hodnotě parametru a :

I. $a < 0$

Pro $a < 0$ bude kořen y_1 záporný a kořen y_2 kladný. Platí tedy $\frac{a}{9} < 0 < -a$. Víme také, že koeficient kvadratického členu nerovnice (5.5) je kladný, tedy graf kvadratické funkce bude konvexní. Pro zpřehlednění sestojíme tabulku, kde nulové body jsou kořeny nerovnice:

I	$I_1 = (-\infty, \frac{a}{9})$	$I_2 = (\frac{a}{9}, -a)$	$I_3 = (-a, \infty)$
znaménko	+	-	+

Poznámka: Nulové body nejsou do intervalů zahrnuty, neboť hledáme pouze taková řešení, při nichž bude levá strana nerovnice záporná.

Vidíme, že pro $a < 0$ bude levá strana nerovnice záporná v intervalu I_2 . Nesmíme však zapomenout, že úlohu řešíme pro $y > 0$, proto výsledný interval bude ve tvaru $y \in (0, -a)$. Vraťme se k původní proměnné substituce $y = 3^x$. Hledáme tedy taková x , pro která platí $0 < 3^x < -a$. První nerovnost je splněna pro všechna reálná čísla, ta druhá je ekvivalentní s nerovnicí

$$x < \log_3(-a).$$

Dostáváme tedy množinu všech řešení ve tvaru $K = (-\infty, \log_3(-a))$ pro $a < 0$.

II. $a = 0$

Pro $a = 0$ bude nerovnice (5.5) ve tvaru

$$9y^2 < 0,$$

což nemá řešení, neboť levá strana je vždy kladná (víme totiž, že $y > 0$). Pro $a = 0$ dostáváme $K = \emptyset$.

III. $a > 0$

Pro $a > 0$ bude kořen y_1 kladný a kořen y_2 záporný, tedy $-a < 0 < \frac{a}{9}$. Tabulka intervalů bude vypadat následovně:

I	$I_1 = (-\infty, -a)$	$I_2 = (-a, \frac{a}{9})$	$I_3 = (\frac{a}{9}, \infty)$
znaménko	+	-	+

Obdobně jako u případu I_1 , i zde je řešením část intervalu I_2 . Protože $-a < 0$, bude výsledný interval ve tvaru $(0, \frac{a}{9})$. Vráťme-li se k původní proměnné substituce $y = 3^x$, dostáváme

$$x \in \left(-\infty, \log_3 \frac{a}{9}\right)$$

Pro ujasnění upravíme pravou mez intervalu:

$$\log_3 \frac{a}{9} = \log_3 \frac{1}{9} + \log_3 a = -2 + \log_3 a$$

Řešení je tedy ve tvaru $K = (-\infty, -2 + \log_3 a)$ pro $a > 0$.

Získané závěry shrneme do tabulky:

a	K
$(-\infty, 0)$	$(-\infty, \log_3(-a))$
$\{0\}$	$\emptyset$
$(0, \infty)$	$(-\infty, -2 + \log_3 a)$

Příklad 5.4. Řešte rovnici

$$\log_a x \cdot \log_b x = \log_a b,$$

kde a, b jsou kladné parametry různé od čísla 1.

Řešení:

Jelikož ze zadání plyne, že $\log_a b \neq 0$, můžeme tímto výrazem rovnici vydělit:

$$\frac{\log_a x \cdot \log_b x}{\log_a b} = 1$$

Pro další úpravy využijeme převodního vztahu

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b},$$

díky kterému rovnici dále upravíme a vyřešíme:

$$\begin{aligned}(\log_b x) \cdot (\log_b x) &= 1 \\(\log_b x)^2 &= 1 \\(\log_b x) &= \pm 1\end{aligned}$$

Logaritmus se rovná jedné, pokud je hodnota argumentu a základu stejná, což nastane pro $x = b$. Příklad $\log_b x = -1$ nastane, pokud je v argumentu převrácená hodnota hodnoty základu, tedy $x = \frac{1}{b}$. Množina řešení celé úlohy je tedy $K = \{b, \frac{1}{b}\}$.

2.6 Iracionální rovnice a nerovnice

Iracionální rovnice a nerovnice s parametry vyžadují důslednou práci s podmínkami a obezřetnost při každém kroku úpravy. Vzhledem k tomu, že umocňování rovnic s odmocninami často není ekvivalentní úpravou, je nezbytné přesně vymezit definiční obor a rozlišit jednotlivé případy. Řešení těchto úloh využívá širokou paletu metod – od substituce přes násobení sdruženým výrazem až po grafické úvahy či rozbor kvadratických tvarů. Tento typ rovnic rozvíjí algebraické dovednosti, systematické uvažování a schopnost kontrolovat platnost získaných výsledků. Je také nutné si uvědomit, že umocňování je ve své podstatě důsledkovou úpravou, a proto budeme často ověřovat správnost výsledku zkouškou.

V této podkapitole se nachází šest úloh. Příklad 6.1 zkoumá nerovnici s odmocninou, která se řeší případovou analýzou a poskytuje krom algebraického rovněž grafickou vizualizaci řešení. V příkladu 6.2 řešíme rozdíl dvou odmocnin a využíváme násobení rovnice sdruženým výrazem, kdy řešíme vzniklou soustavu rovnic. V závěru úlohy dochází k rovnici s absolutními hodnotami. Příklad 6.3 na první pohled svádí k rychlému algebraickému řešení – po odstranění odmocniny vede úprava k jednoduché lineární rovnici. Skutečná obtížnost však spočívá v důsledném ověření podmínky, které od řešitele vyžaduje pečlivé propojení výsledku s definičním oborem a parametrem. V příkladu 6.4 se řešitel potýká s vnořenou odmocninou, po jejímž umocnění a vhodné substituci se vyhne rovnici čtvrtého stupně. Řešení úlohy vyžaduje chytrý krok v podobě přičtení proměnné x k oběma stranám substituce. Příklad 6.5 řeší rovnost dvou odmocninových výrazů přes součet a opět pracuje s násobení rovnice sdruženým výrazem. Úloha je pracná zejména kvůli ověřování řešení vlivem důsledkových úprav. Závěrečný příklad 6.6 vyžaduje dvě po sobě jdoucí umocnění a vede k výrazu pro x v závislosti na parametru p . Klíčovým momentem je důkladné ověření, pro které hodnoty parametru získané řešení skutečně platí.

