MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

Úlohy z rovinné geometrie podle I. F. Šarygina

Diplomová práce

Petra Voborníková

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc. **Brno 2021**

Obsah

Přehled použitého značení

Pro snazší orientaci v textu zde čtenáři předkládáme přehled základního značení, které se v celé práci vyskytuje. Je-li v úlohách použito vlastní značení, vždy je na daném místě v textu dle potřeb úlohy nově zavedeno.

A	bod A
p	přímka p
AB	úsečka AB
AB	polopřímka určená body A, B
$\sphericalangle AXB$	úhel AXB
α	úhel α
o	osa o
v_a	výška ke straně a
t_a	těžnice trojúhelníku vedená vrcholem A
S_{AB}	střed úsečky AB
$\triangle ABC$	trojúhelník ABC
$k(S;\ r)$	kružnice k se středem v bodě S a poloměrem r
$X \in p$	bod X leží na přímce p
$p \cap q$	průnik přímky p s přímkou q
τ_{AB}	Thaletova kružnice nad úsečkou AB
$p \perp q$	přímka p je kolmá k přímce q
$p \parallel q$	přímka p je rovnoběžná s přímkou q
$\lvert\sphericalangle AXB\rvert$	velikost úhlu AXB
$\lvert AB\rvert$	velikost úsečky AB

Úvod

Tento text úzce navazuje na autorčinu bakalářskou práci [4]. Hlavní motivací pro její vznik byla potřeba kvantitativně zvýšit množství rozebraných příkladů ze sbírky I. F. Šarygina: *Zadači po geometrii: Planimetria*, která nikdy nebyla přeložena do češtiny.

Stěžejním důvodem pro volbu takto unikátního zdroje byla skutečnost, že úlohy nejsou v původní sbírce doplněny popisem řešení, ale pouze výsledky. Úlohy nejsou v původní sbírce nijak utříděny – toto třídění si autorka práce klade za jeden z cílů. Vzhledem k nejednoznačnosti dělení úloh podle postupu řešení by některé úlohy mohly být zařazeny ve více sekcích. Například pokud je využita sinová věta i mocnost bodu ke kružnici, nalezneme tuto úlohu v jedné ze sekcí a ve druhé se na ni odkazujeme pomocí křížového odkazu.

Potřeba přeložit a vyřešit Šarigynovy úlohy vznikala z více důvodů. Jednak je planimetrie autorčina oblíbená oblast matematiky a jednak si Šaryginova zadání jaksi „nezaslouží" zapadnout na dno knihovního regálu a být zapomenuta. Příklady, které jeho sbírka obsahuje, jsou pozoruhodně rozmanité, často netriviální a nápadité. Někdy bylo jejich řešení tvrdším oříškem, jindy se zdálo snadné.

Igor Fjodorovič Šarygin působil na Moskevské státní univerzitě M. V. Lomonosova v průběhu 50. let, kdy zde studoval, až do 90. let 20. století. Věnoval se popularizaci matematiky, podílel se na vydávání vzdělávacích časopisů, tvořil sbírky. Jednou prý napsal: „Geometrie je fenomén lidské kultury ... Geometrie, stejně jako matematika obecně, pomáhá při morální a etické výchově dětí. ... Geometrie rozvíjí matematickou intuici, seznamuje člověka s nezávislou matematickou kreativitou. Rodný jazyk a literatura, tělesná výchova a matematika jsou tři klíčové složky středoškolského vzdělávání. Ze všech těchto předmětů je to matematika, zejména geometrie, která se zabývá nejširší škálou dlouhodobých a krátkodobých vzdělávacích cílů."

Geometrie byla jeho celoživotní vášní. Po jeho úmrtí v roce 2004 se řada ruských vědeckých organizací a vzdělávacích institucí rozhodla na jeho počest uspořádat každoročně od roku 2005 geometrickou olympiádu. V organizačním výboru a porotě olympiády byli slavní vědci, učitelé i nadšenci matematického vzdělávání z různých ruských regionů. Olympiáda se skládá ze dvou kol - korespondenčního a finále, které probíhá prezenčně.

K šíření Šaryginova odkazu a probouzení vášně a lásky ke geometrii by v naší zemi mohla skromně přispět i tato práce.

Kapitola 1

Teoretický úvod

Následující kapitola je celá převzata z bakalářské práce autorky. V této diplomové práci je zahrnuta ryze z praktických důvodů – aby měl čtenář po ruce ucelený přehled základních pojmů a výsledků středoškolské geometrie. V této kapitole se tedy věnujeme teoretickému úvodu do problematiky planimetrických výpočtů – definice, věty či poučky jsou ve většině případů doslovně převzaty z učebnic [5] a [7].

1.1 Úhly, kružnice

1 Definice. Jsou-li polopřímky VA, VB opačné, je každý z obou úhlů AVB úhel přímý. Dále splývající polopřímky VA, VB určují jednak nulový úhel AVB, který neobsahuje žádné další vnitřní body, jednak plný úhel AVB, jehož vnitřními body jsou všechny ostatní body roviny.

Uvedeme přehled významných dvojic úhlů, které často využijeme v řešení úloh.

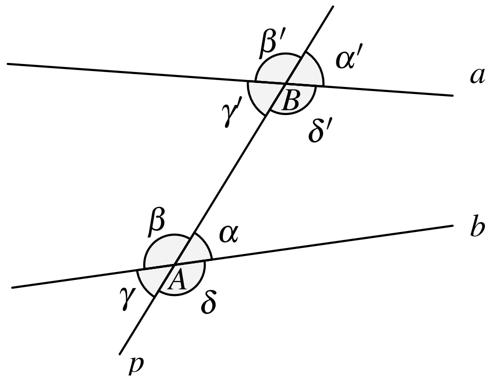
2 Definice. Dva konvexní úhly AVB, AVC, které mají společné rameno VA a ramena VB, VC jsou navzájem opačné polopřímky, se nazývají úhly vedlejší.

3 Definice. Dva konvexní úhly AVB, CVD, jejichž ramena VA, VD a rovněž tak VB, VC jsou navzájem opačné polopřímky, se nazývají vrcholové úhly. Druhou dvojicí vrcholových úhlů jsou konvexní úhly AVC, BVD.

4 Definice. Pravý úhel je takový úhel, který je shodný se svým úhlem vedlejším. Všechny pravé úhly jsou shodné.

Dále zavedeme s pomocí obrázku 1.1 úhly souhlasné a střídavé.

5 Definice. Každý z bodů A, B je vrcholem čtyř konvexních úhlů. Říkáme, že tyto úhly α, β, γ, δ, α', β', γ', δ', jsou vyťaty příčkou p přímek a, b. Dvojice α, α'; β, β'; γ, γ'; δ, δ' se nazývají úhly souhlasné. Nahradíme-li jeden ze dvou souhlasných úhlů úhlem k němu vrcholovým, dostaneme dvojici střídavých úhlů. Dvojice střídavých úhlů tedy jsou α, γ'; β, δ'; γ, α'; δ, β'.



Obr. 1.1: Souhlasné a střídavé úhly

V následující kapitole budeme využívat i tyto poznatky:

- Vrcholové úhly jsou shodné.
- Součet vedlejších úhlů je úhel přímý.
- Jsou-li přímky a, b rovnoběžné, pak každá dvojice souhlasných (střídavých) úhlů vyťatých příčkou p přímek a, b jsou úhly shodné.
- Jestliže jedna dvojice souhlasných (střídavých) úhlů vyťatých příčkou p přímek a, b jsou úhly shodné, pak přímky a, b jsou rovnoběžné.

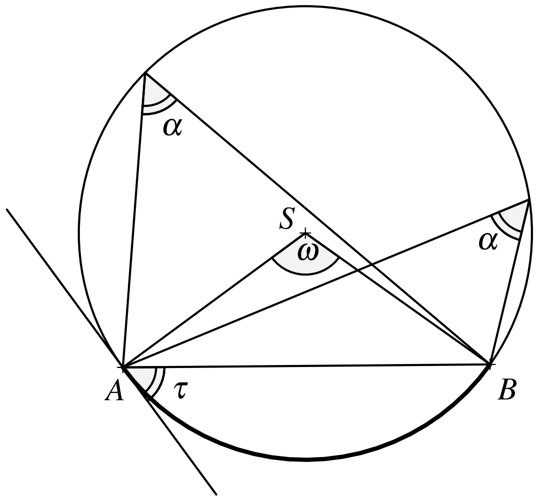
Úhly příslušné oblouku

6 Definice. Úhel, jehož vrcholem je střed S kružnice k a ramena procházejí krajními body oblouku AB kružnice k, se nazývá středový úhel příslušný k tomu oblouku AB, který v tomto úhlu leží.

7 Definice. Každý úhel AVB, jehož vrchol V je bodem kružnice k a ramena procházejí krajními body oblouku AB kružnice k ($V \neq A, V \neq B$), se nazývá obvodový úhel příslušný k tomu oblouku AB, který v tomto úhlu leží.

Platí:

- Velikost středového úhlu je rovna dvojnásobku velikosti obvodového úhlu příslušného k témuž oblouku.
- Úsekový úhel příslušný oblouku je shodný s obvodovými úhly k témuž oblouku.
- Všechny obvodové úhly příslušné k danému oblouku jsou shodné.
- Obvodový úhel příslušný k menšímu oblouku je ostrý.
- Obvodový úhel příslušný k většímu oblouku je tupý.
- Obvodový úhel příslušný k půlkružnici je pravý. (Thaletova věta)



Obr. 1.2: Obvodový, středový a úsekový úhel: $\alpha = \tau = \frac{1}{2}\omega$

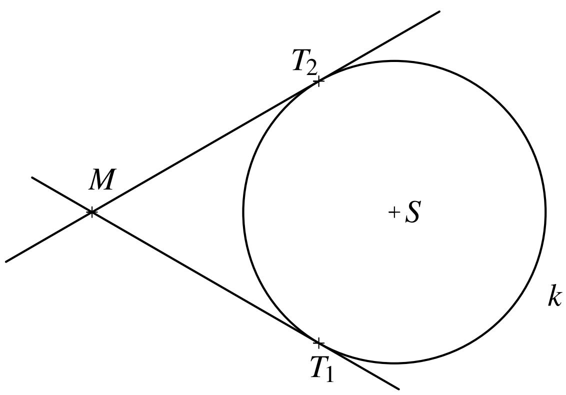
8 Definice. Konvexní úhel BAX (příp. ABX), jehož jedním ramenem je polopřímka AB (popř. BA), kde A, B jsou krajní body oblouku AB kružnice k v bodě A (popř. B), se nazývá úsekový úhel příslušný k oblouku AB, který v tomto úhlu leží.

Další vlastnosti kružnice

Zde se budeme krátce věnovat vybraným vlastnostem kružnice, které využijeme v Kapitole 2. Platí:

- Pata kolmice vedené ze středu kružnice na sečnu AB je středem tětivy AB.
- Tečna kružnice je kolmá k poloměru, který spojuje bod dotyku se středem kružnice.

Bodem M, který leží vně kružnice, procházejí právě dvě tečny kružnice. Délka úsečky MT_1 (MT_2) se nazývá délka tečny. Platí $|MT_1| = |MT_2|$. Situaci znázorníme v obrázku 1.3.



Obr. 1.3: Tečny ke kružnici

1.2 Trojúhelník

9 Definice. Trojúhelník ABC je průnik polorovin ABC, BCA, CAB. Přitom body A, B, C jsou různé a neleží v jedné přímce.

Platí:

- Součet vnitřních úhlů trojúhelníka je úhel přímý.
- Součet každých dvou stran trojúhelníku je větší než strana třetí.
- Proti shodným stranám trojúhelníku leží shodné vnitřní úhly, proti delší straně trojúhelníku leží větší vnitřní úhel a naopak, proti většímu vnitřnímu úhlu leží delší strana.

10 Definice. Výška trojúhelníka je úsečka, jejímiž krajními body jsou vrchol trojúhelníku a pata kolmice vedené tímto vrcholem k přímce určené zbývajícími vrcholy trojúhelníku.

Výšky trojúhelníku se protínají v jediném bodě, tzv. průsečíku výšek, kterému se také říká ortocentrum.

11 Definice. Těžnice trojúhelníku je úsečka, spojující vrchol trojúhelníku se středem jeho protější strany.

12 Definice. Těžnice trojúhelníku se protínají v jednom bodě zvaném těžiště trojúhelníku. Vzdálenost těžiště od vrcholu trojúhelníku je rovna dvěma třetinám délky příslušné těžnice.

Každému trojúhelníku můžeme opsat i vepsat kružnici. Kružnice opsaná trojúhelníku je kružnice procházející všemi vrcholy trojúhelníku. Jejím středem je průsečík os stran trojúhelníku.
Kružnice vepsaná trojúhelníku je kružnice, která se dotýká všech stran trojúhelníku. Jejím středem je průsečík os vnitřních úhlů trojúhelníku.

1.3 Shodnost a podobnost trojúhelníků

13 Definice. Řekneme-li o trojúhelnících ABC a $A'B'C'$, že jsou shodné, znamená to, že při vhodném přemístění přejde bod A do bodu A', bod B do bodu B' a bod C do bodu C'. Zapisujeme $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Shodnost trojúhelníků zpravidla zjišťujeme pomocí známých vět:

- **sss**: Dva trojúhelníky, které se shodují ve všech třech stranách, jsou shodné.
- **usu**: Dva trojúhelníky, které se shodují v jedné straně a úhlech k ní přilehlých, jsou shodné.
- **sus**: Dva trojúhelníky, které se shodují ve dvou stranách a úhlu jimi sevřeném, jsou shodné.

- **Ssu**: Dva trojúhelníky, které se shodují ve dvou stranách a úhlu proti větší z nich, jsou shodné.

14 Definice. Trojúhelník $A'B'C'$ je podobný trojúhelníku ABC, právě když existuje kladné číslo k tak, že pro jejich strany platí $|A'B'| = k \cdot |AB|$, $|B'C'| = k \cdot |BC|$, $|A'C'| = k \cdot |AC|$. Zapisujeme $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Číslo k se nazývá koeficient podobnosti trojúhelníků ABC, $A'B'C'$. Podobnost trojúhelníků zjišťujeme opět pomocí známých vět:

- **uu**: Dva trojúhelníky, které se shodují ve dvou úhlech, jsou podobné.
- **sus**: Dva trojúhelníky, které se shodují v poměru délek dvou stran a úhlu jimi sevřeném, jsou podobné.

1.4 Čtyřúhelníky

15 Definice. Takový n-úhelník, kde $n = 4$, se nazývá čtyřúhelník.

1. Různoběžník je čtyřúhelník, jehož žádné dvě strany nejsou rovnoběžné.
2. Lichoběžník je čtyřúhelník, jehož dvě strany jsou rovnoběžné a zbývající dvě strany nejsou rovnoběžné. Rovnoběžné strany se nazývají základny, zbývající dvě ramena.

   O lichoběžníku víme:

   - Jeho strany nejsou shodné, ramena mohou být shodná. Lichoběžník, jehož ramena jsou shodná, nazýváme rovnoramenný lichoběžník.

   - Jen jedno rameno může být kolmé k základně. Pak je toto rameno kolmé i k druhé základně. Takový lichoběžník nazveme pravoúhlý lichoběžník.

   - Součet vnitřních úhlů při každém rameni lichoběžníku je úhel přímý.

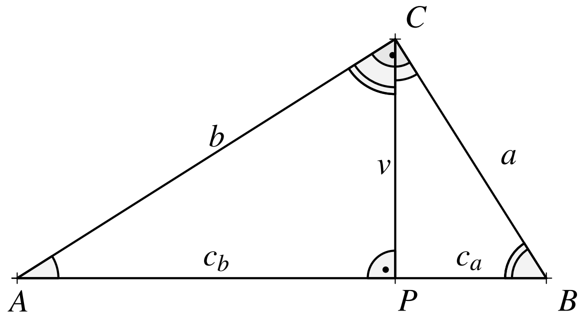
   - Střední příčka lichoběžníku, tj. úsečka spojující středy jeho ramen, je rovnoběžná s oběma základnami. Její délka je rovna aritmetickému průměru délek obou základen.
3. Rovnoběžník je čtyřúhelník, jehož obě dvojice protějších stran jsou rovnoběžné. Podle velikostí úhlů můžeme rovnoběžníky dělit na pravoúhlé (čtverec, obdélník) a kosoúhlé (kosočtverec, kosodélník). Podle délek stran pak na rovnostranné (čtverec, kosočtverec) a různostranné (obdélník, kosodélník).

Základní vlastnosti rovnoběžníku jsou:

- Protější strany rovnoběžníku jsou shodné.
- Protější vnitřní úhly rovnoběžníku jsou shodné.
- Úhlopříčky rovnoběžníku se navzájem půlí; jejich společný bod je středem souměrnosti rovnoběžníku.

1.5 Eukleidovy věty, věta Pythagorova

V libovolném pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C sestrojíme výšku CP k přeponě AB. Označme a, b délky odvěsen, c délku přepony, v výšku k přeponě, c_a, c_b délky úseček BP a AP. Úsečka BP se nazývá úsek přepony přilehlý k odvěsně BC; obdobně úsečka AP se nazývá úsek přepony přilehlý k odvěsně AC. Podle obrázku 1.4 nahlédneme, že každé dva z trojúhelníků ABC, ACP, CBP jsou podobné.



Obr. 1.4: Pravoúhlý trojúhelník ABC

Z podobnosti trojúhelníků ACP a CBP plyne:

$$c_b : v = v : c_a \Rightarrow v^2 = c_a \cdot c_b \Rightarrow v = \sqrt{c_a \cdot c_b}$$

Slovy:

V každém pravoúhlém trojúhelníku je druhá mocnina výšky k přeponě rovna součinu délek obou úseků přepony. (Eukleidova věta o výšce)

Z podobnosti trojúhelníků CBP a ABC plyne

$$a : c_a = c : a \Rightarrow a^2 = c \cdot c_a,$$

analogicky platí

$$b : c_b = c : b \Rightarrow b^2 = c \cdot c_b.$$

Slovy:

V každém pravoúhlém trojúhelníku je druhá mocnina délky odvěsny rovna součinu délek přepony a přilehlého úseku. (Eukleidova věta o odvěsně)

Sečtením předchozích dvou výsledků obdržíme:

$$a^2 + b^2 = c \cdot (c_a + c_b), \text{ neboli } \; a^2 + b^2 = c^2.$$

Takto jsme dostali algebraický zápis Pythagorovy věty:

V každém pravoúhlém trojúhelníku je druhá mocnina délky přepony rovna součtu druhých mocnin délek obou odvěsen.

Platí také věta k ní obrácená:

Platí-li pro délky stran trojúhelníku ABC vztah $a^2 + b^2 = c^2$, je tento trojúhelník pravoúhlý a c je délka jeho přepony.

1.6 Goniometrické vzorce

Zde uvedeme krátký přehled základních goniometrických vzorců. Pro všechna reálná čísla x, y (pro která mají zastoupené hodnoty smysl) platí:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x &= 1 \\
\sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\
\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\
\sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
\cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \\
\sin 2x &= 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \\
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\
\left| \sin \frac{x}{2} \right| &= \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \\
\left| \cos \frac{x}{2} \right| &= \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \\
\sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \\
\sin x - \sin y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} \\
\cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \\
\cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}
\end{aligned}
$$

Dále pro všechna x, y od 0° do 90° platí ekvivalence

$$\sin x = \cos y \Leftrightarrow x + y = 90^\circ.$$

1.7 Trigonometrie

Věta 1.1 (Sinová věta). *Pro každý trojúhelník ABC, jehož vnitřní úhly mají velikosti α, β, γ a strany délky a, b, c, platí*

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Při řešení úloh používáme často sinovou větu ve tvaru

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}, \quad \frac{c}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha};$$

slovy:

Poměr délek stran trojúhelníku se rovná poměru sinů velikostí protilehlých úhlů.

Věta 1.2 (Kosinová věta)**.** *Pro každý trojúhelník ABC, jehož strany mají délky a, b, c a jehož vnitřní úhel proti straně BC má velikost α, platí*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Věta 1.3. *Pro poloměr r kružnice opsané trojúhelníku ABC platí*

$$r = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma}.$$

Věta 1.4. *Pro obsah S každého trojúhelníku ABC, jehož vnitřní úhly mají velikosti α, β, γ a strany délky a, b, c platí*

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta.$$

Kapitola 2

Příklady

V této kapitole se budeme věnovat první části nenápadné tenké knížky *Zadači po geometrii: Planimetria*, jejímž autorem je významný ruský matematik a popularizátor výuky matematiky Igor Fedorovič Šarygin, který do této první části vložil 297 úloh. Autorka práce ve své bakalářské práci [4] podrobně rozebrala 28 z nich, v této diplomové práci rozebírá a třídí dalších 57 úloh. Každá z úloh má ve svém názvu kromě čísla přiděleného kvůli třídění také číslo, které nese jak v originální Šaryginově sbírce, tak v jejím anglickém překladu [8], aby čtenář mohl porovnat původní formulace zadání vybraných úloh s naším překladem do češtiny. Překlad Karla Holého [1] jsme při psaní diplomové práce prakticky nevyužili, ale přesto obsahuje výběr 237 z 297 zadání Šaryginových úloh.

V každé podkapitole uvedeme přehled úloh, které by bylo možné do dané podkapitoly také zařadit, ale byly zařazeny na do jiné sekce.

2.1 Vlastnosti úhlů

V řešení následujících úloh využijeme některé z vlastností úhlů, resp. úhlů příslušných danému kružnicovému oblouku. Mezi tyto úlohy bychom mohli zařadit také Příklad 8, Příklad 15, Příklad 31, Příklad 32, Příklad 35, Příklad 38 a Příklad 50.

Příklad 1, Šar. 68

Kružnice k o poloměru r se dotýká přímky p v bodě M. Na přímce p leží také dva různé body A a B, pro které platí $|AM| = |MB| = a$. Určete poloměr q kružnice l, která prochází body A a B a dotýká se kružnice k.

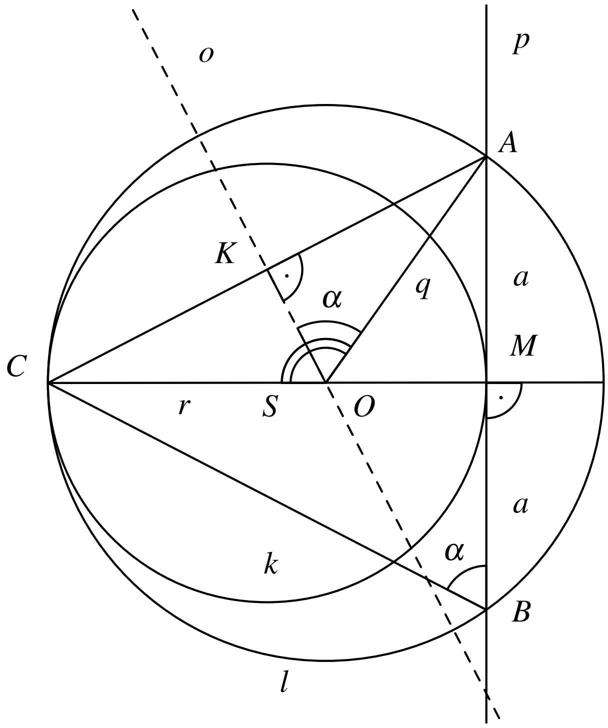
Řešení:

Zavedeme značení podle obrázku. Doplníme-li do zadané situace několik dalších objektů, stane se úloha průhlednější. Úsečka CA je tětivou kružnice l a této tětivě je příslušný obvodový úhel CBA, který jsme označili jako α. Středový úhel COA, v obrázku vyznačen dvojitým obloukem, má tudíž velikost 2α. Tětivu CA jsme dále rozdělili její osou o. Tato osa zároveň rozdělí na poloviny úhel COA, proto úhel KOA má velikost α.

Pro další výpočty bude užitečné si vyjádřit hodnotu $\sin\alpha$ z pravoúhlého trojúhelníku BMC, kde $|CM| = 2r$, $|MB| = a$. Využitím Pythagorovy věty vypočítáme $|CB| = \sqrt{4r^2 + a^2}$.

Proto:

$$\sin\alpha = \frac{2r}{\sqrt{4r^2+a^2}}.$$



Obr. 2.1: Příklad 1

Víme, že platí $|BC| = |CA| = \sqrt{4r^2+a^2}$. Protože bod K je středem tětivy AC, má úsečka KA poloviční délku oproti AC, tzn.

$$|KA| = \frac{|AC|}{2} = \frac{\sqrt{4r^2+a^2}}{2}.$$

Nyní už snadno v pravoúhlém trojúhelníku KAO vypočítáme hledaný poloměr q kružnice l jako velikost jeho přepony AO. Dosaďme a zjednodušme:

$$\sin\alpha = \frac{|KA|}{|AO|} \Rightarrow \frac{2r}{\sqrt{4r^2+a^2}} = \frac{\frac{\sqrt{4r^2+a^2}}{2}}{q} \Rightarrow q = \frac{\frac{\sqrt{4r^2+a^2}}{2}}{\frac{2r}{\sqrt{4r^2+a^2}}} = \frac{4r^2+a^2}{4r}.$$

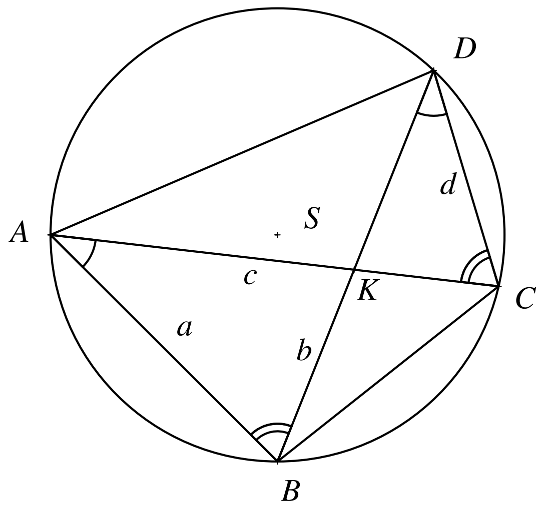
Získali jsme poloměr q kružnice l, která prochází body A a B a dotýká se kružnice k.

Příklad 2, Šar. 80

V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ se úhlopříčky protínají v bodě K. Je dáno: $|AB| = a$, $|BK| = b$, $|AK| = c$, $|CD| = d$. Určete délku úhlopříčky AC.

Řešení:

Hledanou délku úsečky AC určíme jako součet $|AC| = |AK| + |KC| = c + |KC|$. K určení délky $|KC|$ provedeme následující úvahu. Úhly BAC a BDC jsou shodné, neboť jsou to obvodové úhly příslušné oblouku BC. Analogicky jsou shodné úhly ABD a ACD.



Obr. 2.2: Příklad 2

Trojúhelníky ABK a DCK jsou díky tomu podle věty *uu* podobné. Z této podobnosti plyne následující:

$$\frac{|KC|}{d} = \frac{b}{a} \Rightarrow |KC| = \frac{bd}{a},$$

$$|AC| = c + |KC| = c + \frac{bd}{a} = \frac{ac+bd}{a}.$$

Příklad 3, Šar. 116

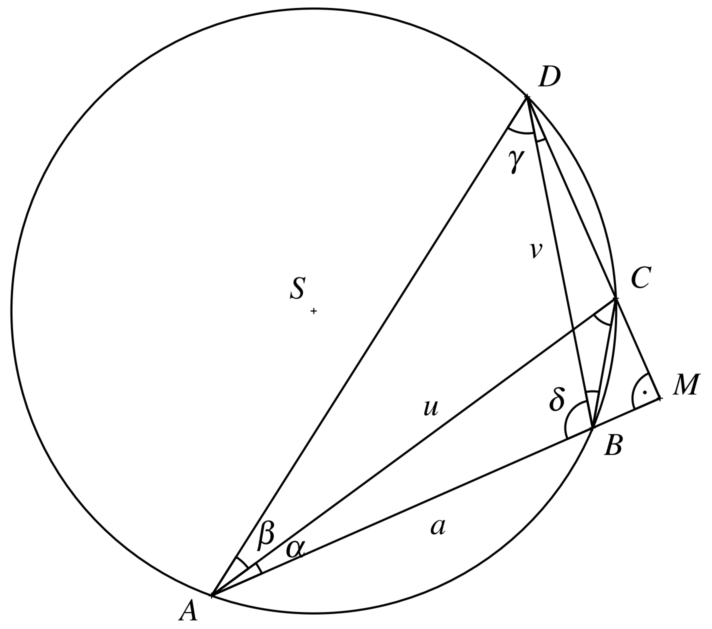
V tětivovém čtyřúhelníku jsou dvě protější strany navzájem kolmé. Jedna z nich má délku a. Ostrý úhel, který přiléhá k této straně je úhlopříčkou rozdělen na dva úhly o velikostech α a β, přitom α přiléhá k dané straně. Určete velikosti obou úhlopříček.

