MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

Základy geometrie komplexních čísel

RIGORÓZNÍ PRÁCE

Pavel Boháč

Brno 2013

Obsah

Úvod

Tato rigorózní práce pojednává o základech využití komplexních čísel v planimetrii, kdy jsou jimi reprezentovány body a vektory eukleidovské roviny. Hlavní výhoda tohoto netradičního přístupu ke studiu rovinné geometrie přitom spočívá nejen v kompaktním a přehledném zápise vzájemných vztahů mezi body, jejich množinami a vektory, ale především v možnosti využití operací na komplexních číslech definovaných, tj. jejich sčítání a násobení, s jasným geometrickým významem, který je možné při studiu planimetrie plně využít, jak se tato práce snaží ukázat.

Uvedenému tématu jsem se věnoval již ve svých předchozích pracích, a sice v práci bakalářské nazvané *Geometrie komplexních čísel* a práci diplomové s názvem *Eukleidovská geometrie v komplexní rovině* ([8], resp. [10]). Předložená rigorózní práce přitom vychází zejména ze druhé jmenované, je však doplněna o důkazy elementárních tvrzení pocházející z práce bakalářské, na která se diplomová práce pouze dovolávala jako na dříve dokázaná, příp. ta, jež byla brána za zcela samozřejmá; předložený text je tedy z tohoto pohledu úplný. Navíc každá kapitola nové práce obsahuje řadu mnou dosud neuvedených tvrzení, avizovaných v přehledu na začátku každé kapitoly. Zároveň je tato práce odlehčena o chyby a překlepy, na které jsem byl upozorněn v posudcích obou svých dřívějších prací, stejně jako ty, které byly odhaleny až při mé vlastní revizi důkazů, logických postupů i drobnějších pasáží. Mnohé dřívější důkazy přitom doznaly zjednodušení, příp. se jim dostalo podrobnějšího komentáře, který, jak doufám, napomůže potenciálnímu čtenáři ve snazším pochopení textu. Pro lepší orientaci méně zkušeného čtenáře je práce rovněž, zejména ve svých úvodních částech, doplněna řadou nových obrázků.

Práce se svým pojetím a způsobem výkladu podobá spíše textům určeným studentům základního kurzu vysokoškolské matematiky, a je věnována především těm z nich, kteří by si chtěli prohloubit a obohatit svoje dosavadní chápání analytické geometrie v rovině o tento nevšední pohled optikou komplexních čísel, jemuž se mnoho místa v české matematické literatuře ani v kurzech vysokoškolské geometrie obvykle nedostává. Rovněž by se v kombinaci s prvotní bakalářskou prací, která se na rozdíl od předložené rigorózní práce věnovala i praktickým otázkám, mohla stát zdrojem inspirace a jistého výukového materiálu do výběrových seminářů pro středoškolské učitele, neboť ani ve středoškolské matematice k významnějšímu spojení analytické geometrie v rovině s komplexními čísly zpravidla prakticky nedochází, a pokud ano, spíše na poli fyziky, elektrotechniky či jiných aplikovaných předmětů.

Samotná práce je rozdělena po vzoru diplomové práce do čtyř kapitol. První z nich v deseti paragrafech prezentuje nejdůležitější pojmy a výsledky geometrie roviny komplexních čísel, které v převážné většině nacházejí uplatnění v pozdějších částech textu. Kapitola je oproti mým předešlým pracím doplněna úvodním paragrafem, ve kterém jsou komplexní čísla zavedena coby uspořádané dvojice reálných čísel a plynule přechází v propojení analytické geometrie roviny s algebrou komplexních čísel, jež je pro tuto práci zcela zásadní. Většina textu první kapitoly se zaobírá přímkami a jejich významnými podmnožinami, *kolinearitou tří různých bodů*, tedy situací, kdy tyto body leží na jedné přímce, a to prostřednictvím *dělicího poměru tří různých kolineárních bodů* známého a využívaného v teorii afinních prostorů a jeho přirozeného rozšíření na *poměr tří různých* (obecně nekolineárních) *bodů*. Pozornost je rovněž věnována vzájemným vztahům dvou přímek, jakými jsou jejich rovnoběžnost, kolmost a obecněji odchylka. Na to navazuje další část kapitoly zaměřená na orientované i neorientované úhly a jejich míru zavedenou pomocí otočení. Kapitolu nakonec uzavírá analytické vyjádření přímky a kružnice a některé pomocné výsledky s ní související. Na samý závěr posledního paragrafu první kapitoly je zařazeno nové pojednání o *Apolloniově kružnici* dvou bodů, jež bude využito v kapitole druhé.

Druhá kapitola navazuje výkladem *koncyklicity* a *kolinearity čtyř různých bodů*, tedy situace, kdy tyto body leží na jedné kružnici, resp. přímce, k čemuž je využito v planimetrii známého nástroje, totiž *dvojpoměru čtyř různých kolineárních bodů*, který je zde navíc, obdobně jako dříve dělicí poměr, rozšířen i na případ bodů nekolineárních. Tato kapitola je dále, stejně jako v diplomové práci, doplněna o původní diskusi kladnosti resp. zápornosti dvojpoměru v případě, že je reálný, což, jak bylo předtím ukázáno, je splněno pouze pro body koncyklické či kolineární. Zvláštním případem tzv. *harmonické čtveřice bodů*, jejíž dvojpoměr je roven -1, se zabývá závěrečný, v diplomové práci neuvedený, paragraf druhé kapitoly, kde je mj. odhaleno pozoruhodné a nečekané spojení harmonické čtveřice bodů na přímce s *geometrickou* neboli *paprskovou optikou*, jež zdá se není široce známé.

Třetí kapitola je pak věnována základním vlastnostem obecných trojúhelníků (věta o těžišti trojúhelníku, věta o středu kružnice jemu opsané, věta o ortocentru trojúhelníku). Oproti diplomové práci je doplněna o větu o středu kružnice trojúhelníku vepsané a středech kružnic jemu připsaných, které hrají významnou roli v závěrečné kapitole při studiu *kružnice devíti bodů*. Třetí kapitola navíc podrobně pojednává o *podobnosti dvou trojúhelníků*, neboť ta hraje v planimetrii úlohu jedné z nejjednodušších a nejvyužívanějších relací mezi dvěma trojúhelníky.

Konečně čtvrtá kapitola této práce je kolekcí dvanácti významných vět planimetrie a s nimi souvisejících výsledků dokázaných zde užitím metod vybudovaných v předchozích kapitolách. Oproti diplomové práci je doplněna o vcelku náročný důkaz slavné *Feuerbachovy věty* o dotyku kružnice devíti bodů trojúhelníku s kružnicí jemu vepsanou a jemu připsanými, která v předchozí práci byla pouze zmíněna. Také přibyla nepříliš známá *Schickova věta* s přímou návazností na tvrzení o existenci *Simsonovy přímky*. Každé z tvrzení zde uvedených vět je přitom pro názornost ilustrováno nejméně jedním obrázkem. Tyto věty byly vybrány tak, aby co nejlépe demonstrovaly výhody, které užití komplexních čísel v planimetrii může přinést. Je samozřejmé, že ne vždy je tento přístup optimální, zejména v případech řešitelných prostředky syntetické geometrie v rovině, kterým jsem se ve svém výběru záměrně vyhnul.

Ještě bych rád upozornil, že charakter výsledků práce je vzájemně odlišen užitím tří různých názvů tvrzení, a sice *věta*, *důsledek* a *lemma*, kde věta je chápána jako fundamentální tvrzení studované teorie a důsledek jako významné tvrzení bezprostředně plynoucí z předchozích poznatků, zatímco lemma považuji za tvrzení (často pouhý speciální případ), jehož hlavním účelem je zestručnit a zpřehlednit důkazy pozdějších hlubších výsledků.

V textu je použito několik standardních matematických symbolů a označení, jejichž význam není třeba vysvětlovat. Symboly $\mathbb{R}^*$, $i\mathbb{R}^*$, $i\mathbb{R}$ představují po řadě množinu nenulových reálných čísel, množinu ryze imaginárních čísel a množinu ryze imaginárních čísel doplněných nulou. Pro uzavřenou úsečku s krajními body A a B je ponecháno označení použité v bakalářské i diplomové práci, a sice $[AB]$, stejně jako pro vnitřek této úsečky, tj. (AB), a otevřenou polopřímku s počátečním bodem A a vnitřním bodem B, tedy $(AB$. Podobně je ponechána i symbolika pro označení relace uspořádání tří bodů, kdy bod M leží mezi dvěma body A, B, tedy $A - M - B$ a míry $\mathrm{m}(\widehat{ABC})$ orientovaného úhlu $\widehat{ABC}$. Pro substituci symbolu y za symbol x je užito zápisu $x \to y$.

Práce je vysázena systémem TEX ve formátu LATEX 2_ε, obrázky byly připraveny programem Ipe 6.

Kapitola 1

Základní teoretické poznatky

V úvodním paragrafu této kapitoly zavedeme pojem komplexního čísla jakožto uspořádané dvojice reálných čísel, tedy způsobem běžným ve většině vysokoškolských učebnic zabývajících se komplexními čísly, a přirozeně jej propojíme s nejjednoduššími objekty analytické geometrie roviny, tj. bodem a vektorem, zavedením pojmu *komplexní souřadnice bodu*, resp. *vektoru*. Výklad prvního paragrafu do značné míry vychází z intuitivního pohledu, jeho charakter je tedy poněkud volnější, než je tomu v navazujících částech textu. Dodejme, že zavedení komplexních čísel a operací na nich definovaných nebylo součástí žádné z dřívějších autorových prací, proto je tímto splacen jistý dluh.

Jelikož přímky jsou vedle samotných bodů nejzákladnějšími objekty geometrie vůbec, nemalá část této kapitoly je věnováno právě jim. Pojem úsečky, resp. polopřímky, resp. přímky je přitom vybudován za pomoci metrických vlastností roviny. Mezi prvními výsledky je množství ekvivalentních podmínek *kolinearity trojic bodů* vedoucí až k pojmu *poměru tří různých* (obecně nekolineárních) *bodů* a následné formulaci jednoduché podmínky jejich kolinearity v podobě reálné hodnoty jejich poměru. Poté jsou s využitím vyjádření *skalárního součinu* dvou vektorů v řeči komplexních čísel rozebírány nejjednodušších vzájemné vztahy dvou přímek, a sice jejich *rovnoběžnost* a *kolmost*, směřující až k obecnějšímu pojmu *odchylky* dvou přímek.

V dalších dvou paragrafech zaměříme svoji pozornost na otázky spojené s orientovanými i neorientovanými úhly a jejich mírou zavedenou ve spojení s *otočením v komplexní rovině* a jeho jednoduchým komplexním zápisem, jenž je jedním z nejzákladnějších a nejužívanějších nástrojů, kterým lze řešit řadu úloh planimetrie pomocí komplexních čísel. I přesto, že se v naší práci řešením úloh přímo nezabýváme, považujeme za podstatné tento konstrukt alespoň stručně zmínit. O užitečnosti *rovnice* *otočení* se lze přesvědčit např. v rigorózní práci [11], případně i v praktické části bakalářské práce [8, s. 41, 42, 46, 50–55].

V posledních dvou paragrafech této kapitoly se budeme věnovat analytickému vyjádření dvou nejjednodušších typů křivek v rovině, a sice přímky a kružnice. Kromě *komplexní rovnice přímky* určené dvěma různými body uvedeme i řadu ekvivalentních podob zápisu komplexní rovnice přímky. Zároveň zde odvodíme tvar komplexních rovnic dvou speciálních typů přímek, a to kolmice vedené na přímku daným bodem a osy úsečky, které naleznou mnoho využití v posledních dvou kapitolách práce. Následně odvodíme tvar *komplexní rovnice obecné kružnice* a tvar komplexních rovnic přímek s kružnicí spojených (sečna a tečna kružnice), přičemž se omezíme na jednotkovou kružnici se středem v počátku soustavy komplexních souřadnic, neboť ta najde bohaté využití v důkazech složitějších tvrzení ve čtvrté kapitole. Na samotný závěr této kapitoly jsme oproti diplomové práci zařadili nové pojednání o *Apolloniově kružnici dvou bodů*, jehož užitečnost doložíme v navazující kapitole.

Dodejme, že tato kapitola je kombinací první kapitoly diplomové práce s teoretickou částí práce bakalářské. Bylo přitom třeba sjednotit formu obou textů a podstatným způsobem pozměnit pořadí i logickou strukturu paragrafů, ze kterých sestává, s ohledem na vlastní vývoj a pochopení problematiky autora.

První kapitola přitom prvotně z velké části vychází z knihy [5, s. 53–65], která posloužila jako zdroj paragrafů 1.2, 1.3, 1.7 a 1.8, publikace [3, s. 12–20] pak inspirovala psaní paragrafů 1.5, 1.6, 1.9 (zde společně s knihou [1, s. 58 a 59]) a 1.10 (čerpali jsme výsledky související s jednotkovou kružnicí). Publikace [2, s. 3–5, 13, 14 a 17, 106–108] se stala podkladem pro paragrafy 1.1 a 1.4.

1.1 Komplexní čísla a jejich geometrický význam

Definice 1. Komplexním číslem z rozumíme uspořádanou dvojici (a, b) reálných čísel a, b. Přitom reálné číslo $\operatorname{Re} z := a$ označujeme jako jeho *reálnou část*, reálné číslo $\operatorname{Im} z := b$ nazýváme jeho *imaginární částí.*

Z této definice přímo plyne, že dvě komplexní čísla (a_1, a_2), (b_1, b_2) se sobě rovnají tehdy a jen tehdy, když se rovnají jak jejich reálné, tak imaginární části, tj. $a_1 = b_1$ a zároveň $a_2 = b_2$.

Na množině $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$ všech komplexních čísel zavádíme operaci sčítání $+$ a násobení $\cdot$ dvou komplexních čísel (a_1, a_2), (b_1, b_2) pomocí stejnojmenných operací definovaných pro reálná čísla vztahy:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)\,, \tag{1.1}$$

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2, a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)\,. \tag{1.2}$$

Poznámka. Upozorněme, že symbol + je v prvním zápise použit ve dvou významech. Jednou jako znak nově zaváděné operace sčítání na množině všech komplexních čísel, podruhé jako symbol pro obyčejné sčítání reálných čísel, podobně i v případě znaku $\cdot$ násobení komplexních i reálných čísel. Není ovšem běžné ani účelné symboly těchto dvojic operací od sebe odlišovat, neboť z kontextu bude vždy zřejmé, na která množině se daná operace provádí (jak vzápětí ukážeme, není takové rozlišení ani nezbytné).

Dohodněme se navíc, že nebude-li hrozit nebezpečí nedorozumění, budeme v dalším symbol $\cdot$ v zápise operace násobení (komplexních) čísel podle potřeby vynechávat, tj. budeme psát ab namísto $a \cdot b$ apod.

Všimněme si, že pro speciální komplexní čísla tvaru $(t, 0)$, kde $t \in \mathbb{R}$, platí:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \qquad \text{a} \qquad (a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0)\,.$$

Komplexní čísla tohoto typu se tedy sčítají i násobí stejným způsobem jako čísla reálná. Je tedy přirozené každé komplexní číslo tvaru $(t, 0)$ ztotožnit s reálným číslem t (zejm. $(0, 0) = 0$). Označíme-li navíc komplexní číslo $(0, 1)$ symbolem i, lze každé komplexní číslo $z = (a, b)$ vyjádřit jako

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + b\mathrm{i} = \operatorname{Re} z + \mathrm{i} \operatorname{Im} z.$$

O tomto zápisu komplexního čísla $z = (a, b)$ pak hovoříme jako o *algebraickém tvaru komplexního čísla z*. Přitom o komplexním čísle $\mathrm{i} := (0, 1)$ se budeme vyjadřovat jako o *imaginární jednotce*[1].

Každé komplexní číslo, které není reálné neboli má nenulovou imaginární část, se nazývá *číslo imaginární*. Komplexní čísla tvaru $(0, t) = t\mathrm{i}$, kde t je reálné číslo různé od nuly, pak označujeme jako *čísla ryze imaginární* a množinu všech ryze imaginárních čísel značíme symbolem $\mathrm{i}\mathbb{R}^*$. Odtud a z předchozího je také zřejmý důvod pro zavedené pojmenování reálné a imaginární části komplexního čísla.

[1]Zejména v elektrotechnice se lze setkat s označením imaginární jednotky symbolem j, neboť písmeno i, resp. i, zde obvykle vystupuje ve významu (okamžité) hodnoty elektrického proudu.