Příklad 6.1. Řešte nerovnici s reálným parametrem a :

$$2\sqrt{x+a} > x+1.$$

Řešení:

Nerovnici bychom rádi umocnili. Rozlišíme tedy úlohu na tři případy podle hodnoty parametru a :

$$\boxed{\text{I. } a \in (-\infty, 0)}$$

Podle zadání musí platit $x+a \geq 0$, tedy $x \geq -a \geq 0$, a proto $x+1 > 0$. Pro $x \geq -a$ tak můžeme nerovnici ekvivalentně řešit umocněním:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x+a} &> x+1 && |^2 \\ 4x+4a &> x^2+2x+1 \\ 4a &> x^2-2x+1 && (6.1) \\ 4a &> (x-1)^2 \end{aligned}$$

Protože však $4a \leq 0$ a vždy platí $(x-1)^2 \geq 0$, v uvažovaném případě $a \in (-\infty, 0)$ máme $K = \emptyset$.

$$\boxed{\text{II. } a \in (0, 1)}$$

Podle zadání musí platit $x+a \geq 0$, neboli $x \in \langle -a, \infty \rangle$. Pak ovšem $x+1 \geq 1-a \geq 0$, takže zadanou nerovnici můžeme v celém oboru $x \in \langle -a, \infty \rangle$ řešit ekvivalentním umocněním. Nerovnici (6.1) dále upravíme a pomocí diskriminantu D určíme kořeny příslušné rovnice:

$$\begin{aligned} 4a &> x^2 - 2x + 1 \\ x^2 - 2x - 4a + 1 &< 0 && (6.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= (-2)^2 - 4(-4a+1) \\ &= 4 + 16a - 4 \\ &= 16a \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{16a}}{2} = \frac{2 \pm 4\sqrt{a}}{2} = 1 \pm 2\sqrt{a}$$

Užitím metody nulových bodů vypočítáme interval řešení nerovnice 6.2:

I	$I_1 = (-\infty, 1 - 2\sqrt{a})$	$I_2 = (1 - 2\sqrt{a}, 1 + 2\sqrt{a})$	$I_3 = (1 + 2\sqrt{a}, \infty)$
znaménko	+	-	+

Výsledným intervalem řešení nerovnice je interval $(1 - 2\sqrt{a}, 1 + 2\sqrt{a})$. Je však ještě nutné ukázat, že celý interval leží v požadovaném oboru $\langle -a, \infty \rangle$.

Vhodnou úpravu dokážeme, že $-a \leq 1 - 2\sqrt{a}$:

$$\begin{aligned} -a &\leq 1 - 2\sqrt{a} \\ 0 &\leq 1 - 2\sqrt{a} + a \\ 0 &\leq (1 - \sqrt{a})^2, \end{aligned}$$

což platí. Proto řešením bude celý interval, tedy $K = (1 - 2\sqrt{a}, 1 + 2\sqrt{a})$.

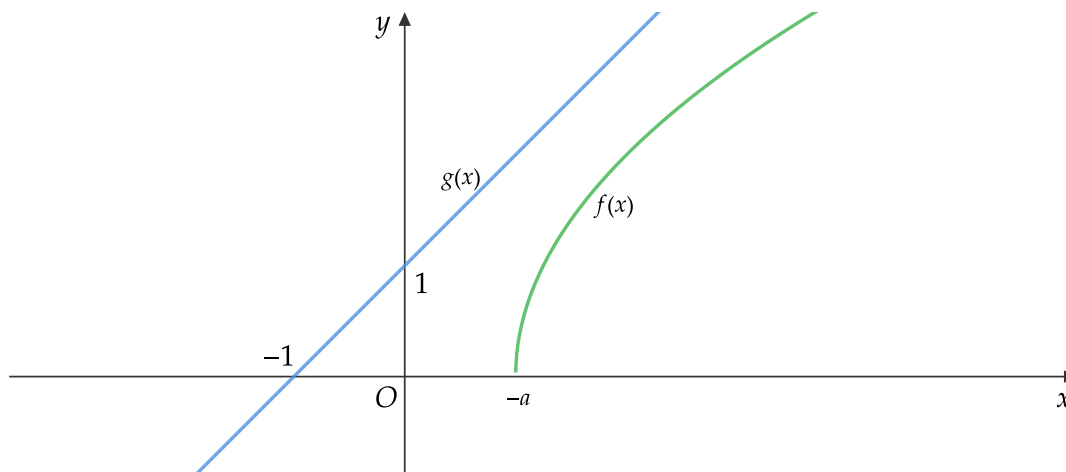
III. $a \in (1, \infty)$

Stejným způsobem jako v případě II., i zde musí platit $x + a \geq 0$, tedy $x \geq -a$, neboli $x \in \langle -a, \infty \rangle$. Nyní pro $x \in \langle -a, -1 \rangle$ platí

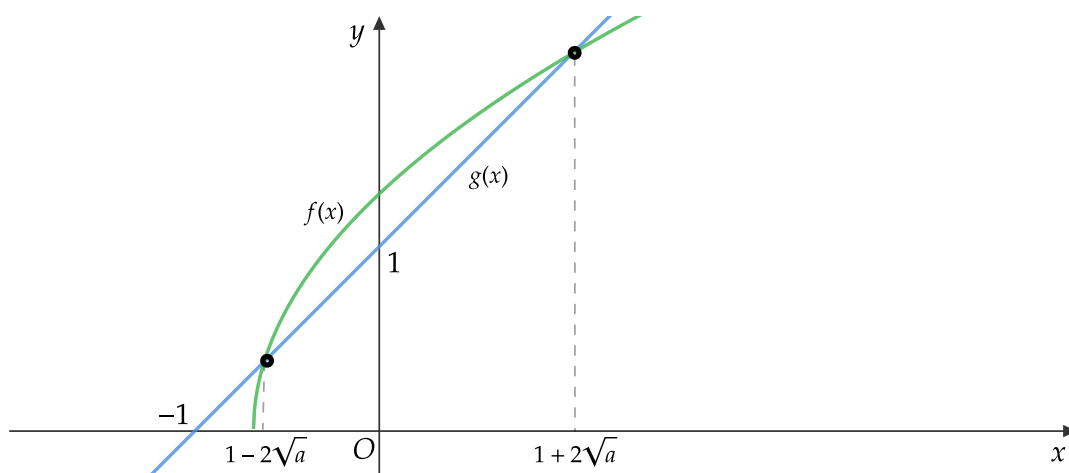
$$2\sqrt{x+a} \geq 0 > x+1$$

takže původní nerovnice je splněna. Pro zbylá $x \in \langle -1, \infty \rangle$ nerovnici ekvivalentně umocníme a postupem z II. dospějeme k nerovnici (6.2) s množinou řešení $(1 - 2\sqrt{a}, 1 + 2\sqrt{a})$. Jejich průnikem s určeným oborem $\langle -1, \infty \rangle$ je interval $\langle -1, 1 + 2\sqrt{a} \rangle$, neboť díky nerovnosti $a > 1$ platí $1 - 2\sqrt{a} < -1$. Platí tak $K = \langle -a, -1 \rangle \cup \langle -1, 1 + 2\sqrt{a} \rangle = \langle -a, 1 + 2\sqrt{a} \rangle$.