Řešení:

Zavedeme značení podle obrázku. Velikosti úhlopříček u a v vypočítáme užitím sinové věty v trojúhelnících ABC a ABD, ve kterých známe velikost strany AB a postupně určíme velikosti jejich vnitřních úhlů. Úhel ADB jsme označili jako γ. Protože úhel BDC je obvodový úhel příslušný stejnému oblouku jako úhel BAC, je $|\sphericalangle BDC| = \alpha$. Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku AMD je 180°, a protože úhel AMD je pravý, platí: $|\sphericalangle ADB| = \gamma = 180^\circ -$ $- 90^\circ - 2\alpha - \beta = 90^\circ - 2\alpha - \beta$. Platí:

$$\frac{a}{\sin\gamma} = \frac{v}{\sin(\alpha+\beta)} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{a\sin(\alpha+\beta)}{\sin(90^\circ - 2\alpha - \beta)} = \frac{a\sin(\alpha+\beta)}{\cos(2\alpha+\beta)}.$$

Pro výpočet velikosti u úhlopříčky AC potřebujeme vyjádřit velikost úhlu ABC. Jeho velikost je součet velikostí úhlů ABD a DBC. Úhel DBC je obvodový úhel příslušný stejnému oblouku jako úhel DAC – oba mají velikost β. Úhel DBA jsme označili jako δ.



Obr. 2.3: Příklad 3

Pro výpočet velikosti u úhlopříčky AC potřebujeme vyjádřit velikost úhlu ABC. Jeho velikost je součet velikostí úhlů ABD a DBC. Úhel DBC je obvodový úhel příslušný stejnému oblouku jako úhel DAC – oba mají velikost β. Úhel DBA jsme označili jako δ. Součet velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku ABD je 180°. Proto velikost úhlu DBA vypočítáme jako $\delta = 180^\circ - \alpha - \beta - \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta - (90^\circ - 2\alpha - \beta) = 90^\circ + \alpha$. Velikost úhlu BCA je γ, protože je to obvodový úhel příslušný stejnému oblouku, jako úhel ADB. Užijme opět sinovou větu, nyní v trojúhelníku ABC:

$$\frac{a}{\sin\gamma} = \frac{u}{\sin(\beta+\delta)} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{a\sin(\beta + 90^\circ + \alpha)}{\sin(90^\circ - 2\alpha - \beta)} = \frac{a\cos(\alpha+\beta)}{\cos(2\alpha+\beta)}.$$

Určili jsme velikosti obou úhlopříček v závislosti na velikostech a, α a β.

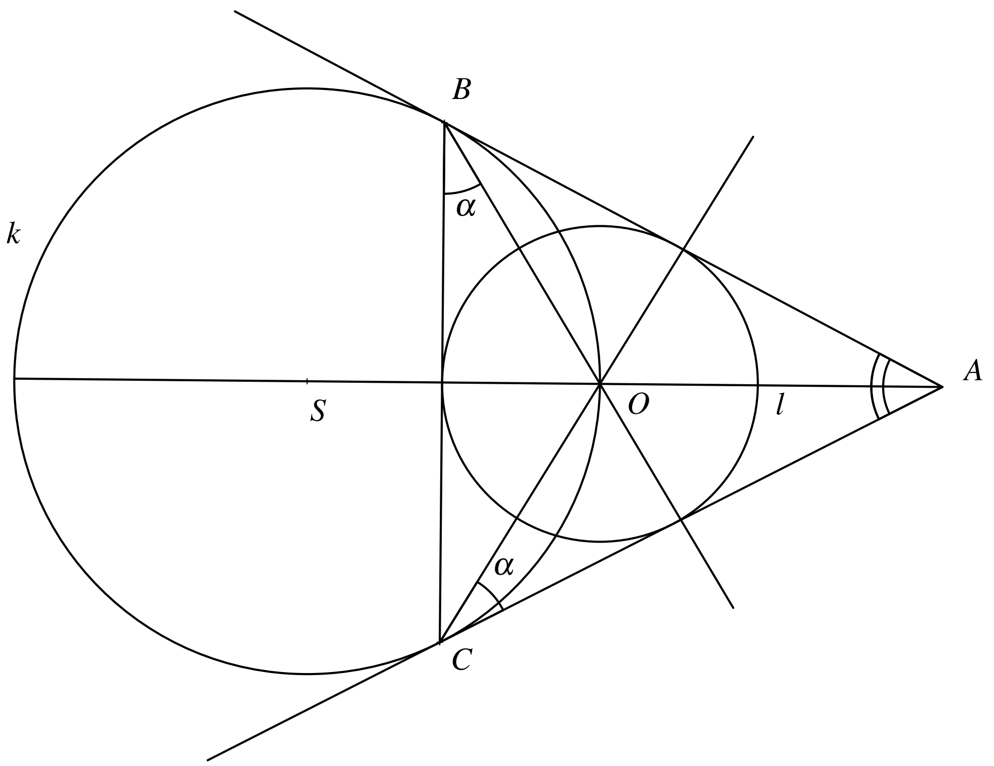
Příklad 4, Šar. 56

Je dána kružnice k a bod A, který leží mimo ni. Z bodu A jsou ke kružnici k vedeny tečny AB a AC, kde body B a C jsou body dotyku. Dokažte, že střed kružnice l vepsané trojúhelníku ABC leží na kružnici k.

Řešení:

Při řešení této úlohy využijeme vlastnosti obvodových a úsekových úhlů příslušných oblouku.

Máme dokázat, že střed O kružnice l vepsané trojúhelníku ABC leží na kružnici k. Pokud by toto tvrzení platilo, ležel by bod O ve středu oblouku BC, neboť zcela jistě leží na přímce AS, která je osou úhlu CAB. Protože platí $|AB| = |AC|$, víme, že trojúhelník ABC je rovnoramenný.



Obr. 2.4: Příklad 4

Aby bod O, tedy průsečík přímky AS a oblouku BC, byl středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC, stačí aby jím procházely osy jeho vnitřních úhlů. To ukážeme. Oblouku CO přísluší obvodový úhel CBO, jehož velikost označíme α. Tomuto oblouku přísluší také úsekový úhel OCA, jehož velikost je rovněž α.

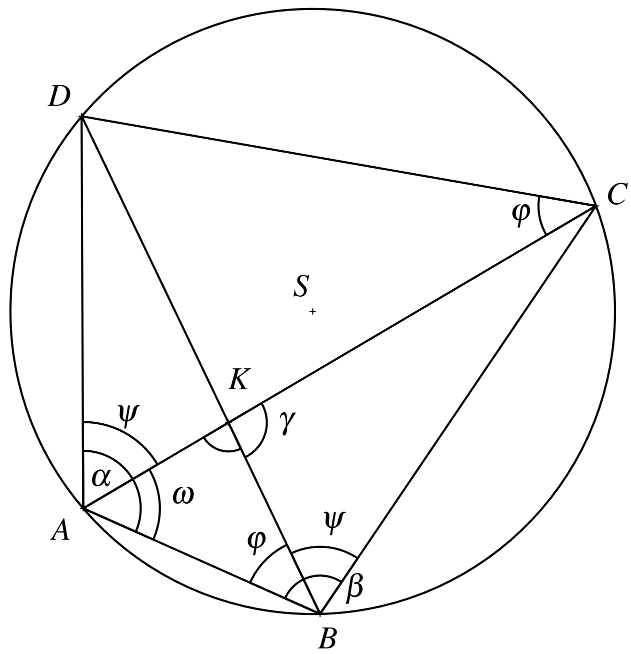
Protože ABC je rovnoramenný, má úhel ABO díky symetrii stejnou velikost jako úhel ACO, tedy α. Potom ale polopřímka BO je osou úhlu ABC a bod O je skutečně středem kružnice l vepsané trojúhelníku ABC.

Příklad 5, Šar. 79

V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ jsou dány velikosti úhlů: $|\sphericalangle DAB| = \alpha$, $|\sphericalangle ABC| = \beta$ a $|\sphericalangle BKC| = \gamma$, kde K je průsečík úhlopříček daného čtyřúhelníka. Určete velikost úhlu ACD.

Řešení:

Zavedeme značení podle obrázku. Naším úkolem je vyjádřit hodnotu φ, tedy velikost úhlu ACD. Úhel ACD je obvodový úhel příslušný oblouku AD. Úhel ABD přísluší stejnému oblouku, má tudíž také velikost φ. Analogicky jsou shodné úhly DAC a DBC, jejichž velikost jsme označili jako ψ.



Obr. 2.5: Příklad 5

Z obrázku plyne následující vztah $\varphi = \beta - \psi$. Obdobně platí $\psi = \alpha - \omega$. Velikost úhlu ω, kterou potřebujeme nahradit v předchozím vztahu vyjádříme v trojúhelníku ABK, kde při vrcholu je úhel o velikosti $180^\circ - \gamma$, neboť je vedlejším úhlem k BKC, který má velikost γ. V trojúhelníku ABK tedy platí $\omega + \varphi + (180^\circ - \gamma) = 180^\circ$, odkud vychází $\omega = \gamma - \varphi$.

Postupně dosazujme:

$$\varphi = \beta - \psi = \beta - (\alpha - \omega) = \beta - \alpha + \gamma - \varphi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\varphi = \beta + \gamma - \alpha \Rightarrow \varphi = \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2}.$$

S pomocí vlastností obvodových úhlů jsme nalezli hledanou velikost φ úhlu ACD. Za zmínku jistě stojí, že s pomocí vlastností obvodových úhlů lze také odvodit známou vlastnost tětivových čtyřúhelníků, že součet velikostí protějších vnitřních úhlů je vždy 180°, kterou jsme v řešení nevyužili.

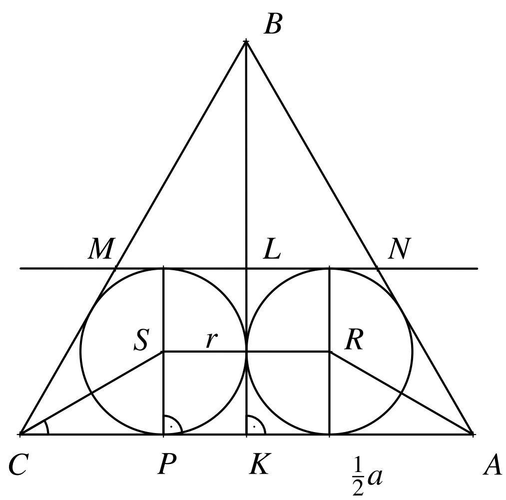
2.2 Základní vlastnosti troúhelníků

V řešení následujících úloh využijeme některé základní vlastnosti trojúhelníků, jako je hodnota součtu vnitřních úhlů, velikost výšky v rovnostranném trojúhelníku, atp. Do této sekce lze zařadit také Příklad 21, Příklad 43, Příklad 52, Příklad 57.

Příklad 6, Šar. 78

V rovnostranném trojúhelníku ABC, kde $|AB| = a$, je provedena výška BK. Do trojúhelníků AKB a CKB jsou vepsány kružnice k a l. Tyto dvě kružnice mají tři společné tečny. Tečna rovnoběžná se stranou AC trojúhelníka ABC, která je různá od přímky AC, protíná strany BC a BA v bodech M, N. Určete obsah trojúhelníka MNB.

Řešení:



Obr. 2.6: Příklad 6

Zavedeme značení podle obrázku. Trojúhelník MNB je zřejmě rovnostranný. Když se nám podaří zjistit velikosti úseček ML a BL, budeme moci jeho obsah S vyjádřit pomocí součinu těchto velikostí: $|ML| \cdot |BL|$.

Poloměr kružnice k, resp. l, jsme označili jako r. Díky tomu $|BK| - 2r = |BL|$. Naším úkolem je nyní pomocí zadané velikosti a strany trojúhelníka ABC vyjádřit velikost $|BK|$ a poměr mezi a a r. Délka $|BK|$, tedy velikost výšky rovnostranného trojúhelníka plyne z jeho základních vlastností. Tedy platí, že $|BK| = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

O kružnici vepsané víme, že její střed leží na průsečíku os vnitřních úhlů trojúhelníka. Trojúhelník ABC je rovnostranný, takže velikost všech jeho vnitřních úhlů je 60°. Proto i úhel PCB má velikost 60° a jelikož úsečka CS leží na ose úhlu ACB, má úhel PCS velikost 30°. Pomocí goniometrické funkce tangens v pravoúhlém trojúhelníku CPS vyjádříme velikost odvěsny CP takto:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \mathrm{tg}\,30^\circ = \frac{|PS|}{|PC|} = \frac{r}{|PC|} \Rightarrow |PC| = r\sqrt{3}.$$

Úsečka CK má délku $\frac{a}{2}$, ale zároveň lze vyjádřit jako $|PC| + |PK| = R\sqrt{3} + r$. Odtud získáme kýžený poměr mezi r a a. Platí

$$r\sqrt{3} + r = \frac{a}{2} \Rightarrow r = \frac{a}{2(1+\sqrt{3})} \cdot \frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{a(1-\sqrt{3})}{2 \cdot (1-3)} = \frac{a}{4} \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right).$$

Odtud

$$|BL| = |BK| - 2r = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a}{2} \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right) = \frac{a}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{3} + 1) = \frac{a}{2}.$$

Dále potřebujeme zjistit velikost úsečky ML. O trojúhelníku MNB víme, že je rovnostranný, protože přímka MN je rovnoběžná se stranou AC. Proto jsou úhly ACB a NMB souhlasné a tudíž mají shodnou velikost. úhel MBN resp. CBA je pro oba trojúhelníky společný a proto jsou $\triangle ABC$ a $\triangle NBM$ podle věty *uu* podobné, tedy oba rovnostranné. V rovnostranném trojúhelníku platí, jak známo, že výška je $\frac{2}{\sqrt{3}}$-násobkem velikosti strany. Proto $|MN| = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot$ $\cdot |BL|$.

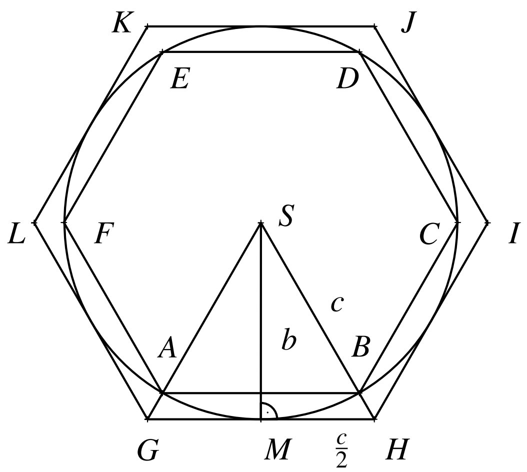
$$S_{MNB} = |ML| \cdot |BL| = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot |BL|^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4\sqrt{3}}.$$

Vypočítali jsme hledaný obsah S_{MNB} trojúhelníka MNB.

Příklad 7, Šar. 77

Je dána kružnice k se středem S, do které je vepsán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ a okolo které je opsán pravidelný šestiúhelník $GHIJKL$. Určete poloměr kružnice k, jestliže rozdíl obvodů daných šestiúhelníků má délku a.

Řešení:



Obr. 2.7: Příklad 7

Zavedeme značení podle obrázku, tedy $|AB| = b$, $|GH| = c$. V rovnostranném trojúhelníku GMH známe velikost výšky b a délku strany c. Ze základních vlastností rovnostranného trojúhelníku plyne vztah mezi těmito délkami, tedy $c = \frac{2}{\sqrt{3}}b$.

Podle zadání platí $6c - 6b = a$. Dosadíme-li do této rovnosti získaný vztah $c = \frac{2b}{\sqrt{3}}$, dostaneme

$$6 \cdot \frac{2b}{\sqrt{3}} - 6b = a \Rightarrow \frac{12b}{\sqrt{3}} - 6b = a \Rightarrow b(4\sqrt{3} - 6) = a \Rightarrow b = \frac{a}{4\sqrt{3} - 6}.$$

Takto jsme získali hledaný poloměr b kružnice k. Usměrněním zlomku ještě převedeme na výsledek, jaký je uveden v Šaryginově sbírce úloh:

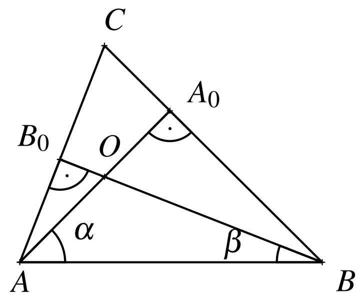
$$b = \frac{a}{4\sqrt{3} - 6} \cdot \frac{4\sqrt{3} + 6}{4\sqrt{3} + 6} = \frac{a(4\sqrt{3} + 6)}{48 - 36} = a\left(\frac{4\sqrt{3}}{12} + \frac{6}{12}\right) = a\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}\right)$$

Příklad 8

Bod O je ortocentrum trojúhelníka ABC. Určete velikosti všech tří vnitřních úhlů trojúhelníka ABC, jestliže platí: $|\sphericalangle BAO| = \alpha$, $|\sphericalangle ABO| = \beta$.

Řešení:

V této úloze záleží na tom, zda jsou úhly α a β oba ostré a nebo je jeden z nich tupý. Proto řešení rozdělíme na tři případy a každý z nich doplníme vlastním obrázkem.



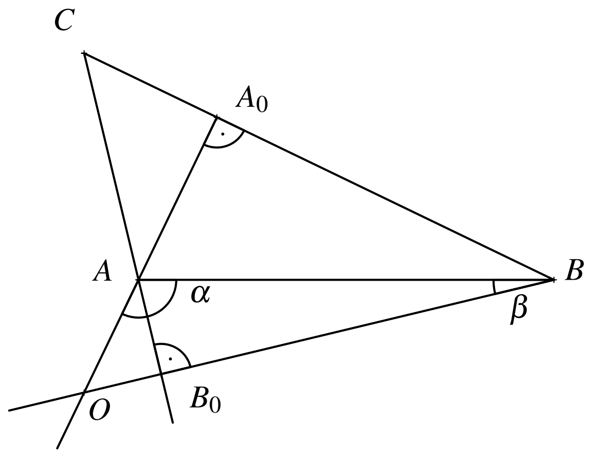
Obr. 2.8: Příklad 8: $\alpha < 90°$, $\beta < 90°$

- V případě $\alpha < 90°$, $\beta < 90°$ leží ortocentrum O uvnitř trojúhelníka ABC. Trojúhelníky ABA_0, ABB_0 jsou pravoúhlé. V trojúhelníku ABA_0 platí $|\sphericalangle BAA_0| = \alpha$. Proto $|\sphericalangle ABA_0| = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$. Stejným způsobem lze odvodit, že $|\sphericalangle BAB_0| = 90° - \beta$. Snadno lze dopočítat, že $|\sphericalangle ACB| = 180° - (90° - \alpha) - (90° - \beta) = \alpha + \beta$.

  Velikosti vnitřních úhlů trojúhelníka ABC tedy jsou $90° - \beta$, $90° - \alpha$ a $\alpha + \beta$.

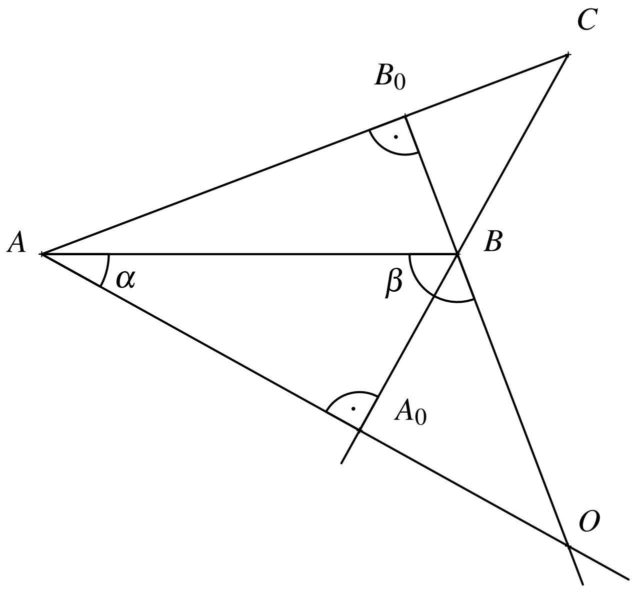
- V případě $\alpha > 90°$, $\beta < 90°$ leží ortocentrum O vně trojúhelníka ABC. Vidíme, že úhel BAA_0 je vedlejší k úhlu OAB, takže platí $|\sphericalangle BAA_0| = 180° - \alpha$.

  Potom v pravoúhlém trojúhelníku ABA_0 platí $|\sphericalangle ABA_0| = 180° - 90° - (180° - \alpha) = \alpha - 90°$. Dále v pravoúhlém trojúhelníku BCB_0 má úhel při vrcholu B velikost $\beta + \alpha - 90°$. Proto platí $|\sphericalangle BCB_0| = 180° - 90° - (\beta + \alpha - 90°) = 180° - \alpha - \beta$. Potom už snadno dopočítáme velikost úhlu BAC. Platí $|\sphericalangle BAC| = 180° - (\alpha - 90°) - (180° - \alpha - \beta) = 90° + \beta$.



Obr. 2.9: Příklad 8: $\alpha > 90^\circ$, $\beta < 90^\circ$

Velikosti vnitřních úhlů trojúhelníka ABC v tomto případě jsou $90^\circ + \beta$, $\alpha - 90^\circ$ a $180^\circ - \alpha - \beta$.



Obr. 2.10: Příklad 8: $\alpha < 90^\circ$, $\beta > 90^\circ$

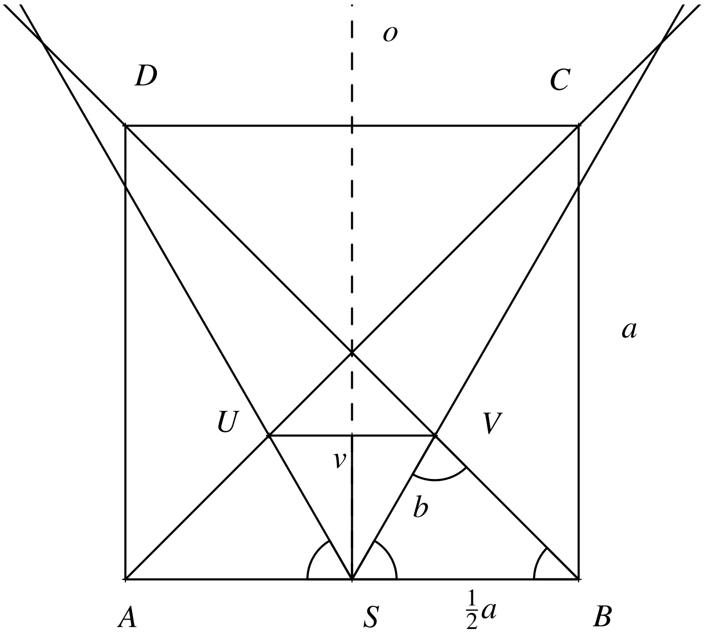
- Případ $\alpha < 90^\circ$, $\beta > 90^\circ$ je prakticky totožný s předchozím, ale přesto ho zde rozebereme, aby byl výsledek kompletní. Platí $|\sphericalangle AOB| = 180^\circ - \alpha - \beta$. V pravoúhlém trojúhelníku AOB_0 má vnitřní úhel při vrcholu A velikost $180^\circ - 90^\circ - (180^\circ - \alpha - \beta) = \alpha + \beta - 90^\circ$. Potom úhel BAC má velikost $\alpha + \beta - 90^\circ - \alpha = \beta - 90^\circ$. V pravoúhlém trojúhelníku AA_0C je $|\sphericalangle ACA_0| = 180^\circ - 90^\circ - (\alpha + \beta - 90^\circ) = 180^\circ - \alpha - \beta$. V trojúhelníku ABC platí $|\sphericalangle ABC| = 180^\circ - (180^\circ - \alpha - \beta) - (\beta - 90^\circ) = \alpha + 90^\circ$.

  Velikosti vnitřních úhlů trojúhelníka ABC jsou $\beta - 90^\circ$, $\alpha + 90^\circ$ a $180^\circ - \alpha - \beta$.

Příklad 9, Šar. 92

Je dán čtverec $ABCD$ o straně a. Určete obsah rovnostranného trojúhelníka, jehož jeden vrchol leží ve středu S strany AB a zbylé dva vrcholy leží na úhlopříčkách čtverce.

Řešení:



Obr. 2.11: Příklad 9

Zavedeme značení podle obrázku. Střed S strany AB leží na ose o úsečky AB, podle které jsou souměrně sdružené i úhlopříčky AC a BD, a tedy i vrcholy U a V rovnostranného trojúhelníku SVU – mají totiž od bodu S stejnou vzdálenost.

V trojúhelníku SBV mají vnitřní úhly velikosti $|\sphericalangle SBV| = 45°$, $|\sphericalangle VSB| = 60°$, $|\sphericalangle BVS| = 75°$. Úsečka SB má délky $\frac{1}{2}a$ a délku strany SV jsme označili jako b. Užitím sinové věty tuto délku b vypočítáme. Hodnotu $\sin 75°$ jsme přesně určili v Poznámce za příkladem 30. Platí:

$$\frac{b}{\sin 45°} = \frac{\frac{1}{2}a}{\sin 75°} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{a \sin 45°}{2 \sin 75°} = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} = \frac{a}{\sqrt{3}+1}.$$

Pro výpočet obsahu rovnostranného trojúhelníka SVU použijeme známý vzorec pro jeho výšku $v = \frac{\sqrt{3}}{2}b$. Nyní můžeme spočítat jeho obsah podle standardního vzorce:

$$S_{SVU} = \frac{bv}{2} = \frac{\sqrt{3}b^2}{4} = \frac{\sqrt{3} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{3}+1}\right)^2}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\left(\sqrt{3}+1\right)^2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\left(3+2\sqrt{3}+1\right)} =$$

$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{4\left(4+2\sqrt{3}\right)} \cdot \frac{\left(4-2\sqrt{3}\right)}{\left(4-2\sqrt{3}\right)} = \frac{a^2\left(4\sqrt{3}-6\right)}{4\left(16-12\right)} = \frac{2a^2\left(2\sqrt{3}-3\right)}{16} = \frac{a^2\left(2\sqrt{3}-3\right)}{8}.$$

Určili jsme obsah rovnostranného trojúhelníka SVU, jehož vrchol S je středem strany AB a vrcholy U a V leží na úhlopříčkách daného čtverce $ABCD$.

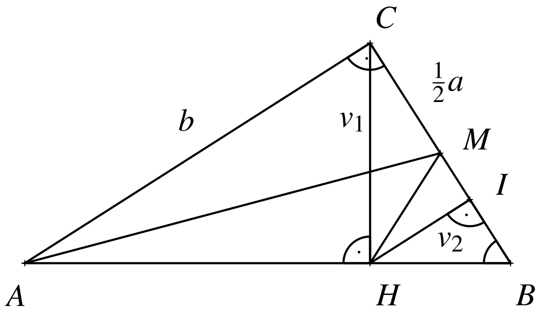
2.3 Podobnost, poměr

V úlohách, které jsou zařazeny do této podkapitoly, užijeme věty o podobnosti trojúhelníků. Dále jsou zde zařazeny úlohy, kde významnou roli v řešení hraje poměr. Kromě úloh, které naleznete v následujícím výčtu, hraje podobnost nebo poměr roli také v řešení úloh: Příklad 2, Příklad 6, Příklad 54, Příklad 56.

Příklad 10, Šar. 72

V pravoúhlém trojúhelníku ABC má odvěsna CA délku b, odvěsna CB délku a a platí, že úsečka CH je výška trojúhelníku ABC a AM jeho těžnice. Určete obsah trojúhelníka BMH.

Řešení:



Obr. 2.12: Příklad 10

Zavedeme značení podle obrázku. Označme dále úhel ABC jako úhel β. Pro úplnost dopočítejme velikost strany AB, která je přeponou pravoúhlého trojúhelníka ABC. Proto platí $|AB| = \sqrt{a^2+b^2}$. Naším cílem je vypočítat obsah S trojúhelníka BMH, o kterém víme, že $|MB| = \frac{a}{2}$ a že jeho výška v_2 na stranu MB je zároveň výškou pravoúhlého trojúhelníka BCH na stranu BC.