Uvažujme libovolné komplexní číslo $z = a + b\mathrm{i}$ a označme $-z := -a - b\mathrm{i}$ a pokud navíc $z \neq 0$, zaveďme označení $z^{-1} := \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\mathrm{i}$. Užitím základních vlastností operací sčítání a násobení definovaných na množině $\mathbb{R}$ všech reálných čísel (viz [2, s. 1]) se snadno ověří, že výše zavedené operace sčítání a násobení na množině komplexních čísel splňují následujících devět vlastností:

1. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}\colon z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;
2. $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}\colon (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;
3. $\forall z \in \mathbb{C}\colon z + 0 = z$;
4. $\forall z \in \mathbb{C}\colon z + (-z) = 0$;
5. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}\colon z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$;
6. $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}\colon (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$;
7. $\forall z \in \mathbb{C}\colon z \cdot 1 = z$;
8. $\forall z \in \mathbb{C}, z \neq 0\colon z \cdot z^{-1} = 1$;
9. $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}\colon z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

Poznámka. První čtyři vlastnosti po řadě říkají, že operace sčítání je na množině všech komplexních čísel *komutativní*, *asociativní*, že vzhledem k této operaci na ní existuje *neutrální prvek* $0 = 0 + 0\mathrm{i}$ a ke každému komplexnímu číslu z existuje na $\mathbb{C}$ vzhledem k operaci $+$ *prvek inverzní*, kterým je číslo $-z$ nazývané *číslo opačné k číslu* z; říkáme, že množina komplexních čísel tak spolu s operací sčítání tvoří tzv. *komutativní grupu.*

Další čtveřice vlastností pak značí, že rovněž množina všech nenulových komplexních čísel je s operací násobení komutativní grupou, kde roli neutrálního prvku hraje číslo $1 = 1 + 0\mathrm{i}$ a inverzi ke každému nenulovému komplexnímu číslu představuje číslo z^{-1}, které pojmenováváme jako *číslo inverzní k číslu* z.

Toto vše spolu s devátou vlastností, tzv. *distributivním zákonem*, znamená, že množina komplexních čísel s operacemi sčítání a násobení tvoří tzv. *komutativní těleso.*

Dohodněme se, že podobně jako tak činíme v případě reálných čísel, budeme zápis $z_1 + (-z_2)$ nahrazovat stručnějším vyjádřením $z_1 - z_2$ a budeme hovořit o rozdílu dvou komplexních čísel, a zápis $z_1 \cdot z_2^{-1}$ vyjádřením $z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$, resp. $\frac{z_1}{z_2}$, přitom hovoříme o podílu dvou komplexních čísel (kde z_2 musí být nenulové).

Dodejme ještě, že vztah (1.2) pro součin dvou komplexních čísel $a_1 + a_2\mathrm{i}$, $b_1 + b_2\mathrm{i}$ má v algebraickém tvaru snadněji zapamatovatelnou podobu

$$(a_1 + a_2\mathrm{i}) \cdot (b_1 + b_2\mathrm{i}) = a_1b_1 + a_1b_2\mathrm{i} + a_2b_1\mathrm{i} + a_2b_2\mathrm{i}^2 = a_1b_1 - a_2b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\,\mathrm{i},$$

kde jsme kromě výše uvedených zákonitostí pro počítání s komplexními čísly využili snadno ověřitelné rovnosti $\mathrm{i}^2 = -1$. Tedy komplexní čísla zapsaná v algebraickém tvaru se násobí (a zřejmě i sčítají) jako dvojčleny.

S libovolným komplexním číslem $z = a + b\mathrm{i}$ ještě spojujeme komplexní číslo zavedené vztahem $\overline{z} := a - b\mathrm{i}$ a nazýváme jej *číslo komplexně sdružené k číslu* z. Je přitom zřejmé, že pro libovolné komplexní číslo z potom platí

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}. \tag{1.3}$$

Není dále složité ověřit, že pro takto zavedený pojem platí vztahy:

$$\begin{gathered} z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}, \qquad z = -\overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathrm{i}\mathbb{R} = \mathrm{i}\mathbb{R}^* \cup \{0\}, \\ \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \qquad \text{a} \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \qquad \text{pro } z_2 \neq 0. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Pro součin komplexně sdružených čísel z a $\overline{z}$ dostáváme

$$z \cdot \overline{z} = (a + b\mathrm{i}) \cdot (a - b\mathrm{i}) = a^2 + b^2.$$

Jedná se tedy vždy o nezáporné reálné číslo, jež je nulové pouze v situaci, kdy $z = 0$, je tudíž zaručena korektnost následující definice:

Definice 2. *Absolutní hodnotou komplexního čísla* $z = a + b\mathrm{i}$ nazýváme číslo definované vztahem $|z| := \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Je snadné se přesvědčit, že pro právě zavedené reálné číslo jsou zachována pravidla pro počítání s absolutními hodnotami známá z reálného oboru:

$$z \neq 0 \Leftrightarrow |z| > 0, \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad \text{a} \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{pro } z_2 \neq 0. \tag{1.5}$$

Komplexní číslo z, jehož absolutní hodnota je rovna jedné, tj. platí pro něj $z\overline{z} = 1$, nazýváme *komplexní jednotka*.

Zásadní význam pro zavedení vzdálenosti dvou bodů roviny v následujícím paragrafu 1.2 a budování základních planimetrických pojmů (úsečka, polopřímka, přímka) v paragrafu 1.3 bude mít následující lemma, známé i v reálném oboru pod názvem *trojúhelníková nerovnost*:

Lemma 1. *Pro libovolná komplexní čísla z_1, z_2 platí*

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|\,, \tag{1.6}$$

přičemž rovnost zde nastane tehdy a jen tehdy, když alespoň jedno z čísel z_1, z_2 je nulové nebo jsou obě nenulová a jejich podíl $\frac{z_1}{z_2}$ je reálné kladné číslo.

Důkaz. Podle Definice 2 a zřejmé nerovnosti $\operatorname{Re} z \le |z|$ platné pro libovolné komplexní číslo z máme

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\,\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)\,(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2} = \\ &= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \le |z_1|^2 + 2\,|z_1z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2\,,\end{aligned}$$

odkud po odmocnění dostaneme dokazovanou nerovnost (1.6) (jejíž obě strany jsou vždy nezáporné, proto je tento obrat ekvivalentní).

Zbývá tak ověřit tvrzení o rovnosti obou jejích stran. Z uvedeného výpočtu dostáváme, že ona rovnost nastane právě tehdy, když

$$2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) = 2\,|z_1z_2| \qquad \text{neboli} \qquad z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 2\sqrt{z_1\overline{z_1}z_2\overline{z_2}}. \tag{1.7}$$

Především je jasné, že poslední podmínka stejně jako rovnost v (1.6) platí v situaci, kdy $z_1 = 0$ nebo $z_2 = 0$. Předpokládejme tedy dále, že $z_1 \ne 0 \ne z_2$ při splnění podmínky (1.7), kterou postupně upravujeme:

$$\begin{aligned}z_1^2\overline{z_2}^2 + 2z_1\overline{z_1}z_2\overline{z_2} + \overline{z_1}^2z_2^2 &= 4z_1\overline{z_1}z_2\overline{z_2},\\ z_1^2\overline{z_2}^2 - 2z_1\overline{z_1}z_2\overline{z_2} + \overline{z_1}^2z_2^2 &= 0,\\ (z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2)^2 &= 0,\\ z_1\overline{z_2} &= \overline{z_1}z_2.\end{aligned}$$

Jelikož jsme předpokládali, že $z_2 \ne 0$ (a $z_1 \ne 0$), dostaneme odtud podmínku

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} \qquad \text{neboli} \qquad \frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}^*.$$

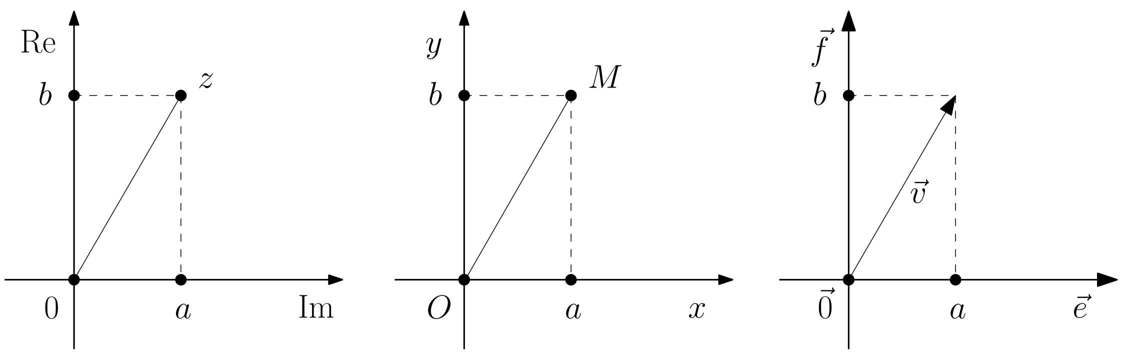
Tedy pokud v uvedené situaci platí (1.7), je podíl $\frac{z_1}{z_2}$ reálný (a nenulový). Úprava umocnění na druhou, kterou jsme při důkazu této implikace využili, je ekvivalentní úpravou jedině v situaci, kdy obě strany rovnosti (1.7) mají stejné znaménko, vzhledem k její pravé straně, která je pro nenulová z_1 a z_2 vždy kladná, je jím plus. Označíme-li $k = \frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}^*$, dostaneme pro levou stranu rovnosti (1.7)

$$z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = kz_2\overline{z_2} + k\overline{z_2}z_2 = 2k\left|z_2\right|^2 .$$

Rovnost (1.7) má tedy smysl jen pro $k = \frac{z_1}{z_2} > 0$, kdy všechny úpravy v provedeném výpočtu jsou ekvivalentní, a tím je důkaz hotov. Q.E.D.

Klíčovým úkolem naší práce je interpretovat komplexní čísla coby body, resp. vektory v rovině. Ze základní školy jsme zvyklí chápat reálná čísla jako body přímky, *číselné osy*. Komplexní čísla se však, na rozdíl od reálných, sestávají ze dvou nezávislých složek s určeným pořadím. Je proto nanejvýš přirozené reprezentovat komplexní číslo $z = a + b\mathrm{i}$ bodem M v rovině určeným souřadnicemi v jistém kartézském[2] souřadnicovém systému jako $M\left[a, b\right]$ a naopak (obr. 1.1).

Komplexní číslo $z = a + b\mathrm{i}$ takto přidružené bodu M budeme dále označovat jako *komplexní souřadnice bodu* M. Je zřejmé, že toto přiřazení je (při pevně zadaném souřadnicovém systému) vzájemně jednoznačné, tedy jednomu komplexnímu číslu odpovídá právě jeden bod roviny. Vzájemnou příslušnost bodu M ke komplexnímu číslu z, bude-li nutné nebo účelné ji explicitně zdůraznit, budeme vyjadřovat zápisem $M\left(z\right)$.



Obrázek 1.1

Rovinu, jejíž body pokládáme za obrazy komplexních čísel, nazýváme *rovinou komplexních čísel*, častěji však *Gaussovou*[3] *rovinou*. Přidruženou (kartézskou) sou-

[2]Tj. běžném pravoúhlém systému se stejným měřítkem na obou osách. Přívlastek „kartézský“ budeme v dalším obvykle vypouštět, neboť jiné systémy v práci neuvažujeme.

[3]**Carl Friedrich Gauß** (1777–1855) – německý matematik a fyzik, jeden z největších matematiků všech dob.

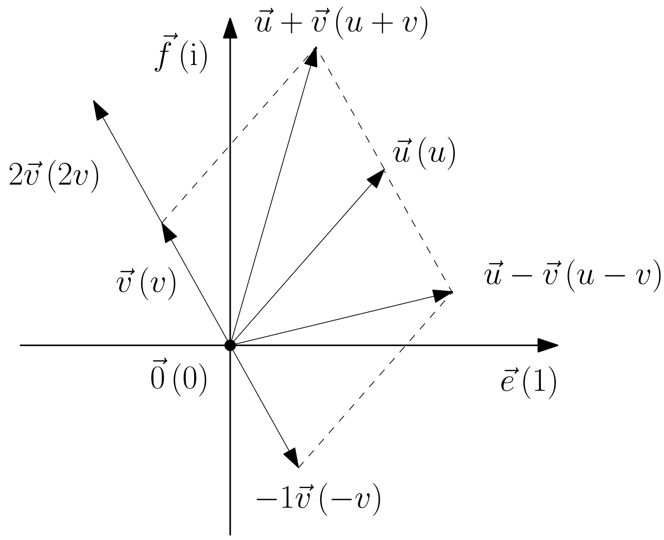
stavu souřadnic budeme v této práci nazývat *soustava komplexních souřadnic*, na její osy x, y se pak budeme odkazovat jako na *reálnou* a *imaginární osu* v tomto pořadí.

Komplexním číslům lze jednoznačně přiřadit nejen body, ale také vektory v rovině. Pokud $\vec{u} = (a, b)$ je souřadnicové vyjádření vektoru v jisté ortonormální[4] bázi (na obr. 1.1 jsou jednotkové vektory báze označeny $\vec{e}$, $\vec{f}$), je přirozené přiřadit mu komplexní číslo $z = a + b\mathrm{i}$, které budeme dále nazývat *komplexní souřadnice vektoru* $\vec{u}$. Stejně jako u bodů roviny, budeme v případě potřeby vzájemnou příslušnost vektoru $\vec{u}$ ke komplexnímu číslu z vyjadřovat zápisem $\vec{u}\,(z)$.

Poznámka.

1) Počátku O soustavy komplexních souřadnic přísluší zřejmě komplexní souřadnice 0 (obr. 1.1), stejně tak i nulovému vektoru $\vec{0} = (0, 0)$.

2) Jsou-li $\vec{u}\,(u)$, $\vec{v}\,(v)$ vektory a t je reálné číslo[5], pak vektory $\vec{u} \pm \vec{v}$ a $t\vec{v}$ mají zřejmě komplexní souřadnice $u \pm v$ a tv v tomto pořadí (na obr. 1.2 je naznačeno mj. použití známého *rovnoběžníkového pravidla* pro součet dvou vektorů, resp. komplexních čísel).



Obrázek 1.2

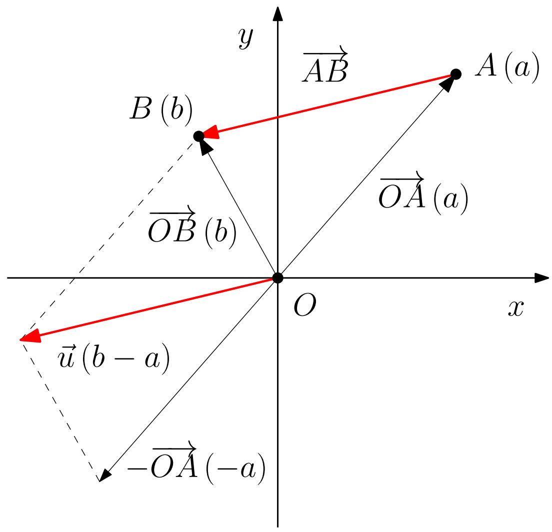
3) Nechť $a = a_1 + a_2\mathrm{i}$, $b = b_1 + b_2\mathrm{i}$ jsou po řadě komplexní souřadnice bodů A, B. Víme, že body A, B jednoznačně určují vektor $\overrightarrow{AB}$ s počátečním bodem A a koncovým bodem B (obr. 1.3). Tomuto vektoru (považujeme-li jej za *volný*) přitom

[4]Tj. pravoúhlé s jednotkovými vektory báze.

[5]V tomto kontextu zejm. ve fyzice označované slovem *skalár* odvozeného z latinského „scala“ čili žebřík, schody, stupnice apod. Téhož původu je i běžně užívané slovo „škála“.

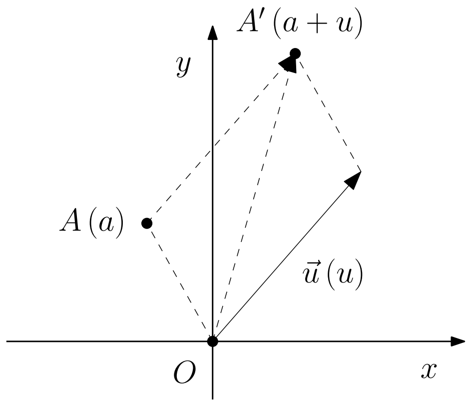
přísluší komplexní souřadnice $b-a$. Opravdu, platí totiž

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1, b_2) - (a_1, a_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)\,.$$



Obrázek 1.3

4) Je-li $A\,(a)$ bod a $\vec{u}\,(u)$ vektor, pak zřejmě bodu $A' = A + \vec{u}$ (tj. bodu A posunutému o vektor $\vec{u}$) přísluší komplexní souřadnice $a+u$ (obr. 1.4).