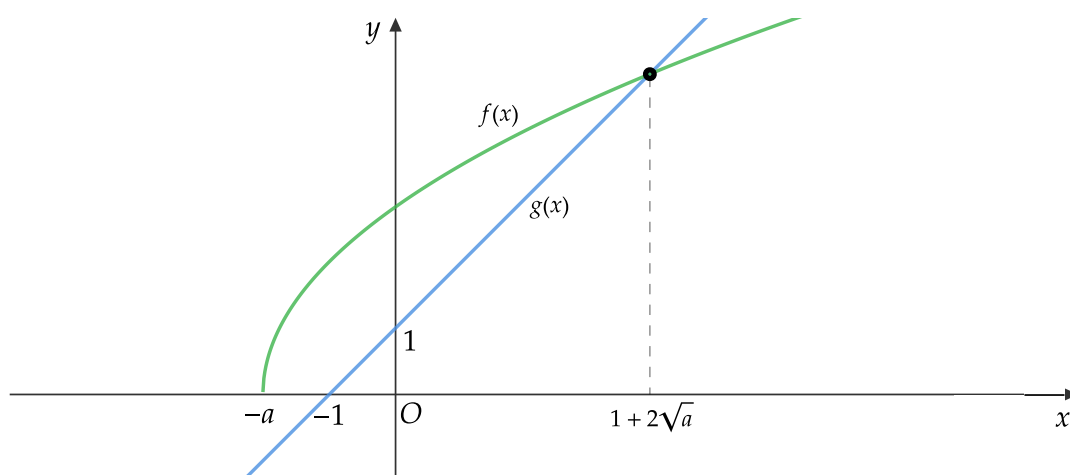
Správnost úvah ilustrujeme graficky vykreslením grafů funkcí $f(x) = \sqrt{x+a}$ a $g(x) = x+1$ v uvažovaných třech případech:



Obrázek 2.21: Pro $a \leq 0$ je řešením prázdná množina.



Obrázek 2.22: Pro $0 < a \leq 1$ je řešením interval $(1 - 2\sqrt{a}, 1 + 2\sqrt{a})$.



Obrázek 2.23: Pro $a > 1$ je řešením interval $\langle -a, 1 + 2\sqrt{a} \rangle$.

Všechny výsledky zpřehledníme v tabulce.

a	K
$(-\infty, 0)$	$\emptyset$
$(0, 1)$	$(1 - 2\sqrt{a}, 1 + 2\sqrt{a})$
$(1, \infty)$	$\langle -a, 1 + 2\sqrt{a} \rangle$

Příklad 6.2. Řešte rovnici s reálným parametrem a :

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{x-a+2} = 1.$$

Řešení:

Ze zadané rovnice plyne $\sqrt{x+2} > \sqrt{x-a+2}$, tedy $x+2 > x-a+2$, odkud dostáváme $a > 0$. V případě $a \leq 0$ tak rovnice nemá řešení. Dále se proto budeme zabývat pouze případem $a > 0$.

V této úloze je velice výhodné vynásobit rovnici sdruženým výrazem $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-a+2}$. Vznikne totiž podobná rovnice, která půjde výhodně sečíst s původní rovnicí:

$$\text{I. } \sqrt{x+2} - \sqrt{x-a+2} = 1 \quad / \cdot (\sqrt{x+2} + \sqrt{x-a+2})$$

$$\text{II. } x+2 - (x-a+2) = \sqrt{x+2} + \sqrt{x-a+2}$$

$$\text{I. } \sqrt{x+2} - \sqrt{x-a+2} = 1$$

$$\text{II. } \sqrt{x+2} + \sqrt{x-a+2} = a \quad \text{Obě rovnice sečteme:}$$

$$2\sqrt{x+2} = a+1$$

$$\sqrt{x+2} = \frac{a+1}{2}$$

$$x+2 = \frac{a^2+2a+1}{4}$$

$$x = \frac{a^2+2a-7}{4}$$

Nyní dosadíme tuto hodnotu x , kterou jsme získali důsledkovými úpravami, do levé strany původní rovnice:

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{\frac{a^2+2a-7}{4} + 2} - \sqrt{\frac{a^2+2a-7}{4} - a + 2} = \sqrt{\frac{a^2+2a+1}{4}} - \sqrt{\frac{a^2-2a+1}{4}} = \\ &= \left| \frac{a+1}{2} \right| - \left| \frac{a-1}{2} \right| \end{aligned}$$

Naší úlohou tedy bude zjistit, pro která $a > 0$ je levá strana rovnice rovna jedné, tj. kdy platí

$$\left| \frac{a+1}{2} \right| - \left| \frac{a-1}{2} \right| = 1.$$

Řešíme tedy rovnici s absolutní hodnotou. Rovnici lze po vynásobení dvěma dostat na tvar

$$|a+1| - |a-1| = 2$$

Pomocí nulových bodů sestojíme tabulku, určující, kdy jsou výrazy v absolutních hodnotách kladné a kdy záporné:

a	$I_1 = (-\infty, -1)$	$I_2 = (-1, 1)$	$I_3 = (1, \infty)$
$a-1$	—	+	+
$a+1$	—	—	+

Poznámka: V tabulce jsou do intervalů zahrnuty také nulové body $x = \pm 1$. Pro tyto hodnoty jsou výrazy v absolutních hodnotách rovny nule, tedy nejsou ani kladné, ani záporné. Znaký v tabulce tak vyjadřují nezápornost, resp. nekladnost.

Vzhledem k omezení $a > 0$, které jsme zdůvodnili v prvním odstavci našeho řešení, se budeme zabývat pouze intervaly I_2 a I_3 , přičemž I_2 zúžíme na $(0, 1)$.

$$I_2 = (0, 1)$$

Výraz $a + 1$ zde bude kladný, výraz $a - 1$ záporný. Doplníme do rovnice a vyřešíme:

$$\begin{aligned} a + 1 + a - 1 &= 2 \\ 2a &= 2 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

Jelikož musí platit $a < 1$, bude množina hodnot x prázdná, tedy $K = \emptyset$.

$$I_3 = \langle 1, \infty \rangle$$

Zde budou oba výrazy kladné:

$$\begin{aligned} a + 1 - a + 1 &= 2 \\ 0a &= 0 \end{aligned}$$

Poslední rovnici splňují všechna $a \in I_3$, tudíž nalezené číslo x zkoušce vyhovuje.

Na závěr všechny výsledky zapíšeme do tabulky:

a	K
$(-\infty, 1)$	$\emptyset$
$\langle 1, \infty \rangle$	$\left\{ \frac{a^2 + 2a - 7}{4} \right\}$

Poznámka: Rovnici $|a + 1| - |a - 1| = 2$ lze také řešit úvahou. Jak jsme zdůvodnili v úvodním odstavci řešení, zabýváme se pouze případem $a > 0$. Tehdy ovšem platí $|a + 1| = a + 1$, takže odvozenou rovnici lze zjednodušit:

$$\begin{aligned} (a + 1) - |a - 1| &= 2, \\ a - 1 &= |a - 1| \end{aligned}$$

Poslední zřejmě platí, právě když $a - 1 \geq 0$, neboli $a \in \langle 1, \infty \rangle$. Tedy právě pro taková a je nalezené číslo x kořenem původní rovnice.