O trojúhelníku BCH víme, že jedna z jeho odvěsen HC má délku $v_1 = a \cdot \sin\beta$, ale $\sin\beta$ lze vypočítat i z trojúhelníka ABC jako $\sin\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Odtud $v_1 = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Trojúhelníky ABC a CBH jsou podle věty *uu* podobné, neboť úhel při vrcholu B mají společný a úhly při třetích vrcholech mají pravé. Odpovídající si přepony mají délky a a $\sqrt{a^2+b^2}$. Díky podobnosti je velikost úsečky BC $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$-násobkem velikosti úsečky AC. Stejný vztah platí i pro ostatní odpovídající si úsečky v těchto trojúhelnících. Proto

$$v_2 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot v_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a^2 b}{a^2+b^2}.$$

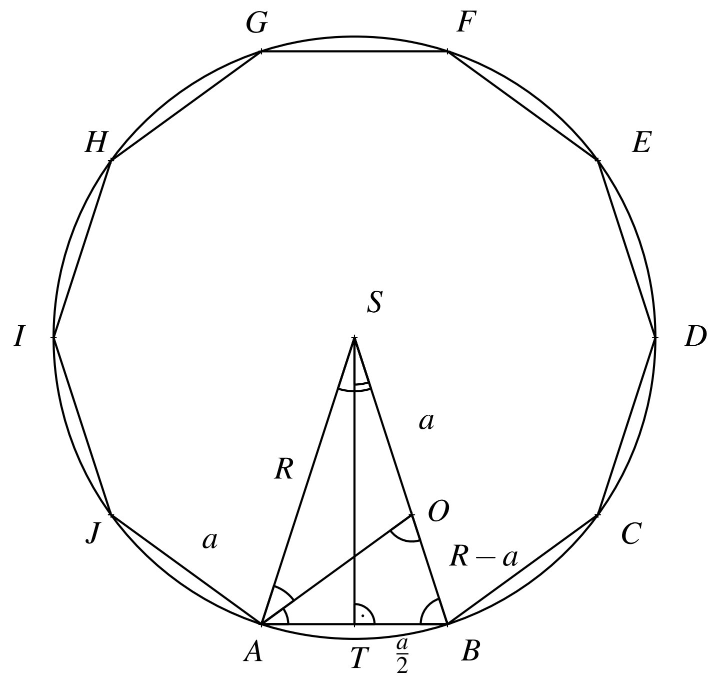
Nyní už můžeme vypočítat obsah trojúhelníka MBH:

$$S = \frac{|MB| \cdot v_2}{2} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a^2 b}{a^2+b^2}}{2} = \frac{a^3 b}{4\left(a^2+b^2\right)}.$$

Příklad 11, Šar. 63

Vyjádřete délku a strany pravidelného desetiúhelníku $ABCDEFGHIJ$ pomocí velikosti R poloměru kružnice, která je tomuto desetiúhelníku opsána.

Řešení:



Obr. 2.13: Příklad 11

Zavedeme značení podle obrázku. Pravidelný desetiúhelník lze rozdělit na deset rovnoramenných trojúhelníků s velikostmi vnitřních úhlů $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$ při vrcholu S a 72° pro zbylé dva vnitřní úhly. Protože sinus je poměr protilehlé odvěsny ku přeponě, platí

$$\sin(|\sphericalangle BST|) = \frac{|BT|}{|BS|} = \frac{\frac{a}{2}}{R} \Rightarrow a = 2R\sin 18^\circ.$$

Původní úloha přechází v zajímavou úlohu, a to jak určit exaktně hodnotu $\sin 18^\circ$. Zaměřme se na trojúhelník ABS. Je rovnoramenný, délka jeho ramen je R a délka základny a. Rozdělíme-li úhel BAS na dva stejné díly jeho osou, protne tato osa stranu BS v bodě O a úhly BAO a OAS mají oba velikost 36°. V trojúhelníku ABO platí $|\sphericalangle OAB| = 36^\circ$, $|\sphericalangle ABO| = 72^\circ$, $|AB| = a$, proto $|\sphericalangle AOB| = 72^\circ$ a $|AO| = a$. Vidíme, že podle věty *uu* je trojúhelník BOA podobný trojúhelníku ABS. Dále vidíme, že v trojúhelníku SAO platí

$|\sphericalangle OSA| = 36^\circ$, $|\sphericalangle SAO| = 36^\circ$, $|AO| = a$. Odtud plyne, že $\triangle SAO$ je rovnoramenný a $|OS| = a$. Úsečka SB má ze zadání délku R. Protože $|BS| = |BO| + |OS|$ a protože $|OS| = a$, víme, že $|BO| = R - a$. Z podobnosti trojúhelníků BOA a ABS plyne vztah

$$\frac{R}{a} = \frac{a}{R-a}.$$

Ten upravíme a dostaneme kvadratickou rovnici $a^2 + Ra - R^2 = 0$, jejíž kořeny snadno vypočítáme.

Těmito kořeny jsou čísla $a_1 = R\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ a $a_2 = R\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. První z nich je určitě záporné číslo, proto naší úloze nevyhovuje. Proto platí mezi a a R následující vztah $a = R\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Takto jsme došli k výsledku, aniž jsme potřebovali určit hodnotu $\sin 18^\circ$, přesto v poznámce tuto hodnotu dopočítáme.

Poznámka. Porovnejme nyní výsledky: $a = 2R\sin 18^\circ$ a $a = R\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Plyne z nich rovnost

$$\sin 18^\circ = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

Zajímavé je, že poměr mezi délkami R a a je hodnotou tzv. zlatého řezu. To je velmi pozoruhodná konstanta vyskytující se mnohokrát nejen v planimetrii, ale i mimo svět matematiky. Zlatým řezem se označuje rozdělení úsečky na dvě části tak, aby platilo, že poměr menší části k větší části bude ten samý jako poměr větší části k celé úsečce. Jedná se o iracionální číslo s přibližnou hodnotou $1,618$ a setkáme se s ním například v architektuře, umění i fotografii.

Toto téma by ovšem stačilo na další diplomovou práci, k dalšímu studiu doporučujeme například knihy [2], [3] a [6].

Příklad 12, Šar. 85

Je dán rovnostranný trojúhelník ABC. Bod K dělí stranu AC v poměru $2:1$ a bod M dělí stranu AB v poměru $1:2$ (v obou případech vycházíme od vrcholu A). Dokažte, že velikost úsečky KM je rovna poloměru kružnice opsané trojúhelníku ABC.

Řešení:

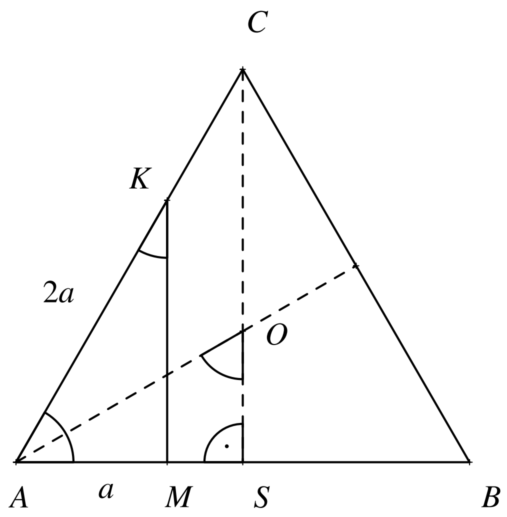
Zavedeme značení podle obrázku. Zadání nám neukládá žádnou velikost strany trojúhelníka ABC, proto ji pro jednoduchost zvolíme jako $3a$. Proto platí $|AM| = a$ a $|AK| = 2a$. Přestože o trojúhelníku AMK tušíme, že je pravoúhlý, budeme to muset dokázat. Jeho vnitřní úhel při vrcholu A má velikost 60°. Užijeme kosinovou větu, neboť známe velikosti dvou stran a úhlu jimi sevřeného v doposud obecném trojúhelníku.

Určíme velikost třetí strany KM:

$$|KM|^2 = 4a^2 + a^2 - 2\cdot 2a\cdot a\cdot\cos 60^\circ = 3a^2 \Rightarrow |KM| = a\cdot\sqrt{3}.$$

Nyní ještě použijeme obrácenou Pythagorovu větu, s jejíž pomocí můžeme ověřit, zda je trojúhelník, u něhož známe délky všech stran, pravoúhlý. V trojúhelníku AMK známe délky všech stran. Tedy požadujeme platnost následující rovnosti:

$$(2a)^2 = a^2 + \left(a\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow 4a^2 = 4a^2$$



Obr. 2.14: Příklad 12

Rovnost zřejmě platí a proto je trojúhelník AMK skutečně pravoúhlý. Proto je podle věty *uu* trojúhelník AMK podobný trojúhelníku OSA. Z této podobnosti plyne vztah $\frac{|MK|}{|KA|} = \frac{|SA|}{|OA|}$. Délka úsečky AS je $\frac{3a}{2}$. Po dosazení:

$$\frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{3a}{2|AO|} \Rightarrow |AO| = a\sqrt{3}.$$

Dokázali jsme, že velikosti úseček KM a AO jsou shodné, při námi zvoleném značení mají délku $a\sqrt{3}$, což je $\frac{\sqrt{3}}{3}$-násobek velikosti strany rovnostranného trojúhelníka.

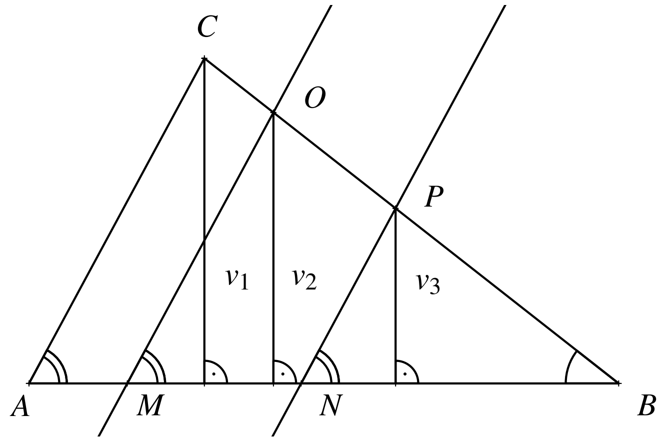
Příklad 13, Šar. 55

V trojúhelníku ABC na straně AB leží body M a N tak, že $|AM| : |MN| : |NB| = 1 : 2 : 3$. Body M a N jsou vedeny přímky rovnoběžné se stranou AC. Určete obsah té části trojúhelníka ABC, která leží mezi těmito rovnoběžkami, jestliže obsah celého trojúhelníka ABC je daná hodnota S.

Řešení:

Zavedeme značení podle obrázku. Trojúhelníky ABC, MBO a NBP jsou podle věty *uu* všechny podobné, protože úhel při vrcholu B mají společný a úhly vyznačené dvojitou čarou jsou souhlasné.

Zadaný poměr $|AM| : |MN| : |NB| = 1 : 2 : 3$ lze obměňovat různými způsoby. Pro nás bude užitečné například vědět, že platí $|MB| = \frac{5}{6}|AB|$, a také $|NB| = \frac{1}{2}|AB|$. Z podobnosti ABC, MBO a NBP plynou proto vztahy $v_2 = \frac{5}{6}v_1$ a $v_3 = \frac{1}{2}v_1$. Ze zadání plyne vztah $\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot v_1 = S$.



Obr. 2.15: Příklad 13

Naším úkolem je vyjádřit obsah čtyřúhelníka $MNPO$, který lze vypočítat jako rozdíl obsahů trojúhelníků MBO a NBP. Tyto obsahy trojúhelníků dokážeme díky podobnosti vyjádřit jako násobky obsahu S trojúhelníka ABC. Platí:

$$S_{MBO} = \frac{1}{2}\cdot|MB|\cdot v_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot|AB|\cdot\frac{5}{6}\cdot v_1 = \frac{25}{36}S,$$
$$S_{NBP} = \frac{1}{2}\cdot|NB|\cdot v_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot\frac{1}{2}\cdot v_1 = \frac{1}{4}S.$$

Odečtěme:

$$S_{MNPO} = S_{MBO} - S_{NBP} = \frac{25}{36}S - \frac{1}{4}S = \frac{25-9}{36}S = \frac{4}{9}S.$$

Nalezli jsme hledaný obsah části trojúhelníka ABC, který je roven $\frac{4}{9}$ celého obsahu.

Příklad 14, Šar. 98

V pravoúhlém trojúhelníku ABC má nejmenší úhel velikost α. Přeponu protíná kolmá přímka p, která rozděluje trojúhelník ABC na dvě části o stejném obsahu. Určete, v jakém poměru rozděluje přímka p přeponu AB.

Řešení:

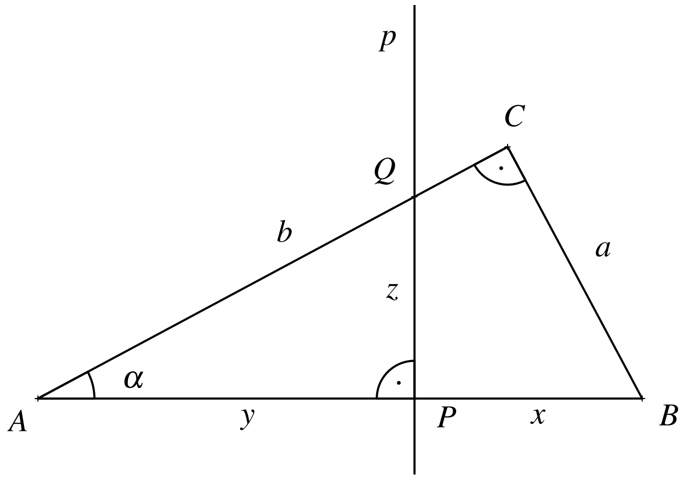
Zavedeme značení podle obrázku (podle zadání přímka p protíná delší odvěsnu AC, jejíž délka je b). V první části řešení ukážeme, že existuje jednoduchá závislost mezi délkami b a y, která nezávisí na úhlu α.

Trojúhelníky ABC a AQP jsou podle věty *uu* podobné. Platí tudíž následující vztah, z něhož rovnou vyjádříme a:

$$\frac{y}{z} = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{bz}{y}$$

Trojúhelník APQ má podle zadání poloviční obsah oproti trojúhelníku ABC. Odtud plyne:

$$a\cdot b = 2\cdot z\cdot y.$$



Obr. 2.16: Příklad 14

Dosadíme za a:

$$\frac{b \cdot b \cdot z}{y} = 2 \cdot z \cdot y \Rightarrow b^2 = 2 \cdot y^2 \Rightarrow y = \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

Nyní délku strany AB využitím goniometrické funkce kosinus vyjádříme jako $|AB| = \frac{b}{\cos\alpha}$, úsečka PB má proto délku:

$$x = |PB| = |AB| - |AP| = |AB| - y = \frac{b}{\cos\alpha} - \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{b(\sqrt{2} - \cos\alpha)}{\sqrt{2}\cos\alpha}.$$

Hledaný poměr $x : y$ získáme dosazením a úpravou:

$$x : y = \frac{b(\sqrt{2} - \cos\alpha)}{\sqrt{2}\cos\alpha} : \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - \cos\alpha}{\cos\alpha} : 1 = (\sqrt{2} - \cos\alpha) : \cos\alpha.$$

Určili jsme, v jakém poměru rozděluje přímka p přeponu pravoúhlého trojúhelníka ABC.

Příklad 15, Šar. 81

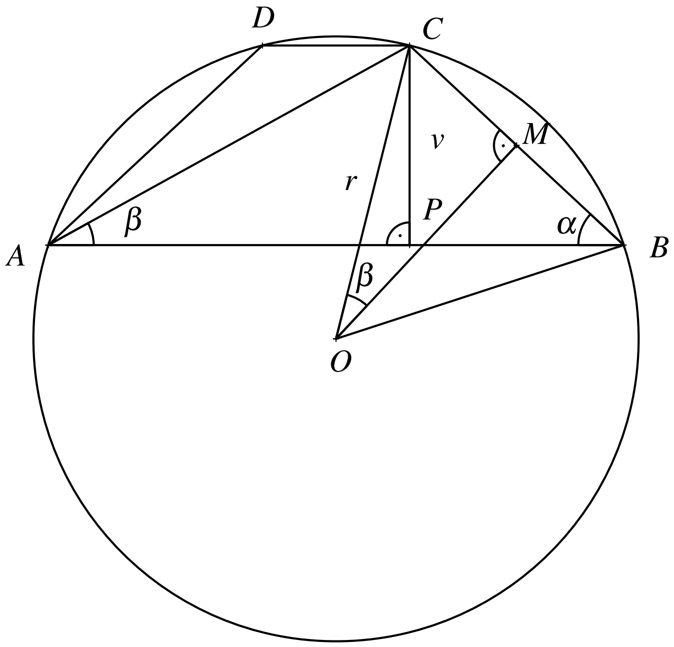
Lichoběžníku $ABCD$ je opsána kružnice. Delší základna AB svírá s ramenem úhel α a s úhlopříčkou úhel β. Určete poměr mezi obsahem lichoběžníka a obsahem kruhu, který je ohraničen opsanou kružnicí.

Řešení:

Zavedeme značení podle obrázku. V této úloze budeme porovnávat dva obsahy – obsah kruhu S_k a obsah lichoběžníka S_l. Lichoběžník, kterému se dá opsat kružnice, je vždy rovnoramenný, neboť osy obou jeho základen jako osy dvou rovnoběžných tětiv opsané kružnice procházejí jejím středem O, takže splývají. Obsah S_l rovnoramenného lichoběžníku $ABCD$ je zřejmě roven dvojnásobku obsahu trojúhelníku APC, tj. $S_l = |AP| \cdot |PC|$.

Úhel CAB je obvodový úhel příslušný kratšímu oblouku BC. Protože úhel BOC je středový úhel příslušný témuž oblouku, platí $|\sphericalangle BOC| = 2\beta$. Trojúhelník BOC je rovnoramenný s rameny o délce r. Jeho výška MO splývá s osou úhlu BOC, a proto má úhel MOC velikost β. Trojúhelníky APC a OMC jsou tudíž podobné podle věty *uu*.

V pravoúhlém trojúhelníku MOC vyjádříme velikost strany MC jako $|MC| = r\sin\beta$ a dále velikost strany OM jako $|OM| = r\cos\beta$. Úsečka BC má tedy velikost $|BC| = 2r\sin\beta$. Výšku $v = |PC|$ lze z pravoúhlého trojúhelníka PBC vyjádřit jako $v = |BC| \cdot \sin\alpha = 2r\sin\alpha\sin\beta$. Délku úsečky AP vypočítáme díky podobnosti trojúhelníků APC a OMC.



Obr. 2.17: Příklad 15

Platí:

$$\frac{|AP|}{|PC|} = \frac{|OM|}{|MC|} \Rightarrow |AP| = \frac{|PC| \cdot |OM|}{|MC|} = \frac{2r^2 \sin\alpha\sin\beta\cos\beta}{r\sin\beta} = 2r\sin\alpha\cos\beta.$$

Obsah S_l lichoběžníka $ABCD$ vypočítáme dosazením a užitím goniometrických vzorců následovně:

$$S_l = |AP| \cdot |PC| = 2r\sin\alpha\cos\beta \cdot 2r\sin\alpha\sin\beta = 2r^2\sin^2\alpha\sin 2\beta.$$

Obsah S_k kruhu je πr^2. Poměr mezi obsahy tedy je:

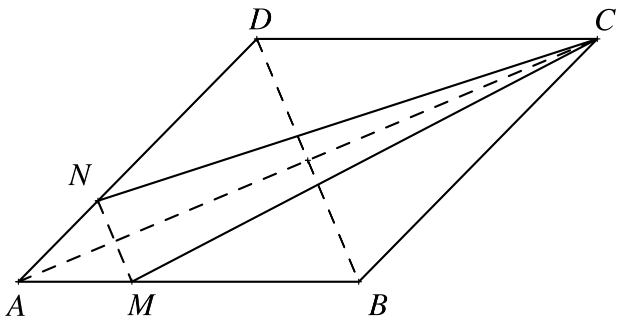
$$S_k : S_l = \pi r^2 : \left(2r^2\sin^2\alpha\sin 2\beta\right) = \pi : \left(2\sin^2\alpha\sin 2\beta\right).$$

Příklad 16, Šar. 54

Na stranách AB a AD kosočtverce $ABCD$ jsou dány po řadě body M a N tak, že úsečky MC a NC dělí kosočtverec na tři části téhož obsahu. Určete $|MN|$, jestliže $|BD| = d$.

Řešení:

Úhlopříčka AC rozděluje kosočtverec na shodné trojúhelníky ABC a CDA. Jestliže úsečky MC a NC rozdělují kosočtverec na tři stejně velké části, rozděluje úsečka MC trojúhelník ABC na dva trojúhelníky, jejichž obsahy S_{AMC} a S_{MBC} jsou v poměru $S_{AMC} : S_{MBC} = 1 : 2$. My víme, že pokud je trojúhelník rozdělen úsečkou jdoucí z jednoho vrcholu na protější stranu, jsou úseky protější strany ve stejném poměru, jako obsahy nově vzniklých trojúhelníků. Proto $|AM| : |MB| = 1 : 2$.



Obr. 2.18: Příklad 16

Analogicky $|AN| : |ND| = 1 : 2$. Trojúhelníky AMN a ABD jsou oba rovnoramenné se stejným úhlem při vrcholu A. Jsou proto podobné a platí $|AM| : |AB| = |MN| : |BD|$. Protože ale $|AM| = \frac{1}{3}|AB|$, plyne odtud, že hledaná velikost úsečky MN je:

$$|MN| = \frac{1}{3} \cdot |BD| = \frac{d}{3}.$$

2.4 Pythagorova věta

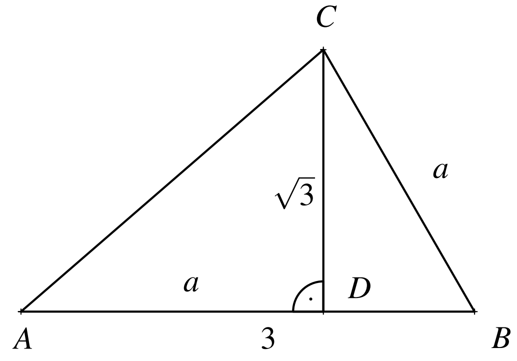
Kdybychom měli do této sekce zařadit všechny úlohy, kde k řešení užíváme Pythagorovu větu, patřila by sem snad většina úloh. Proto jsou zde zařazeny pouze úlohy, kde Pythagorova věta hraje hlavní, nebo alespoň hlavnější roli. Dále se vyskytuje v řešení úloh:
Příklad 1, Příklad 12, Příklad 25, Příklad 29, Příklad 43, Příklad 51, Příklad 52, Příklad 53 a Příklad 56.

Příklad 17, Šar. 95

V trojúhelníku ABC má strana AB délku 3 a výška CD spuštěná na stranu AB má délku $\sqrt{3}$. Pata výšky D leží na straně AB a platí $|AD| = |BC|$. Určete $|AC|$.

Řešení:

Nejprve v pravoúhlém trojúhelníku DBC pomocí Pythagorovy věty vypočítáme a.



Obr. 2.19: Příklad 17

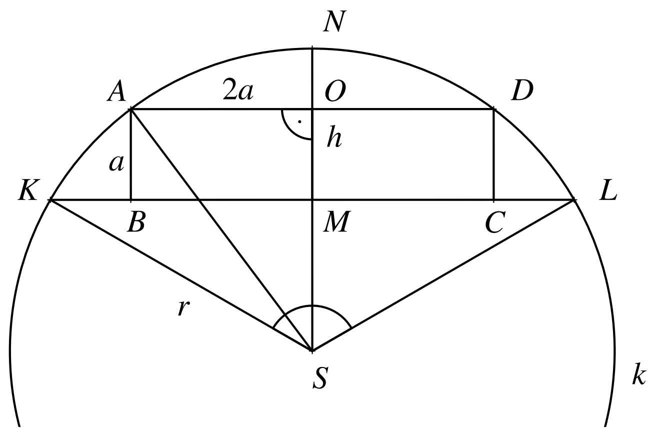
Platí $|DB| = |AB| - |AD| = 3 - a \Rightarrow |BC|^2 = |CD|^2 + |DB|^2 \Rightarrow a^2 = 3 + (3-a)^2 \Rightarrow a = 2$. Délku strany AC opět s pomocí Pythagorovy věty vypočítáme v trojúhelníku ADC. Platí: $|AC|^2 = 3 + a^2 \Rightarrow |AC|^2 = 3 + 4 \Rightarrow |AC| = \sqrt{7}$.

Určili jsme velikost strany AC.

Příklad 18, Šar. 61

Do kruhové úseče o dané výšce h a příslušném středovém úhlu 120° je vepsán obdélník $ABCD$ s poměrem stran $|AB| : |BC| = 1 : 4$ (strana BC leží na tětivě, která ohraničuje danou kruhovou úseč). Určete obsah tohoto obdélníku.

Řešení:



Obr. 2.20: Příklad 18

Zavedeme značení podle obrázku. Pro výpočet obsahu obdélníku $ABCD$, jehož strany mají podle zadání délky a a $4a$, musíme vyjádřit délku a pomocí jediné dané délky h. Nejdříve však musíme zjistit, jak na této výšce h kruhové úseče závisí poloměr r jejího oblouku.

Proveďme následující úvahu.

V pravoúhlém trojúhelníku KSM známe velikost přepony $|KS| = r$ a velikost úhlu $|\sphericalangle KSM| = 60^\circ$. (Přímka SN je osou úhlu KSL, jehož velikost je 120°.) S pomocí goniometrických funkcí vyjádříme délku jeho odvěsny SM.

$$\cos 60^\circ = \frac{|SM|}{r} \Rightarrow |SM| = \frac{r}{2}.$$

Proto platí $h = |MN| = |SN| - |MN| = r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}$, odkud $r = 2h$.

Platí tedy také $|SM| = h$. V pravoúhlém trojúhelníku ASO jistě platí následující – délka jeho přepony $|AM|$ je $2h$. Dále víme, že délka odvěsny AO je $2a$, neboť se jedná o polovinu délky strany obdélníka $ABCD$, jehož strany mají délky a a $4a$, a konečně o odvěsně OS víme, že pro její délku platí: $|OS| = |OM| + |SM| = a + h$. Užijeme Pythagorovu větu v zmiňovaném trojúhelníku ASO a po dalších úpravách získáme hledaný vztah mezi délkami a a h.

$$(2h)^2 = (2a)^2 + (a+h)^2 \Rightarrow 4a^2 + a^2 + 2ah + h^2 - 4h^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5a^2 + 2ah - 3h^2 = 0 \Rightarrow a_{1,2} = \frac{-2h \pm 8h}{10}.$$

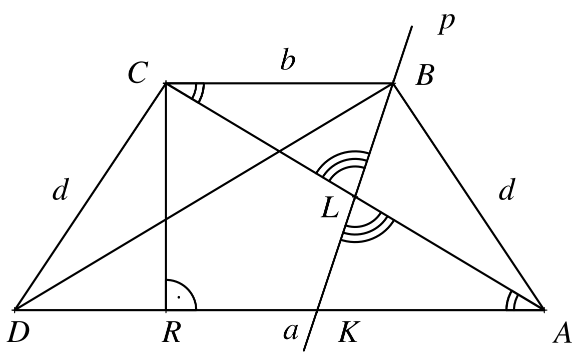
Ze dvou kořenů kvadratické rovnice musíme vybrat právě ten nezáporný, v našem případě po zjednodušení výrazu $a = \frac{3}{5}h$. Nyní už snadno vypočítáme hledaný obsah S_O obdélníku $ABCD$:

$$S_O = a \cdot 4a = \frac{3}{5}h \cdot 4 \cdot \frac{3}{5}h = \frac{36}{25}h^2.$$

Příklad 19, Šar. 82

V rovnoramenném lichoběžníku $ABCD$ má základna DA délku a, základna BC délku b, $|AB| = d$. Vrcholem B vede přímka p procházející středem L úhlopříčky AC a protínající základnu AD v bodě K. Určete obsah S trojúhelníka BDK.

Řešení:



Obr. 2.21: Příklad 19

Zavedeme značení podle obrázku. Protože bod L je středem úsečky AC, mají úsečky AL a CL shodnou délku. Dále jsou shodné střídavé úhly BCL a LAK a také vrcholové úhly

BLC a *KLA*. Proto podle věty *usu* jsou trojúhelníky *KAL* a *BCL* shodné. Odtud plyne, že $|CB| = |AK|$. Z rovnosti $|DA| - |KA| = |DK|$ plyne rovnost $|DK| = |a - b|$. Známe tedy velikost jedné ze stran trojúhelníka *DKB*. Určíme-li výšku na tuto stranu, můžeme snadno vypočítat hledaný obsah trojúhelníka. Výška na stranu *DK* trojúhelníka *BDK* je ale shodná s výškou lichoběžníka *ABCD*, kterou vypočítáme pomocí Pythagorovy věty užité v pravoúhlém trojúhelníku *DRC*, o jehož odvěsně *DR* víme, že má délku $\frac{|a-b|}{2}$, což plyne z toho, že lichoběžník *ABCD* je rovnoramenný.

$$|RC|^2 = d^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \Rightarrow |RC| = \sqrt{d^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$$

Obsah *S* trojúhelníka *DKB* vypočítáme z obvyklého vzorce

$$S = \frac{a \cdot v_a}{2},$$

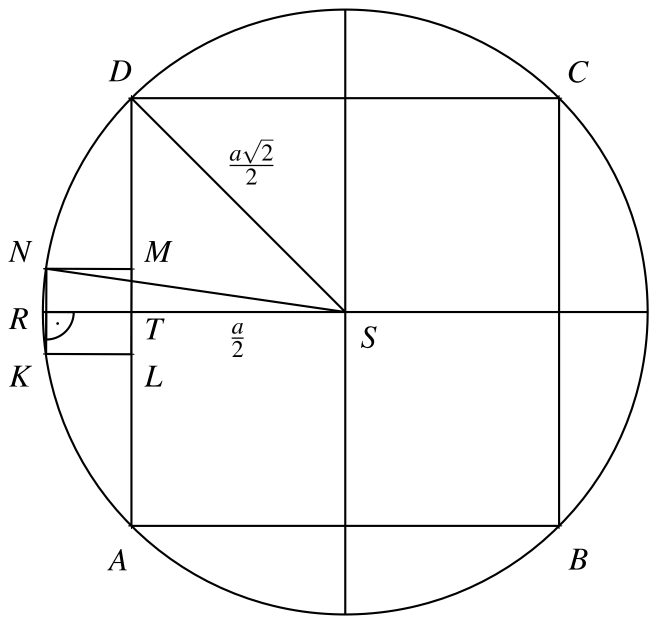
v našem případě

$$S = \frac{|DK| \cdot |RC|}{2} = \frac{|a-b| \cdot \sqrt{d^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}}{2} = \frac{|a-b|}{4} \cdot \sqrt{4d^2 - (a-b)^2}.$$

Příklad 20, Šar. 60

Čtverec *ABCD* o straně *a* je vepsán kružnici *k*. Určete velikost *b* strany čtverce *KLMN*, který lze vepsat do některé ze čtyř vzniklých kruhových úsečí.