Obrázek 1.4

5) Uvažujme bod A roviny s komplexní souřadnicí $z = a + b\mathrm{i}$. Z Definice 2 absolutní hodnoty $|z|$ komplexního čísla z dostáváme, že

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{(a + b\mathrm{i}) \cdot (a - b\mathrm{i})} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

což rovněž představuje vyjádření vzdálenosti r bodu $A\,[a,b]$ od počátku O soustavy souřadnic známé z analytické geometrie roviny.

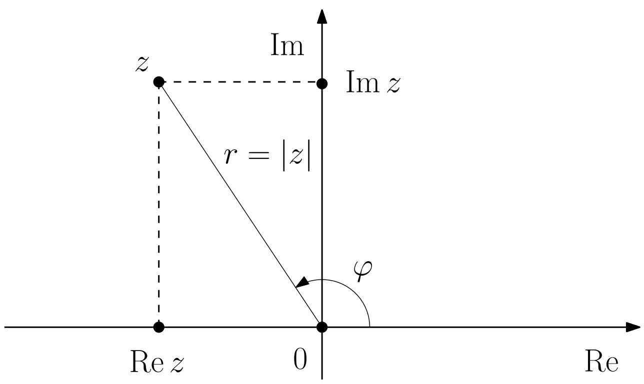
Popsaná geometrická interpretace komplexních čísel s sebou mj. přináší ještě jeden, často využívaný a užitečný tvar jejich zápisu. Každé nenulové komplexní číslo z lze totiž psát v tzv. *goniometrickém (polárním) tvaru*

$$z = r\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)\,, \tag{1.8}$$

kde $r = |z|$ (obr. 1.5) a reálné číslo φ vyhovuje rovnostem

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \qquad \sin\varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}. \tag{1.9}$$

Toto reálné číslo φ nazýváme *argument komplexního čísla* z a značíme jej $\arg z$.



Obrázek 1.5

Argument (nenulového) komplexního čísla zřejmě není uvedenými rovnostmi určený jednoznačně. Pokud totiž nějaké reálné číslo φ_0 vyhovuje oběma rovnostem (1.9), splňují je i čísla $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$, kde k je libovolné celé číslo, a žádná jiná. Abychom se této mnohoznačnosti vyhnuli, stačí si např. zvolit libovolný polouzavřený interval reálných čísel délky 2π, na němž budeme argumenty komplexních čísel dále uvažovat. Nebude-li řečeno jinak, budeme proto v dalším používat pouze takový argument[6] $\arg z$ komplexního čísla z, pro nějž platí $-\pi \le \arg z < \pi$.

Poznámka.

1) Uvědomme si zřejmou skutečnost, že pro $t \in \mathbb{R}^*$ platí $t > 0$ tehdy a jen tehdy, když $\arg t = 0$ a $t < 0$, právě když $\arg t = -\pi$. Ze způsobu zavedení argumentu

[6] Někdy se tento argument upřesňuje přívlastkem *hlavní*.

nenulového komplexního čísla z je zároveň vidět, že násobením reálným kladným číslem $t > 0$ se jeho argument nemění, tj $\arg(tz) = \arg z$.

2) Relaci $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, budeme v podobných případech stručně zapisovat $\varphi \sim \varphi_0$ a budeme se na ni v případě potřeby odkazovat jako na *kongruenci (dvou) reálných čísel* φ, φ_0 *při modulu* 2π.

Pro aplikace komplexních čísel v planimetrii hraje zásadní úlohu geometrický význam jejich násobení a dělení. Je možné odvodit (viz [2, s. 20, resp. 36 a 37]), že pro dvě nenulová komplexní čísla $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$ platí

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right] \tag{1.10}$$

neboli

$$|z_1 \cdot z_2| = r_1 \cdot r_2 \qquad \text{a} \qquad \arg(z_1 \cdot z_2) \sim \arg z_1 + \arg z_2 \tag{1.11}$$

a

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right], \tag{1.12}$$

tj.

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} \qquad \text{a} \qquad \arg\frac{z_1}{z_2} \sim \arg z_1 - \arg z_2. \tag{1.13}$$

Přitom rovnosti absolutních hodnot součinu a podílu dvou komplexních čísel jsou v souladu s pravidly (1.5) pro počítání s absolutními hodnotami komplexních čísel uvedenými na str. 15.

Dohodněme se, že od této chvíle budeme komplexní souřadnice všech bodů značených velkými písmeny latinské abecedy označovat jim odpovídajícími písmeny malými, nebude-li řečeno jinak, přičemž bude-li třeba použít pro odlišení bodů dolní, resp. horní, indexy, budeme je při značení jim příslušejících komplexních souřadnic zachovávat. Podobně komplexní souřadnice všech vektorů značených malým latinským písmenem s horní vodorovnou šipkou budeme značit týmž písmenem bez šipky. Zaveďme ještě úmluvu, že body s komplexně sdruženými souřadnicemi k souřadnicím původních bodů značených velkými latinskými písmeny budeme značit stejnými písmeny doplněnými o horní vodorovný pruh. Naší poslední úmluvou bude, že ve formulacích vět a definic nebudeme uvádět předpoklad, že zkoumané body i další útvary leží v rovině, jež interpretujeme jako rovinu komplexních čísel.

1.2 Vzdálenost dvou bodů

Pomocí absolutní hodnoty komplexního čísla, kterou jsme zavedli v úvodním paragrafu práce, lze definovat vzdálenost dvou bodů (v rovině) tak, že bude mít očekávané vlastnosti známé ze střední školy. Zároveň ukážeme, že uvedená definice přesně odpovídá známému vztahu pro vyjádření eukleidovské[7] vzdálenosti běžné z analytické geometrie roviny.

Definice 3. Nechť A a B jsou dva body. Jejich (eukleidovskou) vzdálenost $|AB|$ zavádíme vztahem

$$|AB| := |b - a| \,. \tag{1.14}$$

Že takto zavedená vzdálenost dvou bodů má očekávané vlastnosti charakterizující metriku na daném metrickém prostoru (v tomto případě na $\mathbb{C}$) ukazuje následující věta:

Věta 1. *Zobrazení $\rho : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}$ definované předpisem*

$$\rho\,(a, b) = |b - a| \tag{1.15}$$

splňuje všechny axiomy metriky:

1) axiom nezápornosti a totožnosti:

$$\rho\,(a, b) \geq 0 \text{ pro všechna } a, b \in \mathbb{C}, \text{ přičemž } \rho\,(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b; \tag{1.16}$$

2) axiom symetrie:

$$\rho\,(a, b) = \rho\,(b, a) \;\text{ pro všechna } a, b \in \mathbb{C}; \tag{1.17}$$

3) trojúhelníkovou nerovnost:

$$\rho\,(a, b) \leq \rho\,(a, c) + \rho\,(c, b) \;\text{ pro všechna } a, b, c \in \mathbb{C}. \tag{1.18}$$

Přitom rovnost v (1.18) nastane právě tehdy, když je buď $a = c$ nebo $b = c$, nebo existuje kladné reálné číslo k takové, že

$$c - a = k(b - c).$$

[7]Jelikož žádné jiné vzdálenosti v práci nezmiňujeme, budeme přívlastek „eukleidovská“ v dalším obvykle vypouštět.

Důkaz. Platnost vztahů (1.16) a (1.17) je zřejmá. Splnění trojúhelníkové nerovnosti (1.18) neboli

$$|b-a| = |(c-a)+(b-c)| \leq |c-a| + |b-c|\,,$$

pak plyne z Lemmatu 1, str. 16, položíme-li v nerovnosti (1.6) $z_1 = c-a$ a $z_2 = b-c$. Odtud také dostaneme tvrzení o případné rovnosti v (1.18). Q.E.D.

Poznámka.

1) Označme $a = a_1 + a_2\mathrm{i}$ a $b = b_1 + b_2\mathrm{i}$ komplexní souřadnice bodů A, B v tomto pořadí. Z Definice 2 absolutní hodnoty komplexního čísla plyne, že

$$|b-a| = |(b_1-a_1)+(b_2-a_2)\,\mathrm{i}| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2},$$

což představuje známé vyjádření vzdálenosti dvou bodů se souřadnicemi $[a_1, a_2]$ a $[b_1, b_2]$, tj. bodů A a B, v eukleidovské metrice.

2) Vztah (1.14) zároveň vyjadřuje normu $\|\overrightarrow{AB}\|$ vektoru $\overrightarrow{AB}$.

1.3 Úsečky, polopřímky a přímky

V předchozím paragrafu jsme zavedli vzdálenost libovolných dvou bodů roviny. Jak nyní ukážeme, je možné na jejím základě s využitím relace *uspořádání tří bodů* (jeden bod leží mezi dvěma dalšími) vybudovat pojem úsečky, polopřímky a nakonec i přímky samotné.

Definice 4. Nechť A a B jsou dva různé body. Řekneme, že bod M *leží mezi body* A a B, pokud $m \neq a$, $m \neq b$ a platí následující rovnost:

$$|m-a| + |b-m| = |b-a|\,. \tag{1.19}$$

Pro tuto relaci užíváme označení $A - M - B$.

Množina $(AB) := \{M \mid A - M - B\}$ se nazývá *vnitřek úsečky určené body* A, B. Množinu $[AB] := (AB) \cup \{A, B\}$ nazýváme *úsečkou s krajními body* A, B.

Poznámka. Podle definice je evidentní symetrie $A - M - B \Leftrightarrow B - M - A$.

Věta 2. *Předpokládejme, že A a B jsou dva různé body. Pak pro každý bod M jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

1) $M \in (AB)$;

2) existuje kladné reálné číslo k takové, že $m - a = k(b - m)$;

3) existuje reálné číslo $t \in (0, 1)$ takové, že $m = (1 - t)a + tb$;

4) existují kladná reálná čísla λ_1, λ_2 taková, že $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ a platí $m = \lambda_1 a + \lambda_2 b$.

Důkaz:

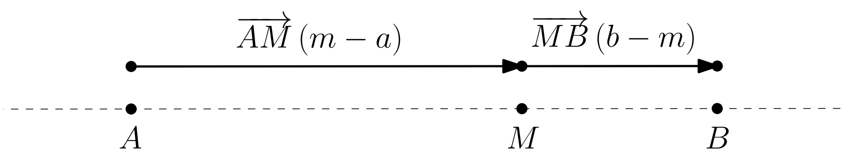
„1) $\Leftrightarrow$ 2)“ Podle Definice 4 platí $M \in (AB) \Leftrightarrow |m - a| + |b - m| = |b - a|$ a zároveň $m \neq a$, $m \neq b$, tj. (podle tvrzení o rovnosti v trojúhelníkové nerovnosti z Věty 1) existuje reálné číslo $k > 0$ takové, že $m - a = k(b - m)$.

„2) $\Leftrightarrow$ 3) $\Leftrightarrow$ 4)“ Položme pro $k > 0$ $t = \frac{k}{1+k} \in (0, 1)$ neboli $k = \frac{t}{1-t} > 0$ pro $t \in (0, 1)$. Pak dostáváme

$$m - a = k(b - m) \Leftrightarrow m = \frac{1}{1+k}a + \frac{k}{1+k}b$$

čili $m = (1 - t)a + tb$. Položíme-li dále $\lambda_1 = 1 - t$ a $\lambda_2 = t$, dostaneme zároveň platnost ekvivalence 3) $\Leftrightarrow$ 4). Q.E.D.

Poznámka. Pojmy vnitřku úsečky (AB) s krajními body A, B a úsečky $[AB]$ určené těmito body zavedené Definicí 4 přesně odpovídají běžné představě o těchto geometrických objektech, neboť podle právě dokázané věty platí $M \in (AB)$ tehdy a jen tehdy, když existuje kladné reálné číslo k takové, že $m - a = k(b - m)$ (viz obr. 1.6, kde $k = 2$).



Obrázek 1.6

Dodejme, že reálná čísla λ_1, λ_2 z právě dokázané věty mají svůj jasný fyzikální význam. Uvažujeme-li totiž, že body A, B jsou *hmotnými body*[8] o hmotnostech m_1, m_2 v tomto pořadí, pak *těžiště*, resp. *hmotný střed*, této soustavy dvou

[8]Hmotný bod ve fyzice představuje nejjednodušší model reálného tělesa užívaný v situaci, kdy rozměry tělesa nehrají ve zkoumaném či popisovaném jevu podstatnou roli. Formálně se jedná o bodový objekt, jemuž přisuzujeme určitou (kladnou) hmotnost.

hmotných bodů leží podle způsobu svého zavedení uváděného v základním kursu mechaniky (viz např. [6, s. 209]) v bodě M o komplexní souřadnici

$$m = \frac{m_1 a + m_2 b}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} a + \frac{m_2}{m_1 + m_2} b = \lambda_1 a + \lambda_2 b.$$

Čísla λ_1, λ_2 z tohoto vztahu pak evidentně splňují podmínky z 4) právě dokázané věty a představují tak po řadě *poměrné hmotnosti* hmotných bodů A, B vzhledem k celkové hmotnosti $m_1 + m_2$ soustavy.

Dodejme, že koeficienty λ_1, λ_2 uvedených vlastností jednoznačně určují polohu bodu M na vnitřku úsečky $[AB]$. Říkáme pak, že bod M je určen svými *barycentrickými*[9] *souřadnicemi* λ_1, λ_2 vzhledem k bodům A, B.

Definice 5. Nechť A, B jsou dva různé body. Množinu $(AB := \{M \mid A - M - B \vee \vee M = B \vee A - B - M\}$ nazveme *otevřenou polopřímkou s počátečním bodem A a vnitřním bodem B.*

Věta 3. *Předpokládejme, že A a B jsou dva různé body. Pak pro každý bod M jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

1) $M \in (AB$;

2) existuje kladné reálné číslo t takové, že $m = (1 - t)\,a + tb$;

3) $\arg(m - a) = \arg(b - a)$;

4) $\dfrac{m - a}{b - a} \in \mathbb{R}^+$.

Důkaz:

„1) $\Rightarrow$ 2)“ Předpokládejme, že platí 1), tedy $A - M - B$ nebo $M = B$ nebo $A - B - M$. Splývají-li body M a B, pak $m = b = (1 - 1)\,a + 1b$, tedy tvrzení 2) platí pro $t = 1$. Pokud však $M \neq B$, pak podle Věty 2 existují reálná čísla $t, l \in (0, 1)$ taková, že buď $m = (1 - t)\,a + tb$, anebo $b = (1 - l)\,a + lm$. V prvním případě jsme hotovi, ve druhém vyjádřeme m jako

$$m = \left(1 - \frac{1}{l}\right) a + \frac{1}{l} b = (1 - t)\,a + tb,$$

kde jsme položili $t = \frac{1}{l} \in (1, \infty)$, tedy platí 2).

[9] Barycentrum – slovo starořeckého původu („barys“ – těžký; „kentron“ – bod, hrot) označující hmotný střed zejm. ve fyzice a astronomii.

„2) $\Rightarrow$ 3)“ Z rovnosti $m = (1-t)\,a + tb$, $t > 0$ plyne, že $m - a = t\,(b-a)\,, t > 0$, odkud je s přihlédnutím k $a \neq b$ ihned patrné, že $m \neq a$ a $\arg\,(m-a) = \arg\,(b-a)$ (viz poznámku ze str. 20).

„3) $\Rightarrow$ 4)“ Předpokládejme, že platí 3). Pro nenulové číslo $\frac{m-a}{b-a}$ ze druhého ze vztahů (1.13), str. 21, dostáváme

$$\arg\frac{m-a}{b-a} \sim \arg(m-a) - \arg(b-a) = 0.$$

Protože však $\arg\frac{m-a}{b-a} \in \langle -\pi; \pi)$, máme přímo $\arg\frac{m-a}{b-a} = 0$ neboli $\frac{m-a}{b-a} \in \mathbb{R}^+$ (opět podle poznámky uvedené na str. 20).

„4) $\Rightarrow$ 1)“ Nechť platí 4). Označme $t = \frac{m-a}{b-a} \in \mathbb{R}^+$. Vyjádřením čísla m dostaneme $m = a + t\,(b-a) = (1-t)\,a + tb, t > 0$. Pokud $t \in (0,1)$, pak z Věty 2 dostáváme $M \in (AB) \subset (AB$. Jestliže $t = 1$, pak $m = b$ a $M = B \in (AB$. Konečně, je-li $t > 1$, pak položením $l = \frac{1}{t} \in (0,1)$ dostaneme $b = (1-l)\,a + lm$, což podle zmíněné věty znamená, že $A - B - M$, a tedy $M \in (AB$. Q.E.D.