Příklad 6.3. Řešte rovnici s reálným parametrem a :

$$x = \sqrt{x^2 + 2(a+1)x + 4a} + a.$$

Řešení:

Nejprve rovnici po odečtení a od obou stran důsledkově umocníme a upravíme.

$$\begin{aligned} x - a &= \sqrt{x^2 + 2(a+1)x + 4a} \quad |^2 \quad [x - a \geq 0] \\ x^2 - 2ax + a^2 &= x^2 + 2(a+1)x + 4a \\ a^2 - 4a &= 2(a+1)x + 2ax \\ a^2 - 4a &= x(4a+2) \end{aligned}$$

Pro $a = -\frac{1}{2}$ vychází rovnice $\frac{9}{4} = 0x$, která nemá řešení. Pro $a \neq -\frac{1}{2}$ můžeme rovnici vydělit:

$$x = \frac{a^2 - 4a}{4a + 2}$$

Nyní je třeba zohlednit podmínky, za kterých jsme mohli rovnici ekvivalentně umocnit. Jsou to podmínky $x - a \geq 0$ a $x^2 + 2(a+1)x + 4a \geq 0$. Vysvětlíme, proč stačí pouze první z nich, tj. $x \geq a$. Podle našeho postupu pro určené x totiž platí $x^2 + 2(a+1)x + 4a = (x - a)^2$, takže i trojčlen $x^2 + 2(a+1)x + 4a$ má nezápornou hodnotu.

Věnujme se tedy jen podmínce $x \geq a$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a^2 - 4a}{4a + 2} \geq a \\ \frac{a^2 - 4a}{4a + 2} - a &\geq 0 \\ \frac{a^2 - 4a - 4a^2 - 2a}{4a + 2} &\geq 0 \\ \frac{-3a^2 - 6a}{4a + 2} &\geq 0 \\ \frac{-3a(a+2)}{2(2a+1)} &\geq 0 \end{aligned}$$

Pomocí metody nulových bodů určíme intervaly řešení. Vybereme ty, kdy je funkce kladná a přidáme k nim i jejich krajní body $a = -2$ a $a = 0$, ve kterých je funkce rovna nule:

I	$I_1 = (-\infty, -2)$	$I_2 = (-2, -\frac{1}{2})$	$I_3 = (-\frac{1}{2}, 0)$	$I_4 = (0, \infty)$
znaménko	+	-	+	-

Úloha má tedy jediné řešení ve tvaru $x = \frac{a^2 - 4a}{4a + 2}$ pro $a \in I_1 \cup I_3 = (-\infty, -2) \cup (-\frac{1}{2}, 0)$. Pro ostatní hodnoty parametru a řešení neexistuje.

Příklad 6.4. Řešte rovnici s reálným parametrem a :

$$\sqrt{a - \sqrt{a+x}} = x. \quad (6.3)$$

Řešení:

Z tvaru levé strany (6.3) plyne, že pro neznámou x na pravé straně musí platit $x \geq 0$. Pro taková x můžeme rovnici ekvivalentně umocnit:

$$\begin{aligned} \sqrt{a - \sqrt{a+x}} &= x & |^2 \\ a - \sqrt{a+x} &= x^2 \\ a - x^2 &= \sqrt{a+x} \end{aligned} \quad (6.4)$$

Vidíme, že nutně $a - x^2 \geq 0$, tedy $a \geq x^2$, takže pro $a < 0$ rovnice (6.3) nemá řešení. Dále tedy budeme předpokládat, že obě a i x jsou nezáporná.

Další umocnění rovnice (6.4) by vedlo na kvartickou rovnici. Té se vyvarujeme užitím vhodné substituce. Pro řešení položíme vhodně $t = a - x^2 - x$. Pak totiž platí

$$a - x^2 = x + t$$

Po vhodném přeskládání členů a přičtení výrazu x k oběma stranám dokážeme vyjádřit také výraz v odmocnině z rovnice (6.4):

$$\begin{aligned} a &= x^2 + x + t & | + x \\ a + x &= x^2 + 2x + t \end{aligned}$$

Po dosazení do (6.4) dostáváme

$$x + t = \sqrt{x^2 + 2x + t}.$$

Opět vidíme, že nutně $x + t \geq 0$. Rovnici znovu ekvivalentně umocníme a upravíme:

$$\begin{aligned} x^2 + 2xt + t^2 &= x^2 + 2x + t \\ 2xt - 2x + t^2 - t &= 0 \\ 2x(t-1) + t(t-1) &= 0 \\ (t-1)(2x+t) &= 0 \end{aligned}$$

Vidíme, že platí $t = 1$ nebo $2x + t = 0$. Protože však z dřívějších úvah musí $x \geq 0$, $x + t \geq 0$ a $2x + t = x + (x + t)$, nastane možnost $2x + t = 0$, jen když $x = x + t = 0$, tedy když $x = t = 0$, což podle $t = a - x^2 - x$ znamená, že i $a = 0$.

Zabývejme se možností, kdy $t = 1$. Podle $t = a - x^2 - x$ to znamená, že $x^2 + x + 1 = a$, takže nutně s ohledem na $x \geq 0$ musí být $a \geq 1$. Dále z $x^2 + x + 1 = a$ plynou rovnosti $x + a = (x+1)^2$ a $a - x^2 = x + 1$, takže rovnice (6.4) je skutečně splněna. Zbývá proto v případě $a \geq 1$ najít všechna kladná řešení x rovnice $x^2 + x + 1 = a$.

Máme kvadratickou rovnici, kterou upravíme, spočítáme diskriminant D určíme kladné kořeny.

$$x^2 + x + 1 - a = 0$$

$$D = 1 - 4(1 - a) = 4a - 3$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4a - 3}}{2}$$

Vidíme hned, že kořen se znaménkem minus před odmocninou vyjde záporný. Proto bude kladným kořenem pouze $x = \frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2}$ pro $a \in \langle 1, \infty \rangle$.

Celkově tedy dostáváme:

a	K
$(-\infty, 0) \cup (0, 1)$	$\emptyset$
$\{0\}$	$\{0\}$
$\langle 1, \infty \rangle$	$\left\{ \frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2} \right\}$

Příklad 6.5. Řešte rovnici s reálným parametrem a :

$$\sqrt{x-3} = a - \sqrt{x-7}.$$

Řešení:

Převédeme si výrazy s odmocninou na jednu stranu:

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{x-7} = a$$

Jelikož oba výrazy na levé straně jsou nezáporné, musí nutně $a \geq 0$. Situace, kdy $a = 0$ však nemůže nastat, neboť oba výrazy zřejmě nemohou být současně rovny nule. Pro $a \leq 0$ tedy úloha nemá řešení.