Řešení:



Obr. 2.22: Příklad 20

Zavedeme značení podle obrázku. Velikost b strany čtverce $KLMN$ dokážeme zjistit využitím Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku RSN, kde $|RN| = \frac{b}{2}$, a velikosti $|SN|$ a $|SR|$ určíme níže. Zaměřme se na $|SN|$ – jedná se vlastně o poloměr kružnice k, která je opsaná čtverci o straně a. Poloměr této kružnice je roven polovině úhlopříčky daného čtverce. V našem případě proto platí $|SN| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Velikost úsečky SR je součtem velikostí úseček RT a TS, kde $|RT| = b$ a $|TS| = \frac{a}{2}$. Nyní se vraťme k trojúhelníku RSN. Je zřejmě pravoúhlý a známe velikosti všech jeho stran. Dosadíme-li je do Pythagorovy věty, dostaneme rovnici pro neznámou délku b závislou na délce a. Rovnici postupně upravíme na jednodušší tvar.

$$|NS|^2 = |NR|^2 + |RS|^2 \Rightarrow \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 \cdot 2}{4} = \frac{b^2}{4} + b^2 + ab + \frac{a^2}{4} \Rightarrow \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} - b^2 - \frac{b^2}{4} - ab = 0 \Rightarrow$$

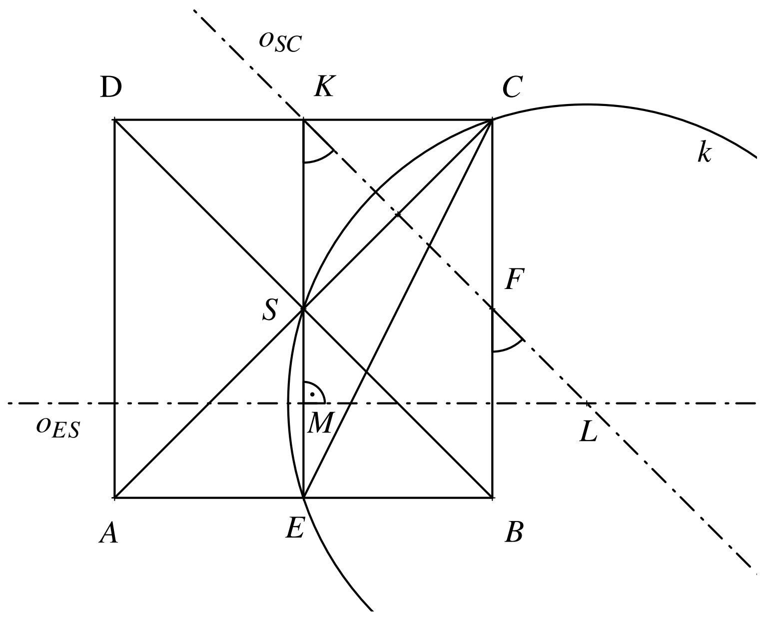
$$\Rightarrow \frac{a^2}{4} - ab - \frac{5b^2}{4} = 0 \Rightarrow a^2 - 4ab - 5b^2 = 0.$$

Tato rovnice má kořeny $b_1 = -a$, $b_2 = \frac{a}{5}$. Ale a i b jsou zřejmě kladná čísla, proto úloze vyhovuje pouze řešení $b = \frac{a}{5}$.

Příklad 21, Šar. 65

Je dán čtverec $ABCD$ o straně a. Určete poloměr kružnice k, která prochází středem E strany AB, průsečíkem S úhlopříček AC, BD a vrcholem C.

Řešení:



Obr. 2.23: Příklad 21

Zavedeme značení podle obrázku. Nejprve je nutno si uvědomit, že hledáme poloměr kružnice opsané trojúhelníku ECS. Odůvodníme, kde leží její střed L a pak vypočítáme jeho vzdálenost od libovolného z bodů E, S nebo C. Jak víme, střed kružnice opsané trojúhelníku leží na průsečíku os stran trojúhelníku. V obrázku jsou zakresleny pouze dvě z těchto os, o_{SC} a o_{ES}, protože dvě osy nám k určení bodu L stačí.

Trojúhelník KML je zřejmě pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu M, protože osa o_{ES} je kolmá na úsečku ES. Velikost úhlu při vrcholu K je $45°$ (rozmyslete si podle obrázku), proto i úhel při vrcholu L má velikost $180° - 90° - 45° = 45°$. Trojúhelník KML je proto rovnoramenný a platí

$$|LM| = |KM| = |KS| + |SM| = |KS| + \frac{1}{2}|SE| = \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a = \frac{3}{4}a.$$

Nyní užitím Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku EML dostaneme

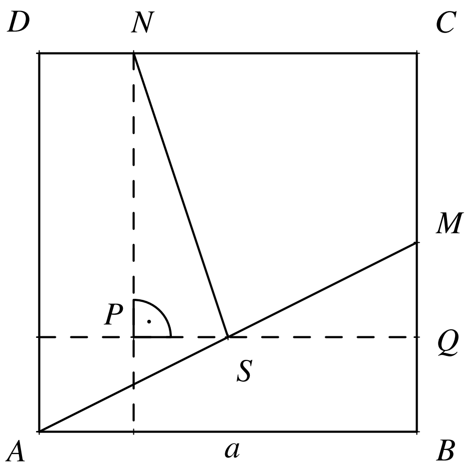
$$|EL|^2 = \left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2 = \frac{10}{16}a^2 \Rightarrow |EL| = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

Velikost úsečky EL je hledaným poloměrem kružnice k.

Příklad 22, Šar. 70

Je dán čtverec $ABCD$ o straně a. Určete vzdálenost mezi středem S úsečky AM, kde M je střed strany BC, a bodem N, který leží na straně CD tak, že platí $|CN| : |ND| = 3 : 1$.

Řešení:



Obr. 2.24: Příklad 22

Teprve když do obrázku zadané situace doplníme přerušovanou čarou narýsované úsečky, zjistíme, že výpočet bude vcelku snadný. Vznikne tak pravoúhlý trojúhelník PSN, jehož odvěsny mají délky $|PN| = \frac{3}{4}a$ a $|PS| = \frac{1}{4}a$. Proto užitím Pythagorovy věty zjistíme snadno délku přepony $|SN|$:

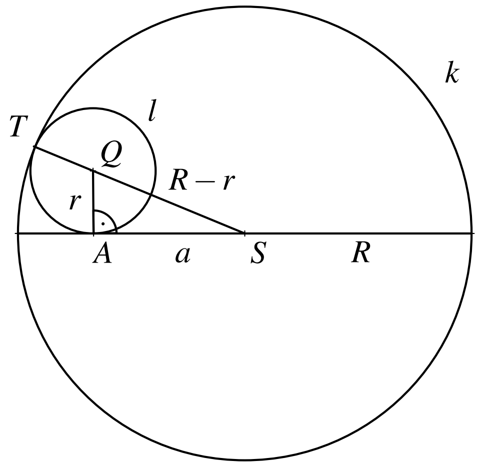
$$|SN| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a\right)^2 + \left(\frac{3}{4}a\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{16} + \frac{9a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

Příklad 23, Šar. 75

V kružnici k o poloměru R je narýsován průměr a na něm leží bod A ve vzdálenosti a od středu S kružnice k. Určete poloměr r kružnice l, která se dotýká průměru v bodě A a s kružnicí k má vnitřní dotyk.

Řešení:

Zavedeme značení podle obrázku. Hledaný poloměr r vyjádříme s pomocí pravoúhlého trojúhelníka ASQ. Pro jeho strany platí platí $|AS| = a$, $|AQ| = r$ a $|SQ| = |ST| - |TQ| = R - r$.



Obr. 2.25: Příklad 23

Užijme Pythagorovu větu:

$$a^2 + r^2 = (R - r)^2 \Rightarrow a^2 + r^2 = R^2 - 2Rr + r^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r = \frac{R^2 - a^2}{2R}$$

Vypočítali jsme délku r poloměru kružnice k.

Příklad 24, Šar. 112

Je dán kosodélník $ABCD$, ve kterém $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|\sphericalangle ABC| = \alpha$. Určete vzdálenost mezi středy kružnic, které jsou opsány trojúhelníkům ABD a BCD.

Řešení:

Zavedeme značení podle obrázku. Protože kosodélník $ABCD$ je souměrný podle středu M úhlopříčky BD, jsou kružnice opsané trojúhelníkům ABD a BCD shodné, a pro jejich vzdálenost jejich středů S_1, S_2 platí $|S_1S_2| = 2|S_1M|$.

Úhel ABC má podle zadání velikost α. Proto úhel DAB má velikost $180^\circ - \alpha$. Pro tyto úhly platí $\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$ a $\cos\alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$. Známe-li kosinus úhlu DAB

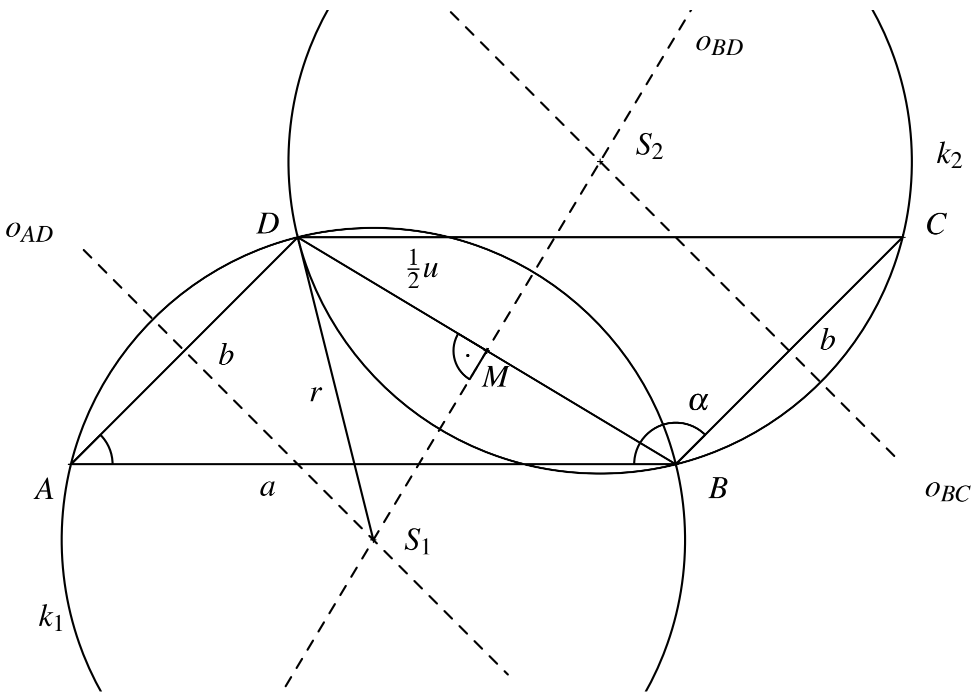
a délky stran DA a AB trojúhelníku ABD, můžeme užitím kosinové věty vypočítat délku jeho třetí strany DB:

$$|DB|^2 = b^2 + a^2 - 2ab(-\cos\alpha) = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |DB| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}.$$

Užitím rozšířené sinové věty lze vypočítat velikost poloměru r kružnice k_1 opsané trojúhelníku ABD. Platí:

$$2r = \frac{|DB|}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{|DB|}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}}{2\sin\alpha}.$$



Obr. 2.26: Příklad 24

Nyní užijeme Pythagorovu větu v pravoúhlém trojúhelníku S_1MD, kde $|S_1D| = r$ a $|DM| = \frac{1}{2}|DB|$. Platí:

$$|S_1M|^2 = r^2 - \left(\frac{1}{2}|DB|\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}{(2\sin\alpha)^2} - \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{4\sin^2\alpha} - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha\right) = \frac{1 - \sin^2\alpha}{4\sin^2\alpha} \cdot \left(a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha\right) =$$

$$= \frac{\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha} \cdot \left(a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha\right) = \frac{\operatorname{cotg}^2\alpha}{4} \cdot \left(a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha\right).$$

Odmocněním určíme velikost $|S_1M|$. Tu pak vynásobíme podle úvodu řešení dvěma, abychom určili velikost $|S_1S_2|$:

$$|S_1M| = \frac{|\operatorname{cotg}\alpha|}{2}\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha} \;\Rightarrow\; |S_1S_2| = |\operatorname{cotg}\alpha|\cdot\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}.$$

Vypočítali jsme vzdálenost středů dvou kružnic, které jsou opsány trojúhelníkům ABD a BCD v kosodélníku $ABCD$.

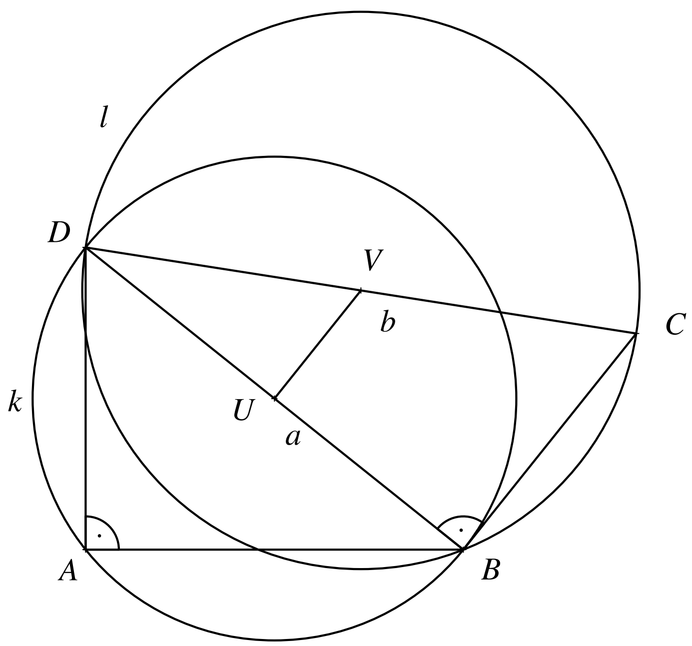
2.5 Thaletova věta

V následujících dvou úlohách užijeme při řešení Thaletovu větu. Dále ji užijeme v Příkladu 50 a Příkladu 53.

Příklad 25, Šar. 53

V čtyřúhelníku $ABCD$ je dáno: $|\sphericalangle DAB| = 90^\circ$, $|\sphericalangle DBC| = 90^\circ$, $|DB| = a$ a $|DC| = b$. Určete vzdálenost mezi středy dvou kružnic, z nichž jedna prochází body D, A, B a druhá body B, C, D.

Řešení:



Obr. 2.27: Příklad 25

Zavedeme značení podle obrázku. O kružnici k víme, že prochází body A, B, D. To ale neznamená nic jiného, než že se jedná o kružnici opsanou trojúhelníku ABD, o kterém navíc víme, že je pravoúhlý. Je-li pravoúhlému trojúhelníku opsána kružnice, je to Thaletova kružnice nad průměrem BD, tedy přeponou pravoúhlého trojúhelníka. Potom střed U této kružnice leží ve středu úsečky DB a poloměr této kružnice je $\frac{1}{2}a$. Analogicky: kružnice l je opsána trojúhelníku BCD, proto její střed V leží ve středu přepony CD. Poloměr kružnice l je $\frac{1}{2}b$.

Úsečka UV tedy spojuje středy stran BD a CD v trojúhelníku BCD. Je to tudíž střední příčka, o které víme, že má poloviční délku oproti straně, se kterou je rovnoběžná. Platí tedy $|BC| = 2|UV|$. Strana BC je ale odvěsna pravoúhlého trojúhelníka DBC, takže její délku vypočítáme s užitím Pythagorovy věty:

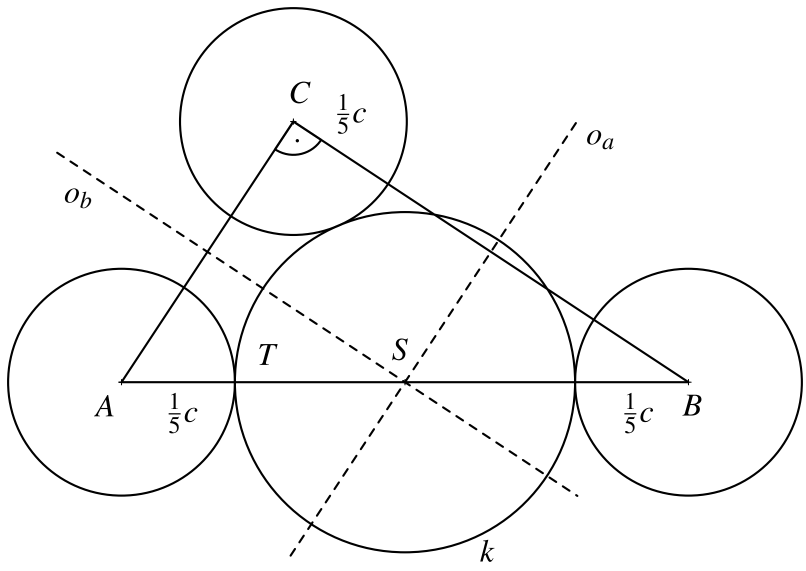
$$|BC|^2 = |CD|^2 - |DB|^2 = b^2 - a^2 \Rightarrow |BC| = \sqrt{b^2 - a^2} \Rightarrow |UV| = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2}.$$

Nalezli jsme hledanou vzdálenost středů U a V kružnic k a l.

Příklad 26, Šar. 107

Pravoúhlý trojúhelník má přeponu délky c. Každý z jeho vrcholů je zároveň středem kružnice o poloměru $\frac{1}{5}c$. Určete poloměr té kružnice k, která se dotýká všech tří kružnic vnějším způsobem.

Řešení:



Obr. 2.28: Příklad 26

Hledáme-li střed kružnice, která se dotýká dvou kružnic o stejném poloměru, pak jistě tento střed leží na ose úsečky, která spojuje středy dvou původních kružnic. Proto střed S kružnice k bude průsečíkem os stran daného trojúhelníka, který označíme ABC, jako na obrázku. Ten je ale pravoúhlý, a proto průsečík os jeho stran (což je také střed kružnice opsané) leží podle Thaletovy věty ve středu S přepony AB. Poloměr $|TS|$ kružnice k tudíž určíme snadno. Platí:

$$|TS| = |AS| - |AT| = \frac{1}{2}c - \frac{1}{5}c = \frac{3}{10}c.$$

Poloměr kružnice k je roven $\frac{3}{10}c$.

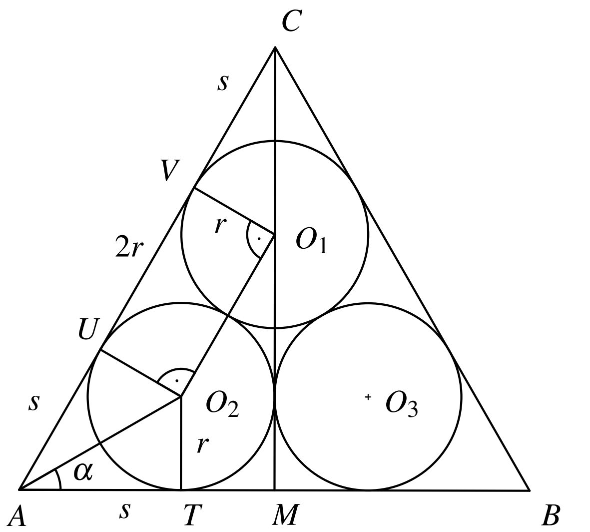
2.6 Vlastnosti tečen kružnice

V následujících úlohách kromě jiných poznatků použijeme k řešení vlastnosti tečen z bodu ke kružnici. Především pak tu vlastnost, že délky tečen spuštěných z bodu ke kružnici se rovnají. Vlastnosti tečen užijeme dále pro řešení Příkladu 52.

Příklad 27, Šar. 67

Jsou dány tři navzájem se dotýkající kružnice o poloměru r. Určete obsah trojúhelníka vymezeného těmi společnými vnějšími tečnami každých dvou z nich, které neprotínají třetí kružnici.

Řešení:



Obr. 2.29: Příklad 27

Zavedeme značení podle obrázku. Mají-li všechny tři kružnice stejný poloměr a vzájemně se dotýkají, pak jejich středy tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníka. (Nebereme v úvahu případ, kdy některé dvě, resp. všechny tři, kružnice splynou.) Tečny, které mají kružnice po dvojicích společné, jsou rovnoběžné se spojnicemi jejich středů. V obrázku např. $AC \parallel O_2O_1$.

Pro výpočet obsahu rovnostranného trojúhelníka ABC potřebujeme znát délku jeho strany. Jak je vyznačeno v obrázku, pro stranu AC platí $|AC| = |AU| + |UV| + |VC|$. Velikost úsečky AU vypočítáme z pravoúhlého trojúhelníku ATO_2, kde $|TO_2| = r$ a $\alpha = 30°$. (AO_2 je osa úhlu CAB, proto $\alpha = \frac{1}{2}60°$.)

Užitím goniometrické funkce tangens dostaneme $\frac{r}{s} = \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow s = r\sqrt{3}$. Úsečka AU má tedy velikost $r\sqrt{3}$, totéž platí i pro úsečku VC.

Dále stačí si uvědomit, že díky vlastnostem tečen ke kružnici svírají úsečky O_1V a O_2U se stranou AC pravý úhel a proto je čtyřúhelník UO_2O_1V obdélníkem se stranami délek r

a $2r$. Odtud $|UV| = 2r$ a pro stranu rovnostranného trojúhelníka ABC platí

$$|AC| = |AU| + |UV| + |VC| = r\sqrt{3} + 2r + r\sqrt{3} = 2r \cdot (1 + \sqrt{3}).$$

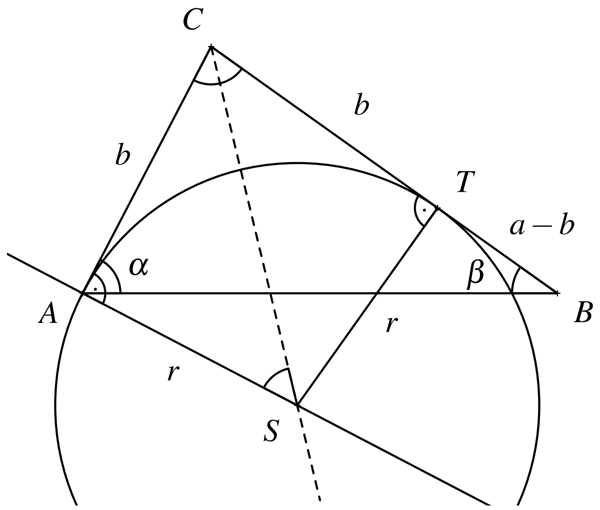
V rovnostranném trojúhelníku je výška $\frac{\sqrt{3}}{2}$-násobkem strany. Proto obsah S_{ABC} trojúhelníka ABC spočítáme podle standardního vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníka.

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2r \cdot (1 + \sqrt{3}) \cdot 2r \cdot (1 + \sqrt{3})}{2 \cdot 2} = r^2 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(1 + 2\sqrt{3} + 3\right) =$$
$$= 2r^2 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(2 + \sqrt{3}\right) = 2r^2 \left(2\sqrt{3} + 3\right).$$

Příklad 28, Šar. 102

V trojúhelníku ABC je dáno: $|BC| = a$, $|\sphericalangle BAC| = \alpha$, $|\sphericalangle ABC| = \beta$. Určete poloměr kružnice k, která se dotýká strany AC v bodě A a rovněž se dotýká v některém bodě strany BC.

Řešení:



Obr. 2.30: Příklad 28

Zavedeme značení podle obrázku. Velikost strany AC jsme pro přehlednost výpočtů označili jako b. Při konstrukci středu S zadané kružnice je třeba si uvědomit, že z bodu C vychází dvě tečny této kružnice – CA a CB s body dotyku A a T. Poloha bodu T není zadáním určena, ale platí, že body dotyku jsou vždy od průsečíku tečen stejně vzdáleny. Proto $|CT| = b$. Pokud máme dvě tečny ke kružnici, i body dotyku, stačí vést z těchto bodů kolmice a hledaný střed S bude ležet v jejich průsečíku. Střed S leží ovšem také na ose úhlu ACT. Vznikne tak pravoúhlý trojúhelník ASC, jehož odvěsny mají délky b a r. Pokud zjistíme velikost úhlu ASC a vyjádříme délku b užitím sinové věty v trojúhelníku ABC, budeme moci hledaný poloměr r vypočítat užitím funkce tangens.

Zmíněná sinová věta vede k vyjádření:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Nyní vypočítáme velikost úhlu CSA. Platí, že $|\sphericalangle BCA| = 180^\circ - \alpha - \beta$. Úhel BCA je polopřímkou CS rozpůlen, proto je $|\sphericalangle SCA| = \frac{180^\circ-\alpha-\beta}{2}$. Velikost úhlu CSA vypočítáme jako $|\sphericalangle CSA| = 180^\circ - 90^\circ - \frac{180^\circ-\alpha-\beta}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Nyní už v trojúhelníku ASC užijeme funkci tangens a po dosazení hodnoty b vypočítáme r.

$$\mathrm{tg}\,\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{b}{r} \Rightarrow r = \frac{b}{\mathrm{tg}\,\frac{\alpha+\beta}{2}} = b\cdot \mathrm{cotg}\,\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot \mathrm{cotg}\,\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Určili jsme poloměr r kružnice, která se dotýká strany AC v bodě A a strany BC v neznámém bodě T.

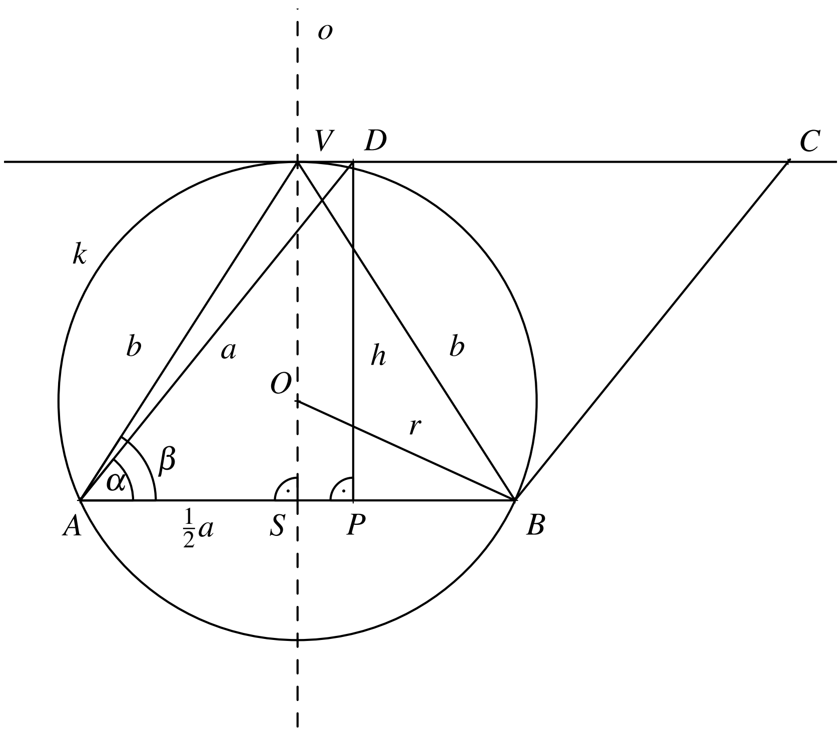
2.7 Sinová věta

Kromě úloh zařazených do této sekce, je sinová věta využita při řešení: Příkladu 3, Příkladu 9, Příkladu 24 a Příkladu 28.

Příklad 29, Šar. 66

Je dán kosočtverec $ABCD$ se stranou dané délky a a s daným ostrým úhlem α při vrcholu A. Určete poloměr kružnice k, která prochází body A a B a dotýká se strany CD, nebo jejího prodloužení.

Řešení:



Obr. 2.31: Příklad 29

Zavedeme značení podle obrázku. Je zde znázorněna situace, kdy kružnice k neprotne stranu CD, ale její prodloužení. Kružnice k, jejíž poloměr máme za úkol určit, je kružnice opsaná trojúhelníku ABV, kde V je bod dotyku kružnice k a přímky CD. Tento trojúhelník je nutně rovnoramenný, protože střed O kružnice k leží na ose o úsečky AB. Tato osa je kolmá k tečně CD kružnice k, takže prochází bodem dotyku.

Nejprve vyjádříme výšku h kosočtverce užitím goniometrické funkce sinus. V pravoúhlém trojúhelníku APD platí $|AD| = a$, $|\sphericalangle PAD| = \alpha$. Proto zřejmě platí $h = a\sin\alpha$.