Definice 6. Nechť A a B jsou dva různé body. Uvažujme bod C, pro který platí $C - A - B$. Potom *přímkou určenou body* A, B rozumíme množinové sjednocení $AB := (AC \cup \{A\} \cup (AB$.

Věta 4. *Předpokládejme, že A a B jsou dva různé body. Pak pro každý bod M jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

1) M leží na přímce AB;

2) $\dfrac{m-a}{b-a} \in \mathbb{R}$;

3) existuje reálné číslo t takové, že $m = (1-t)\,a + tb$;

4) existují reálná čísla λ_1, λ_2 taková, že $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ a platí $m = \lambda_1 a + \lambda_2 b$;

5) $\begin{vmatrix} m-a & \overline{m}-\overline{a} \\ b-a & \overline{b}-\overline{a} \end{vmatrix} = 0$;

6) $\begin{vmatrix} m & \overline{m} & 1 \\ a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Důkaz:

„1) $\Leftrightarrow$ 2)“ Podle Definice 6 máme $M \in AB \Leftrightarrow (AC \cup \{A\} \cup (AB$, kde $C - A - B$, tj. podle Věty 3 platí $\frac{m-a}{c-a} \in \mathbb{R}^+$ nebo $m = a$ nebo $\frac{m-a}{b-a} \in \mathbb{R}^+$. Pokud nastane poslední vypsaný případ, jsme hotovi. Jestliže $m = a$, máme $\frac{m-a}{b-a} = 0 \in \mathbb{R}$. V situaci, kdy platí $M \in (AC$, tedy $\frac{m-a}{c-a} \in \mathbb{R}^+$, dostaneme z relace $C - A - B$, tj. $A \in (BC)$ a Věty 2 záruku existence kladného reálného čísla k takového, že $a - b = k\,(c-a)$ neboli existuje záporné reálné číslo $q = -k$, pro nějž platí $b - a = q\,(c-a)$. Číslo $\frac{m-a}{b-a}$ lze potom vyjádřit jako $\frac{m-a}{b-a} = \frac{m-a}{q(c-a)}$, které je při splnění podmínky $\frac{m-a}{c-a} \in \mathbb{R}^+$ reálné a záporné. Opačnou implikaci zřejmě obdržíme zpětným rozborem situace podle znaménka zlomku $\frac{m-a}{b-a}$. Dohromady tak dostáváme platnost dokazované ekvivalence.

Ekvivalence „2) ⇔ 3) ⇔ 4)“ se dokáží stejným a zřejmým způsobem jako obdobné ekvivalence z Věty 2.

„2) ⇔ 5) ⇔ 6)“. Zřejmě platí $\frac{m-a}{b-a} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{m-a}{b-a} = \overline{\left(\frac{m-a}{b-a}\right)} = \frac{\overline{m}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}}$, což lze v situaci $a \neq b$ zapsat ekvivalentně jako

$$(m-a)\left(\overline{b}-\overline{a}\right) - \left(\overline{m}-\overline{a}\right)(b-a) = 0.$$

Poslední rovnost je však totožná s rovností z 5) po rozepsání v ní vystupujícího determinantu, tedy platí 2) ⇔ 5). Navíc ze známých pravidel pro počítání s determinanty plyne, že

$$\begin{vmatrix} m & \overline{m} & 1 \\ a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} m-a & \overline{m}-\overline{a} & 0 \\ a & \overline{a} & 1 \\ b-a & \overline{b}-\overline{a} & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} m-a & \overline{m}-\overline{a} \\ b-a & \overline{b}-\overline{a} \end{vmatrix} = 0.$$

Platí tak i poslední ekvivalence 5) ⇔ 6) a důkaz je hotov. Q.E.D.

Poznámka. Podobně jako v poznámce uvedené na str. 24 za důkazem Věty 2 hovoříme o reálných číslech λ_1, λ_2 z právě dokázané věty jako o barycentrických souřadnicích bodu $M \in AB$ vzhledem k bodům A, B. Jejich fyzikální význam přitom zůstane zachován, připustíme-li poněkud nefyzikální možnost nekladných hmotností některého z hmotných bodů A, B.

1.4 Kolinearita a poměr tří bodů

V teorii afinních prostorů nad $\mathbb{R}$ hraje významnou roli pojem *dělicího poměru* trojice různých kolineárních (tedy ležících na jedné přímce) bodů A, B, C, jenž je definován jako reálné číslo λ z rovnosti $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{BC}$. V případě *koplanárních* (tj. náležejících jedné rovině, ne nutně kolineárních) vektorů můžeme rovnost pro příslušné komplexní souřadnice $c - a = \lambda\,(c - b)$ splnit komplexním číslem λ a mluvit tak o (dělicím) poměru trojice různých bodů A, B, C i v případě, kdy nejsou kolineární. Jak se později ukáže (Věta 33, str. 97), pro trojice nekolineárních bodů má takové komplexní číslo λ významnou geometrickou roli. Pro tento zobecněný pojem není v české matematické terminologii patrně ustálený název. Protože přívlastek „dělicí“ má výrazně kolineární podtext, nebudeme ho v obecné situaci raději používat a zavedeme tak následující termín:

Definice 7. Nechť A, B, C jsou tři navzájem různé body. Komplexní číslo

$$(C; A, B) := \frac{c - a}{c - b} \tag{1.20}$$

nazýváme *poměrem bodů* A, B, C. V případě kolineárních bodů A, B, C mluvíme o tomto čísle jako o jejich dělicím poměru.

Poznámka.

1) Geometrický význam poměru $(C; A, B)$ je následující. Jeho absolutní hodnota je zřejmě rovna poměru vzdáleností bodů A, C a bodů B, C a jeho argument se rovná míře orientovaného úhlu $\widehat{BCA}$, o které podrobně pojednáme v paragrafu 1.8.

2) Všimněme si, že díky podmínkám $a \neq b$, $b \neq c$, $a \neq c$ je poměr $(C; A, B)$ vždy definován, a to tak, že je různý od 0 i od 1.

Z každých tří různých bodů A, B, C lze zřejmě sestavit $3! = 6$ poměrů. Z definice poměru $\lambda = (C; A, B) = \frac{c-a}{c-b}$ vyplývají rovnosti $(C; B, A) = \frac{c-b}{c-a} = \frac{1}{\lambda}$, $(B; A, C) = \frac{b-a}{b-c} = \frac{b-c+c-a}{b-c} = 1 - \lambda$, tedy záměnou pořadí posledních dvou bodů získáme převrácenou hodnotu původního poměru a při výměně pořadí prvního bodu s posledním dostaneme „doplněk“ původního poměru k jedné. Odtud bezprostředně dostáváme tvrzení následující věty:

Věta 5. *Nechť A, B, C jsou tři navzájem různé body, jejichž poměr $(C; A, B)$ označme λ. Pak*

$$(C; B, A) = \frac{1}{\lambda}, \qquad (B; A, C) = 1 - \lambda, \quad (B; C, A) = \frac{1}{1 - \lambda},$$
$$(A; B, C) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \quad (A; C, B) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Poznámka. Pro zajímavost si lze všimnout, že z podmínky $\lambda \notin \{0,1\}$ lze algebraicky vysvětlit stejnou podmínku i pro pět dalších poměrů z právě dokázané věty. Také je zřejmé, že se pro danou trojici A, B, C bodů všech šest hodnot jejich poměrů představuje buď šest reálných, nebo šest imaginárních čísel.

Nyní uvedeme a dokážeme zcela zásadní tvrzení, které pomocí poměru tří různých bodů udává nutnou a dostatečnou podmínku jejich kolinearity.

Věta 6. *Tři navzájem různé body A, B, C leží na jedné přímce právě tehdy, když jejich poměr je reálné číslo, což lze zapsat rovností*

$$\frac{c-a}{c-b} = \frac{\overline{c}-\overline{a}}{\overline{c}-\overline{b}}, \quad \text{tj.} \quad \begin{vmatrix} c-a & \overline{c}-\overline{a} \\ c-b & \overline{c}-\overline{b} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{neboli} \quad \begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.21}$$

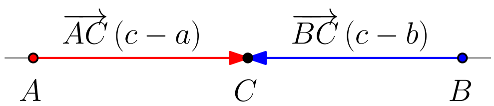
Důkaz. Uvažujme tři různé body A, B, C a označme $(C;A,B) = \lambda \in \mathbb{R}$. Pak platí $c-a = \lambda\,(c-b)$ neboli $a = (1-\lambda)\,c + \lambda b$ a body A, B, C tak podle Věty 4, str. 26, leží na jedné přímce, přičemž díky ní platí i tvrzení opačné. Q.E.D.

Poznámka. Je zřejmé, že v tvrzení právě dokázané věty nezáleží na tom, který ze šesti možných poměrů bodů A, B, C uvažujeme, jak plyne z poznámky uvedené za Větou 5 i z tvaru determinantu vystupujícího v poslední rovnosti z (1.21), jejíž splnění evidentně nezávisí na pořadí jeho řádků (ani sloupců). Proto jsme v Definici 7 poměru bodů A, B, C nesvazovali pořadí dotyčných bodů s jejich konkrétním poměrem.

Uvědomme si, že jsou-li A, B dva různé body, pak je poměrem $\lambda = (C;A,B)$ různým od nuly i jedné jednoznačně určen třetí bod C, $C \neq A$, $C \neq B$, o komplexní souřadnici

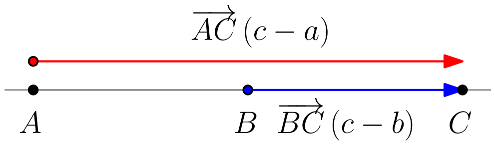
$$c = \frac{a-\lambda b}{1-\lambda}, \tag{1.22}$$

který navíc pro reálné λ podle Věty 6 leží na přímce AB. Podle této reálné hodnoty λ lze snadno určit, ve které části přímky AB bod C leží, neboť



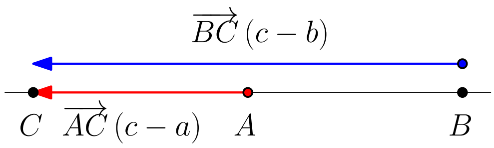
Obrázek 1.7

1) v případě $\lambda < 0$ platí $c = \frac{1}{1+|\lambda|}a + \frac{|\lambda|}{1+|\lambda|}b = (1-t)\,a + tb$, kde $t = \frac{|\lambda|}{1+|\lambda|} \in (0,1)$, tedy podle Věty 2 uvedené na str. 24 a Definice 4 ze str. 23 platí $C \in (AB) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow A-C-B \Leftrightarrow (C;A,B) = \lambda < 0$ (na obr. 1.7 je situace znázorněna pro případ $\lambda = -1$);



Obrázek 1.8

2) případ $\lambda > 1$ nastane pouze a jen tehdy, když $A - B - C$ neboli $C \in (AB \setminus (AB)$, neboť podle předchozího bodu a Věty 5 máme $A - B - C \Leftrightarrow (B; A, C) < 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 1 - \lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda > 1$ (obr. 1.8 znázorňuje situaci pro $\lambda = 2$);



Obrázek 1.9

3) konečně $\lambda \in (0, 1)$ odpovídá situaci, kdy $B - A - C$, tj. $C \in (BA \setminus (AB)$, neboť opět podle prvního bodu a Věty 5 dostáváme $B - A - C \Leftrightarrow (A; B, C) < 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{\lambda-1}{\lambda} < 0 \Leftrightarrow \lambda \in (0, 1)$ (obr. 1.9 ukazuje situaci, kdy $\lambda = \frac{1}{2}$).

Dodejme, že střed S úsečky $[AB]$ lze zavést vztahem $(S; A, B) = -1$ (viz rovněž obr. 1.7), takže dosazením $\lambda = -1$ do vztahu (1.22) pro komplexní souřadnici s středu úsečky s krajními body A, B dostaneme $s = \frac{a+b}{2}$.

Pomocí různých ekvivalentních podob zápisu posledního determinantu vystupujícího ve Větě 6 lze získat řadu tvrzení udávajících podmínku kolinearity tří bodů (není přitom třeba předpokládat, že jsou navzájem různé, pokud však splývají všechny tři, není zřejmě přímka těchto bodů určena jednoznačně), např. jeho rozepsáním podle prvků prvního sloupce dostaneme

$$\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix} = \left(\overline{b} - \overline{c}\right) a + (\overline{c} - \overline{a})\, b + \left(\overline{a} - \overline{b}\right) c,$$

a tím i následující tvrzení, jež může být v některých situacích díky své symetrii užitečnější než přímá aplikace Věty 6:

Důsledek 1. *Tři body A, B, C leží na jedné přímce právě tehdy, když jejich komplexní souřadnice splňují vztah*

$$\left(\overline{b} - \overline{c}\right) a + (\overline{c} - \overline{a})\, b + \left(\overline{a} - \overline{b}\right) c = 0. \tag{1.23}$$

Další, pro určité situace vhodnou formou nutné a dostatečné podmínky kolinearity tří různých bodů představuje následující výsledek:

Věta 7. *Tři navzájem různé body A, B, C leží na jedné přímce právě tehdy, když existují nenulová reálná čísla α, β, γ taková, že platí*

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0 \qquad \text{a zároveň} \qquad \alpha + \beta + \gamma = 0. \tag{1.24}$$

Pokud trojice (α, β, γ) nenulových reálných čísel splňujících (1.24) existuje, pak existují i další takové trojice, jež jsou všechny tvaru $(k\alpha, k\beta, k\gamma)$, kde k je nenulové reálné číslo.

Důkaz. Dokážeme nejprve implikaci „$\Rightarrow$“. Předpokládejme tedy, že tři navzájem různé body A, B, C jsou kolineární. To podle Věty 6 znamená, že jejich poměr $\lambda = (C; A, B) = \frac{c-a}{c-b}$ je reálné číslo. Odtud však máme

$$c - a = \lambda\,(c - b) \qquad \text{neboli} \qquad a - \lambda b + (\lambda - 1)\,c = 0. \tag{1.25}$$

Položíme-li nyní $\alpha = 1$, $\beta = -\lambda$, $\gamma = \lambda - 1$, dostaneme tak trojici nenulových reálných čísel (neboť poměr libovolných tří různých bodů je různý od nuly i od jedné) splňujících první ze vztahů z (1.24), jejichž součet je zřejmě roven nule.

Nyní dokážeme implikaci „$\Leftarrow$“. Nechť pro komplexní souřadnice bodů A, B, C existují tři nenulová reálná čísla α, β, γ taková, že platí (1.24). Z prvního z těchto vztahů po vydělení nenulovým číslem α máme

$$a + \frac{\beta}{\alpha} b + \frac{\gamma}{\alpha} c = 0$$

a vyjádřením a dosazením za číslo γ ze vztahu druhého dále dostaneme

$$a + \frac{\beta}{\alpha} b + \frac{-\alpha - \beta}{\alpha} c = 0, \qquad \text{tj.} \qquad a + \frac{\beta}{\alpha} b + \left(-1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) c = 0.$$

Pokud položíme v poslední rovnosti $\lambda = -\frac{\beta}{\alpha}$, dojdeme ke stejnému vztahu, jakým je (1.25). Reálné číslo λ je tedy poměrem $(C; A, B)$ bodů A, B, C, a ty jsou tak podle Věty 6 kolineární.

Tím je důkaz ekvivalence proveden. Nyní ověříme druhou část tvrzení věty. Je zřejmé, že pokud trojice nenulových reálných čísel (α, β, γ) splňuje vztahy (1.24), pak jim vyhovuje i trojice reálných čísel $(k\alpha, k\beta, k\gamma)$, kde k je libovolné reálné číslo. Zbývá tak dokázat, že každá jiná vyhovující trojice nenulových čísel je právě tohoto tvaru. Předpokládejme tedy, že pro tři různé kolineární body A, B, C existuje kromě (α, β, γ) další trojice $(\alpha', \beta', \gamma')$ nenulových reálných čísel taková, že platí

$$\alpha' a + \beta' b + \gamma' c = 0 \qquad \text{a zároveň} \qquad \alpha' + \beta' + \gamma' = 0.$$

Pak pro poměr $\lambda = (C; A, B)$ podle předchozích úvah dostáváme

$$\lambda = -\frac{\beta'}{\alpha'} = -\frac{\beta}{\alpha}, \qquad \text{a tedy} \qquad \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta} = k \in \mathbb{R}^*.$$

Stačí nyní ukázat, že rovněž $\frac{\gamma'}{\gamma} = k$, avšak

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{-\alpha' - \beta'}{-\alpha - \beta} = \frac{k\,(\alpha + \beta)}{\alpha + \beta} = k,$$

tudíž platí $(\alpha', \beta', \gamma') = (k\alpha, k\beta, k\gamma)$, a tím je celý důkaz hotov. Q.E.D.