Po zbytek řešení pracujeme s $a > 0$. Rovnici se nabízí vynásobit sdruženým činitelem:

$$\text{I. } \sqrt{x-3} + \sqrt{x-7} = a \quad | \cdot (\sqrt{x-3} - \sqrt{x-7})$$

$$\text{II. } x-3 - (x-7) = a(\sqrt{x-3} - \sqrt{x-7})$$

$$\text{I. } \sqrt{x-3} + \sqrt{x-7} = a$$

$$\text{II. } \sqrt{x-3} - \sqrt{x-7} = \frac{4}{a}$$

$$\begin{aligned} \text{I. + II. } \quad 2\sqrt{x-3} &= \frac{a^2+4}{a} & |^2 \\ 4x-12 &= \frac{(a^2+4)^2}{a^2} & | : 4 \\ x-3 &= \frac{(a^2+4)^2}{4a^2} \\ x &= \frac{(a^2+4)^2}{4a^2} + 3 = \frac{(a^2-4)^2 + 16a^2}{4a^2} + 3 = \frac{(a^2-4)^2}{4a^2} + 7 \end{aligned}$$

Protože jsme v našem postupu prováděli důsledkové úpravy (sečtení rovnic I. a II. a následné umocnění), provedeme pro nalezené x zkoušku dosazením do původní rovnice. Z vyjádření určeného x s ohledem na $a > 0$ plyne:

$$\begin{aligned} \sqrt{x-3} &= \sqrt{\frac{(a^2+4)^2}{4a^2}} = \frac{a^2+4}{2a} \\ \sqrt{x-7} &= \sqrt{\frac{(a^2-4)^2}{4a^2}} = \frac{|a^2-4|}{2a} \end{aligned}$$

Po dosazení do původní rovnice dostaneme rovnost, kterou dále ekvivalentně upravíme:

$$\begin{aligned}\frac{a^2+4}{2a} &= a - \frac{|a^2-4|}{2a} \\ \frac{a^2+4}{2a} - a &= -\frac{|a^2-4|}{2a} \\ \frac{4-a^2}{2a} &= -\frac{|a^2-4|}{2a}\end{aligned}$$

Vidíme, že taková rovnost platí, právě když $|a^2-4| = a^2-4$ neboli $a^2-4 \geq 0$, čili $a^2 \geq 4$. To pro kladné a znamená $a \geq 2$. Řešením rovnice je tedy jediné $x = \frac{(a^2-4)^2}{4a^2} + 7$ pro $a \in \langle 2, \infty \rangle$, pro ostatní hodnoty a žádné řešení neexistuje.

Příklad 6.6. Řešte rovnici s reálným parametrem p :

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x.$$

Řešení:

Součet dvou mocnin na levé straně rovnice musí být nutně nezáporný. Pro $x \geq 0$ rovnici umocníme a poté upravíme:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} &= x \\ x^2 - p + 4\sqrt{(x^2 - p)(x^2 - 1)} + 4x^2 - 4 &= x^2 \\ 4\sqrt{(x^2 - p)(x^2 - 1)} &= p + 4 - 4x^2\end{aligned}$$

Pokud platí $p + 4 \geq 4x^2$, rovnici znovu umocníme a vyjádříme neznámou x :

$$\begin{aligned}4\sqrt{(x^2 - p)(x^2 - 1)} &= p + 4 - 4x^2 \\ 16(x^2 - p)(x^2 - 1) &= p^2 + 8p + 16 - 8px^2 - 32x^2 + 16x^4 \\ 16x^4 - 16x^2 - 16px^2 + 16p &= p^2 + 8p + 16 - 8px^2 - 32x^2 + 16x^4 \\ 16x^2 - 8px^2 + 8p - p^2 - 16 &= 0 \\ (16 - 8p)x^2 &= (p - 4)^2 \\ x^2 &= \frac{(p - 4)^2}{8(2 - p)} = \frac{(p - 4)^2}{4(4 - 2p)} \implies x = \pm \frac{p - 4}{2\sqrt{4 - 2p}}\end{aligned}$$

Platí však podmínka $p + 4 \geq 4x^2$, tedy

$$p + 4 \geq 4x^2 = \frac{(p - 4)^2}{4 - 2p} \iff (p + 4)(4 - 2p) \geq (p - 4)^2 \iff 0 \geq p(3p - 4).$$

Dostáváme $p \geq 0$ a $p \leq \frac{4}{3}$. Řešení je tedy ve tvaru $x = \frac{4-p}{2\sqrt{4-2p}}$ pro $p \in \langle 0, \frac{4}{3} \rangle$.

Příklad 6.7. Najděte všechny trojice (a, b, c) reálných parametrů, při kterých má rovnice

$$\sqrt{x + a\sqrt{x} + b} + \sqrt{x} = c$$

nekonečně mnoho řešení.

Řešení:

Pro zjednodušení původní rovnice využijeme substituci $y = \sqrt{x}$, tedy $x = y^2$, $y \geq 0$. Protože je y nezáporné, musí nutně také $c \geq 0$. Rovnici přepíšeme a důsledkovými úpravami upravíme:

$$\begin{aligned}\sqrt{y^2 + ay + b} + y &= c \\ \sqrt{y^2 + ay + b} &= c - y \quad |^2 \\ y^2 + ay + b &= c^2 - 2cy + y^2 \\ ay + b &= c^2 - 2cy\end{aligned}$$

Aby platila rovnost pro nekonečně mnoho $y \geq 0$, musí být levá i pravá strana rovnice identické jako funkce proměnné y . Porovnáme tedy koeficienty obou stran rovnice podle mocnin y :

$$a = -2c \wedge b = c^2.$$

Protože jsme použili důsledkové úpravy, je nutné dosadit získané kandidáty do původní rovnice. Dostáváme

$$\sqrt{x - 2c\sqrt{x} + c^2} = c - \sqrt{x}.$$

Ekvivalentními úpravami obdržíme

$$\begin{aligned}\sqrt{(\sqrt{x} - c)^2} &= c - \sqrt{x} \\ |\sqrt{x} - c| &= c - \sqrt{x}.\end{aligned}$$

To je rovnice typu $|V| = -V$ s výrazem $V = \sqrt{x} - c$, která je splněna, právě když $V = \sqrt{x} - c \leq 0$ neboli $\sqrt{x} \leq c$. Vidíme, že musí platit $c \geq 0$ a že všechna řešení původní rovnice jsou pak určena podmínkami $0 \leq x \leq c^2$. Takových x je skutečně nekonečně mnoho, právě když platí $c^2 > 0$, tj. $c > 0$ (neboť jak víme $c \geq 0$). Ukázali jsme, že hledané trojice (a, b, c) jsou skutečně tvaru $(a, b, c) = (-2c, c^2, c)$, kde $c > 0$ je libovolné.