Dále užijeme Pythagorovu větu v pravoúhlém trojúhelníku ASV, kde platí $|SV| = h = a\sin\alpha$, $|AS| = \frac{1}{2}a$, k výpočtu délky b jeho přepony AV:

$$b^2 = \frac{1}{4}a^2 + a^2\sin^2\alpha \Rightarrow b = a\sqrt{\frac{1}{4} + \sin^2\alpha}.$$

Dále určíme sinus úhlu β, a to z pravoúhlého trojúhelníku ASV.

$$\sin\beta = \frac{h}{b} = \frac{a\sin\alpha}{a\sqrt{\frac{1}{4}+\sin^2\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{\frac{1}{4}+\sin^2\alpha}}.$$

Konečně užijeme rozšířenou sinovou větu v trojúhelníku ABV, kde při vrcholu A je úhel β a protější strana má délku b, neboť se jedná o rovnoramenný trojúhelník.

$$r = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{a\sqrt{\frac{1}{4}+\sin^2\alpha}}{\frac{2\sin\alpha}{\sqrt{\frac{1}{4}+\sin^2\alpha}}} = \frac{a\left(\frac{1}{4}+\sin^2\alpha\right)}{2\sin\alpha} = \frac{a\left(4\sin^2\alpha+1\right)}{8\sin\alpha}.$$

Nalezli jsme velikost r poloměru kružnice opsané trojúhelníku ABV.

Příklad 30, Šar. 84

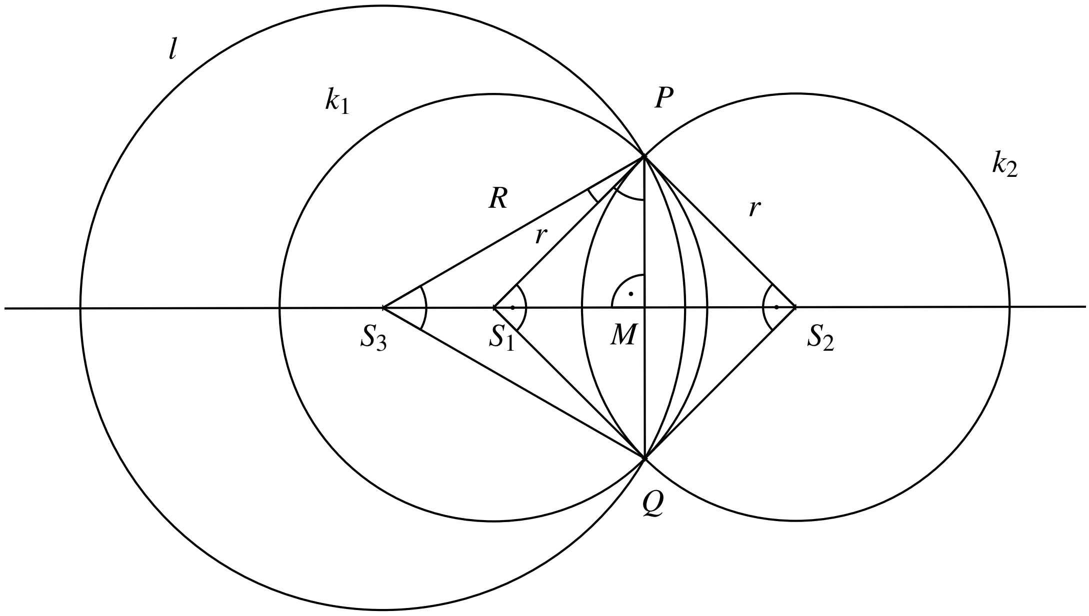
Společná tětiva dvou protínajících se kružnic k a l je z jejich středů vidět pod úhly 90° a 60°. Určete poloměry r a R kružnic k a l, je-li vzdálenost jejich středů rovna a.

Řešení:

Zavedeme značení podle obrázku. Existují dvě možná řešení dané úlohy. Střed S menší kružnice k leží buď uvnitř, nebo vně větší kružnice l. Jde tedy buď o kružnici $k = k_1$ se středem S_1 nebo o kružnici $k = k_2$ se středem S_2.

Nejprve vyřešíme poloměry kružnic l a k_1. Podle zadání je $|S_3S_1| = a$, $|\sphericalangle S_1S_3P| = 30^\circ$, $|\sphericalangle S_3S_1P| = 30^\circ$ a tedy $|\sphericalangle S_3PS_1| = 15^\circ$. V trojúhelníku S_3S_1P užijeme sinovou větu a vypočítáme r:

$$\frac{a}{\sin 15^\circ} = \frac{r}{\sin 30^\circ} \Rightarrow r = \frac{a\sin 30^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{a\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{a\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}.$$



Obr. 2.32: Příklad 30

Při výpočtu poloměru R z téhož trojúhelníku vezmeme v úvahu, že $\sin 135^\circ = \sin 45^\circ$:

$$\frac{R}{\sin 135^\circ} = \frac{a}{\sin 15^\circ} \Rightarrow R = \frac{a \sin 45^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{a\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}} = \frac{2a}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = a\left(\sqrt{3}+1\right).$$

Nyní vyřešíme poloměry kružnic l a k_2. Podle zadání je $|S_3S_2| = a$, $|\sphericalangle S_3S_2P| = 45^\circ$, $|\sphericalangle S_2S_3P| = 30^\circ$. Tudíž velikost úhlu S_2PS_3 je $180^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 105^\circ$. Zároveň platí $\sin 105^\circ = \sin 75^\circ$.

Užitím sinové věty v trojúhelníku S_3S_2P vypočítáme r a R:

$$\frac{r}{\sin 30^\circ} = \frac{a}{\sin 75^\circ} \Rightarrow r = \frac{a \sin 30^\circ}{\sin 75^\circ} = \frac{a \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{a\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}.$$

$$\frac{R}{\sin 45^\circ} = \frac{a}{\sin 75^\circ} \Rightarrow R = \frac{a \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} = \frac{2a}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = a\left(\sqrt{3}-1\right).$$

Vypočítali jsme dvě různé dvojice poloměrů R a r v závislosti na velikosti a.

Poznámka: Při výpočtech jsme využili netriviální hodnoty $\sin 15^\circ$ a $\sin 75^\circ$, které v této poznámce pro úplnost odvodíme. Postačí použít součtové vzorce pro funkce sinus a kosinus. Platí:

$$\sin 15^\circ = \sin\left(45^\circ - 30^\circ\right) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},$$

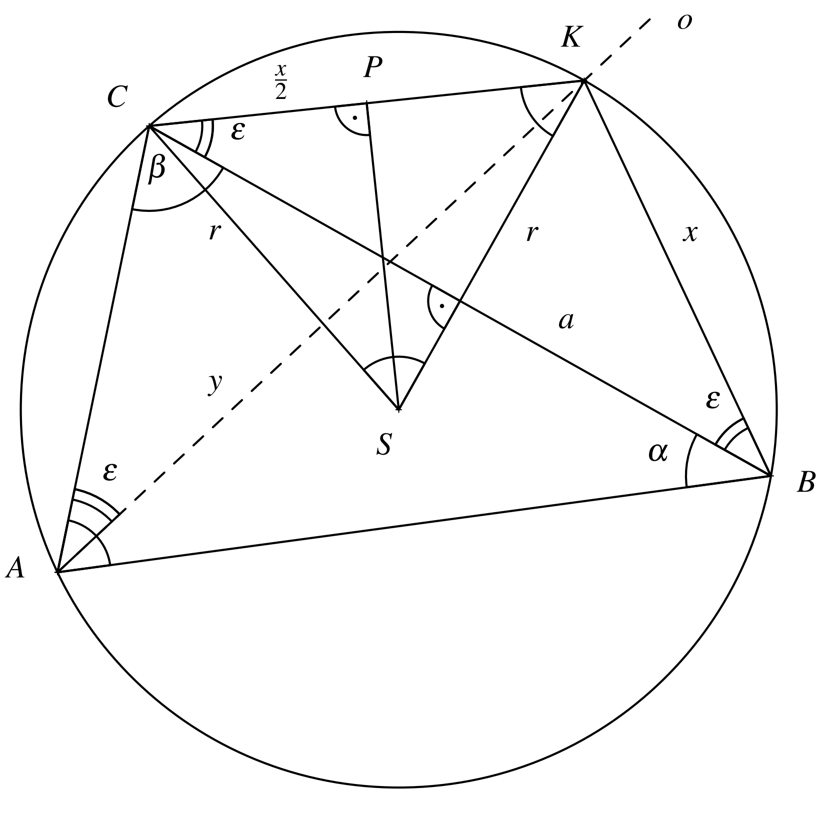
$$\sin 75^\circ = \sin\left(45^\circ + 30^\circ\right) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

Příklad 31, Šar. 74

Trojúhelníku ABC je opsána kružnice k. Je dáno: $|BC| = a$, $|\sphericalangle ABC| = \alpha$ a $|\sphericalangle BCA| = \beta$. Osa vnitřního úhlu CAB protíná kružnici k v bodě K. Určete $|AK|$.

Řešení:



Obr. 2.33: Příklad 31

Zavedeme značení podle obrázku. Pro další výpočty bude vhodné vyjádřit velikost r poloměru kružnice k v závislosti na zadané délce a strany BC. Poloměr kružnice opsané trojúhelníku lze snadno určit užitím rozšířené sinové věty. V trojúhelníku ABC známe velikosti vnitřních úhlů $|\sphericalangle ABC| = \alpha$ a $|\sphericalangle BCA| = \beta$. Jistě tedy platí $|\sphericalangle CAB| = 180^\circ - \alpha - \beta$. Odtud:

$$\frac{a}{\sin\left(180^\circ - \alpha - \beta\right)} = 2r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{a}{2\sin\left(180^\circ - \alpha - \beta\right)}.$$

Funkce sinus nabývá stejných hodnot pro vedlejší úhly (tj. platí $\sin\varphi = \sin(180^\circ - \varphi)$), proto lze velikost r vyjádřit zjednodušeně jako:

$$r = \frac{a}{2\sin(\alpha+\beta)}.$$

Osa o úhlu BAC rozděluje na poloviny nejenom úhel BAC, ale také menší z oblouků BC. Že jsou takto vzniklé oblouky BK a KC opravdu stejné, můžeme zdůvodnit například tak, že jim přísluší stejně velké obvodové úhly BAK a KAC. Proto jsou stejně dlouhé i tětivy BK a KC a jejich délku označíme jako x. Vypočítáme-li délku této tětivy, budeme znát velikost strany KC v trojúhelníku AKC, v němž máme určit velikost strany AK.

Osa o úhlu BAC rozděluje na poloviny nejenom úhel BAC, ale také menší z oblouků BC. Že jsou takto vzniklé oblouky BK a KC opravdu stejné, můžeme zdůvodnit například tak, že jim přísluší stejně velké obvodové úhly BAK a KAC. Proto jsou stejně dlouhé i tětivy BK a KC a jejich délku označíme jako x. Vypočítáme-li délku této tětivy, budeme znát velikost strany KC v trojúhelníku AKC, v němž máme určit velikost strany AK.

Úhel BCK je obvodový úhel příslušný oblouku BK a má tudíž stejnou velikost jako úhel BAK, který je poloviční oproti známému úhlu BAC, který má velikost $180^\circ - \alpha - \beta$. Platí tedy, že ε má velikost $90^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2}$. Vnitřní úhel KCA trojúhelníku AKC má velikost $|\sphericalangle KCA| = \beta + 90^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha-\beta}{2}$.

Poslední údaj, který potřebujeme pro sestavení sinové věty, je velikost x tětivy KC. Platí, že úhel PSC je poloviční oproti středovému úhlu KSC, který má velikost 2ε. V pravoúhlém trojúhelníku PSC užijeme funkci sinus pro úhel PSC:

$$\sin\varepsilon = \frac{\frac{x}{2}}{r} \quad \Rightarrow \quad \sin\left(90^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{a}{2\sin(\alpha+\beta)}}.$$

Nyní využijeme tvrzení, které platí pro dvojici úhlů, jejichž součet je roven 90°, tj. $\cos\varphi = \sin(90^\circ - \varphi)$. Platí:

$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{2x\sin(\alpha+\beta)}{2a} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Nyní využijeme sinovou větu v trojúhelníku AKC, a určíme tak hledanou délku $|AK| = y$. Nejprve sestavíme zápis sinové věty a potom budeme postupně dosazovat výše vypočítané hodnoty:

$$\frac{y}{\sin(\beta+\varepsilon)} = \frac{x}{\sin\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x\sin(\beta+\varepsilon)}{\sin\varepsilon} = \frac{a\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin(\beta+\varepsilon)}{\sin(\alpha+\beta)\sin\varepsilon} =$$

$$= \frac{a\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin(\alpha+\beta)\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \frac{a\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin(\alpha+\beta)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \frac{a\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

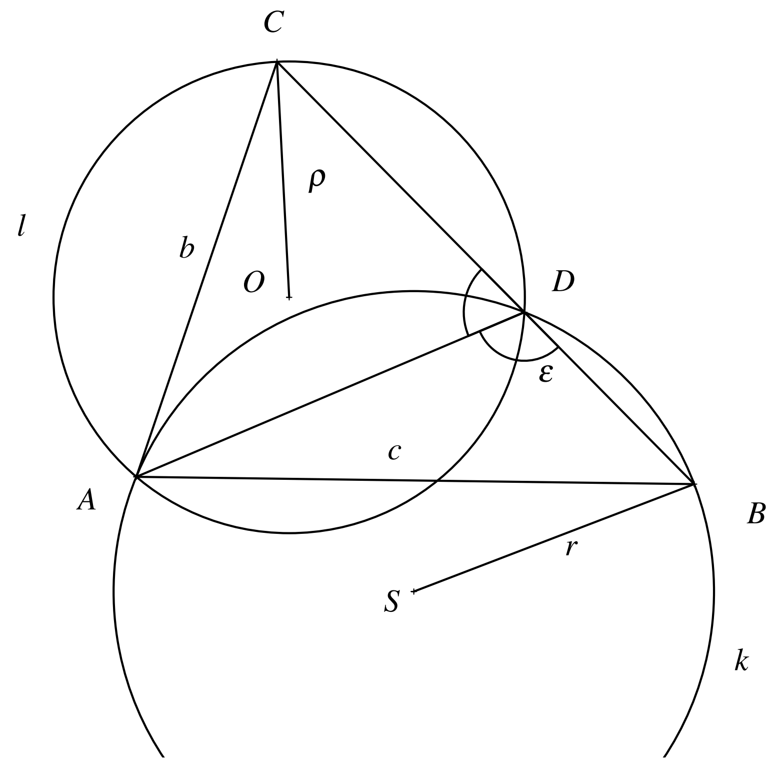
Určili jsme hledanou délku úsečky AK:

$$|AK| = \frac{a\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Příklad 32, Šar. 94

Kružnice k prochází vrcholy A a B trojúhelníka ABC a protíná stranu BC v bodě D. Určete poloměr kružnice l, která prochází body A, D a C, jestliže $|AB| = c$ a $|AC| = b$.

Řešení:



Obr. 2.34: Příklad 32

Zavedeme značení podle obrázku. Zadané dvě kružnice k a l jsou kružnice opsané trojúhelníkům ABD a ADC. Poloměr kružnice opsané lze určit užitím rozšířené sinové věty, neboť v libovolném trojúhelníku platí:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r.$$

V trojúhelníku ABD má strana AB délku c a velikost vnitřního úhlu při vrcholu D jsme označili jako ε. Užijme sinovou větu:

$$\frac{c}{\sin\varepsilon} = 2r.$$

V trojúhelníku ADC má strana AC velikost b a velikost vnitřního úhlu při vrcholu D lze vyjádřit jako $180^\circ - \varepsilon$. Užijme opět sinovou větu:

$$\frac{b}{\sin(180^\circ - \varepsilon)} = 2\rho.$$

Nyní využijeme vlastnosti vedlejších úhlů – platí $\sin\varepsilon = \sin(180^\circ - \varepsilon)$. Platí:

$$\frac{\rho}{b} = \frac{1}{2\sin(180^\circ - \varepsilon)} = \frac{1}{2\sin\varepsilon} = \frac{r}{c} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{b \cdot r}{c}.$$

Nalezli jsme poloměr ρ kružnice l.

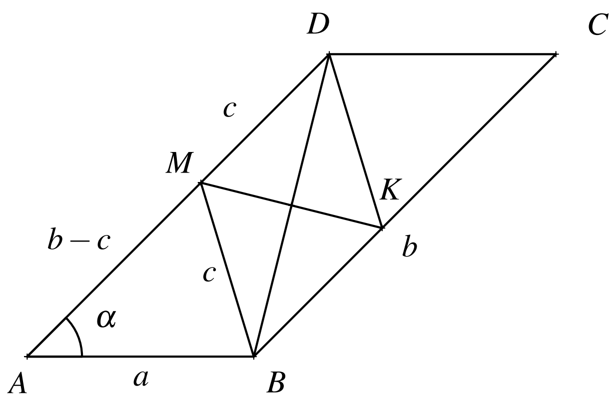
2.8 Kosinová věta

Kromě následujících úloh bychom do této sekce mohli zařadit také Příklad 12, Příklad 24, Příklad 40.

Příklad 33, Šar. 106

Je dán kosodélník $ABCD$, ve kterém $|\sphericalangle BAD| = \alpha < 90^\circ$, $|AB| = a$, $|BC| = b$ a $b > a$. Na stranách BC a AD leží body K a M tak, že $BKDM$ je kosočtverec. Určete délku jeho strany.

Řešení:



Obr. 2.35: Příklad 33

Délku strany kosočtverce označme jako c. Z $|MD| = c$ plyne $|MA| = b - c$. Pak v trojúhelníku ABM, kde $|AB| = a$, $|BM| = c$, $|MA| = b - c$ a $|\sphericalangle BAM| = \alpha$, lze využít kosinovou větu a velikost c vypočítat:

$$c^2 = a^2 + (b-c)^2 - 2a(b-c)\cos\alpha = a^2 + b^2 - 2bc + c^2 - 2ab\cos\alpha + 2ac\cos\alpha \Rightarrow$$

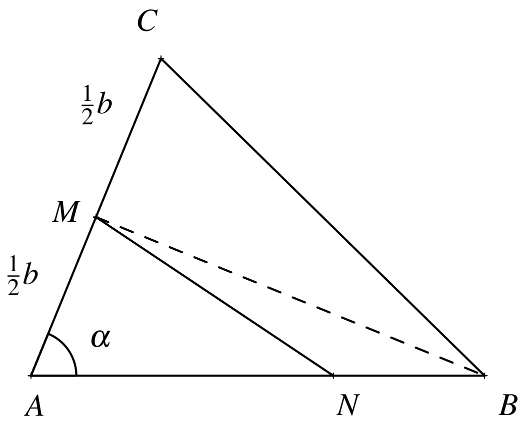
$$\Rightarrow 2bc - 2ac\cos\alpha = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha \Rightarrow c = \frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}{2(b - a\cos\alpha)}.$$

Určili jsme délku c strany kosočtverce $BKDM$.

Příklad 34, Šar. 113

V trojúhelníku ABC je dáno: $|\sphericalangle CAB| = \alpha$, $|AB| = a$, $|AC| = b$. Na stranách AC a AB leží body M a N. Bod M je střed strany AC. Určete $|MN|$, jestliže obsah trojúhelníka ABC je třikrát větší, než obsah trojúhelníka ANM.

Řešení:



Obr. 2.36: Příklad 34

V této úloze potřebujeme určit délku $|AN|$, abychom užitím kosinové věty mohli vypočítat velikost strany MN v trojúhelníku ANM, kde $|AM| = \frac{1}{2}b$ a $|\sphericalangle MAN| = \alpha$.

Platí $S_{ANM} = \frac{1}{3}S_{ABC}$ a $S_{ABM} = \frac{1}{2}S_{ABC}$. Odtud $S_{ANM} = \frac{2}{3}S_{ABM}$. Trojúhelníky ANM a ABM mají ale stejnou výšku z vrcholu M, proto pro délky protějších stran platí $|AN| = \frac{2}{3}|AB| = \frac{2}{3}a$. Nyní už známe všechny potřebné údaje a vypočítáme pomocí kosinové věty velikost úsečky MN:

$$|MN|^2 = \left(\frac{1}{2}b\right)^2 + \left(\frac{2}{3}a\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}b \cdot \frac{2}{3}a \cdot \cos\alpha \Rightarrow$$

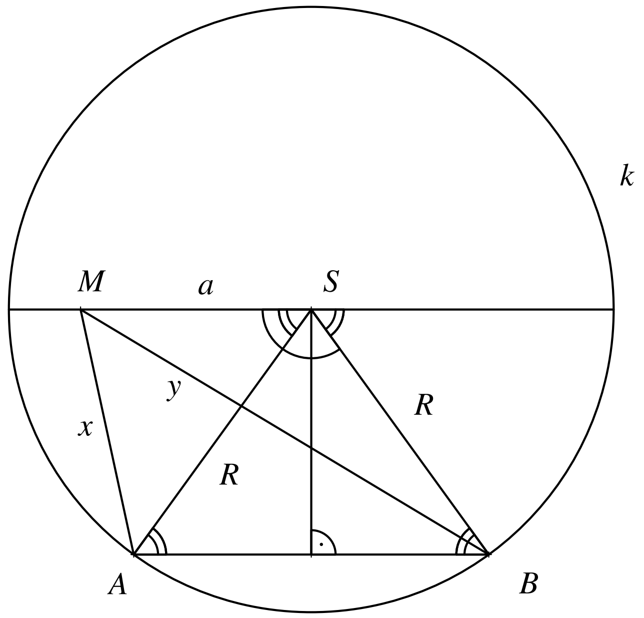
$$\Rightarrow |MN| = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{4a^2}{9} - \frac{2}{3}ab\cos\alpha}.$$

Určili jsme hledanou délku úsečky MN.

Příklad 35, Šar. 83

Na daném průměru kružnice k o poloměru R leží bod M a jeho vzdálenost od středu S kružnice je rovna a. Určete součet druhých mocnin vzdáleností bodu M od koncových bodů libovolné tětivy kružnice k, která je rovnoběžná s jejím daným průměrem.

Řešení:



Obr. 2.37: Příklad 35

Zavedeme značení podle obrázku. V rovnoramenném trojúhelníku ABS označíme velikost úhlu při základně jako α. Úhly, které svírají ramena AS a BS s daným průměrem, jsou vůči úhlům BAS a ABS střídavé, proto mají také velikost α. Nyní užijeme kosinovou větu ve dvou trojúhelnících. Platí:

$$x^2 = a^2 + R^2 - 2aR\cos\alpha,$$

$$y^2 = a^2 + R^2 - 2aR\cos(180^\circ - \alpha) = a^2 + R^2 + 2aR\cos\alpha.$$

Sečtením obou rovnic dostaneme:

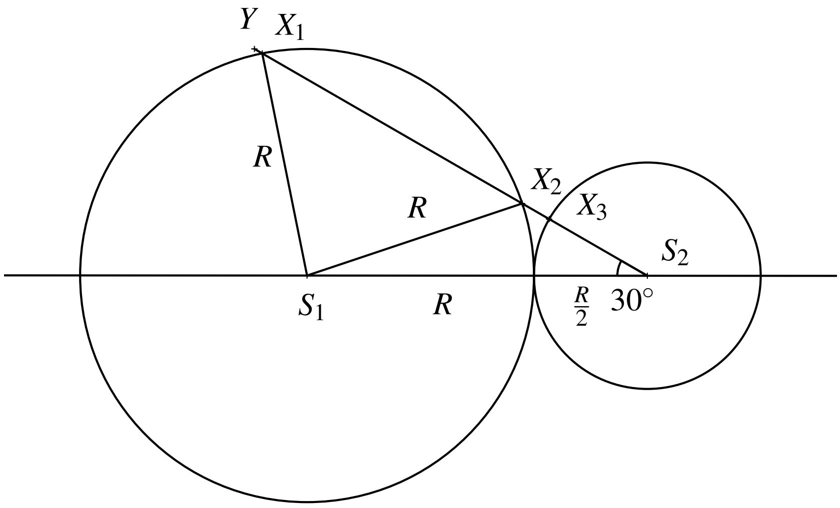
$$x^2 + y^2 = 2a^2 + 2R^2 = 2\left(a^2 + R^2\right).$$

Určili jsme hledaný součet druhých mocnin délek úseček MA a MB.

Příklad 36, Šar. 86

Dvě kružnice o poloměrech R a $\frac{R}{2}$ mají vnější dotyk. Je dána úsečka, která svírá se spojnicí středů kružnic úhel 30°, má délku $2R$ a jeden z jejích koncových bodů splývá se středem menší z kružnic. Vypočtěte, jaká část této úsečky leží vně obou kružnic. (Úsečka protíná obě kružnice.)

Řešení:



Obr. 2.38: Příklad 36

Zavedeme značení podle obrázku. Délky $x_1 = |S_2X_1|$ a $x_2 = |S_2X_2|$ vypočítáme jako kořeny x_1, x_2 kvadratické rovnice, kterou dostaneme, když pro trojúhelníky $S_1S_2X_1$ a $S_1S_2X_2$ užijeme kosinovou větu:

$$R^2 = \left(\frac{3}{2}R\right)^2 + x^2 - 2\cdot\frac{3}{2}R\cdot x\cdot\cos 30^\circ$$

$$x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}Rx + \frac{5}{4}R^2 = 0$$

$$D = \frac{27}{4}R^2 - 5R^2 = \frac{7}{4}R^2 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}R \pm \frac{\sqrt{7}}{2}R}{2} = \frac{\left(3\sqrt{3}\pm\sqrt{7}\right)R}{4}$$

Protože $x_1 \doteq 1,96R$ a $x_2 \doteq 0,63R$, leží body X_1, X_2, X_3 uvnitř úsečky S_2Y délky $2R$ ze zadání úlohy, a to v pořadí vyznačeném na obrázku. Část úsečky S_2Y, která leží vně obou kružnic, je proto složena z úseček YX_1 a X_2X_3 a má celkovou délku:

$$|YX_1| + |X_2X_3| = (|S_2Y| - |S_2X_1|) + (|S_2X_2| - |S_2X_3|) =$$

$$= \left(2R - \frac{\left(3\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)}{4}R\right) - \left(\frac{\left(3\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)}{4}R - \frac{1}{2}R\right) = \frac{3-\sqrt{7}}{2}R.$$

Je to tedy část celé délky $2R$ zadané úsečky, která je vyjádřena zlomkem $\frac{1}{4}(3-\sqrt{7})$.

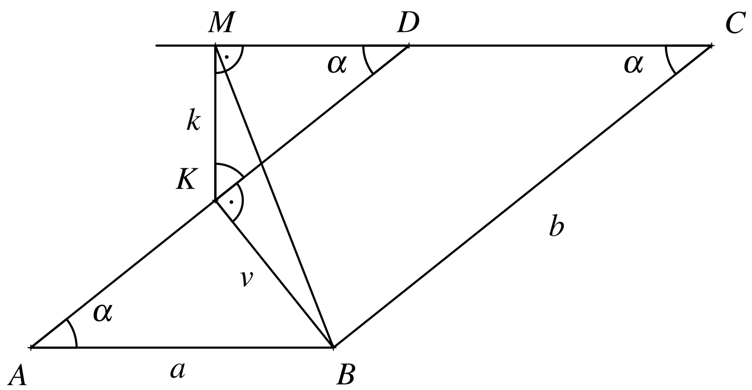
2.9 Goniometrické funkce

Při řešení následujících úloh užijeme goniometrické funkce. Ty samozřejmě užíváme v mnoha dalších úlohách, viz Příklad 1, Příklad 6, Příklad 10, Příklad 14, Příklad 18, Příklad 24, Příklad 27, Příklad 28, Příklad 29, Příklad 31, Příklad 42, Příklad 44, Příklad 50 a Příklad 52.

Příklad 37, Šar. 117

Je dán kosodélník $ABCD$, ve kterém má ostrý úhel DAB velikost α a platí $|AB| = a$, $|BD| = b$ $(a < b)$. Označme patu výšky spuštěné z vrcholu B na stranu AD jako K a patu výšky spuštěné z bodu K na prodloužení strany CD jako M. Určete obsah trojúhelníka BKM.