Poznámka. Uvědomme si, že nenulová reálná čísla α, β, γ z právě dokázané věty představují koeficienty pro lineární závislost řádků posledního determinantu uvedeného ve Větě 6.

1.5 Skalární součin dvou vektorů

Jak známo, skalární součin vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ s kartézskými souřadnicemi (u_1, u_2) a (v_1, v_2) má v odpovídající ortonormální bázi vyjádření $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$. Ukažme, jak lze pomocí komplexních čísel reprezentujících oba vektory toto číslo vyjádřit:

Věta 8. *Pro skalární součin libovolných dvou vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ platí*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\,(u\overline{v} + \overline{u}v) = \mathrm{Re}\,(\overline{u}v) = \mathrm{Re}\,(u\overline{v})\,. \tag{1.26}$$

Důkaz. Víme, že $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$, tzn.

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \mathrm{Re}\,(u)\,\mathrm{Re}\,(v) + \mathrm{Im}\,(u)\,\mathrm{Im}\,(v) = \frac{u + \overline{u}}{2} \cdot \frac{v + \overline{v}}{2} + \frac{u - \overline{u}}{2\mathrm{i}} \cdot \frac{v - \overline{v}}{2\mathrm{i}} = \\ &= \frac{1}{4}\,(u + \overline{u})\,(v + \overline{v}) - \frac{1}{4}\,(u - \overline{u})\,(v - \overline{v}) = \frac{1}{4}\,(uv + u\overline{v} + \overline{u}v + \overline{u}\overline{v} - \\ &\quad - uv + u\overline{v} + \overline{u}v - \overline{u}\overline{v}) = \frac{1}{4}\,(2u\overline{v} + 2\overline{u}v) = \frac{1}{2}\,(u\overline{v} + \overline{u}v)\,. \end{aligned}$$

Tím je tedy tvrzení věty dokázáno. Q.E.D.

Poznámka.

1) Kolmost v eukleidovském vektorovém prostoru se definuje tak, že dva vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ jsou kolmé právě tehdy, když $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, tedy v našem pojetí $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(\overline{u}v) = 0$.

2) Jsou-li dány čtyři body A, B, C, D, pak vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ mají komplexní souřadnice $b - a$ a $d - c$ v tomto pořadí. Podle poslední věty potom

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \operatorname{Re}\left[(b-a)\left(\overline{d}-\overline{c}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[(b-a)\left(\overline{d}-\overline{c}\right) + \left(\overline{b}-\overline{a}\right)(d-c)\right].$$

Odtud a z obvyklé definice vzdálenosti dvou bodů coby normy vektoru určeného těmito body znovu dostáváme vyjádření (1.14) z Definice 3 na str. 22 pro vzdálenost dvou bodů A a B:

$$|AB| = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(b-a)\left(\overline{b}-\overline{a}\right) + \left(\overline{b}-\overline{a}\right)(b-a)\right]} =$$
$$= \sqrt{(b-a)\left(\overline{b}-\overline{a}\right)} = \sqrt{|b-a|^2} = |b-a|.$$

Pomocí skalárního součinu lze v eukleidovských prostorech definovat *odchylku dvou vektorů* jako velikost (neorientovaného) úhlu φ mezi dvěma nenulovými vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ ležící v intervalu $\langle 0; \pi\rangle$, která je určena vztahem

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{\operatorname{Re}(u\overline{v})}{|u| \cdot |v|}, \tag{1.27}$$

kde jsme využili rovnost $\vec{u} \cdot \vec{v} = \operatorname{Re}(u\overline{v})$. Hodnota posledního výrazu v (1.27) zjevně leží pro libovolná nenulová komplexní čísla u, v na intervalu $\langle -1; 1\rangle$, a proto existuje jediná hodnota $\varphi \in \langle 0; \pi\rangle$ tomuto vztahu vyhovující, neboť funkce kosinus je zde prostá a nabývá právě všech hodnot z rozmezí $\langle -1; 1\rangle$.

V komplexním číslech reprezentujících rovinné vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ má potom jejich odchylka φ hodnotu danou následujícím výsledkem:

Věta 9. *Nechť $\vec{u}$, $\vec{v}$ jsou dva nenulové vektory a označme $\psi = \arg \frac{u}{v}$. Pak pro odchylku φ vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ platí*

$$\varphi = \psi \qquad \textit{nebo} \qquad \varphi = -\psi, \tag{1.28}$$

přitom první možnost nastane pro $\psi \in \langle 0; \pi)$ a druhá pro $\psi \in \langle -\pi; 0\rangle$.

Důkaz. Pro odchylku φ nenulových vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ platí vztah (1.27) neboli

$$\cos\varphi = \operatorname{Re}\left(\frac{u\overline{v}}{|uv|}\right), \tag{1.29}$$

přičemž $\frac{u}{|u|}$ a $\frac{\overline{v}}{|v|}$ jsou dvě komplexní jednotky, jejichž argumenty jsou po řadě $\arg u$ a $\arg\overline{v} \sim -\arg v$, tedy jejich součin $\frac{u\overline{v}}{|uv|}$ je rovněž komplexní jednotkou, pro jejíž argument máme

$$\arg\left(\frac{u\overline{v}}{|uv|}\right) = \arg(u\overline{v}) \sim \arg u - \arg v \sim \arg\frac{u}{v} = \psi \qquad \text{čili} \qquad \arg\left(\frac{u\overline{v}}{|uv|}\right) = \psi.$$

Tudíž komplexní jednotka $\frac{u\overline{v}}{|uv|}$ má podle vztahu (1.29) s komplexní jednotkou $\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ stejnou reálnou část, proto pokud $\psi \in \langle 0; \pi)$, tyto dvě komplexní jednotky se sobě rovnají a mají stejné argumenty čili $\varphi \sim \psi$, jestliže však $\psi \in \langle -\pi; 0\rangle$, jedná se pak o dvě čísla komplexně sdružená, jejichž argumenty jsou svázány podmínkou $\varphi \sim -\psi$. Tím je tvrzení věty dokázáno. Q.E.D.

Poznámka. Vztahy (1.29) pro odchylku φ dvou nenulových vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ jsou, jak lze očekávat, symetrické vůči jejich záměně, neboť platí $\arg\frac{v}{u} \sim \arg v - \arg u = -(\arg u - \arg v) \sim -\arg\frac{u}{v}$.

1.6 Rovnoběžnost, kolmost a odchylka dvou přímek

Rovnoběžnost a kolmost dvou přímek jsou jedněmi z jejich nejzákladnějších společných vlastností, jež vystupují v mnoha předpokladech tvrzení planimetrie. Je proto nezbytné ukázat, jakým způsobem lze zapsat podmínky rovnoběžnosti a kolmosti dvou přímek za pomoci komplexních čísel. Přitom zcela přirozeně vedou otázky tohoto typu k formulaci obecnějšího nástroje odchylky dvou přímek, jenž nachází uplatnění zejm. v praktických úlohách geometrie roviny.

Definice 8. Nechť A, B, C, D jsou čtyři body takové, že $A \neq B$, $C \neq D$. Řekneme, že přímky AB, CD jsou rovnoběžné, pokud platí

$$\frac{b-a}{d-c} \in \mathbb{R}^*. \tag{1.30}$$

Skutečnost, že přímky AB, CD jsou rovnoběžné, budeme označovat $AB \parallel CD$. Přímky AB, CD, které nejsou rovnoběžné, potom nazýváme různoběžkami, případně také různoběžnými přímkami, a píšeme $AB \nparallel CD$.

Poznámka. Definiční podmínka (1.30), tj. $\frac{b-a}{d-c} = k \in \mathbb{R}^*$, tedy $b-a = k\,(d-c)$ neboli $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$, přesně odpovídá elementární představě o dvou rovnoběžných přímkách čili rovnoběžkách jako situaci, kdy směrový vektor jedné z nich je rovnoběžný se směrovým vektorem druhé přímky, tedy je jeho nenulovým násobkem. Přitom pro $\frac{b-a}{d-c} \in \mathbb{R}^+$ jsou vektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ souhlasně rovnoběžné, v opačném případě jsou rovnoběžné nesouhlasně[10].

Věta 10. *Nechť A, B, C, D jsou čtyři body takové, že platí $A \neq B$, $C \neq D$. Přímky AB, CD jsou rovnoběžné právě tehdy, když*

$$\begin{vmatrix} b-a & \overline{b}-\overline{a} \\ d-c & \overline{d}-\overline{c} \end{vmatrix} = 0. \tag{1.31}$$

Důkaz. Důkaz tvrzení plyne přímo z Definice 8, neboť (pokud $a \neq b$) máme

$$\frac{b-a}{d-c} \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \frac{b-a}{d-c} = \overline{\left(\frac{b-a}{d-c}\right)} \Leftrightarrow \frac{b-a}{d-c} = \frac{\overline{b}-\overline{a}}{\overline{d}-\overline{c}}$$

a poslední rovnost je (v případě $c \neq d$) ekvivalentní s rovností (1.31). Q.E.D.

Poznámka. Dodejme, že v určitých situacích mohou být užitečná obě „podílová“ vyjádření rovnoběžnosti

$$\frac{b-a}{d-c} = \frac{\overline{b}-\overline{a}}{\overline{d}-\overline{c}}, \qquad \text{resp.} \qquad \frac{b-a}{\overline{b}-\overline{a}} = \frac{d-c}{\overline{d}-\overline{c}},$$

jež jsou vzhledem k podmínkám $A \neq B$, $C \neq D$ zjevně ekvivalentní.

Definice 9. Nechť A, B, C, D jsou čtyři body takové, že $A \neq B$, $C \neq D$. Řekneme, že přímky AB a CD jsou na sebe kolmé, tj. jsou vzájemně *ortogonální*, jestliže platí

$$\frac{b-a}{d-c} \in \mathrm{i}\mathbb{R}^* = \{\mathrm{i}t \mid t \in \mathbb{R}^*\}. \tag{1.32}$$

Kolmost dvou přímek AB a CD značíme $AB \perp CD$.

Poznámka. Podmínka (1.32), tj. $\frac{b-a}{d-c} = \mathrm{i}k$ pro jisté $k \in \mathbb{R}^*$, tedy $(b-a) = \mathrm{i}k\,(d-c)$, znamená, že pro nenulová komplexní čísla $u = b-a$ a $v = d-c$ platí

$$u\overline{v} + \overline{u}v = \mathrm{i}k\,(d-c)\left(\overline{d}-\overline{c}\right) - \mathrm{i}k\left(\overline{d}-\overline{c}\right)(d-c) = 0,$$

[10]Někdy se říká, že vektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ mají v tomto případě stejný směr, ale opačný smysl.

tudíž skalární součin směrových vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ přímek AB a CD je roven nule, a proto platí $\vec{u} \perp \vec{v}$, tedy přímky AB a CD jsou v obvyklém pojetí kolmé.

Důsledek 2. *Nechť A, B, C jsou tři různé body. Přímky AC, BC jsou na sebe kolmé právě tehdy, když poměr $(C; A, B)$ je ryze imaginární číslo.*

Věta 11. *Nechť A, B, C, D jsou čtyři body takové, že $A \neq B$, $C \neq D$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1) přímky AB a CD jsou na sebe kolmé;

2) $\dfrac{b-a}{d-c} = -\dfrac{\overline{b}-\overline{a}}{\overline{d}-\overline{c}}$;

3) $\dfrac{b-a}{\overline{b}-\overline{a}} = -\dfrac{d-c}{\overline{d}-\overline{c}}$;

4) $\begin{vmatrix} b-a & \overline{b}-\overline{a} \\ c-d & \overline{d}-\overline{c} \end{vmatrix} = 0.$

Důkaz. Podle Definice 9 jsou přímky AB a CD kolmé, právě když je podíl $\frac{b-a}{d-c}$ ryze imaginární. Podle druhého ze vztahů (1.4) uvedených na str. 15 víme, že nenulové komplexní číslo z je ryze imaginární tehdy a jen tehdy, když $z = -\overline{z}$. Aplikací této rovnosti na $\frac{b-a}{d-c}$ dostáváme platnost ekvivalence 1) $\Leftrightarrow$ 2).

Podle předpokladu věty $A \neq B$, $C \neq D$ neboli $\overline{b}-\overline{a} \neq 0$, $d-c \neq 0$, tedy podmínky 2) a 3) jsou zjevně ekvivalentní.

Z platnosti 2) plyne, že $(b-a)\left(\overline{d}-\overline{c}\right) + \left(\overline{b}-\overline{a}\right)(d-c) = 0$, což znamená, že determinant ze 4) je nulový. Je-li naopak tento determinant nulový, pak (vzhledem k $A \neq B$, $C \neq D$) platí 2), dohromady tedy 2) $\Leftrightarrow$ 4) a důkaz je tím kompletní.

Q.E.D.

Podíl ve vztahu kolmosti (1.32) je stejný jako ze vztahu rovnoběžnosti (1.30), a jak vzápětí ukážeme, hraje významnou roli v úvahách o *odchylce dvou přímek* AB, CD. Tu přitom chápeme jako velikost (neorientovaného) úhlu φ sevřeného těmito přímkami ležící v intervalu $\langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$, jež je určena vztahem

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}\right|}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{CD}\|} \tag{1.33}$$

čili v našem pojetí, kdy komplexní čísla a, b, c, d zastupují body A, B, C, D, podle vztahu (1.26) uvedeného na str. 32 ve Větě 8 (resp. podle bezprostředně navazující poznámky) máme

$$\cos\varphi = \frac{\left|\mathrm{Re}\left[(b-a)\left(\overline{d}-\overline{c}\right)\right]\right|}{|b-a|\cdot|d-c|} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left|(b-a)\left(\overline{d}-\overline{c}\right)+\left(\overline{b}-\overline{a}\right)(d-c)\right|}{|b-a|\cdot|d-c|}. \tag{1.34}$$

Hodnota posledního výrazu v této rovnosti zřejmě pro libovolná komplexní čísla a, b, c, d, kde $a \neq b$ a $c \neq d$, náleží intervalu $\langle 0; 1\rangle$. Existuje tak jediné číslo $\varphi \in \langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$ jí vyhovující, neboť funkce kosinus je na intervalu $\langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$ prostá a nabývá zde právě všech hodnot z rozmezí $\langle 0; 1\rangle$. Vyjádření odchylky dvou přímek AB, CD pomocí komplexních čísel poskytuje následující věta zobecňující vztahy (1.30) a (1.32):

Věta 12. *Nechť A, B, C, D jsou body takové, že $A \neq B$ a $C \neq D$ a označme $\psi = \arg\frac{b-a}{d-c}$. Pak odchylka φ přímek AB, CD je podle hodnoty ψ dána některou z rovností*

$$\begin{array}{lllcllll} \varphi = \psi & \textit{pro} & \psi \in \langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle, & & \varphi = \pi + \psi & \textit{pro} & \psi \in \langle -\pi; -\frac{\pi}{2}\rangle, \\ & & & \textit{nebo} & & & \\ \varphi = -\psi & \textit{pro} & \psi \in \langle -\frac{\pi}{2}; 0\rangle, & & \varphi = \pi - \psi & \textit{pro} & \psi \in \langle \frac{\pi}{2}; \pi). \end{array} \tag{1.35}$$

Důkaz. Podobně jako v důkazu Věty 9, str. 33, se ukáže, že komplexní číslo $\frac{(b-a)\left(\overline{d}-\overline{c}\right)}{|b-a|\cdot|d-c|}$ je komplexní jednotkou, jejímž argumentem je právě číslo ψ a která má podle vztahu (1.34) s komplexní jednotkou $\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ stejnou nebo opačnou reálnou část. Proto pokud $\psi \in \langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$, jedná se o tatáž čísla a platí první ze vztahů (1.35), v situaci, kdy $\psi \in \langle -\frac{\pi}{2}; 0\rangle$, jsou to čísla komplexně sdružená a platí druhý ze vztahů (1.35).

Jelikož pro každé nenulové komplexní číslo z zřejmě platí $\arg(-z) \sim \pi + \arg z$ dostaneme odtud pro zbývající dvě možnosti $\psi \in \langle -\pi; -\frac{\pi}{2}\rangle$ a $\psi \in \langle \frac{\pi}{2}; \pi)$ po řadě poslední dvě rovnosti z (1.35), a tím je důkaz hotov. Q.E.D.