2.7 Racionální lomené rovnice a nerovnice s parametry

Racionální lomené rovnice a nerovnice s parametry vyžadují přesnou práci s definičním oborem, algebraickými úpravami a analýzou existence řešení v závislosti na hodnotách parametru. Parametr zde ovlivňuje jak výskyt zakázaných hodnot ve jmenovateli, tak samotnou strukturu rovnice či nerovnice. Tyto úlohy slouží nejen k procvičení standardních metod, jako je převod na společného jmenovatele a úprava výrazů, ale především k rozvoji schopnosti formulovat podmínky platnosti řešení a rozlišit situace, kdy formálně získané výsledky neodpovídají skutečnosti. Didakticky je tento okruh přínosný zejména tím, že učí studenty přesnosti, logické analýze a důsledné práci s jednotlivými kroky řešení.

Podkapitola obsahuje čtyři příklady. Příklad 7.1 pracuje s nerovností dvou lomených výrazů a ukazuje případovou analýzu na základě znamének čitatele a jmenovatele. V příkladu 7.2 se analyzuje rovnice, jejíž diskriminant rozhoduje o počtu reálných řešení, přičemž podmínka $x \neq 3$ vnáší do řešení další vrstvu. Příklad 7.3 kombinuje kvadratickou nerovnici s lomeným výrazem a klade důraz na správné převedení do tvaru vhodného pro metodu nulových bodů. Závěrečný příklad 7.4 vyžaduje důkladné úpravy dvou lomených výrazů s různými jmenovateli; řešení spočívá v algebraickém sjednocení výrazů, případové analýze a rozboru podmínek na parametr.

Příklad 7.1. V oboru $\mathbb{R}$ řešte nerovnici s reálným parametrem p :

$$\frac{x-3p}{x-p-3} < 0.$$

Řešení:

Nerovnice má smysl pouze tehdy, když $x - p - 3 \neq 0$, neboli $x \neq p + 3$. Výraz na levé straně musí být ostře záporný. To nastane pouze v případě, pokud je čítec kladný a současně jmenovatel záporný nebo naopak. Rozdělme si tedy úlohu na dva případy:

$$\text{I. } p+3 < x < 3p$$

Vidíme, že taková x budou existovat a tvořit interval $K_1 = (p+3, 3p)$, právě když bude platit $p+3 < 3p$, neboli $p > \frac{3}{2}$. V případě $p \leq \frac{3}{2}$ bude $K_1 = \emptyset$.

$$\text{II. } 3p < x < p+3$$

Druhý případ řeší situaci opačnou: s kladným čítcem a záporným jmenovatelem. Zde budou x rovněž existovat a tentokrát tvořit interval $K_2 = (3p, p+3)$ za podmínky, že $p+3 > 3p$, tedy $p < \frac{3}{2}$. Pro $p \geq \frac{3}{2}$ bude $K_2 = \emptyset$.

Řešení $K = K_1 \cup K_2$ zapíšeme do tabulky:

p	K
$p \in (-\infty, \frac{3}{2})$	$(3p, p+3)$
$p = \frac{3}{2}$	$\emptyset$
$p \in (\frac{3}{2}, \infty)$	$(p+3, 3p)$

Příklad 7.2. Určete všechny hodnoty reálného parametru a , při kterých má rovnice

$$\frac{x^2 - ax + 4}{x - 3} = 0$$

právě jedno řešení.

Řešení:

Musí platit $x \neq 3$. Pro taková x je daná rovnice ekvivalentní s rovnicí $x^2 - ax + 4 = 0$. Tato rovnice má právě jedno řešení, pokud je její diskriminant D roven nule:

$$\begin{aligned} D &= a^2 - 16 = 0 \\ (a - 4)(a + 4) &= 0 \\ a_{1,2} &= \pm 4 \end{aligned}$$

Získané hodnoty a dosadíme a určíme kořeny původní rovnice ověřením podmínky $x \neq 3$:

$$\begin{aligned} a = 4 &\implies x = \frac{4 \pm 0}{2} = 2 \neq 3, \\ a = -4 &\implies x = \frac{-4 \pm 0}{2} = -2 \neq 3. \end{aligned}$$

Hodnoty parametru $a = \pm 4$ jsou tedy jediná dvě řešení této úlohy.

Příklad 7.3. V oboru $\mathbb{R}$ řešte nerovnici

$$\frac{ax^2}{x-1} \leq (a+1)^2, \quad \text{kde } a \geq 0 \text{ je parametr.}$$

Řešení:

Nerovnice má smysl, pokud $x \neq 1$. Pro $a = 0$ dostáváme nerovnici ve tvaru $\frac{0}{x-1} \leq 1$, která platí pro každé $x \neq 1$. Pro $a = 0$ je tedy $K = \mathbb{R} - \{1\}$. Dále budeme ve shodě se zadáním předpokládat, že $a > 0$ a nerovnici upravíme na ekvivalentní tvar:

$$\begin{aligned} \frac{ax^2}{x-1} &\leq (a+1)^2 \\ \frac{ax^2 - (a+1)^2x + (a+1)^2}{x-1} &\leq 0. \end{aligned}$$

Kvadratický trojčlen v čitateli má diskriminant

$$D = (a+1)^4 - 4a(a+1)^2 = (a+1)^2[(a+1)^2 - 4a] = (a+1)^2(a-1)^2$$

Jelikož $a > 0$, může být $D = 0$ pouze v případě $a = 1$, kdy platí

$$ax^2 - (a+1)^2x + (a+1)^2 = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2,$$

takže nerovnice má tvar $\frac{(x-2)^2}{x-1} \leq 0$. Pro $a = 1$ je tedy zřejmě $K = (-\infty, 1) \cup \{2\}$. Pro ostatní $a > 0$ bude $D > 0$ a $\sqrt{D} = (a+1)|a-1|$, takže trojčlen v čitateli má dva různé kořeny

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{(a+1)^2 \pm (a+1)|a-1|}{2a} = \frac{(a+1)^2 \pm (a+1)(a-1)}{2a}, \\ x_1 &= \frac{(a^2 + 2a + 1) + (a^2 - 1)}{2a} = \frac{2a^2 + 2a}{2a} = a + 1, \\ x_2 &= \frac{(a^2 + 2a + 1) - (a^2 - 1)}{2a} = \frac{2a + 2}{2a} = \frac{a+1}{a}. \end{aligned}$$

Nerovnici tak můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{a(x-x_1)(x-x_2)}{x-1} \leq 0$$