Řešení:



Obr. 2.39: Příklad 37

Obsah trojúhelníka je možné vypočítat několika způsoby. Pro tuto úlohu bude výhodné použít následující vzorec:

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma.$$

Abychom tento vzorec mohli použít, potřebujeme vyjádřit velikost úseček BK a KM, které jsme označili jako v a k, a velikost úhlu BKM. Velikost v vypočítáme užitím funkce sinus v pravoúhlém trojúhelníku ABK, kde platí:

$$\sin\alpha = \frac{v}{a} \quad \Rightarrow \quad v = a\sin\alpha.$$

Abychom určili velikost k úsečky KM, potřebujeme znát velikost úsečky KD. Platí $|KD| = |AD| - |AK|$. Ze zadání víme, že $|AD| = b$ a délku $|AK|$ vypočítáme užitím funkce kosinus v pravoúhlém trojúhelníku ABK:

$$\cos\alpha = \frac{|AK|}{a} \quad \Rightarrow \quad |AK| = a\cos\alpha.$$

Odtud $|KD| = b - a\cos\alpha$. Protože úhel ADM je souhlasný s úhlem BCM, má úhel KDM v pravoúhlém trojúhelníku velikost α. Velikost k strany KM určíme užitím funkce sinus:

$$\sin\alpha = \frac{k}{|KD|} \quad\Rightarrow\quad k = |KD|\cdot\sin\alpha = (b - a\cos\alpha)\cdot\sin\alpha.$$

Poslední hodnota, kterou potřebujeme určit je sinus úhlu BKM. Úhel DKM má velikost $90^\circ - \alpha$ a úhel BKM má tudíž velikost $180^\circ - \alpha$. Sinus vedlejších úhlů ale nabývá stejných hodnot, a proto platí:

$$\sin(\sphericalangle BKM) = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha.$$

Nyní poskládáme dílčí výsledky do vzorce a vypočítáme obsah S trojúhelníka BKM:

$$S = \frac{1}{2}v\cdot k\cdot\sin(\sphericalangle BKM) = \frac{1}{2}a\sin\alpha\cdot(b - a\cos\alpha)\sin\alpha\cdot\sin\alpha \Rightarrow$$

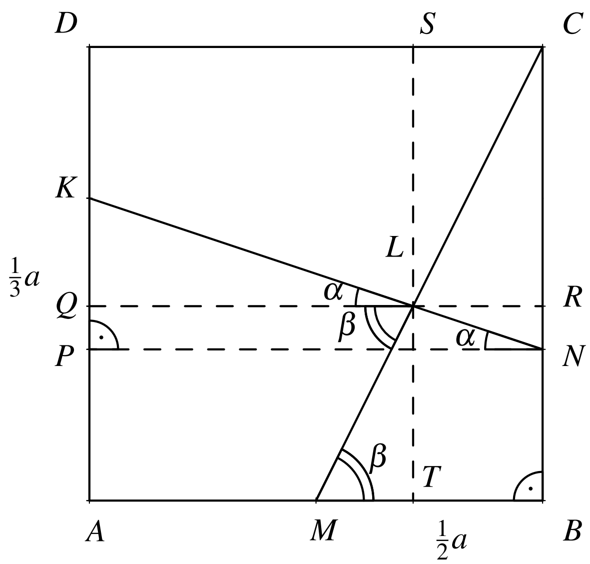
$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}a(b - a\cos\alpha)\sin^3\alpha.$$

Nalezli jsme obsah trojúhelníka BKM.

Příklad 38, Šar. 93

Na stranách čtverce $ABCD$ jsou zvoleny body M, N a K následujícím způsobem. M je středem strany AB, N leží na straně BC a platí $|NC| = 2|BN|$, K leží na straně AD a platí $2|DK| = |KA|$. Určete sinus menšího z úhlů, který svírají úsečky MC a NK.

Řešení:



Obr. 2.40: Příklad 38

Situace ze zadání je znázorněna na obrázku, který je doplněn o další úsečky, které mají pro naše řešení výhodné vlastnosti. Bez nich by byla úloha stěží uchopitelná. Pro úsečky ST

a QR platí, $ST \parallel AD$, $QR \parallel AB$ a že prochází bodem L, který je průsečíkem úseček MC a NK. Úsečka PN je rovnoběžná se stranou AB. Protože PN a QR jsou rovnoběžky, svírají s úsečkou KN úhly KLQ a KNP, které jsou souhlasné a mají stejnou velikost, označme ji α. Podobně AB a QR svírají s úsečkou CM úhly BMC a QML, které jsou střídavé a proto mají shodnou velikost, kterou označíme β. Odtud $|\sphericalangle KLM| = |\sphericalangle KLQ| + |\sphericalangle QLM| = \alpha + \beta$. Úhel KLM je rozhodně jedním z úhlů, které svírají úsečky KN a MC, ale zadání nám říká, že máme vypočítat sinus menšího, tedy ostrého, z těchto úhlů. Jeden ze dvou vedlejších úhlů KLM a MLN je jistě tupý. Sinus tupého úhlu je ovšem zaveden jako sinus úhlu vedlejšího k tomuto tupému úhlu. Proto platí $\sin(|\sphericalangle KLM|) = \sin(|\sphericalangle MLN|)$. Hledáme tedy $\sin(\alpha + \beta)$.

Pro tento výpočet nejprve potřebujeme určit hodnoty $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$. Pro usnadnění označíme délku strany čtverce $ABCD$ jako a, a z pravoúhlých trojúhelníků PNK a MBC postupně vypočítáme všechny hodnoty. Užitím Pythagorovy věty dostaneme nejprve $|NK| = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{10}}{3}$ a analogicky $|MC| = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Užitím goniometrických funkcí vypočteme následující hodnoty

$$\sin\alpha = \frac{\frac{a}{3}}{\frac{a\sqrt{10}}{3}} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \cos\alpha = \frac{a}{\frac{a\sqrt{10}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{10}},$$

$$\sin\beta = \frac{a}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos\beta = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Nyní máme všechny potřebné výsledky a můžeme je dosadit do vzorce pro sinus součtu dvou úhlů

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{50}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

Určili jsme tak hledaný sinus úhlu KLM.

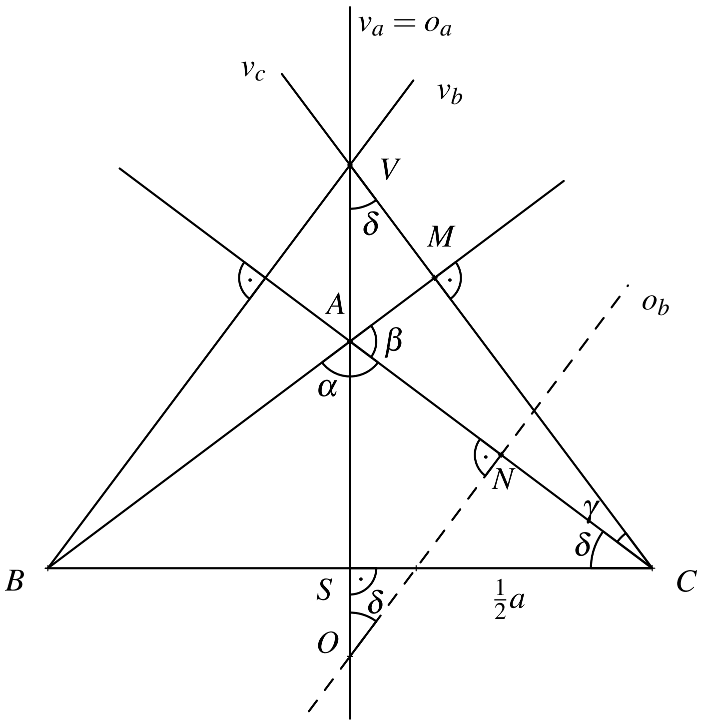
Příklad 39, Šar. 73

V rovnoramenném trojúhelníku ABC je dáno $|\sphericalangle BAC| = \alpha > 90^\circ$ a $|BC| = a$. Určete vzdálenost mezi ortocentrem a středem kružnice opsané trojúhelníku ABC.

Řešení:

Zavedeme značení podle obrázku. Naším úkolem je zjistit velikost $|OV|$. Dílčí potřebné výsledky získáme užitím goniometrických funkcí v některých pravoúhlých trojúhelnících, které v obrázku vznikly. Podle obrázku platí: $|OV| = |VS| + |SO|$, kde $|SO| = |AO| - |AS|$. Postupně určíme $|VS|$, $|AO|$ a $|AS|$.

Nejprve se ovšem zaměříme na velikosti úhlů β, γ a δ. Všechny tři lze vyjádřit v závislosti na velikosti úhlu α, který má zadanou velikost. V pravoúhlém trojúhelníku SCA má vnitřní úhel při vrcholu A velikost $\frac{\alpha}{2}$, proto zřejmě $\delta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Úhel β je vedlejší k úhlu α, proto má velikost $180^\circ - \alpha$. V trojúhelníku ACM má úhel γ velikost $90^\circ - \beta$, odkud $\gamma = \alpha - 90^\circ$. V pravoúhlém trojúhelníku SCV má vnitřní úhel při vrcholu C velikost $\delta + \gamma = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + (\alpha - 90^\circ) = \frac{\alpha}{2}$. Proto platí, že úhel CVS má velikost $\delta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.



Obr. 2.41: Příklad 39

Nyní budeme postupně určovat potřebné velikosti úseček $|VS|$, $|AO|$ a $|AS|$. Začněme s $|AS|$. V pravoúhlém trojúhelníku SCA platí:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{|AS|} \;\Rightarrow\; |AS| = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Dále je vhodné určit velikost úsečky AN, která má poloviční délku oproti straně AC trojúhelníka SCA. Proto:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{|AC|} \;\Rightarrow\; |AC| = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \;\Rightarrow\; |AN| = \frac{a}{4\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

V pravoúhlém trojúhelníku AON známe velikost odvěsny AN a velikost vnitřního úhlu NAO. Užitím funkce kosinus lze tedy vypočítat velikost jeho přepony AO:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{|AN|}{|AO|} = \frac{\frac{a}{4\sin\frac{\alpha}{2}}}{|AO|} \;\Rightarrow\; |AO| = \frac{a}{4\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Poslední potřebný údaj je velikost $|VS|$. V pravoúhlém trojúhelníku SCV známe velikost odvěsny SC a velikost vnitřního úhlu SCV. Užitím funkce tangens získáme:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{|VS|}{\frac{a}{2}} \;\Rightarrow\; |VS| = \frac{a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2}.$$

Dosazením do rovnosti $|OV| = |VS| + |AO| - |AS|$, následnými úpravami a využitím goniometrických vzorců dojdeme k výsledku:

$$|OV| = \frac{a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{2} + \frac{a}{4\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}} - \frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2}\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} - \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right) =$$

$$= \frac{a}{2}\left(\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2} + 1 - 2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{a}{2}\left(\frac{1-2\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) =$$

$$= \frac{a}{2}\left(\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = \frac{a}{2}\left(\frac{1-\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} - \operatorname{cotg}\alpha\right) =$$

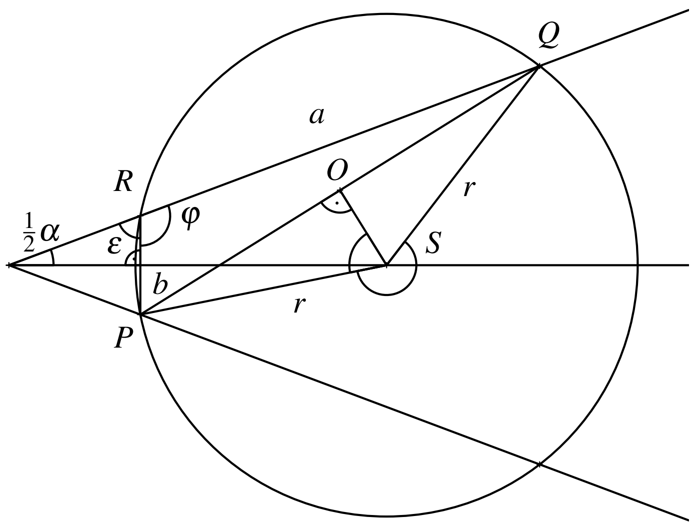
$$= \frac{a}{2}\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} - \operatorname{cotg}\alpha\right) = \frac{a}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{cotg}\alpha\right).$$

Vypočítali jsme vzdálenost mezi středem kružnice opsané tupoúhlému rovnoramennému trojúhelníku a jeho ortocentrem.

Příklad 40, Šar. 108

Určete poloměr kružnice, která protíná obě ramena úhlu velikosti α tak, že na obou ramenou tak vytíná tětivy délky a, přičemž vzdálenost mezi bližšími konci tětiv je b.

Řešení:



Obr. 2.42: Příklad 40

Zavedeme značení podle obrázku. Velikost poloměru r vypočítáme jako velikost přepony v pravoúhlém trojúhelníku OSP. K tomu předně potřebujeme vypočítat velikost odvěsny OP – ta má poloviční délku oproti $|PQ|$. Délku $|PQ|$ vypočítáme užitím kosinové věty v trojúhelníku PQR, kde $|PR| = b$, $|RQ| = a$ a $|\sphericalangle PRQ| = \varphi$. Platí:

$$|PQ|^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\varphi.$$

Hodnota funkce kosinus pro vedlejší úhly je shodná až na znaménko, tj. $\cos\alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$. Proto hodnotu $\cos\varphi$ lze vyjádřit také jako $-\cos\varepsilon$. Díky vztahu $\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ platí:

$$\cos\varphi = -\cos\varepsilon = -\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Proto:

$$|PO| = \frac{1}{2}|PQ| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 2\cdot a\cdot b\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Nyní zaměřme pozornost na velikost vnitřního úhlu PSO ve stejnojmenném trojúhelníku. Delšímu z oblouků PQ přísluší obvodový úhel PRQ, který má velikost φ. Proto velikost nekonvexního úhlu PSQ je 2φ. Velikost konvexního úhlu PSQ je tudíž $360^\circ - 2\varphi$, tudíž $|\sphericalangle PSO| = 180^\circ - \varphi = \varepsilon$.

Konečně v pravoúhlém trojúhelníku PSO užitím funkce sinus a úpravou získáme hledanou velikost poloměru r:

$$\sin\varepsilon = \frac{|PO|}{r} \quad\Rightarrow\quad r = \frac{|PO|}{\sin\varepsilon} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2\cdot a\cdot b\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Určili jsme hledaný poloměr zadané kružnice.

2.10 Goniometrické vzorce

V následujících úlohách užijeme některé z goniometrických vzorců. Lze sem řadit také Příklad 15, Příklad 30 a Příklad 39.

Příklad 41, Šar. 105

Dvě kružnice l a m se společným středem O mají poloměry R a r, kde $R > r$. Třetí kružnice k se obou těchto kružnic dotýká a leží uvnitř vzniklého mezikruží. Určete tangens úhlu, který svírají tečny vedené z bodu O ke kružnici k.

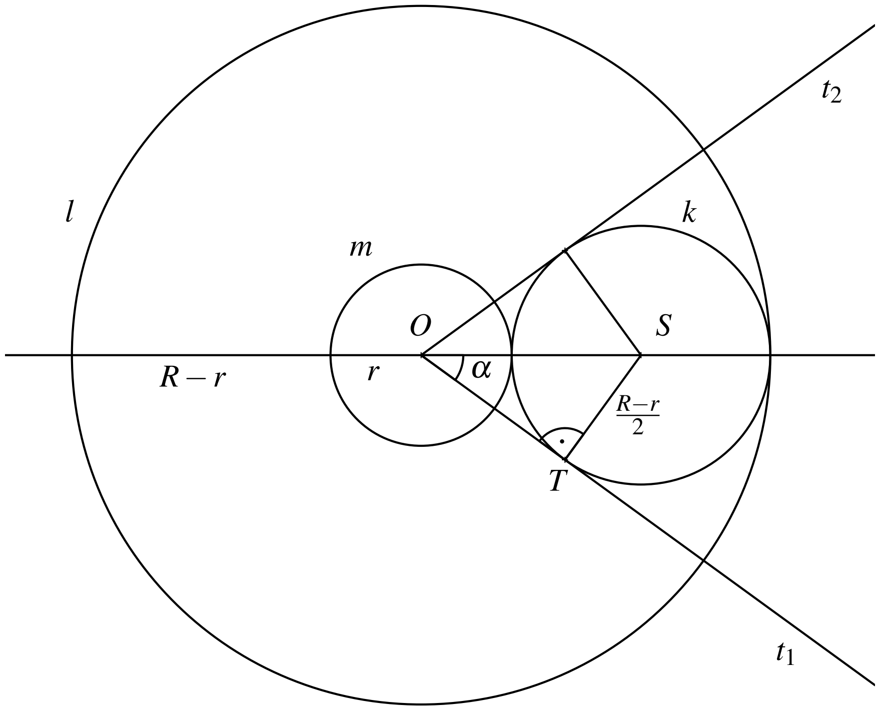
Řešení:

Zavedeme značení podle obrázku. Naším úkolem je určit tangens úhlu, který svírají tečny t_1 a t_2. Velikost úhlu SOT jsme označili jako α, hledanou hodnotou tedy bude $\mathrm{tg}\,2\alpha$. Platí:

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}.$$

Postačí tedy určit hodnoty $\sin\alpha$ a $\cos\alpha$. V pravoúhlém trojúhelníku OTS má strana ST délku $\frac{R-r}{2}$ a strana OS délku $r + \frac{R-r}{2} = \frac{R+r}{2}$. Z toho užitím Pythagorovy věty určíme délku třetí strany OT:

$$|OT|^2 = |OS|^2 - |ST|^2 = \left(\frac{R+r}{2}\right)^2 - \left(\frac{R-r}{2}\right)^2 =$$



Obr. 2.43: Příklad 41

$$= \frac{R^2+2Rr+r^2-\left(R^2-2Rr+r^2\right)}{4} = \frac{4Rr}{4} = Rr \quad \Rightarrow \quad |OT| = \sqrt{Rr}.$$

Odtud: $\sin\alpha = \dfrac{\frac{R-r}{2}}{\frac{R+r}{2}} = \dfrac{R-r}{R+r}$, $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{Rr}}{R+r}$, $\sin^2\alpha = \dfrac{(R-r)^2}{(R+r)^2}$, $\cos^2\alpha = \dfrac{4Rr}{(R+r)^2}$.

Dále dosazením a postupnými úpravami vypočítáme hledanou hodnotu $\operatorname{tg} 2\alpha$:

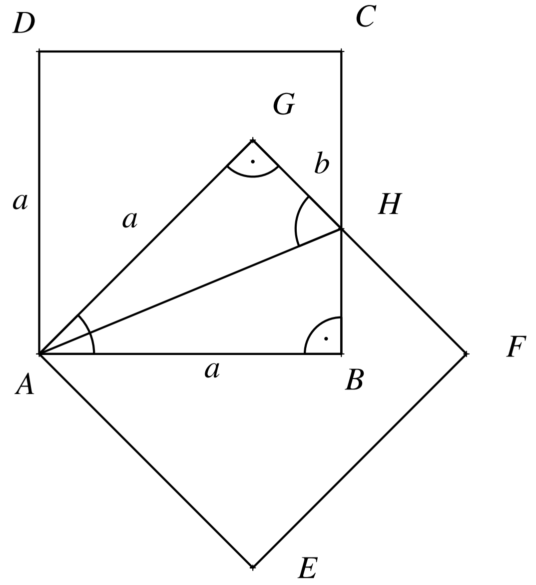
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{R-r}{R+r}\cdot\frac{2\sqrt{Rr}}{R+r}}{\frac{4Rr}{(R+r)^2}-\frac{(R-r)^2}{(R+r)^2}} = \frac{\frac{4(R-r)\sqrt{Rr}}{(R+r)^2}}{\frac{4Rr-R^2+2Rr-r^2}{(R+r)^2}} = \frac{4\sqrt{Rr}\,(R-r)}{6Rr-R^2-r^2}.$$

Příklad 42, Šar. 115

Jsou dány dva čtverce o straně a. Mají společný jeden vrchol a otočením kolem tohoto vrcholu o 45° přejde jedna ze stran prvního čtverce ve stranu druhého čtverce. Vypočítejte obsah oblasti, kde se oba čtverce překrývají.

Řešení:

Zavedeme značení podle obrázku. Máme vypočítat obsah čtyřúhelníka $ABHG$. Ten lze rozdělit na dva trojúhelníky AHB a AHG, které jsou podle věty Ssu shodné.



Obr. 2.44: Příklad 42

Protože jsou pravoúhlé, lze jejich obsah vypočítat jako $S_{AHB} = S_{AHG} = \frac{a \cdot b}{2}$. Neznámou délku b vyjádříme pomocí délky a užitím goniometrických funkcí.

Úhel BAG má podle zadání velikost 45°, takže oba úhly BAH a GAH ve shodných trojúhelnících mají poloviční velikost. Aby byl zápis přehledný, budeme velikosti úhlů psát nikoliv ve stupních, ale v obloukové míře. Platí tedy $|\sphericalangle BAG| = \frac{\pi}{4} \Rightarrow |\sphericalangle HAG| = \frac{\pi}{8}$. V pravoúhlém trojúhelníku HAG platí:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \frac{b}{a}.$$

Úloha se tedy redukuje na otázku, jak přesně vypočítat hodnotu $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$. Využijeme k tomu vzorec pro tangens dvojnásobného argumentu:

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

Použijeme ho pro hodnotu $x = \frac{\pi}{8}$. Platí:

$$1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{tg} \left(2 \cdot \frac{\pi}{8} \right)$$

$$\operatorname{tg} \left(2 \cdot \frac{\pi}{8} \right) = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}.}$$

Zavedeme substituci $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = y$ a následně vyřešíme kvadratickou rovnici:

$$1 = \frac{2y}{1 - y^2} \quad \Rightarrow \quad -2y^2 - 2y + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{1,2} = -1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}.$$

Protože funkce tangens nabývá v prvním kvadrantu kladných hodnot, vyhovuje pouze řešení $y = \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.

Nyní se vraťme k trojúhelníku AHB. Zde platí, že $b = a \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = a \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)$. Dosazením do dříve uvedených vzorců dostaneme:

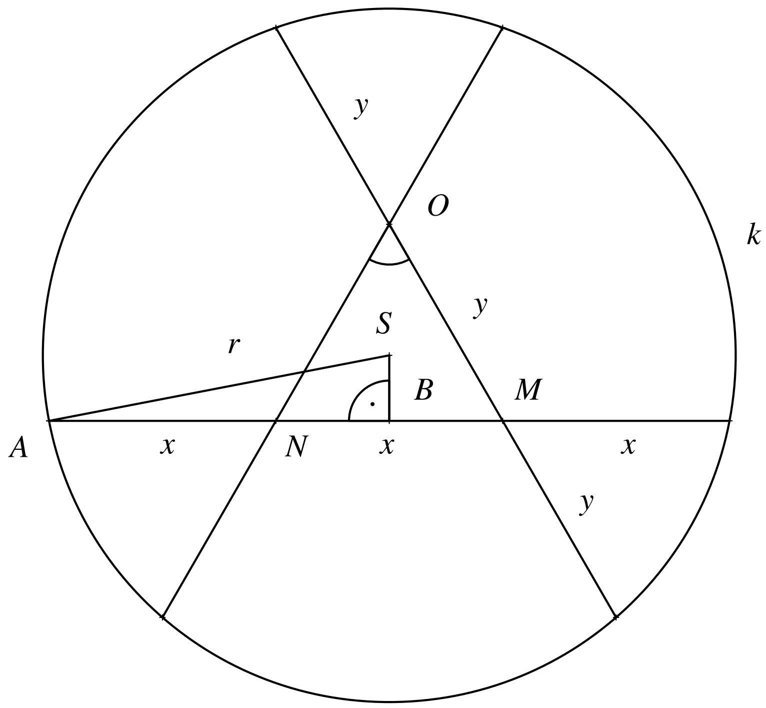
$$S_{AHB} = S_{AHG} = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{a^2}{2}\left(\sqrt{2}-1\right),$$
$$S_{ABHG} = S_{ABH} + S_{AHG} = a^2\left(\sqrt{2}-1\right).$$

2.11 Mocnost bodu ke kružnici

Příklad 43, Šar. 76

V kružnici k se středem S jsou provedeny tři tětivy, které se po dvou protínají. Každá je takto rozdělena na tři stejné úseky. Určete poloměr r kružnice k, jestliže jedna z těchto tětiv má délku a.

Řešení:



Obr. 2.45: Příklad 43

Zadání nám nic neříká o délkách zbylých dvou tětiv, ale my ukážeme, že všechny tři tětivy mají stejnou délku. Vezměme bod M – tedy jeden z průsečíků tětiv. Prochází jím dvě tětivy neznámé délky, ale obě jsou jím rozděleny na úseky v poměru $x : 2x$, resp. $y : 2y$.

Užijeme-li poznatky o mocnosti bodu ke kružnici, pro tětivy procházející bodem M platí, že součin délek jejich úseků je konstantní, tzn. $2x \cdot x = 2y \cdot y$. Proto platí $x = \pm y$, záporná varianta však nemá smysl, a tak dostaneme $x = y$. Analogicky bychom mohli zvolit jiný z průsečíků tětiv, bod N nebo bod O a dostali bychom stejný výsledek. Víme tedy, že všechny tři tětivy jsou stejně dlouhé, tudíž všechny jejich úseky jsou stejně dlouhé.

Hledaný poloměr r kružnice k můžeme nyní vypočítat jako délku přepony AS pravoúhlého trojúhelníka ABS. Platí $|AB| = |AN| + |NB| = x + \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}x$. Je nutné určit velikost úsečky BS. Bod S, tedy střed kružnice k, je zároveň těžištěm rovnostranného trojúhelníka MON, tudíž jeho vzdálenost od středu strany je třetina velikosti těžnice. Navíc tato těžnice je i výškou rovnostranného trojúhelníka. Má-li jeho strana velikost x, má jeho výška velikost $\frac{\sqrt{3}}{2}x$ a její třetina má délku $|BS| = \frac{\sqrt{3}}{6}x$. Užijeme Pythagorovu větu a určíme velikost přepony AS trojúhelníka ABS.

$$|AS|^2 = |AB|^2 + |BS|^2 = \left(\frac{3}{2}x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}x\right)^2 = \frac{9}{4}x^2 + \frac{3}{36}x^2 = \frac{21}{9}x^2 \Rightarrow |AS| = r = \frac{\sqrt{21}}{3}x.$$

Nyní ještě převedeme výsledek vyjádřený pomocí délky x úseku na tvar vyjádřený pomocí délky a tětivy.

$$r = \frac{\sqrt{21}}{3} \cdot x = \frac{\sqrt{21}}{3} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}.$$

2.12 Obsahy rovinných útvarů

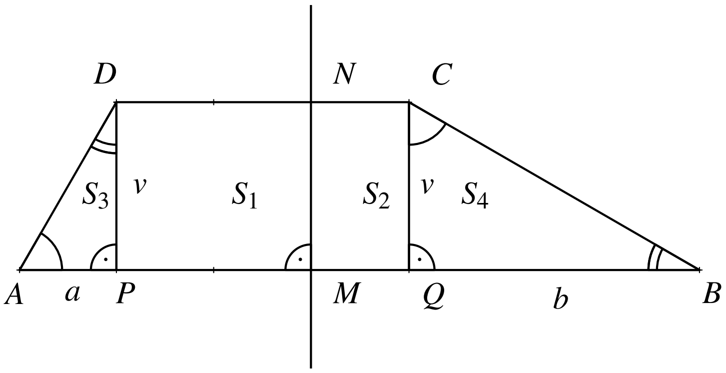
Řešení následujících úloh nějakým způsobem souvisí s obsahy rovinných útvarů. Někdy je potřeba znát méně běžný vzorec, někdy využijeme vztahy mezi obsahy. Lze sem zařadit též Příklad 13, Příklad 19 a Příklad 37.

Příklad 44, Šar. 101

V lichoběžníku mají úhly při vrcholech A, B velikosti 60° a 30° (AB je základna). Bod N leží na základně CD a platí $2|CN| = |ND|$. Bod M leží na základně AB tak, že přímka MN je kolmá na obě základny a rozděluje lichoběžník $ABCD$ na dvě části o stejném obsahu. Určete poměr $|AM| : |MB|$.

Řešení:

Zavedeme značení podle obrázku, kde S_1, S_2, S_3 a S_4 označují obsahy obdélníků nebo trojúhelníků, ve kterých jsou umístěny. Podle zadání platí $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$, protože přímka MN rozděluje lichoběžník na stejně velké části, a $S_1 = 2S_2$, protože $|PM| = 2|MQ|$. Nejprve vyjádříme výšku v společnou pro lichoběžník $ABCD$ i trojúhelníky APD a QBC pomocí délek $a = |AP|$ a $b = |BQ|$, abychom našli vztah mezi nimi. V pravoúhlém trojúhelníku APD užijeme funkce tangens a vidíme, že $\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{v}{a} \Rightarrow v = a\sqrt{3}$. V pravoúhlém trojúhelníku QBC užijeme opět funkci tangens a vidíme $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{v}{b} \Rightarrow v = \frac{b}{\sqrt{3}}$. Odtud $a\sqrt{3} = \frac{b}{\sqrt{3}} \Rightarrow b = 3a$.