Poznámka. Povšimněme si, že způsob zavedení odchylky φ dvou přímek jakožto jediné hodnoty vyhovující vztahu (1.33), resp. (1.34), zaručuje, že je rovna odchylce příslušných směrových vektorů těchto přímek, a sice menší z nich (pokud se nejedná o přímky na sebe kolmé, kdy jsou si obě rovny). Opravdu, pokud označíme $\vec{u}$ určitý směrový vektor přímky AB a $\vec{v}$ jistý směrový vektor přímky CD, platí pro odchylku φ přímek AB, CD buď

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{Re}\,(u\overline{v})}{|u|\cdot|v|},$$

jestliže výraz na pravé stranně poslední rovnosti je kladný (a odchylka vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$

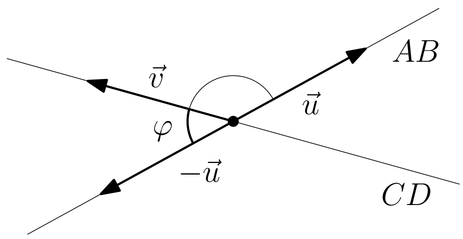
tak leží v intervalu $\langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle)$, nebo

$$\cos\varphi = -\frac{\mathrm{Re}\,(-u\overline{v})}{|-u|\cdot|v|} = -\left(\frac{\mathrm{Re}\,(u\overline{v})}{|u|\cdot|v|}\right),$$

v případě, že výraz v závorce poslední rovnosti je záporný (a odchylka vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ tak spadá do intervalu $\langle\frac{\pi}{2}; \pi\rangle)$. Dohromady tak pro odchylku φ přímek AB, CD platí

$$\cos\varphi = \frac{|\mathrm{Re}\,(u\overline{v})|}{|u|\cdot|v|}. \tag{1.36}$$

Můžeme tak říci, že odchylka φ přímek AB, CD je buď rovna odchylce vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, nebo odchylce vektorů $-\vec{u}$, $\vec{v}$ (viz obr. 1.10). Z rovnosti (1.36) je přitom patrné, že nezáleží na konkrétní volbě dotyčných směrových vektorů oněch dvou přímek.



Obrázek 1.10

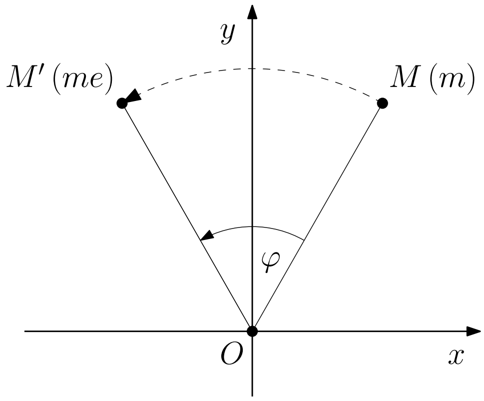
1.7 Otočení v rovině

Uvažujme libovolné reálné číslo φ a komplexní jednotku danou vztahem

$$e = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi.$$

Nechť M je libovolný bod nesplývající s počátkem O soustavy komplexních souřadnic a $m = r(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)$ je jeho (nenulová) komplexní souřadnice zapsaná v goniometrickém tvaru.

Utvořme podle pravidla (1.10), str. 21, pro násobení dvou (nenulových) komplexních čísel v goniometrickém tvaru součin $me = r\,[\cos(\psi+\varphi) + \mathrm{i}\sin(\psi+\varphi)]$ a povšimněme si, že $|me| = r$ a $\arg(me) \sim \arg m + \varphi$. Odtud plyne, že bod M' o komplexní souřadnici me představuje otočení bodu M o úhel velikosti $|\varphi|$ kolem počátku O soustavy komplexních souřadnic (obr. 1.11), přitom toto otočení „proběhlo“ v kladném smyslu, tj. proti směru chodu hodinových ručiček pro $\varphi > 0$ a v záporném



Obrázek 1.11

smyslu, tedy po směru chodu hodinových ručiček, v případě, že $\varphi < 0$. Říkáme potom, že bod M' je otočením bodu M o orientovaný úhel φ kolem počátku O soustavy komplexních souřadnic.

Poznámka. Přesněji bychom se měli vyjadřovat ve smyslu tom, že bod M' je obrazem bodu M v otočením o orientovaný úhel φ kolem počátku O soustavy komplexních souřadnic, neboť otočení samotné v uvedeném významu reprezentuje jistou transformaci komplexní roviny. Nicméně takováto terminologie není běžně užívaná, proto se přidržíme původně uvedené formulace.

Dodejme, že pojmu orientovaného úhlu se věnuje až následující paragraf, je zde tedy využito dosud nedefinovaného konstruktu. Není však nikterak na závadu, když prozatím budeme s pojmem otočení o orientovaný úhel nakládat jako s čistě terminologickou formulací bez dalších konotací.

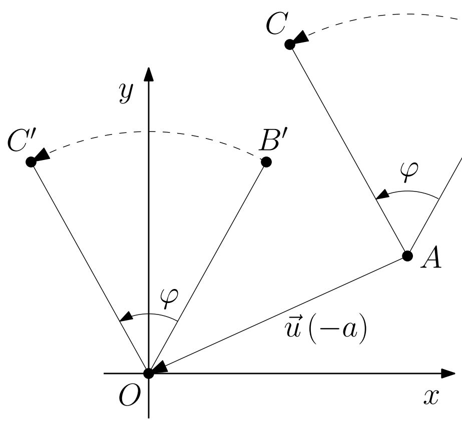
Nyní máme všechno potřebné k ověření následujícího tvrzení:

Věta 13. *Předpokládejme, že bod C je otočením bodu B kolem bodu A o orientovaný úhel φ. Pak pro komplexní souřadnice bodů A, B, C platí*

$$c = a + (b - a)e, \tag{1.37}$$

kde $e = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$.

Důkaz. Posunutí o vektor $\vec{u}\,(-a)$ zobrazí body A, B, C na body O, B', C' o komplexních souřadnicích 0, $b-a$, $c-a$ v tomto pořadí (viz obr. 1.12). Bod C' je potom obrazem bodu B' při otočení kolem počátku O o orientovaný úhel φ, tedy v případě $b - a \neq 0$ podle předchozího platí $c - a = (b - a)e$ neboli $c = a + (b - a)e$, jak jsme očekávali.



Obrázek 1.12

Pokud však $b - a = 0$, tj. $a = b$, pak také $c = a$ a rovnice (1.37) platí i v tomto případě. Q.E.D.

1.8 Orientovaný úhel a jeho míra

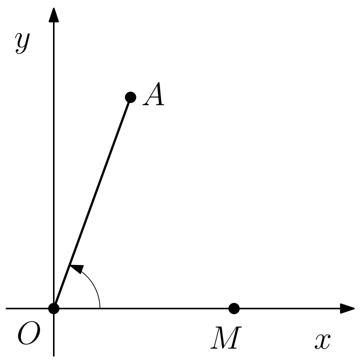
Definice 10. Uvažujme tři různé body A, B, C. Řekneme, že úhel $\widehat{ACB}$ je *orientovaný*, pokud je určeno pořadí polopřímek $(CA$ a $(CB$, kde $(CA$ nazýváme počátečním ramenem orientovaného úhlu $\widehat{ACB}$ a $(CB$ nazýváme koncovým ramenem orientovaného úhlu $\widehat{ACB}$.

Mírou orientovaného úhlu $\widehat{ACB}$ rozumíme reálné číslo $\mathrm{m}(\widehat{ACB})$ udávající velikost otočení v kladném smyslu otáčení (tj. proti směru chodu hodinových ručiček) kolem bodu C, při kterém počáteční rameno úhlu přejde v koncové.

Poznámka. Míru každého orientovaného úhlu lze zřejmě vyjádřit nekonečně mnoha reálnými čísly lišícími se o celočíselný násobek 2π. Abychom tuto mnohoznačnost odstranili, budeme, podobně jako tak činíme v případě (hlavního) argumentu libovolného nenulového komplexního čísla (viz komentář ke goniometrickému tvaru nenulového komplexního čísla na str. 20), dále předpokládat, že $-\pi \leq \mathrm{m}(\widehat{ACB}) < \pi$.

Zároveň docházíme k vysvětlení pojmu otočení o orientovaný úhel kolem daného bodu. Pokud je totiž bod M' otočením bodu M o orientovaný úhel φ kolem daného bodu $V \neq M$, tvoří polopřímky $(VM$, $(VM'$ po řadě počáteční a koncové rameno orientovaného úhlu $\widehat{MVM'}$, pro jehož míru platí $\mathrm{m}(\widehat{MVM'}) \sim \varphi$.

Je nyní zřejmé, že pro libovolný bod A a libovolný bod M ležící na kladné části reálné osy x, tj. $m > 0$, platí $\mathrm{m}(\widehat{MOA}) = \arg a$, kde O jako obvykle značí počátek soustavy komplexních souřadnic (obr. 1.13).



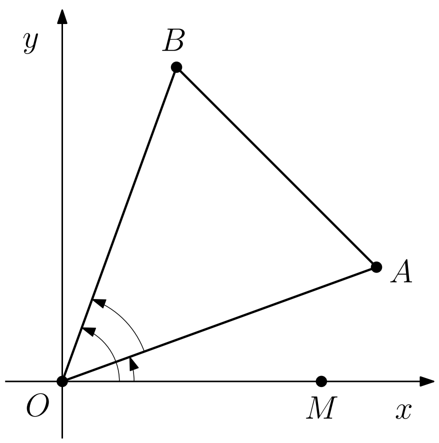
Obrázek 1.13

Nejen k důkazu příští věty je účelné zavést několik pojmů týkajících se orientace trojúhelníků:

Definice 11. Řekneme, že trojúhelník je *orientovaný*, pokud je určeno pořadí jeho vrcholů. Je přitom *orientovaný kladně*, jestliže „pohyb“ podél jeho obvodu souhlasně s pořadím jeho vrcholů probíhá proti směru chodu hodinových ručiček. V opačném případě říkáme, že je trojúhelník *orientovaný záporně*.

Věta 14. *Uvažujme tři různé body A, B, C. Míra* $\mathrm{m}(\widehat{ACB})$ *orientovaného úhlu* $\widehat{ACB}$ *je rovna* $\arg \dfrac{c-b}{c-a}$.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že bod C splývá s počátkem O soustavy komplexních souřadnic, tj. $c = 0$. Uvažujme dva následující případy:



Obrázek 1.14

1) Pokud trojúhelník AOB je záporně orientovaný (obr. 1.14), pak

$$\mathrm{m}(\widehat{AOB}) \sim \mathrm{m}(\widehat{MOB}) - \mathrm{m}(\widehat{MOA}) = \arg b - \arg a \sim \arg \frac{b}{a},$$

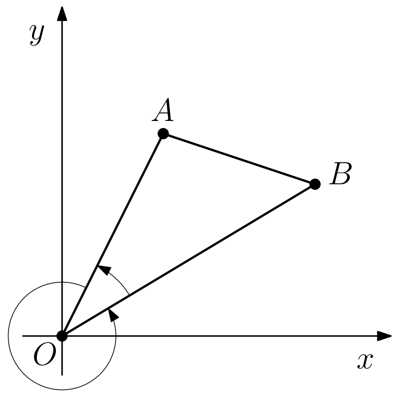
kde M je libovolný bod ležící na kladné části reálné osy x. Odtud dostáváme vzhledem k tomu, že $\mathrm{m}(\widehat{AOB}), \arg\frac{b}{a} \in \langle -\pi; \pi)$ přímo rovnost

$$\mathrm{m}(\widehat{AOB}) = \arg\frac{b}{a}.$$

2) Pokud trojúhelník AOB je kladně orientovaný (obr. 1.15), pak

$$\mathrm{m}(\widehat{AOB}) \sim 2\pi - \mathrm{m}(\widehat{BOA}) = 2\pi - \arg\frac{a}{b},$$

protože trojúhelník BOA je záporně orientovaný. Tedy



Obrázek 1.15

$$\mathrm{m}(\widehat{AOB}) \sim 2\pi - \arg\frac{a}{b} \sim 2\pi - \left(2\pi - \arg\frac{b}{a}\right) = \arg\frac{b}{a},$$

a odtud opět dostáváme přímo rovnost $\mathrm{m}(\widehat{AOB}) = \arg\frac{b}{a}$.

Dohromady je tím ověřena platnost tvrzení v situaci $c = 0$.

Posunutí o vektor $\vec{u}\,(-c)$ zobrazí body A, B, C na body A', B', O o komplexních souřadnicích $a - c$, $b - c$, 0. Navíc platí $\mathrm{m}(\widehat{ACB}) = \mathrm{m}(\widehat{A'OB'})$. Odtud a užitím předchozího plyne

$$\mathrm{m}(\widehat{A'OB'}) = \arg\frac{b-c}{a-c} = \arg\frac{c-b}{c-a},$$

jak mělo být dokázáno. Q.E.D.

Poznámka.

1) Tvrzení právě dokázané věty zůstává v platnosti i v případě, kdy body A, C, B leží na téže přímce, tzn. buď $B \in (CA$, a pak podle Věty 3, str. 25, $\arg\frac{c-b}{c-a} = 0$, nebo $A - C - B$, a pak $\arg\frac{c-b}{c-a} = -\pi$.

2) Povšimněme si již dříve zmíněné souvislosti poměru tří různých bodů s mírou orientovaného úhlu (viz poznámku na str. 28 za Definicí 7). Máme totiž $\mathrm{m}(\widehat{BCA}) = \arg \frac{c-a}{c-b} = \arg(C; A, B)$. Výsledek Věty 14 pro vnitřní úhel trojúhelníku ABC při vrcholu C pak můžeme zapsat pomocí goniometrického tvaru komplexního čísla jako

$$(C; A, B) = \frac{c-a}{c-b} = \left|\frac{c-a}{c-b}\right| \left[\cos\left(\arg \frac{c-a}{c-b}\right) + \mathrm{i} \sin\left(\arg \frac{c-a}{c-b}\right)\right] = \\ = \frac{|AC|}{|BC|} \left\{\cos\left[\mathrm{m}(\widehat{BCA})\right] + \mathrm{i} \sin\left[\mathrm{m}(\widehat{BCA})\right]\right\}.$$

1.9 Rovnice přímky

Po zbytek této kapitoly se budeme věnovat až doposud opomíjenému, v mnohých situacích však užitečnému, analytickému vyjádření křivek komplexní roviny, a sice těch nejjednodušších, tedy přímky a kružnice. Přitom tak učiníme nezávisle na znalostech běžné (reálné) analytické geometrie roviny. Nicméně všechny zde uvedené výsledky lze pomocí transformace $z = x + y\mathrm{i}$ komplexní souřadnice z do (kartézských) souřadnic x, y vždy převést na vyjádření známá ze střední školy. Stejně tak lze zpětnou transformací

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad y = \frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}$$

převádět klasická vyjádření do řeči komplexních čísel.

Věta 15. *Nechť A, B jsou dva různé body. Pak* komplexní rovnice přímky *určené těmito dvěma body je*

$$\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ z & \overline{z} & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.38}$$

Důkaz. Podle Věty 6, str. 29, bod Z různý od bodů A i B leží na přímce AB, právě když platí rovnost (1.38), která však zřejmě platí i pro $Z = A$ nebo $Z = B$, tedy její splnění je skutečně nutnou a dostatečnou podmínkou k tomu, aby bod Z ležel na přímce určené body A, B, proto (1.38) představuje komplexní rovnici přímky AB. Q.E.D.

Poznámka. Komplexní rovnici přímky (1.38) lze zřejmě zapsat řadou vzájemně ekvivalentních způsobů (je např. jasné, že v této rovnici nezáleží na pořadí řádků nebo sloupců determinantu, který v ní vystupuje). V této práci budeme často využívat její tvar vzniklý rozepsáním determinantu z (1.38) podle prvků jeho posledního řádku, tj.

$$\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ z & \overline{z} & 1 \end{vmatrix} = \left(\overline{a} - \overline{b}\right) z + (b-a)\,\overline{z} + a\overline{b} - \overline{a}b,$$

tedy komplexní rovnici přímky AB lze zapsat také v podobě

$$\left(\overline{a} - \overline{b}\right) z + (b-a)\,\overline{z} + a\overline{b} - \overline{a}b = 0, \tag{1.39}$$

přičemž obě dvě rovnice, tj. rovnici (1.38) i rovnici (1.39), budeme v dalším pojmenovávat jako komplexní rovnici přímky AB.

Můžeme si povšimnout, že komplexní rovnice přímky (1.39) je tvaru

$$\overline{u}z - u\overline{z} + \gamma = 0, \qquad \gamma \in \mathrm{i}\mathbb{R}, \tag{1.40}$$

kde $u \neq 0$ je komplexní souřadnice směrového vektoru dané přímky. Ukažme, že pro libovolně zvolená komplexní čísla $\gamma \in \mathrm{i}\mathbb{R}$, $u \neq 0$ rovnice (1.40) vždy představuje komplexní rovnici jisté přímky.