Řešení takové nerovnice bude záviset na uspořádání čísel x_1, x_2 a 1 na číselné ose. Díky podmínce $a > 0$ jsou oba kořeny x_1, x_2 větší než 1. Navíc, pro $0 < a < 1$ platí $a+1 < \frac{a+1}{a}$, a tedy $1 < x_1 < x_2$, zatímco pro $a > 1$ platí $a+1 > \frac{a+1}{a}$, tedy $1 < x_2 < x_1$. Odtud plyne, množina řešení má tvar

$$K = (-\infty, 1) \cup \langle x_1, x_2 \rangle = (-\infty, 1) \cup \left\langle a+1, \frac{a+1}{a} \right\rangle \quad \text{pro } a \in (0, 1),$$

$$K = (-\infty, 1) \cup \langle x_2, x_1 \rangle = (-\infty, 1) \cup \left\langle \frac{a+1}{a}, a+1 \right\rangle \quad \text{pro } a \in (1, \infty).$$

Všechna řešení v závislosti na zadaném parametru $a \geq 0$ zaznamenejme do tabulky:

a	K
$\{0\}$	$\mathbb{R} - \{1\}$
$\{1\}$	$(-\infty, 1) \cup \{2\}$
$(0, 1)$	$(-\infty, 1) \cup \langle a + 1, \frac{a+1}{a} \rangle$
$(1, \infty)$	$(-\infty, 1) \cup \langle \frac{a+1}{a}, a + 1 \rangle$

Příklad 7.4. Řešte nerovnici s reálným parametrem $a \neq 1$:

$$x - \frac{a}{1-a} < 1 - \frac{x-1}{a-1}.$$

Řešení:

Protože ze zadání je $a \neq 1$, můžeme nerovnici upravit:

$$\frac{x(1-a) - a}{1-a} < \frac{a-1 - (x-1)}{a-1}$$

Převedeme oba zlomky na stejný jmenovatel $1-a$ a po převedení na jednu stranu vytvoříme jeden zlomek:

$$\begin{aligned} \frac{x-ax-a}{1-a} &< \frac{-a+1+x-1}{1-a} \\ \frac{x-ax-a}{1-a} &< \frac{x-a}{1-a} \\ \frac{x-ax-a}{1-a} - \frac{x-a}{1-a} &< 0 \\ \frac{x-ax-a-x+a}{1-a} &< 0 \\ \frac{-ax}{1-a} &< 0 \\ \frac{ax}{a-1} &< 0 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Nyní otestujeme různé hodnoty parametru a a podle znaménka jmenovatele určíme všechna vyhovující x .

I. $a = 0$

Pro $a = 0$ dostáváme z (7.1) nerovnici $0x < 0$. Výraz na levé straně bude vždy roven nule, a tedy pro $a = 0$ nemá nerovnice žádné řešení, tedy $K = \emptyset$ pro $a = 0$.

II. $a < 0$

Pro $a < 0$ je jmenovatel na levé straně (7.1) záporný. Aby byl zlomek na levé straně záporný, musí být číselník kladný. Jelikož $a < 0$, musí nutně také $x < 0$. Tedy pro $a < 0$ je množinou řešení $K = (-\infty, 0)$.

III. $0 < a < 1$

V tomto případě je v (7.1) opět záporný jmenovatel, a tedy číselník musí být opět kladný. Tentokrát je však parametr a kladný, a tedy musí nutně také $x > 0$. Pro $0 < a < 1$ proto dostáváme $K = (0, \infty)$.

IV. $a > 1$

Pro $a > 1$ bude jmenovatel v (7.1) kladný, a proto potřebujeme, aby byl čítecel záporný. Jelikož $a > 0$, musí nutně $x < 0$. Pro $a > 1$ tedy dostáváme stejnou množinu řešení jako v případě II., tedy $K = (-\infty, 0)$.

Získané poznatky zpřehledníme do tabulky.

a	K
$\{0\}$	$\emptyset$
$(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$	$(-\infty, 0)$
$(0, 1)$	$(0, \infty)$

Závěr

Cílem této diplomové práce bylo vytvořit sbírku řešených příkladů zaměřených na rovnice a nerovnice s jedním či více parametry. Výsledná sbírka obsahuje celkem 36 podrobně vyřešených úloh, které svou obtížností převyšují běžnou úroveň středoškolské látky. Příklady jsou doplněny didaktickým komentářem a ilustrativními grafy. Práce je určena zejména jako inspirace pro studenty vyšších ročníků gymnázií, kteří se připravují na matematické soutěže, například matematickou olympiádu. Úlohy byly systematicky rozčleněny podle typu a náročnosti.

Domnívám se, že stanovený cíl se podařilo naplnit. Sbíрка obsahuje dostatečné množství kvalitních příkladů, které pokrývají široké spektrum rovnic, nerovnic i jejich soustav. Žádná významná oblast v rámci tématu nebyla opomenuta.

Za další směr rozvoje práce považuji doplnění sbírky o příklady vlastní tvorby, které původně měly být zařazeny, ale z časových důvodů se tak nestalo.

Práce na diplomovém projektu pro mě byla přínosná i po osobní stránce. Měl jsem možnost prohloubit své porozumění parametrickým úlohám a současně jsem se zdokonalil v práci s nástroji jako $\text{\LaTeX}$ nebo Mathcha. Psaní diplomové práce mi pomohlo zlepšit schopnost systematického uvažování, vyjadřování matematických myšlenek a přesného formulování postupů.

Věřím, že tato sbírka bude užitečným zdrojem nejen pro mě, ale také pro učitele a studenty, kterým může posloužit jako podklad pro přípravu na soutěže, rozšiřující výuku matematiky nebo samostatné studium náročnějších úloh.

Příloha

Seznam zadání příkladů

Rovnice a nerovnice s absolutními hodnotami

- **Příklad 1.1** (str. 6): Řešte rovnici s reálným parametrem a :

$$5 - 2a = |3x - a| - 3x.$$

- **Příklad 1.2** (str. 7): V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici s reálným parametrem a :

$$|2x + 3| + |2x - 3| = ax + 6.$$

- **Příklad 1.3** (str. 9): V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici s reálným parametrem p :

$$|x^2 - p| = (p - 1)x.$$

- **Příklad 1.4** (str. 11): Najděte všechny hodnoty parametru b , při kterých rovnice

$$|x^2 + b| = a(x + b)$$

má řešení pro každou hodnotu reálného parametru a .

- **Příklad 1.5** (str. 14): Určete všechny hodnoty reálného parametru a , při kterých má rovnice

$$|x^2 - 1| = |a + x|$$

maximální počet řešení.

- **Příklad 1.6** (str. 17): V oboru $\mathbb{R}$ řešte nerovnici

$$|x^2 + 2px + 1| > 1$$

s reálným parametrem p , a to pouze v případech

a) $p > \sqrt{2}$,

b) $p \in (0, 1)$.

- **Příklad 1.7** (str. 19): Určete všechny reálné hodnoty parametru a , při kterých má rovnice

$$|ax^2 + 4| = |3ax| + |a|$$

alespoň jedno řešení.