Obr. 2.46: Příklad 44

Protože trojúhelníky APD a QBD mají stejnou výšku v a jedna strana QB, na kterou je tato výška spuštěna, je třikrát delší než druhá strana AP, na kterou je tato výška také spuštěna, platí mezi jejich obsahy následující vztah: $S_4 = 3S_3$. Dosazujme:

$$S_1 + S_3 = S_2 + S_4 \;\Rightarrow\; S_1 + S_3 = \frac{1}{2}S_1 + 3S_3 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}S_1 = 2S_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; S_1 = 4S_3 \;\Rightarrow\; |PM| \cdot v = \frac{4av}{2} \;\Rightarrow\; |PM| = 2a.$$

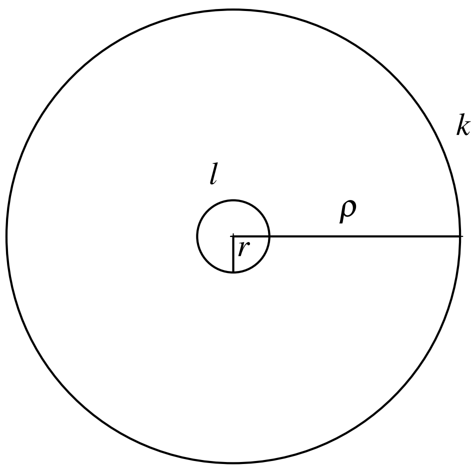
Z $|PM| = 2a$ plyne $|MQ| = \frac{1}{2}|PM| = a$. Hledaný poměr $|AM| : |MB|$ lze tedy vyjádřit jako:

$$|AM| : |MB| = (|AP| + |PM|) : (|MQ| + |QB|) = (a + 2a) : (a + 3a) = 3 : 4.$$

Příklad 45, Šar. 62

Obsah mezikruží vymezeného soustřednými kružnicemi k a l je roven S. Poloměr ρ větší z kružnic je roven délce kratší z kružnic. Určete poloměr menší kružnice.

Řešení:



Obr. 2.47: Příklad 45

Zavedeme značení podle obrázku. Ze zadání známe vztah $\rho = 2\pi r$. Rozdíl obsahů kruhů vymezených kružnicemi k a l je

$$\pi\rho^2 - \pi r^2 = S.$$

Dosaďme:

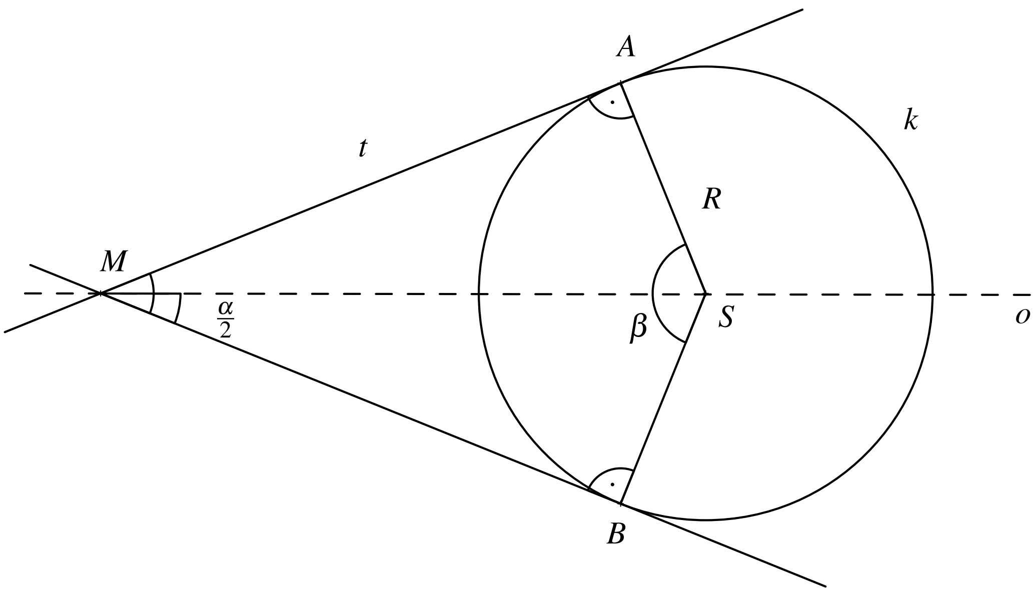
$$\pi(2\pi r)^2 - \pi r^2 = S \Rightarrow r^2(4\pi^3 - \pi) = S \Rightarrow r = \sqrt{\frac{S}{4\pi^3 - \pi}}.$$

Našli jsme hledaný poloměr r menší z kružnic.

Příklad 46, Šar. 64

Ke kružnici k o daném poloměru R jsou z vnějšího bodu M provedeny tečny MA, MB, kde A, B jsou body dotyku. Tyto tečny svírají daný úhel α. Určete obsah obrazce ohraničeného úsečkami MA, MB a menším z oblouků AB.

Řešení:



Obr. 2.48: Příklad 46

Odpověď na zadanou otázku nalezneme v několika krocích. Nejprve si uvědomme, že obsah zadaného útvaru lze vypočítat jako rozdíl dvou obsahů, a to obsahu čtyřúhelníku $MBSA$ a obsahu kruhové výseče ohraničené úsečkami BS, SA a kratším z oblouků AB. Druhý z těchto obsahů je zřejmě menší.

Označme t délku úseček AM, BM, jako je to provedeno v obrázku. Obsah čtyřúhelníku $MBSA$ je roven součtu obsahů shodných pravoúhlých trojúhelníků MBS a MAS (tyto jsou shodné podle věty Ssu). Platí tedy

$$S_{MBSA} = \frac{t \cdot R}{2} + \frac{t \cdot R}{2} = t \cdot R.$$

Nyní je zapotřebí vyjádřit délku t v závislosti na daném úhlu α a známém poloměru R kružnice k. V pravoúhlém trojúhelníku MBS platí:

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \frac{t}{R} \;\Rightarrow\; t = R\cdot\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.$$

Pro výpočet obsahu kruhové výseče potřebujeme znát velikost β úhlu ASB, který je jedním z vnitřních úhlů čtyřúhelníku $MBSA$. V něm známe velikost úhlu α a také víme, že při vrcholech A a B jsou pravé úhly, což plyne z vlastností tečen ke kružnici. Odtud: $\beta = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \alpha \Rightarrow \beta = 180^\circ - \alpha$. Nyní lze vypočítat obsah S_K kruhové výseče jako

$$S_K = \frac{180^\circ - \alpha}{360^\circ}\cdot\pi R^2.$$

Zapišme pro přehlednost tento vzorec s úhly v radiánech:

$$S_K = \frac{\pi-\alpha}{2\pi}\cdot\pi R^2 = \frac{\pi-\alpha}{2}\cdot R^2.$$

Hledaný obsah nekonvexního obrazce označme jako S_O. Nyní už jen dosazujme:

$$S_O = S_{MBSA} - S_K = t\cdot R - \frac{\pi-\alpha}{2}\cdot R^2 = R\cdot\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\cdot R - \frac{\pi-\alpha}{2}\cdot R^2$$

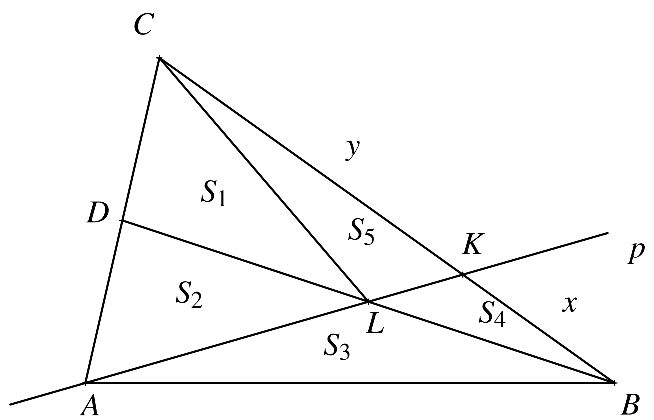
Po vytknutí R^2 dostáváme výsledek, který se shoduje s výsledkem v původní sbírce I. F. Šarygina

$$S_O = R^2\left(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi-\alpha}{2}\right).$$

Příklad 47, Šar. 71

V trojúhelníku ABC prochází vrcholem A přímka p, která půlí těžnici BD. (Bod D leží na straně AC.) V jakém poměru dělí přímka p stranu BC?

Řešení:



Obr. 2.49: Příklad 47

Písmena S s dolním číselným indexem v obrázku označují obsahy jednotlivých dílčích trojúhelníků, v nichž se nacházejí. Např. S_1 reprezentuje obsah trojúhelníka CDL.

V této úloze využijeme následujícího poznatku – shodují-li se dva trojúhelníky ve velikosti jedné ze stran a velikosti výšky na tuto stranu, mají shodné obsahy. Nejprve ukážeme, že trojúhelníky ADL a CDL obě podmínky splňují.

Protože bod D je středem úsečky CA, platí rovnost $|AD| = |DC|$. Výška obou těchto trojúhelníků ze společného vrcholu L je pomyslná kolmice spuštěná z bodu L na stranu AC. V obrázku by nám ale překážela, proto si ji pro pochopení pouze představíme. Trojúhelníky ADL a CDL tak skutečně obě podmínky splňují.

Objasnili jsme tedy rovnost $S_1 = S_2$. Analogicky platí $S_2 = S_3$, protože bod L půlí úsečku BD.

Využívaný poznatek ještě rozšíříme na případ, kdy mají trojúhelníky společnou výšku, ale jejich strany, ke kterým je tato výška spuštěna nejsou stejně dlouhé, ale jejich délky jsou v určitém poměru. Např. trojúhelníky BKL a KLC mají společnou výšku spuštěnou z vrcholu L, ale strany, na které je spuštěna, jsou v poměru $x : y$. I jejich obsahy jsou tudíž v tomto poměru, tzn. $S_4 : S_5 = x : y$. Využijme tento poznatek ještě pro obsahy trojúhelníků BKA a KCA. Výška spuštěná z vrcholu A je společná a platí $|BK| : |KC| = x : y$. Přepišme obsahy trojúhelníků BKA a KCA jako součty dílčích obsahů. Platí:

$$\frac{S_3 + S_4}{S_1 + S_2 + S_5} = \frac{x}{y}$$

Protože ale $S_4 : S_5 = x : y$, musí platit také $S_3 : (S_1 + S_2) = x : y$. Ale protože platí $S_1 = S_2 = S_3$, je hledaný poměr $x : y$ roven $1 : 2$. To je odpověď na zadanou otázku.

Příklad 48, Šar. 52

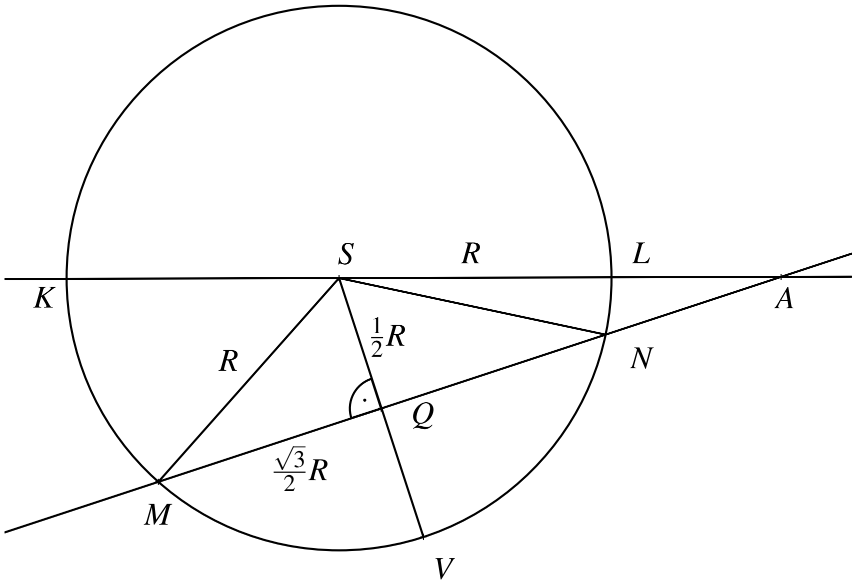
Vně kružnice k o poloměru R leží bod A, kterým prochází dvě přímky protínající kružnici. Jedna z nich prochází středem kružnice k a druhá z nich je od středu kružnice vzdálena o polovinu poloměru R. Určete obsah oblasti, která leží uvnitř kružnice k a zároveň je ohraničena danými dvěma přímkami.

Řešení:

Zavedeme značení podle obrázku. Máme-li určit obsah oblasti ohraničené sečnami KL a MN a oblouky KM a NL, odečteme od poloviny obsahu kruhu obsah menší kruhové úseče nad tětivou MN.

Obsah kruhové úseče nad tětivou MN vypočítáme tak, že od obsahu kruhové výseče příslušné oblouku MN odečteme obsah rovnoramenného trojúhelníka SMN. Abychom určili obsah kruhové výseče, potřebujeme znát velikost úhlu MSN. Vidíme, že $|MS| = R$, $|SQ| = \frac{1}{2}R$. Proto v pravoúhlém trojúhelníku MQS platí $\cos\sphericalangle QSM = \frac{1}{2}$, takže $|\sphericalangle QSM| = 60^\circ$. Trojúhelníky MSQ a NSQ jsou podle věty *sus* shodné a proto má úhel QSN velikost 60°. Počítáme tedy obsah S_{KV} kruhové výseče nad obloukem MN s úhlem $|\sphericalangle MSN| = 120^\circ$:

$$S_{KV} = \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot \pi R^2 = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2.$$



Obr. 2.50: Příklad 48

Abychom mohli vypočítat obsah trojúhelníka MSN, potřebujeme znát délku tětivy MN. Platí $|MN| = 2 \cdot |MQ|$. Úsečka MQ je odvěsna pravoúhlého trojúhelníka MQS. Délku jeho odvěsny lze vypočítat Pythagorovou větou nebo goniometrickými funkcemi. Vidíme, že $|MQ| = \frac{\sqrt{3}}{2}R$. Proto obsah S_{MSN} trojúhelníka MSN vypočítáme známým vzorcem:

$$S_{MSN} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}R \cdot \frac{1}{2}R = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2.$$

Obsah S_{KU} kruhové úseče je tedy:

$$S_{KU} = S_{KV} - S_{MSN} = \frac{1}{3}\pi R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2 = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12}R^2.$$

Hledaný obsah S_{KMNL} oblasti vymezené tětivami KL a MN a oblouky KM a NL určíme následujícím výpočtem (od obsahu půlkruhu odečítáme obsah kruhové úseče):

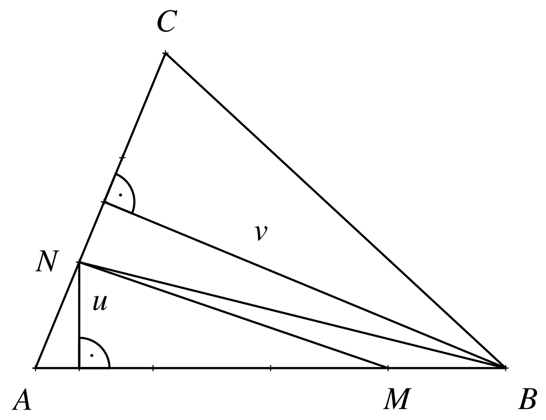
$$S_{KMNL} = \frac{\pi R^2}{2} - \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12}R^2 = R^2 \cdot \frac{6\pi - 4\pi + 3\sqrt{3}}{12} = \frac{R^2}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Nalezli jsme odpověď na zadanou otázku.

Příklad 49, Šar. 104

Na straně AB trojúhelníka ABC leží bod M a na straně AC bod N. Přitom $|AM| = 3|MB|$ a $2|AN| = |NC|$. Určete obsah čtyřúhelníka $MBCN$ v závislosti na obsahu S trojúhelníka ABC.

Řešení:



Obr. 2.51: Příklad 49

Zavedeme značení podle obrázku. Úsečky označené jako u a v jsou výšky společné několika trojúhelníkům. Výška u je společná například trojúhelníkům ABN a MBN, proto jsou jejich obsahy v takovém poměru, v jakém se k sobě mají základny AB a MB, na které je tato výška spuštěna (v druhém případě na její prodloužení za bod M). Proto platí:

$$|AM| = 3|MB| \Rightarrow |AB| = 4|MB| \Rightarrow S_{ABN} = 4S_{MBN}.$$

Výška v je společná trojúhelníkům ABC, NBC a ABN. Stejně jako v předchozím případě dokážeme určit, v jakém poměru jsou jejich obsahy. Platí:

$$S_{ABN} = \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{NBC}.$$

Hledaný obsah čtyřúhelníka $MBCN$ lze vypočítat jako součet obsahů trojúhelníků MBN a BCN. Tyto dokážeme vyjádřit v závislosti na obsahu S trojúhelníka ABC:

$$S_{MBCN} = S_{MBN} + S_{BCN} = \frac{1}{4}S_{ABN} + \frac{2}{3}S_{ABC} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}S_{ABC} + \frac{2}{3}S_{ABC} = \left(\frac{1}{12} + \frac{2}{3}\right)\cdot S_{ABC} = \frac{3}{4}S.$$

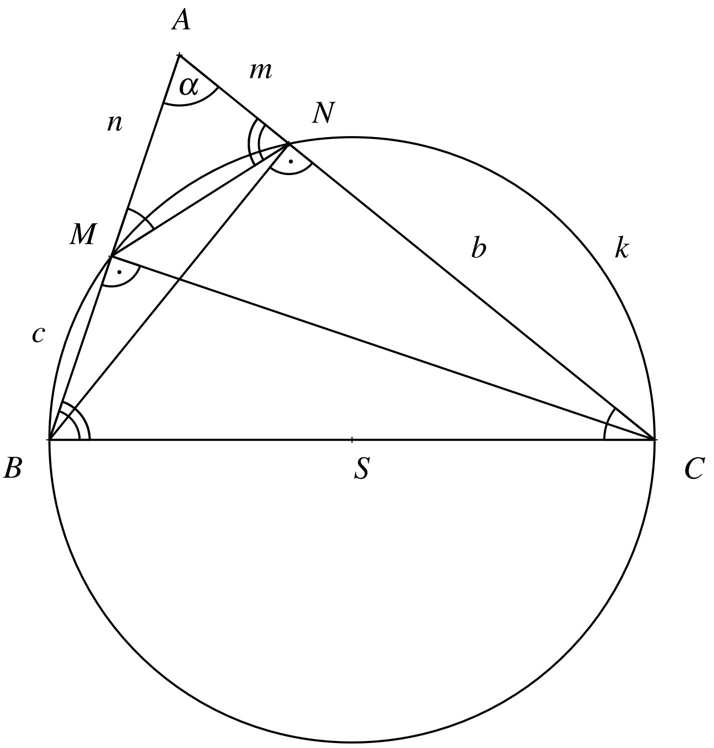
Obsah čtyřúhelníka $MBCN$ je roven $\frac{3}{4}S$.

Příklad 50, Šar. 109

Strana BC trojúhelníka ABC je průměrem kružnice k, která protíná strany AB a CA v bodech M a N. Určete obsah trojúhelníka AMN, když obsah trojúhelníka ABC je S a úhel BAC má velikost α.

Řešení:

Zavedeme značení podle obrázku. Naším úkolem je vyjádřit obsah trojúhelníka AMN v závislosti na obsahu S trojúhelníka ABC.



Obr. 2.52: Příklad 50

Jeden z možných způsobů, jak vypočítat obsah trojúhelníka, je použít vzorec $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$, kde a, b jsou dvě strany trojúhelníka a γ je úhel, který svírají. V našem případě:

$$S = \frac{1}{2} \cdot (m+b) \cdot (n+c) \cdot \sin\alpha.$$

Hledaný obsah trojúhelníka AMN podle tohoto vzorce vyjádříme jako:

$$S_{AMN} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot n \cdot \sin\alpha.$$

Vidíme, že mezi S_{AMN} a S platí následující vztah:

$$S_{AMN} = S \cdot \frac{m \cdot n}{(m+b) \cdot (n+c).}$$

Výraz $\frac{m \cdot n}{(m+b) \cdot (n+c)}$, kterým násobíme hodnotu S, je ještě nutné vyjádřit pomocí nějaké zadané hodnoty. Jediná zadaná hodnota je velikost α úhlu BAC.

Podle Thaletovy věty jsou úhly CNB a CMB pravé. Z toho plyne, že i úhly BNA a CMA jsou jako jejich vedlejší úhly pravé. V pravoúhlém trojúhelníku BNA platí:

$$\cos\alpha = \frac{m}{n+c}.$$

Analogicky, v pravoúhlém trojúhelníku CMA platí:

$$\cos\alpha = \frac{n}{m+b}.$$

Vynásobením levých a pravých stran předchozích dvou rovnic dostaneme:

$$\cos^2\alpha = \frac{m\cdot n}{(m+b)\cdot(n+c)}.$$

Tím jsme ale nalezli hledané vyjádření výrazu $\frac{m\cdot n}{(m+b)\cdot(n+c)}$ v závislosti na velikosti úhlu α. Hledaný vztah je tedy:

$$S_{AMN} = S\cdot\cos^2\alpha.$$

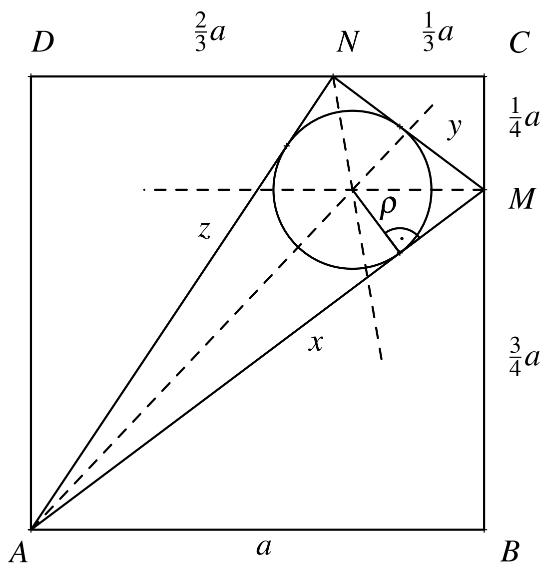
2.13 Poloměr kružnice vepsané

V řešení následujících úloh využijeme vzorec pro výpočet délky poloměru kružnice vepsané trojúhelníku. Tento vzorec je v první z nich odvozen.

Příklad 51, Šar. 69

Je dán čtverec $ABCD$ o straně a. Na straně BC leží bod M tak, že $|BM| = 3\cdot|MC|$, a na straně CD leží bod N tak, že $2\cdot|CN| = |ND|$. Určete poloměr ρ kružnice vepsané trojúhelníku AMN.

Řešení:



Obr. 2.53: Příklad 51

Zavedeme značení podle obrázku. V obrázku jsou uvedeny délky některých úseček, jako např. $|BM| = \frac{3}{4}a$. Všechny uvedené hodnoty přímo vyplývají ze zadané polohy bodů M a N.

Pro výpočet velikosti ρ poloměru kružnice vepsané trojúhelníku, který má strany délek a, b, c, existuje následující vzorec (viz poznámka za koncem tohoto příkladu):

$$\rho = \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{p}}, \text{ kde } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Použijme tedy vzorec pro trojúhelník AMN a nejprve se zaměřme na výpočet potřebných délek jednotlivých stran x, y, z. Všechny tři údaje lze s pomocí Pythagorovy věty vypočítat jako délky přepon pravoúhlých trojúhelníků ABM, MCN a NDA:

$$x = \sqrt{a^2 + \frac{9}{16}a^2} = \sqrt{\frac{25}{16}a^2} = \frac{5}{4}a, \text{ analogicky } y = \frac{5}{12}a \text{ a } z = \frac{\sqrt{13}}{3}a.$$

Nyní určíme hodnotu p ze zadaného vztahu

$$p = \frac{x+y+z}{2} = \frac{\frac{5}{4}a + \frac{5}{12}a + \frac{\sqrt{13}}{3}a}{2} = \frac{15a + 5a + 4\sqrt{13}a}{12 \cdot 2} = \frac{a\left(5+\sqrt{13}\right)}{6}.$$

Dalším z dílčích výpočtů je určit rozdíly $p-x$, $p-y$, $p-z$:

$$p - x = \frac{a\left(5+\sqrt{13}\right)}{6} - \frac{5}{4}a = a\left(\frac{10+2\sqrt{13}-15}{12}\right) = \frac{a}{12}\left(2\sqrt{13}-5\right),$$

$$p - y = \frac{a\left(5+\sqrt{13}\right)}{6} - \frac{5}{12}a = a\left(\frac{10+2\sqrt{13}-5}{12}\right) = \frac{a}{12}\left(5+2\sqrt{13}\right),$$

$$p - z = \frac{a\left(5+\sqrt{13}\right)}{6} - \frac{\sqrt{13}}{3}a = a\left(\frac{5+\sqrt{13}-2\sqrt{13}}{6}\right) = \frac{a}{6}\left(5-\sqrt{13}\right).$$

Nyní máme všechny potřebné hodnoty pro výpočet poloměru kružnice vepsané trojúhelníku AMN a můžeme dosadit do dříve uvedeného vzorce

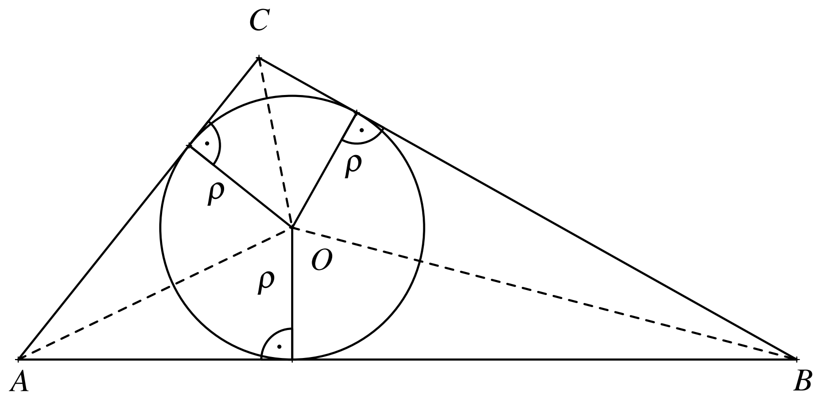
$$\rho = \sqrt{\frac{(p-x)\,(p-y)\,(p-z)}{p}} = \sqrt{\frac{\frac{a}{12}\left(2\sqrt{13}-5\right)\frac{a}{12}\left(2\sqrt{13}+5\right)\frac{a}{6}\left(5-\sqrt{13}\right)}{\frac{a\left(5+\sqrt{13}\right)}{6}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{a^2}{12^2}\cdot(4\cdot 13-25)\cdot\left(5-\sqrt{13}\right)}{5+\sqrt{13}}} = \frac{a}{12}\cdot\sqrt{27\cdot\frac{5-\sqrt{13}}{5+\sqrt{13}}\cdot\frac{5+\sqrt{13}}{5+\sqrt{13}}} =$$

$$= \frac{a}{12\cdot\left(5+\sqrt{13}\right)}\cdot\sqrt{27\cdot 12} = \frac{3a}{2\left(5+\sqrt{13}\right)}.$$

Takto jsme získali hledaný poloměr ρ kružnice vepsané trojúhelníku AMN.

Poznámka. Používaný vzorec pro výpočet velikosti poloměru kružnice vepsané trojúhelníku ještě odvodíme. K tomuto účelu je zde další pomocný obrázek obecného trojúhelníka ABC se standardním označením.



Obr. 2.54: Pomocný obrázek

Obsah S trojúhelníku ABC lze vyjádřit jako součet obsahů tří trojúhelníků se společným vrcholem O.

$$S = S_{ABO} + S_{BCO} + S_{CAO} = \frac{1}{2}c\rho + \frac{1}{2}a\rho + \frac{1}{2}b\rho = p\rho, \quad \text{kde} \quad p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Poloměr ρ kružnice vepsané tedy lze vyjádřit jako $\rho = \frac{S}{p}$. Porovnáme-li toto vyjádření se známým Heronovým vzorcem, dostaneme:

$$p\rho = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow \rho = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

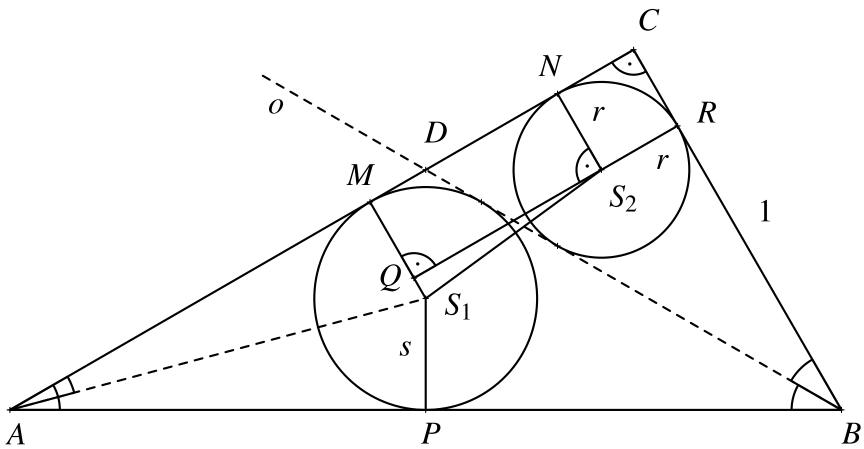
Příklad 52, Šar. 100

V pravoúhlém trojúhelníku ABC, kde $\alpha = 30°$, rozděluje osa o ostrého úhlu β tento trojúhelník na dva menší trojúhelníky ABD a BCD, kde bod D je průsečíkem přímky AC a osy o. Určete vzdálenost mezi středy kružnic, které jsou vepsány trojúhelníkům ABD a BCD, jestliže délka kratší odvěsny trojúhelníka ABC je 1.