Uvedené rovnici zřejmě vždy vyhovují dvě různá komplexní čísla $a = -\frac{\gamma}{2\overline{u}}$ a $b = -\frac{\gamma}{2\overline{u}} - u$, pro něž zřejmě platí $b - a = -u$, resp. $\overline{a} - \overline{b} = \overline{u}$, ale také

$$a\overline{b} - \overline{a}b = -\frac{\gamma}{2\overline{u}} \cdot \left(\frac{\gamma}{2u} - \overline{u}\right) - \frac{\gamma}{2u} \cdot \left(-\frac{\gamma}{2\overline{u}} - u\right) = -\frac{\gamma^2}{4u\overline{u}} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma^2}{4u\overline{u}} + \frac{\gamma}{2} = \gamma,$$

tedy komplexní rovnici přímky určené body $A\,(a)$, $B\,(b)$ dostaneme podle (1.39) jako

$$0 = \left(\overline{a} - \overline{b}\right) z + (b-a)\,\overline{z} + a\overline{b} - \overline{a}b = \overline{u}z - u\overline{z} + \gamma,$$

což je právě komplexní rovnice (1.40).

Komplexní rovnice přímky zapsaná ve tvaru (1.40) se obvykle nazývá *komplexní rovnice přímky ve směrovém tvaru*. Jejím vynásobením komplexním číslem $-\mathrm{i}$ přitom obdržíme ekvivalentní rovnici

$$-\mathrm{i}\overline{u}z + \mathrm{i}u\overline{z} - \mathrm{i}\gamma = \overline{(\mathrm{i}u)}z + \mathrm{i}u\overline{z} - \mathrm{i}\gamma = 0,$$

tj. komplexní rovnici tvaru

$$\overline{n}z + n\overline{z} + \alpha = 0, \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{1.41}$$

kde $n \neq 0$ je komplexní souřadnice normálového vektoru dané přímky. Komplexní rovnice přímky (1.41) bývá proto nazývána *komplexní rovnice přímky v normálovém tvaru.*

Nyní uvedeme jednoduché pomocné tvrzení, které později využijeme, bude-li třeba pohotově určovat průsečíky dvou různoběžných přímek zadaných dvěma dvojicemi různých bodů.

Lemma 2. *Nechť A, B, C, D jsou čtyři body takové, že $A \neq B$, $C \neq D$ a nechť přímky AB a CD jsou různoběžné (tj. nejsou rovnoběžné). Pak průsečík Z těchto dvou přímek má komplexní souřadnici z určenou vztahem*

$$z = \frac{\left(a\overline{b} - \overline{a}b\right)(c-d) + (b-a)\left(c\overline{d} - \overline{c}d\right)}{\left(\overline{a} - \overline{b}\right)(d-c) + (a-b)\left(\overline{c} - \overline{d}\right)}. \tag{1.42}$$

Důkaz. Komplexní rovnice přímek AB, CD lze podle (1.39) psát po řadě jako

$$\left(\overline{a} - \overline{b}\right) z + (b-a)\,\overline{z} + a\overline{b} - \overline{a}b = 0, \tag{1.43}$$

$$\left(\overline{c} - \overline{d}\right) z + (d-c)\,\overline{z} + c\overline{d} - \overline{c}d = 0. \tag{1.44}$$

Najít komplexní souřadnici z průsečíku Z přímek AB, CD znamená řešit soustavu rovnic (1.43), (1.44). Vynásobením druhé rovnice soustavy nenulovým číslem $\frac{a-b}{d-c}$ a jejím přičtením k rovnici první získáme jedinou rovnici

$$\left[\overline{a} - \overline{b} + \frac{(a-b)\left(\overline{c} - \overline{d}\right)}{d-c}\right] z + a\overline{b} - \overline{a}b + \frac{(a-b)\left(c\overline{d} - \overline{c}d\right)}{d-c} = 0,$$

ve které již nevystupuje neznámá $\overline{z}$. Vynásobením této rovnice nenulovým číslem $d-c$ a převedením absolutního členu na její pravou stranu dále dostaneme

$$\left[\left(\overline{a} - \overline{b}\right)(d-c) + (a-b)\left(\overline{c} - \overline{d}\right)\right] z = \left(a\overline{b} - \overline{a}b\right)(c-d) + (b-a)\left(c\overline{d} - \overline{c}d\right). \tag{1.45}$$

Abychom mohli poslední rovnici vydělit číslem stojícím u neznámé z, a dostat tak její řešení, musíme se přesvědčit, že jde o číslo různé od nuly. Avšak podmínka

$$\left(\overline{a} - \overline{b}\right)(d-c) + (a-b)\left(\overline{c} - \overline{d}\right) \neq 0$$

je ekvivalentní tomu, že

$$\left(\overline{a} - \overline{b}\right)(d-c) \neq (a-b)\left(\overline{d} - \overline{c}\right),$$

což po vydělení obou stran nerovnice nenulovým číslem $(d-c)\left(\overline{d}-\overline{c}\right)$ dává podmínku

$$\frac{\overline{a}-\overline{b}}{\overline{d}-\overline{c}} \neq \frac{a-b}{d-c},$$

která je však podle Definice 8 uvedené na str. 34 ekvivalentní předpokladu $AB \nparallel CD$. Tedy číslo

$$\left(\overline{a}-\overline{b}\right)(d-c)+(a-b)\left(\overline{c}-\overline{d}\right)$$

je opravdu nenulové a po vydělení rovnice (1.45) tímto číslem obdržíme požadované vyjádření (1.42) komplexní souřadnice (jediného) průsečíku přímek AB, CD.

Q.E.D.

Ve dvou ze tří bezprostředně následujících větách (Věta 16 a Věta 18) odvodíme tvary komplexních rovnic dvou významných přímek, a sice kolmice vedené daným bodem na danou přímku a rovnice osy dané úsečky, které najdou svoje využití v následujících kapitolách práce, zejména pak v kapitole třetí věnované vlastnostem obecných trojúhelníků a závěrečné kapitole práce.

Věta 16. *Nechť A, B jsou dva různé body a nechť M je libovolný bod. Pak komplexní rovnice* kolmice vedené bodem *M na přímku AB je*

$$\begin{vmatrix} z-m & \overline{m}-\overline{z} \\ b-a & \overline{b}-\overline{a} \end{vmatrix} = 0. \tag{1.46}$$

Důkaz. Kolmice vedená bodem M na přímku AB je množina takových bodů Z, pro které platí $AB \perp MZ$ nebo $Z = M$. První podle Definice 9, str. 35, nastane, právě když

$$\frac{z-m}{b-a} = -\frac{\overline{z}-\overline{m}}{\overline{b}-\overline{a}} \qquad \text{neboli} \qquad \begin{vmatrix} z-m & \overline{m}-\overline{z} \\ b-a & \overline{b}-\overline{a} \end{vmatrix} = 0,$$

přičemž tato rovnost je zřejmě splněna i v případě $Z = M$. Q.E.D.

Poznámka. Komplexní rovnici (1.46) kolmice vedené daným bodem na danou přímku lze zřejmě zapsat, podobně jako komplexní rovnici přímky, mnoha vzájemně ekvivalentními způsoby. V dalším užijeme tvar vzniklý rozepsáním determinantu z (1.46), tj.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} z-m & \overline{m}-\overline{z} \\ b-a & \overline{b}-\overline{a} \end{vmatrix} &= (z-m)\left(\overline{b}-\overline{a}\right)+(\overline{z}-\overline{m})(b-a) = \\ &= \left(\overline{b}-\overline{a}\right)z+(b-a)\overline{z}+a\overline{m}+\overline{a}m-b\overline{m}-\overline{b}m, \end{aligned}$$

tedy komplexní rovnici (1.46) lze ekvivalentně zapsat jako

$$\left(\overline{b}-\overline{a}\right) z+(b-a)\,\overline{z}+a\overline{m}+\overline{a}m-b\overline{m}-\overline{b}m=0. \tag{1.47}$$

Je přitom zřejmé, že komplexní rovnice (1.47), a s ní ekvivalentní rovnice (1.46), opravdu představují komplexní rovnice jisté přímky, neboť v zápisu (1.47) poznáváme komplexní rovnici přímky v normálovém tvaru (1.41) ze str. 44.

Na obě rovnice, tj. (1.46) i (1.47), se budeme dále odvolávat jako na komplexní rovnice kolmice k přímce AB vedené bodem M.

Věta 17. *Nechť A, B, M, Z jsou body takové, že $A \neq B$ a Z je kolmým průmětem bodu M na přímku AB. Pak pro jeho komplexní souřadnici platí*

$$z=\frac{a\left(\overline{m}-\overline{b}\right)-b\left(\overline{m}-\overline{a}\right)}{2\left(\overline{a}-\overline{b}\right)}+\frac{m}{2}. \tag{1.48}$$

Důkaz. Bod Z je průsečíkem přímky AB a kolmice vedené bodem M na přímku AB. Jeho komplexní souřadnice je proto řešením soustavy rovnic těchto dvou přímek, přitom komplexní rovnici přímky AB lze zapsat podle (1.39), str. 44, jako

$$\left(\overline{a}-\overline{b}\right) z+(b-a)\,\overline{z}+a\overline{b}-\overline{a}b=0$$

a pro komplexní rovnici zmíněné kolmice máme podle poslední poznámky

$$\left(\overline{b}-\overline{a}\right) z+(b-a)\,\overline{z}+a\overline{m}+\overline{a}m-b\overline{m}-\overline{b}m=0.$$

Odečtením druhé rovnice od první dostaneme rovnici

$$2\left(\overline{a}-\overline{b}\right) z-m\left(\overline{a}-\overline{b}\right)-a\left(\overline{m}-\overline{b}\right)+b\left(\overline{m}-\overline{a}\right)=0,$$

ve které již nevystupuje neznámá $\overline{z}$, a ze které z můžeme vzhledem k tomu, že $a \neq b$, a tedy ani $\overline{a} \neq \overline{b}$, vyjádřit vztahem (1.48). Q.E.D.

Věta 18. *Nechť A, B jsou dva různé body. Pak* komplexní rovnice osy úsečky $[AB]$ *je*

$$\begin{vmatrix} a & \overline{b} & 1 \\ b & \overline{a} & 1 \\ z & \overline{z} & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{1.49}$$

Důkaz. Protože osa úsečky $[AB]$ je množinou takových bodů Z, jež mají stejnou vzdálenost od obou jejích krajních bodů A, B, je její rovnice tvaru

$$|z-a|^2 = |z-b|^2 \qquad \text{neboli} \qquad (z-a)\left(\overline{z}-\overline{a}\right) = (z-b)\left(\overline{z}-\overline{b}\right).$$

Po roznásobení obou stran a jednoduché úpravě odtud dostaneme

$$\begin{aligned} z\overline{z} - \overline{a}z - a\overline{z} + a\overline{a} &= z\overline{z} - \overline{b}z - b\overline{z} + b\overline{b}, \\ \left(\overline{b}-\overline{a}\right) z + (b-a)\,\overline{z} + |a|^2 - |b|^2 &= 0, \end{aligned}$$

tj. stejnou komplexní rovnici jako po rozvinutí determinantu v rovnici (1.49) podle prvků jeho posledního řádku. Q.E.D.

Poznámka. Stejně jako v případě komplexních rovnic přímky a kolmice na danou přímku vedenou daným bodem, i komplexní rovnici (1.49) osy dané úsečky lze zapsat řadou vzájemně ekvivalentních způsobů, přičemž dále v textu užijeme tvaru odvozeného v rámci důkazu poslední věty, tj.

$$\left(\overline{b}-\overline{a}\right) z + (b-a)\,\overline{z} + |a|^2 - |b|^2 = 0, \tag{1.50}$$

který budeme společně s rovnicí (1.49) nazývat komplexní rovnicí osy úsečky $[AB]$. Opět se snadno vidí, že rovnice (1.50) představuje komplexní rovnici přímky zapsanou v normálovém tvaru (1.41), str. 44.

1.10 Kružnice a rovnice s ní spojené

V tomto paragrafu nejprve uvedeme *komplexní rovnici obecné kružnice*, následně se omezíme na studium sečen a tečen jednotkové kružnice se středem v počátku soustavy komplexních souřadnic. Tuto redukci později doceníme při dokazování složitějších tvrzení, kde ztotožnění některých z jejich významných kružnic právě s kružnicí jednotkovou se středem v počátku přinese citelné zjednodušení výpočtů. Nakonec pojednáme o Apolloniově kružnici dvou bodů, kterou využijeme v následující kapitole.

Věta 19. *Nechť S je libovolný bod a nechť r je kladné reálné číslo. Potom komplexní rovnice kružnice o poloměru r se středem v bodě S je*

$$z\overline{z} - s\overline{z} - \overline{s}z + s\overline{s} - r^2 = 0. \tag{1.51}$$

Důkaz. Podle běžné definice kružnice jako množiny bodů Z majících stejnou vzdálenost r od daného bodu S jsou její body určeny rovnicí

$$(z - s)\,(\overline{z} - \overline{s}) = r^2, \tag{1.52}$$

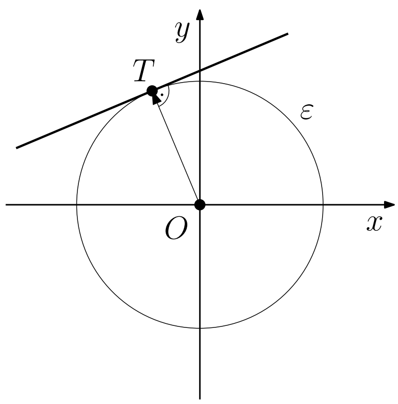
ze které po roznásobení a převedení všech členů na levou stranu dostaneme (1.51).
Q.E.D.

Poznámka. Oba dva ekvivalentní zápisy (1.51) a (1.52) budeme v dalším označovat jako komplexní rovnice kružnice o poloměru r se středem v bodě S.

V následujících několika lemmatech se budeme, jak již bylo naznačeno v úvodu tohoto paragrafu, věnovat geometrii jednotkové kružnice se středem v počátku O soustavy komplexních souřadnic, jejíž komplexní rovnice má podle poslední věty velmi jednoduchý tvar $z\overline{z} = 1$. Dohodněme se, že pro stručnost se na ni budeme ve zbytku tohoto paragrafu pevně odvolávat jako na kružnici ε.

Lemma 3. *Nechť T je bodem kružnice ε. Pak komplexní rovnice tečny ke kružnici ε v bodě T je*

$$\overline{t}z + t\overline{z} = 2. \tag{1.53}$$



Obrázek 1.16

Důkaz. Vektor $\overrightarrow{OT}\,(t)$ je zřejmě normálovým vektorem zmíněné tečny (obr. 1.16), navíc komplexní rovnici (1.53) evidentně vyhovuje sama komplexní souřadnice t bodu T, neboť $t\overline{t} = 1$. Dohromady tak dostáváme, že se jedná o zápis komplexní rovnice tečny ke kružnici v bodě T v normálovém tvaru (1.41), str. 44. Q.E.D.

Lemma 4. *Buďte T, U body dotyku dvou různoběžných tečen kružnice ε. Pak jejich průsečík Z má komplexní souřadnici určenou vztahem*

$$z = \frac{2tu}{t+u}. \tag{1.54}$$

Důkaz. Podle vzorce (1.53) z předchozího lemmatu zapíšeme rovnice obou tečen a pro komplexní souřadnici z jejich průsečíku Z tak dostaneme soustavu

$$\overline{t}z + t\overline{z} = 2, \qquad \overline{u}z + u\overline{z} = 2.$$

Po vynásobení první rovnice soustavy nenulovým číslem $-\frac{u}{t}$ a přičtení ke druhé rovnici dostáváme jedinou rovnici

$$\left(\overline{u} - \frac{\overline{t}u}{t}\right) z = 2 - \frac{2u}{t}, \tag{1.55}$$

ve které již nefiguruje neznámá $\overline{z}$. Jelikož body dotyku T, U a střed O kružnice ε nejsou podle předpokladu o různoběžnosti tečen kolineární, dostáváme pro jejich poměr $(O;U,T)$ podmínku

$$(O;U,T) = \frac{0-u}{0-t} = \frac{u}{t} \neq \frac{\overline{u}}{\overline{t}} = \overline{(O;U,T)}, \qquad \text{tj.} \qquad t\overline{u} \neq \overline{t}u.$$

Číslo $\overline{u} - \frac{\overline{t}u}{t}$ je proto nenulové, můžeme jím vydělit obě strany rovnice (1.55) a obdržet tak její řešení

$$z = \frac{2 - \frac{2u}{t}}{\overline{u} - \frac{\overline{t}u}{t}} = \frac{2\,(t-u)}{t\overline{u} - \overline{t}u},$$

které s využitím toho, že $t\overline{t} = u\overline{u} = 1$, ještě upravíme do podoby

$$z = \frac{2\,(t-u)}{\frac{t}{u} - \frac{u}{t}} = \frac{2\,(t-u)}{\frac{t^2-u^2}{tu}} = \frac{2tu}{t+u},$$

čímž je důkaz poveden. Q.E.D.