Kvadratické a algebraické rovnice a nerovnice s parametry

- **Příklad 2.1** (str. 25): V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici s reálnými parametry p, q :

$$\frac{x+p}{x-q} + \frac{x+q}{x-p} = 2.$$

- **Příklad 2.2** (str. 26): Určete, pro které reálné hodnoty parametru p má rovnice

$$|px^2 - x| = 1$$

právě tři řešení.

- **Příklad 2.3** (str. 27): Zjistěte, pro které hodnoty reálného parametru p má rovnice

$$p(x^2 + 1) - 3 = x(x - 2p)$$

v oboru $\mathbb{R}$ dva různé kořeny. Pro které z nalezených hodnot p jsou oba tyto kořeny

I. kladné,

II. záporné,

III. opačných znamének?

- **Příklad 2.4** (str. 30): V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici $\frac{x^2}{a^3} + \frac{b^3}{x^2} = \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}$, kde a, b jsou nenulové reálné parametry.

- **Příklad 2.5** (str. 32): Řešte nerovnici s reálným parametrem a :

$$x^3 - (3^a + 3^{1-a})x^2 + 3x \leq 0.$$

Soustavy rovnic a nerovnic s parametry

- **Příklad 3.1** (str. 35): Určete, pro které hodnoty reálného parametru a je aspoň jedno řešení nerovnice $2x - 3 > a$ rovněž řešením nerovnice $x - a < 3$.

- **Příklad 3.2** (str. 36): Řešte soustavu s neznámými x, y (kde $a \neq 0$ je reálný parametr):

$$\text{I. } \frac{x}{a} + ay = a$$

$$\text{II. } ax + \frac{y}{a} = 1$$

- **Příklad 3.3** (str. 38): Určete všechny hodnoty reálného parametru a , při kterých soustava rovnic

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$xy = a$$

nemá řešení.

- **Příklad 3.4** (str. 40): Určete, pro které hodnoty reálných parametrů a, b mají obě soustavy rovnic

$$\begin{array}{l} \text{I)} \quad ax + 2y = b + 1 \\ \quad \quad x + y = 3 \\ \text{II)} \quad 2x + y = a^2 + 2 \\ \quad \quad x + 3y = 3 \end{array}$$

stejně množiny řešení.

- **Příklad 3.5** (str. 42): Řešte soustavu rovnic s reálným parametrem a :

$$\begin{array}{l} \text{I.} \quad (x - a)^2 = 8(y - x + a - 2) \\ \text{II.} \quad \frac{1 - \log_2 y}{1 - \log_2 x} = 1. \end{array}$$

- **Příklad 3.6** (str. 44): Řešte soustavu rovnic s reálným parametrem a :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = a \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = a^2 \\ \vdots \\ x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n = a^n, \quad \text{kde } (n \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Grafické řešení rovnic

- **Příklad 4.1** (str. 47): Rovnici $|x - p| = |x| - 1$ s reálným parametrem p řešte grafickou metodou.
- **Příklad 4.2** (str. 51): Graficky určete všechny hodnoty reálného parametru a , pro které má rovnice

$$x + \sqrt{x(a - x)} = 1$$

aspoň jedno řešení.

- **Příklad 4.3** (str. 54): V závislosti na hodnotě reálného parametru a určete graficky počet řešení rovnice

$$x|x - 2a| = a + 1.$$

Logaritmické a exponenciální rovnice a nerovnice

- **Příklad 5.1** (str. 58): Řešte nerovnici s kladným parametrem $a \neq 1$:

$$\log_a(x - a) > \log_{\frac{1}{a}}(x + a).$$

- **Příklad 5.2** (str. 59): Řešte rovnici s kladným parametrem a :

$$\log_5 \left(\frac{(x+1)^2}{x} - a \right) = \log_5 \left(\frac{(x+1)^2}{x} \right) - \log_5(a).$$

- **Příklad 5.3** (str. 61): Řešte nerovnici s reálným parametrem a :

$$9^{x+1} + 8a \cdot 3^x - a^2 < 0.$$

- **Příklad 5.4** (str. 63): Řešte rovnici

$$\log_a x \cdot \log_b x = \log_a b,$$

kde a, b jsou kladné parametry různé od čísla 1.

Iracionální rovnice a nerovnice

- **Příklad 6.1** (str. 65): Řešte nerovnici s reálným parametrem a :

$$2\sqrt{x+a} > x+1.$$

- **Příklad 6.2** (str. 68): Řešte rovnici s reálným parametrem a :

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{x-a+2} = 1.$$

- **Příklad 6.3** (str. 70): Řešte rovnici s reálným parametrem a :

$$x = \sqrt{x^2 + 2(a+1)x + 4a} + a.$$

- **Příklad 6.4** (str. 71): Řešte rovnici s reálným parametrem a :

$$\sqrt{a - \sqrt{a+x}} = x.$$

- **Příklad 6.5** (str. 73): Řešte rovnici s reálným parametrem a :

$$\sqrt{x-3} = a - \sqrt{x-7}.$$

- **Příklad 6.6** (str. 75): Řešte rovnici s reálným parametrem p :

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x.$$

- **Příklad 6.7** (str. 76): Najděte všechny trojice (a, b, c) reálných parametrů, při kterých má rovnice

$$\sqrt{x + a\sqrt{x} + b} + \sqrt{x} = c$$

nekonečně mnoho řešení.

Racionální lomené rovnice a nerovnice s parametry

- **Příklad 7.1** (str. 78): V oboru $\mathbb{R}$ řešte nerovnici s reálným parametrem p :

$$\frac{x-3p}{x-p-3} < 0.$$

- **Příklad 7.2** (str. 79): Určete všechny hodnoty reálného parametru a , při kterých má rovnice

$$\frac{x^2 - ax + 4}{x - 3} = 0$$

právě jedno řešení.

- **Příklad 7.3** (str. 80): V oboru $\mathbb{R}$ řešte nerovnici

$$\frac{ax^2}{x-1} \leq (a+1)^2, \quad \text{kde } a \geq 0 \text{ je parametr.}$$

- **Příklad 7.4** (str. 82): Řešte nerovnici s reálným parametrem $a \neq 1$:

$$x - \frac{a}{1-a} < 1 - \frac{x-1}{a-1}.$$

Seznam použité literatury

- [1] BARÁKOVÁ, Miluše. *Metodika výuky středoškolské matematiky: 2.7 Rovnice s parametrem* [online]. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2023 [cit. 2. 5. 2025]. Dostupné z: https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/ps23/metodika_matematiky/web/pages/02_07_rovnice_parametr.html
- [2] BOČEK, Leo, Jaroslav ZHOUF a Jura CHARVÁT. *Matematika pro gymnázia : rovnice a nerovnice*. [Prometheus, 2001]. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 221 s. ISBN 80-7196-154-X.
- [3] PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika : příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. ISBN 8071960993.
- [4] VÁŇA, Jiří. *O rovnicích s parametry*. 2. vydání. Praha: ÚV Matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta, 1970, 61 s.