Řešení:

Zavedeme značení podle obrázku. Po doplnění úsečky S_2Q, která je kolmá na NS_2, vyplyne, že vzdálenost středů S_1 a S_2 dvou kružnic vepsaných lze vypočítat jako velikost přepony pravoúhlého trojúhelníka S_1S_2Q s pravým úhlem při vrcholu Q.

Body M, N jsou body dotyku kružnic se stranou AC a poloměry r a s obou kružnic jsou délky dvou stran čtyřúhelníka MS_1S_2N. Protože ale $NMQS_2$ je obdélník, je úhel S_2QS_1 pravý (je totiž vedlejší k pravému úhlu MQS_2). Velikosti odvěsen QS_1, QS_2 určíme v dalších úvahách a nakonec budeme moci použít Pythagorovu větu.



Obr. 2.55: Příklad 52

Platí $|QS_1| = |MS_1| - |MQ| = s - r$. Odvěsna QS_2 má stejnou velikost jako úsečka MN, pro níž platí $|MN| = |AC| - |AM| - |NC|$. Zřejmě $|NC| = r$ a $|MA|$ určíme následující úvahou. V trojúhelníku ABC je při vrcholu B úhel $\beta = 60^\circ$, který je osou rozdělen na poloviny. Trojúhelník ABD má proto oba úhly při základně AB stejně velké a je tudíž rovnoramenný. Základna AB má délku 2 – to plyne z užití goniometrické funkce sinus v pravoúhlém trojúhelníku ABC. Platí $|AB| = 2|AP|$, odkud $|AP| = 1$. Protože ale body M a P mají od vrcholu A stejnou vzdálenost, jistě platí i $|AM| = 1$. (Jsou to body dotyku na tečnách vedených z bodu A ke kružnici vepsané trojúhelníku ABD.)

Dalším nevyhnutelným krokem v této úloze je vyčíslit oba poloměry r i s, neboť r potřebujeme už pro určení velikosti úsečky MN a obě hodnoty potřebujeme pro určení jejich rozdílu $s - r$. Pro výpočet velikosti poloměru kružnice vepsané je nutné znát velikosti všech stran daného trojúhelníka, jemuž je kružnice vepsána. To v případě trojúhelníka ABD není těžké. Už víme, že $|AB| = 2$, dále snadno pomocí Pythagorovy věty určíme $|AC| = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Mimo to také víme, že osa vnitřního úhlu trojúhelníka dělí protější stranu v takovém poměru, v jakém jsou velikosti stran k tomuto úhlu přilehlé, to znamená že $|AB| : |BC| = 2 : 1 = |AD| : |DC|$. Odtud $|AD| = \frac{2}{3}|AC| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Trojúhelník ABD je ale rovnoramenný, tudíž $|AD| = |BD|$. Známe už velikosti všech tří stran a použijeme vzorec pro výpočet poloměru kružnice vepsané:

$$s = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}, \text{ kde } \quad p = \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow p = \frac{2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}}{2} = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$s = \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} - 2\right)\left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)}{1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}}}.$$

Upravme a výraz pod odmocninou rozšiřme vhodným výrazem:

$$s=\sqrt{\frac{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-1\right)\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-1\right)}{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}+1\right)\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-1\right)}}=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-1\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{\frac{12}{9}-1}}=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-1\right)\cdot\sqrt{3}=2-\sqrt{3}.$$

Obdobným způsobem spočítáme velikost poloměru r. V trojúhelníku BCD známe velikosti všech stran: $|BC|=1$, $|BD|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ a $|CD|=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Užijeme stejný vzorec, v tomto případě platí:

$$p=\frac{1+\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}}{2}=\frac{1+\frac{3\sqrt{3}}{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$r=\sqrt{\frac{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}-1\right)\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\left(\frac{3+3\sqrt{3}-4\sqrt{3}}{6}\right)\left(\frac{3+3\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{6}\right)}{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}}=\frac{1}{6}\cdot\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)\,(3-\sqrt{3})\,(3+\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1}}=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\sqrt{\frac{6\cdot(\sqrt{3}-1)\,(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)\,(\sqrt{3}-1)}}=\frac{1}{6}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\sqrt{\frac{6}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)$$

Vypočítali jsme velikosti obou poloměrů vepsaných kružnic. V předchozích úvahách jsme vyjádřili délku MN jako $|MN|=|AC|-|AM|-|NC|=|AC|-|AP|-r=\sqrt{3}-1-$ $-\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)=\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\left(1-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$. Poslední chybějící hodnota je $s-r$. Platí:

$$s-r=2-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)=\frac{1}{6}\left(12-6\sqrt{3}-3+\sqrt{3}\right)=\frac{1}{6}\left(9-5\sqrt{3}\right).$$

Hledanou velikost úsečky S_1S_2 vypočítáme s pomocí Pythagorovy věty:

$$|S_1S_2|=\sqrt{|QS_1|^2+|QS_2|^2}=\sqrt{(s-r)^2+|MN|^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{1}{6}\left(9-5\sqrt{3}\right)\right)^2+\left(\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\left(1-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}-1+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{30\sqrt{3}}{12}+\frac{25\cdot 3}{36}+\left(\frac{7\sqrt{3}}{6}-\frac{3}{2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{25}{12}+\frac{49\cdot 3}{36}-\frac{42\sqrt{3}}{12}+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{25}{12}+\frac{49}{12}-\frac{7\sqrt{3}}{2}+\frac{9}{4}}=$$

$$= \sqrt{\frac{27+25+49+27}{12} - \frac{12\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{32}{3} - 6\sqrt{3}}.$$

Poslední výraz ještě převedeme na tvar uvedený v Šaryginových výsledcích.

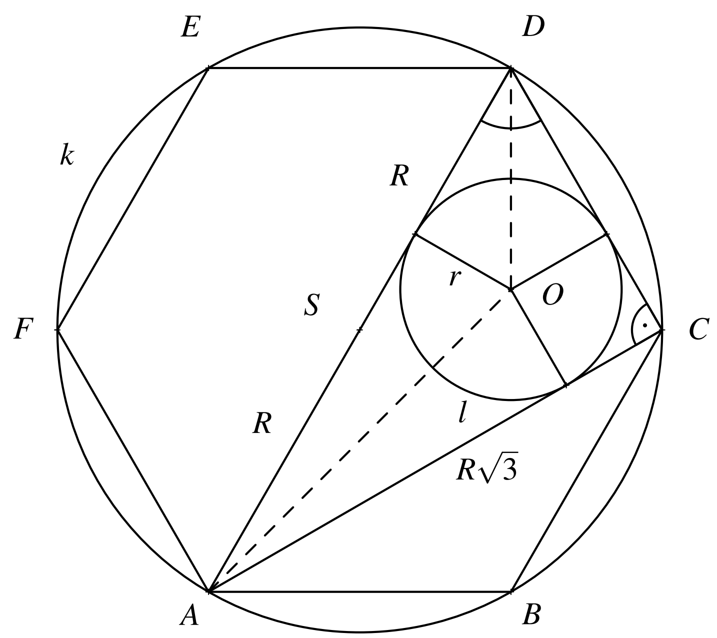
$$|S_1S_2| = \sqrt{\frac{32}{3} - 6\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{96 - 54\sqrt{3}}.$$

Nalezli jsme vzdálenost středů S_1, S_2 dvou vepsaných kružnic.

Příklad 53, Šar. 96

Do kružnice k o poloměru R je vepsán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Určete poloměr r kružnice l vepsané trojúhelníku ACD.

Řešení:



Obr. 2.56: Příklad 53

Zavedeme značení podle obrázku. Pro výpočet velikosti poloměru r kružnice vepsané trojúhelníku ACD je třeba znát velikosti všech jeho stran. Vzhledem k tomu, že strana AD je průměrem kružnice k, má délku $2R$. Strana CD je stranou pravidelného šestiúhelníka, tudíž má stejnou délku jako poloměr kružnice, která je tomuto šestiúhelníku opsaná, tzn. $|CD| = R$. Navíc bod C leží na Thaletově kružnici nad průměrem AD, a proto je při vrcholu C pravý úhel. Proto užitím Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku ACD snadno vypočítáme velikost strany AC.

$$|AC|^2 = 4R^2 - R^2 \Rightarrow |AC| = R\sqrt{3}.$$

Nyní můžeme použít vzorec pro výpočet poloměru r kružnice vepsané trojúhelníku. Nejprve určíme hodnotu p:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{R+2R+R\sqrt{3}}{2} = R\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right).$$

Dosaďme do vzorce a postupně zjednodušme výraz:

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\left(R\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)-R\right)\left(R\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)-2R\right)\left(R\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)-R\sqrt{3}\right)}{R\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{R\left(\frac{3+\sqrt{3}-2}{2}\right)R\left(\frac{3+\sqrt{3}-4}{2}\right)R\left(\frac{3+\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{2}\right)}{R\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)}} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)\left(3-\sqrt{3}\right)}{\left(3+\sqrt{3}\right)}} =$$

$$= \frac{R}{2}\sqrt{\frac{(3-1)\left(3-\sqrt{3}\right)}{\left(3+\sqrt{3}\right)}} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{2\left(3-\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)}{\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)}} =$$

$$= \frac{R}{2}\left(3-\sqrt{3}\right)\sqrt{\frac{2}{6}} = \frac{R\left(3-\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{3}}.$$

Nalezli jsme poloměr r kružnice vepsané trojúhelníku ACD.

2.14 Jiné

Následující úlohy byly seskupeny, přestože jejich řešení spolu nijak nesouvisí. Tato podkapitola je tedy pouze sběrná pro několik jedinečných úloh.

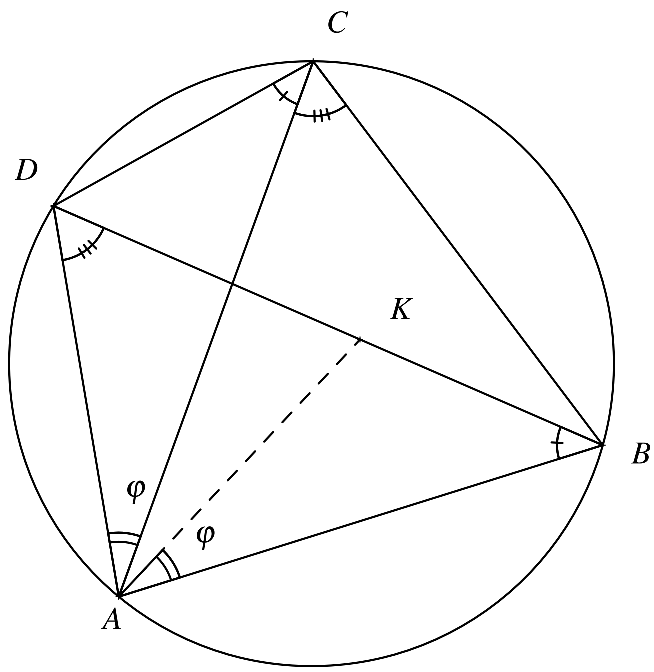
Příklad 54, Šar. 57

Rovnostrannému trojúhelníku ABC je opsána kružnice. Na jejím kratším oblouku BC je libovolně zvolený bod M. Dokažte, že $|AM| = |BM| + |CM|$.

Řešení:

Řešení úlohy začneme netradičně důkazem tvrzení, díky kterému bude úloha zcela průhledná. Zmiňované tvrzení se jmenuje Ptolemaiova věta, a protože se v žádné další úloze nevyužije, odvodíme ji zde.

Ptolemaiova věta říká, že *v každém tětivovém čtyřúhelníku je součin délek úhlopříček roven součtu součinů délek protějších stran*. Při označení $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|DA| = d$, $|AC| = e$ a $|BD| = f$ lze větu přehledně zapsat ve tvaru $ef = ac + bd$.



Obr. 2.57: K důkazu Ptolemaiovy věty

Tvrzení dokážeme s pomocí obrázku 2.57. V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ je doplněna polopřímka AK, která svírá se stranou AB stejný úhel φ, jaký svírá úhlopříčka AC se stranou AD. Na úhlopříčce BD vytíná tato polopřímka bod K. V obrázku jsou dále shodné obvodové úhly zvýrazněny stejnou grafickou úpravou.

Zaměříme se na podobnost některých vzniklých trojúhelníků a ukážeme tak platnost několika rovností. Podle věty *uu* jsou podobné trojúhelníky ACD a ABK. Dále podle věty *uu* jsou rovněž podobné trojúhelníky ACB a ADK. Díky těmto podobnostem jistě platí:

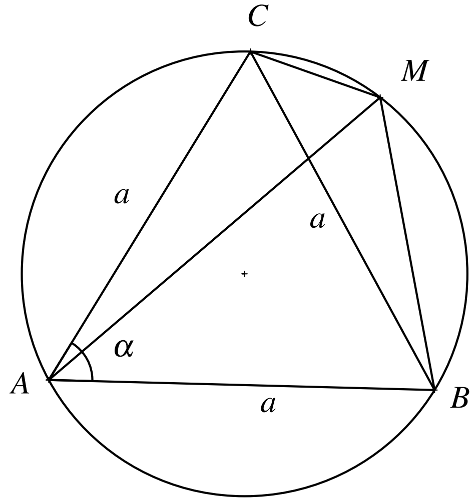
$$\frac{|AC|}{|CD|} = \frac{e}{c} = \frac{a}{|BK|}, \quad \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{e}{b} = \frac{|AD|}{|DK|} = \frac{d}{|DK|}.$$

Jinak řečeno $e|BK| = ac$, $e|DK| = bd$. Sečtením těchto rovností a s přihlédnutím k rovnosti $|BK| + |DK| = |BD| = b$ dostaneme:

$$e|BK| + e|DK| = ac + bd \Rightarrow ef = ac + bd.$$

Tvrzení jsme dokázali. Vraťme se nyní k naší úloze.

Obrázek 2.58 znázorňuje situaci ze zadání. Použijeme odvozenou Ptolemaiovu větu pro čtyřúhelník $ABMC$:
$a \cdot |AM| = a \cdot |BM| + a \cdot |CM|$. To je ale po vydělení obou stran číslem a dokazovaná rovnost $|AM| = |BM| + |CM|$.

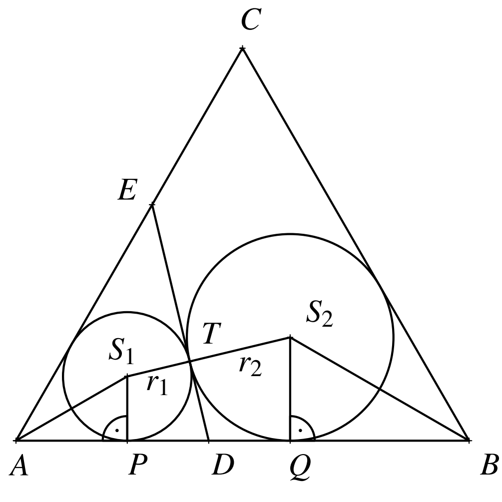


Obr. 2.58: Příklad 54

Příklad 55, Šar. 99

Uvnitř rovnostranného trojúhelníka se stranou délky 1 jsou umístěny dvě dotýkající se kružnice. Každá z nich se dotýká dvou stran trojúhelníka. (Každá strana se dotýká alespoň jedné kružnice.) Dokažte, že součet poloměrů těchto kružnic je alespoň $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Řešení:



Obr. 2.59: Příklad 55 – obecný případ

Přímka, která je společnou vnitřní tečnou obou daných kružnic, rozděluje daný trojúhelník na dvě části – obecně jde o trojúhelník a čtyřúhelník. Volme označení vrcholů tak, aby šlo o trojúhelník ADE a čtyřúhelník $BCED$ (který v případě $E = C$ degeneruje na trojúhelník BCD).

V pravoúhlých trojúhelnících APS_1 a BQS_2 mají úhly u vrcholů A resp. B úhly o velikosti $30°$. Odtud plynoucí vztahy $|AP| = r_1 \cdot \sqrt{3}$ a $|BQ| = r_2 \cdot \sqrt{3}$ dosadíme do rovnosti:

$$1 = |AB| = |AP| + |PQ| + |QB|,$$

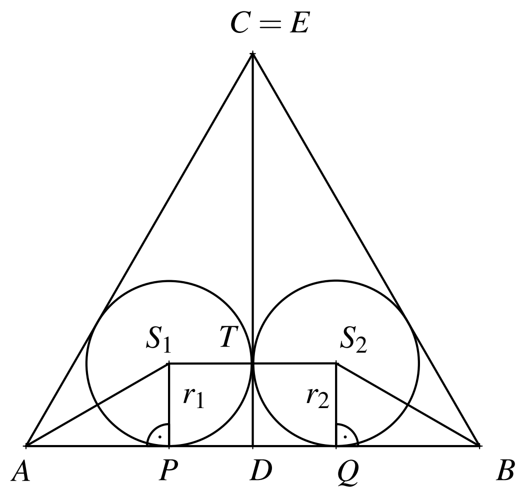
přičemž současně využijeme nerovnosti $|PQ| \leq |S_1S_2|$ plynoucí z toho, že úsečka PQ je kolmým průmětem úsečky S_1S_2 na přímku AB. Díky tomu, že $|S_1S_2| = r_1 + r_2$, dohromady dostaneme:

$$1 \leq r_1\sqrt{3} + (r_1 + r_2) + r_2\sqrt{3} = (r_1 + r_2)(1 + \sqrt{3}).$$

Odtud plyne nerovnost:

$$r_1 + r_2 \geq \frac{1}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2},$$

přitom podle našeho postupu rovnost $r_1 + r_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$ nastane, právě když bude $S_1S_2 \parallel PQ$ neboli $r_1 = r_2$. Tehdy ze souměrnosti podle přímky DE kolmé k AB plyne $E = C$.



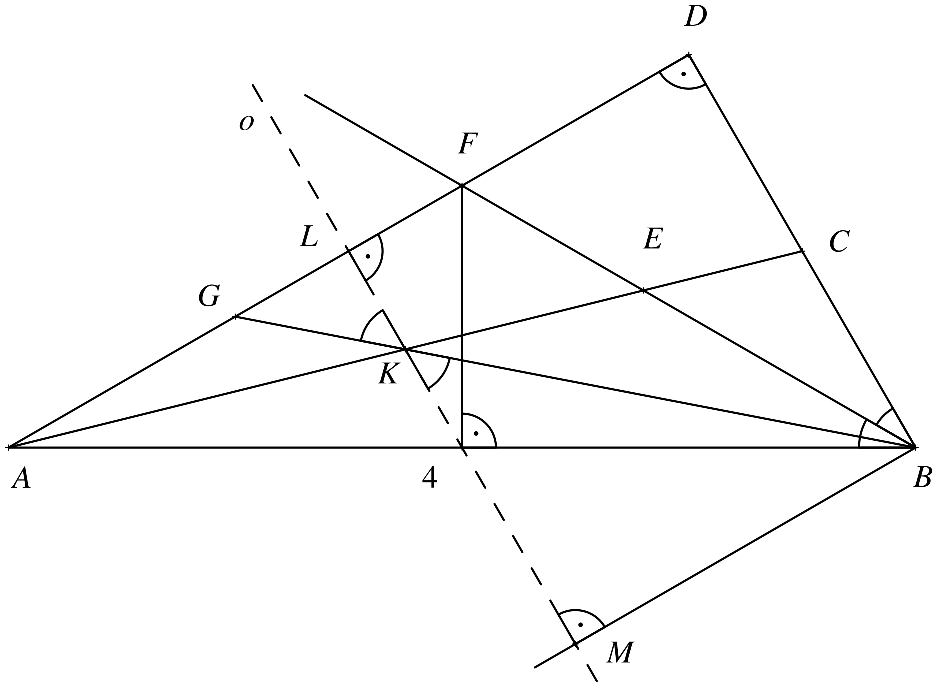
Obr. 2.60: Příklad 55 – případ, kdy $C = E$

Příklad 56, Šar. 87

V trojúhelníku ABC jsou narýsovány těžnice BK, osa úhlu ABC, která protíná stranu AC v bodě E, a výška AD. Určete délku strany AC, jestliže úsečky BK a BE rozdělují úsečku AD na tři stejně dlouhé části a $|AB| = 4$.

Řešení:

Na začátku řešení této úlohy musíme zjistit, jak zadaný trojúhelník ABC vypadá. Předložený obrázek lze narýsovat až po několika úvahách, které v úvodu řešení vysvětlíme.



Obr. 2.61: Příklad 56

Zavedeme značení podle obrázku. Bod F leží na ose úhlu CBA, a proto má od obou ramen, tj. od přímek BC a BA stejnou vzdálenost. Trojúhelníky ABF a BDF mají tudíž stejné výšky z vrcholů F (vzdálenost bodu F od ramen úhlu ABD) a B (velikost úsečky BD). Odtud plyne následující:

$$\frac{S_{ABF}}{S_{BDF}} = \frac{|AF|}{|FD|} = \frac{|AB|}{|BD|}.$$

V pravoúhlém trojúhelníku ABD je strana AB přepona a BD odvěsna. Jistě platí:

$$\frac{|AB|}{|BD|} > 1, \text{ a odtud } \frac{|AF|}{|FD|} > 1.$$

Poslední nerovnost nám prozradí, že bod F, který je jedním ze dvou bodů, které rozdělují výšku AD na třetiny, leží blíže k bodu D. Odtud $|AF| : |FD| = 2 : 1$. Proto platí také $|AB| : |BD| = 2 : 1$, a protože $|AB| = 4$, je $|BD| = 2$. Na přímku těžnice BK tudíž zbývá, aby z výšky AD oddělila třetinu $|AG|$.

Dalším krokem řešení je nalézt krajní bod K těžnice BK. Výška AD je rozdělena body F a G na třetiny. Jak už víme, bodem F prochází osa BE úhlu ABC. Podle zadání musí bodem G procházet přímka těžnice BK. Střed K strany AC trojúhelníku ABC leží na přímce BG a zároveň má od přímky BC poloviční vzdálenost, než bod A. Proto bod K leží na ose o výšky AD, která je i osou úsečky FG. Odtud plyne konstrukce bodu K, i bodu C, jak je vidět na obrázku.

Dle zadání máme vypočítat velikost strany AC. Víme již, že $|AB| = 4$, $|BD| = 2$. Užitím Pythagorovy věty vypočteme velikost výšky AD jako $|AD| = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12}$.

Trojúhelníky GLK a BMK jsou podle věty uu podobné, a protože $|GL| = \frac{1}{2}|GF| = \frac{1}{6}|AD|$ a navíc $|MB| = |LD| = \frac{1}{2}|AD|$, platí:

$$|LG| : |MB| = 1 : 3 \Rightarrow |KL| : |KM| = 1 : 3.$$

Ale $|KL| + |KM| = |LM| = |BD| = 2$. Odtud $|KL| = \frac{1}{2}$ a $|MK| = \frac{3}{2}$. Protože KL je střední příčka trojúhelníku ACD, platí $|CD| = 2|KL| = 1$. Konečně v pravoúhlém trojúhelníku CDA vypočítáme délku přepony AC užitím Pythagorovy věty:

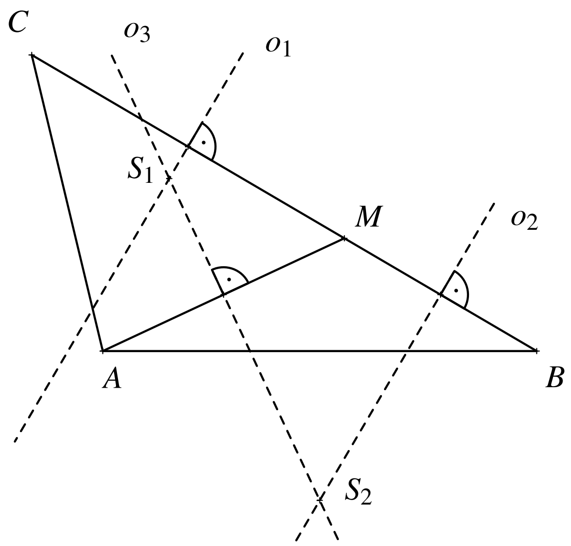
$$|AC| = \sqrt{|AD|^2 + |CD|^2} = \sqrt{12+1} = \sqrt{13}.$$

Nalezli jsme délku strany AC v zadaném trojúhelníku ABC.

Příklad 57, Šar. 111

V trojúhelníku ABC má nejdelší strana BC délku b. Na ní je libovolně zvolen bod M. Určete nejkratší možnou vzdálenost mezi středy kružnic opsaných trojúhelníkům ABM a AMC.

Řešení:



Obr. 2.62: Příklad 57

Pro přehlednost řešení nebudeme opsané kružnice do obrázku kreslit. Ke konstrukci jejich středů S_1 a S_2 postačí v každém trojúhelníku sestrojit osy dvou stran. V obrázku je vyznačena osa o_1 strany CM trojúhelníka AMC, osa o_2 strany BM trojúhelníka ABM a osa o_3 strany AM, která je oběma trojúhelníkům společná. Oba středy S_1 a S_2 jistě leží na ose o_3 a jejich vzdálenost lze odečíst na této přímce. Logickou úvahou dospějeme k tomu, že nejkratší možná vzdálenost mezi středy S_1 a S_2 je šířka pásu mezi osami o_1 a o_2. Každá z těchto os půlí jednu z úseček CM a MB. Vzdálenost těchto os je tedy:

$$\frac{1}{2}|CM| + \frac{1}{2}|MB| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{b}{2}.$$

To je skutečně nejkratší možná vzdálenost středů S_1 a S_2 – nastane v situaci, kdy osa o_3 je kolmá na osy o_1 a o_2, což nastane, právě když úsečka AM bude kolmá na stranu BC. Bod M je v tom případě pata výšky na nejdelší stranu BC trojúhelníka ABC.

Závěr

Cílem této diplomové práce bylo především navýšit množství zpracovaných úloh ze sbírky I. F. Šarygina. Metodika zpracování byla určena už při psaní bakalářské práce. V této diplomové práci je zahrnuto 57 podrobně řešených úloh, které byly metodicky utříděny podle toho, jaké poznatky byly použity při jejich řešení.

Komentář zaslouží i to, že úlohy z Šaryginovy sbírky jsem nevybírala namátkově, ale postupně jsem podle jeho pořadí promýšlela a řešila všechny úlohy. Do diplomové práce jsem nakonec zařadila ty, které jsem považovala za zajímavé, nerutinní, nebo poučné.

Po dopsání práce si troufám říci, že její cíl jsem naplnila. Čerpala jsem příklady ze zadaného zdroje, nalezla jejich řešení a toto řešení metodicky popsala a doplnila návodným obrázkem.

Psaní této diplomové práce mi přineslo mnohé - oprášila jsem si ruštinu a zdokonalila se v odborné slovní zásobě nejen v ruštině ale i v angličtině. Dále jsem vylepšila své dovednosti při používání programu Geogebra a práci v prostředí LaTeX. Rozhodně tyto dovednosti využiji ve své budoucí učitelské profesi. Naučila jsem se také formulovat své myšlenky a logicky je využívat v řešení vybraných úloh. Neméně důležitý je můj osobní pokrok v oblasti planimetrických výpočtů a celé elementární geometrie.

Pevně věřím, že tato sbírka řešených úloh přinese užitek nejenom mně, a dalším kolegům učitelům, ale hlavně i odvážným studentům, kteří se nebojí udělat v matematice nějakou práci navíc.

Seznam použité literatury

[1] HOLÝ, Karel. Překlad zadání úloh ze sbírky I. F. Šarygina: *Zadači po geometrii*, nepublikováno.

[2] CHMELÍKOVÁ, Vlasta. *Zlatý řez nejen v matematice*. Vyd. 2. Praha: Matfyzpress, 2011. Dějiny matematiky. ISBN 978-80-7378-191-0.

[3] LIVIO, Mario. *Zlatý řez: příběh fí, nejpodivuhodnějšího čísla na světě*. Praha: Argo, 2006. Zip (Argo: Dokořán). ISBN 80-7203-808-7.

[4] MAČKOVÁ, Petra. *Planimetrické výpočty v příkladech* [online]. Brno, 2018 [cit. 2021-01-18]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/au2s5/. Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. Vedoucí práce Jaromír Šimša.

[5] ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia: goniometrie*. Praha: Prometheus, 1994. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-85849-57-7.

[6] OLSEN, Scott Anthony. *Záhadný zlatý řez: největší tajemství přírody*. 2. vyd. v českém jazyce. Přeložil Petr HOLČÁK. Praha: Dokořán, 2013. Pergamen. ISBN 978-80-7363-566-4.

[7] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: planimetrie*. 4. uprav. vyd. Praha: Prometheus, 2000. ISBN 80-7196-174-4.

[8] SHARYGIN, Igor Fedorovich *Problems in plane geometry*. Rev. from 1986 Russian ed. transl. by Levant L. Moscow: Mir Publishers, 1988. ISBN 9785030001807.

[9] SIU, Man Keung, 2008. Igor Fedorovich Sharygin. In: *http://www.icmihistory.unito.it/*. [online] [cit. 10.1.2021]. Dostupné z: http://www.icmihistory.unito.it/portrait/sharygin.php

[10] ŠARYGIN, Igor Fedorovič. *Zadači po geometrii: planimetria* [Šarygin, 1986]. Izd. 2-oe. Moskva, Moskva: Nauka, 1986.222 s.