Lemma 5. *Buďte A, B dva různé body kružnice ε. Pak*

$$z + ab\overline{z} = a + b \tag{1.56}$$

je komplexní rovnice sečny AB kružnice ε.

Důkaz. Komplexní rovnice sečny AB je podle (1.39), str. 44,

$$\left(\overline{a}-\overline{b}\right)z+(b-a)\,\overline{z}+a\overline{b}-\overline{a}b=0,$$

odkud s využitím toho, že pro komplexní souřadnice bodů A, B platí $a\overline{a}=b\overline{b}=1$, dostaneme

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)z+(b-a)\,\overline{z}+\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=0$$

a dále vynásobením (nenulovým) číslem ab a následným vydělením nenulovým číslem $b-a$ obdržíme

$$(b-a)\,z+(b-a)\,ab\overline{z}+(a-b)\,(a+b)=0,$$
$$z+ab\overline{z}-(a+b)=0.$$

Vzorec (1.56) je tak dokázán. Q.E.D.

Poznámka. Všimněme si, že pro $a=b$ přejde rovnice (1.56) sečny AB kružnice ε v rovnici (1.53) její tečny v bodě $A=B$. Opravdu, z rovnice

$$z+a^2\overline{z}=2a,$$

po vydělení obou jejích stran komplexní jednotkou a dostaneme

$$\frac{1}{a}z+a\overline{z}=2 \qquad \text{neboli} \qquad \overline{a}z+a\overline{z}=2.$$

Lemma 6. *Nechť $A\neq B$, $C\neq D$ jsou čtyři body kružnice ε takové, že sečny AB, CD jsou různoběžné. Komplexní souřadnice z jejich průsečíku Z je pak určena vztahem*

$$\overline{z}=\frac{(a+b)-(c+d)}{ab-cd}. \tag{1.57}$$

Důkaz. Podle předchozího lemmatu jsou rovnice sečen AB, CD po řadě

$$z+ab\overline{z}=a+b, \qquad z+cd\overline{z}=c+d,$$

odkud odečtením druhé rovnice od první získáme

$$(ab-cd)\,\overline{z}=(a+b)-(c+d)\,. \tag{1.58}$$

Ukažme nyní, že podmínka $ab-cd\neq 0$ je v naší situaci ekvivalentní předpokladu

$AB \nparallel CD$. Opravdu, podle definičního vztahu (1.30) uvedeného na str. 34 v definici rovnoběžnosti přímek lze tento předpoklad zapsat nerovností

$$\frac{b-a}{d-c} \neq \frac{\overline{b}-\overline{a}}{\overline{d}-\overline{c}},$$

kterou s využitím vztahů $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c} = d\overline{d} = 1$ upravíme do tvaru

$$\frac{b-a}{d-c} \neq \frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{d}-\frac{1}{c}} = \frac{\frac{a-b}{ab}}{\frac{c-d}{cd}} = \frac{(a-b)\,cd}{(c-d)\,ab}$$

neboli (připomeňme, že $a \neq b$, $c \neq d$)

$$1 \neq \frac{cd}{ab} \qquad \text{čili} \qquad ab - cd \neq 0.$$

Rovnici (1.58) tak můžeme vydělit nenulovým číslem $ab - cd$, čímž dospějeme k požadovanému výsledku (1.57). Q.E.D.

Poznámka. Povšimněme si, že vztah (1.57) je, jak lze očekávat, neměnný při záměně bodů A, B, resp. bodů C, D stejně jako při záměně dvojic bodů (A, B) a (C, D).

Zároveň si uvědomme, že v situaci, kdy $a = b = t$ a $c = d = u$, $t \neq \pm u$, obdržíme odtud dříve odvozený vztah (1.54) pro komplexní souřadnici průsečíku dvou různoběžných tečen kružnice ε. Opravdu, dosazením do rovnosti (1.57) a využitím vztahů $t\overline{t} = u\overline{u} = 1$ máme

$$\overline{z} = \frac{2\,(t-u)}{t^2-u^2} = \frac{2}{t+u} \qquad \text{neboli} \qquad z = \frac{2}{\frac{1}{t}+\frac{1}{u}} = \frac{2tu}{t+u},$$

což je právě rovnost (1.54). Podobně bychom tak mohli získat vyjádření komplexní souřadnice průsečíku tečny a s ní různoběžné sečny ke kružnici ε.

Dodejme, že k nalezení vztahu (1.57), resp. k nalezení jeho komplexně sdruženého protějšku, bylo rovněž možné využít výsledku Lemmatu 2 ze str. 45. Vzhledem k jednoduchosti jsme však zvolili názornější přímý postup.

Lemma 7. *Nechť A, B jsou dva různé body kružnice ε a Z je kolmým průmětem libovolného bodu M na její sečnu AB. Pak platí*

$$z = \frac{1}{2}\,(a + b + m - ab\overline{m})\,. \tag{1.59}$$

Důkaz. S využitím tohoto, že $a\overline{a} = b\overline{b} = 1$, vypišme podle vzorce (1.48) z Věty 17, str. 47, komplexní souřadnici z průmětu Z bodu M na přímku AB. Podle tohoto vztahu platí

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{a\left(\overline{m}-\overline{b}\right)-b\left(\overline{m}-\overline{a}\right)}{2\left(\overline{a}-\overline{b}\right)}+\frac{m}{2}=\frac{a\left(\overline{m}-\frac{1}{b}\right)-b\left(\overline{m}-\frac{1}{a}\right)}{2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}+\frac{m}{2}= \\
&= \frac{\dfrac{ab\overline{m}-a}{b}-\dfrac{ab\overline{m}-b}{a}}{\dfrac{2\left(b-a\right)}{ab}}+\frac{m}{2}=\frac{a^2b\overline{m}-a^2-ab^2\overline{m}+b^2}{2\left(b-a\right)}+\frac{m}{2}= \\
&= \frac{b^2-a^2-\left(b-a\right)ab\overline{m}}{2\left(b-a\right)}+\frac{m}{2}=\frac{a+b-ab\overline{m}}{2}+\frac{m}{2}=\frac{1}{2}\left(a+b+m-ab\overline{m}\right),
\end{aligned}
$$

což je přesně dokazovaný vzorec (1.59). Q.E.D.

Zabývejme se nyní množinou bodů (v rovině), jež mají od daných dvou různých bodů konstantní poměr vzdáleností. Ukážeme, že pro libovolný (kladný) poměr různý od jedné se jedná o kružnici, která bývá označována jako *Apolloniova*[11] *kružnice dvou (různých) bodů (zadaná daným poměrem)*. Tvrzení o Apolloniově kružnici zde uvádíme proto, že jej využijeme později při konstrukci tzv. *harmonického čtyřúhelníku* (viz str. 71, resp. str. 74).

Věta 20. *Množina bodů Z majících od daných dvou různých bodů A, B konstantní poměr vzdáleností*

$$
\frac{|z-a|}{|z-b|}=\lambda\in\mathbb{R}^{+} \tag{1.60}
$$

je pro $\lambda=1$ osou úsečky $[AB]$ a pro $\lambda\neq 1$ kružnicí, jejíž střed leží na přímce AB.

Důkaz. Skutečnost, že rovnost (1.60) představuje pro $\lambda=1$ komplexní rovnici osy úsečky $[AB]$ (viz Větu 18 na str. 47) je zřejmá, proto dále předpokládejme, že $\lambda\neq 1$.

Ekvivalentními úpravami rovnosti (1.60), včetně umocnění obou jejích stran na druhou (jež je ekvivalentní úpravou z důvodu $\lambda>0$), postupně obdržíme

$$
\begin{gathered}
|z-a|=\lambda\,|z-b|\,, \\
\left(z-a\right)\left(\overline{z}-\overline{a}\right)=\lambda^2\left(z-b\right)\left(\overline{z}-\overline{b}\right), \\
z\overline{z}-\overline{a}z-a\overline{z}+a\overline{a}=\lambda^2\left(z\overline{z}-\overline{b}z-b\overline{z}+b\overline{b}\right), \\
\left(1-\lambda^2\right)z\overline{z}-\left(a-\lambda^2 b\right)\overline{z}-\left(\overline{a}-\lambda^2\overline{b}\right)z+a\overline{a}-\lambda^2 b\overline{b}=0,
\end{gathered}
$$

[11] **Apollónios z Pergy** (cca. 262 př. n. l. – cca. 190 př. n. l.) – starověký řecký geometr a astronom.

a odtud po vydělení obou stran poslední rovnosti nenulovým (reálným) číslem $1-\lambda^2$ získáme

$$z\overline{z} - \frac{a-\lambda^2 b}{1-\lambda^2}\overline{z} - \frac{\overline{a}-\lambda^2\overline{b}}{1-\lambda^2}z + \frac{a\overline{a}-\lambda^2 b\overline{b}}{1-\lambda^2} = 0. \tag{1.61}$$

Podle Věty 19, str. 48, komplexní rovnici kružnice se středem v bodě S a poloměrem r lze zapsat jako

$$z\overline{z} - s\overline{z} - \overline{s}z + s\overline{s} - r^2 = 0.$$

Označme nejprve $s = \frac{a-\lambda^2 b}{1-\lambda^2}$ číslo určené podle koeficientu stojícího v komplexní rovnici (1.61) při členu $\overline{z}$. Ověřme nyní, že ta představuje komplexní rovnici jisté kružnice. K tomu zřejmě stačí ukázat, že komplexní číslo $s\overline{s} - \frac{a\overline{a}-\lambda^2 b\overline{b}}{1-\lambda^2}$ je reálné a kladné a udává tak kvadrát jejího poloměru, neboť podmínka

$$(s =)\frac{a-\lambda^2 b}{1-\lambda^2} = \overline{\left(\frac{\overline{a}-\lambda^2\overline{b}}{1-\lambda^2}\right)}$$

je evidentně splněna, a komplexní číslo s tak představuje komplexní souřadnici jejího středu. Avšak vynásobením nerovnosti

$$\frac{(a-\lambda^2 b)\left(\overline{a}-\lambda^2\overline{b}\right)}{(1-\lambda^2)^2} - \frac{a\overline{a}-\lambda^2 b\overline{b}}{1-\lambda^2} > 0,$$

kladným číslem $(1-\lambda^2)^2$ a dalšími ekvivalentními úpravami postupně dostaneme

$$\begin{aligned}
\left(a-\lambda^2 b\right)\left(\overline{a}-\lambda^2\overline{b}\right) - \left(a\overline{a}-\lambda^2 b\overline{b}\right)\left(1-\lambda^2\right) &> 0,\\
a\overline{a} - \lambda^2 a\overline{b} - \lambda^2\overline{a}b + \lambda^4 b\overline{b} - \left(a\overline{a} - \lambda^2 a\overline{a} - \lambda^2 b\overline{b} + \lambda^4 b\overline{b}\right) &> 0,\\
\lambda^2\left(b\overline{b} - \overline{a}b - a\overline{b} + a\overline{a}\right) &> 0,
\end{aligned}$$

a odtud již po vydělení obou stran poslední nerovnosti kladným číslem λ^2 získáme po jednoduchém sloučení podmínku

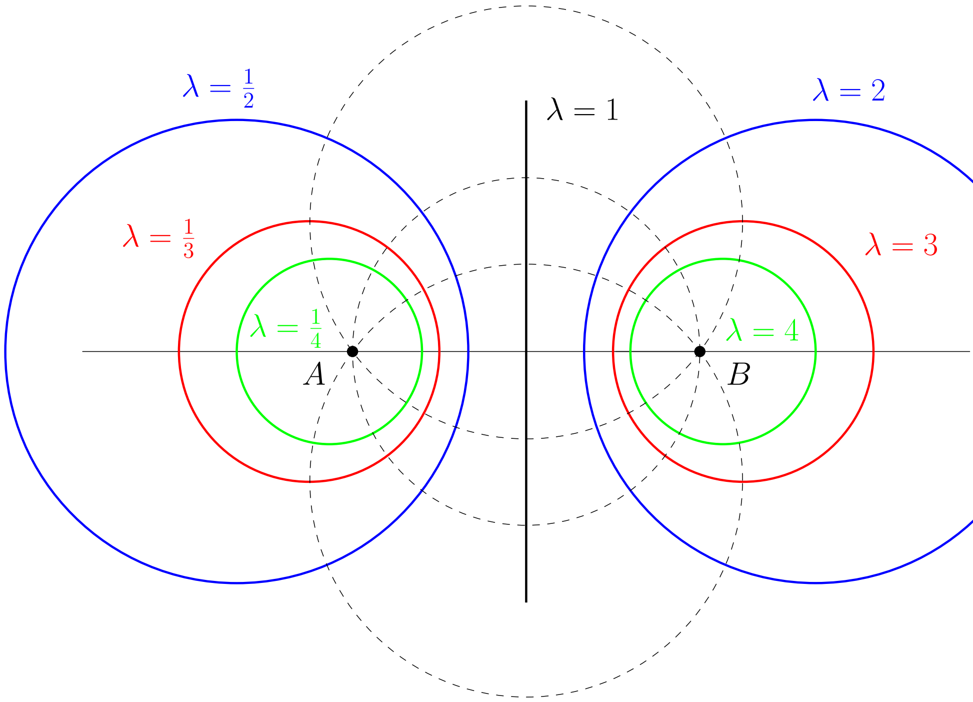
$$(b-a)\left(\overline{b}-\overline{a}\right) > 0 \qquad \text{neboli} \qquad |b-a|^2 > 0,$$

která je vzhledem k předpokladu $a \neq b$ splněna. Tedy rovnice (1.61) je opravdu komplexní rovnicí kružnice. Z vyjádření komplexní souřadnice jejího středu

$$s = \frac{a-\lambda^2 b}{1-\lambda^2} = \frac{1}{1-\lambda^2}a - \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}b = \lambda_1 a + \lambda_2 b$$

navíc okamžitě dostáváme, že ten leží na přímce AB, neboť $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{1-\lambda^2} +$

$+\left(-\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}\right) = 1$, tedy reálná čísla λ_1 a λ_2 představují barycentrické souřadnice středu S vzhledem k bodům A a B (viz Větu 4 uvedenou na str. 26 a poznámku za jejím důkazem). Q.E.D.



Obrázek 1.17

Poznámka. Pro zajímavost si lze povšimnout, že poloměr r Apolloniovy kružnice bodů A, B zadané poměrem $0 < \lambda \neq 1$ lze podle právě ukončeného důkazu vyjádřit vztahem

$$r = \frac{\lambda}{|1-\lambda^2|} \cdot |AB|\,,$$

který je navíc evidentně symetrický vůči záměně $\lambda \to \frac{1}{\lambda}$ (což ostatně lze vytušit i z významu poměru λ, viz obr. 1.17). Je z něj také dobře patrné, že poloměr Apolloniovy kružnice roste nade všechny meze pro λ blížící se jedné.

Dodejme, že je dále možné dokázat, že Apolloniovy kružnice bodů A, B zadané libovolným poměrem $0 < \lambda \neq 1$ *protínají kolmo* každou kružnici procházející body A, B (tj. dva páry tečen k oběma kružnicím svírají v obou místech jejich společného průniku pravý úhel, což je dobře patrno na obr. 1.17, kde jsme vzájemnou kolmost jednotlivých kružnic z důvodu přehlednosti explicitně neoznačili). Důkaz tohoto tvrzení, jenž přesahuje rámec našeho textu, lze vyvodit např. z poznatků uvedených v publikaci [2, s. 114–133].

Kapitola 2

Koncyklicita a kolinearita čtyř bodů

V této kapitole se budeme zabývat otázkou, jak lze s využitím komplexních čísel a běžných operací na nich definovaných jednoduše zachytit častou a významnou situaci, kdy čtyři navzájem různé body jsou *koncyklické* nebo *kolineární*, tj. kdy leží na jedné kružnici nebo přímce. Za tímto účelem využijeme v geometrii známý nástroj zvaný *dvojpoměr čtyř různých kolineárních bodů*, který však, na rozdíl od jeho běžného významu, přirozeným způsobem rozšíříme na libovolné čtveřice bodů roviny podobně, jako jsme tak učinili v první kapitole v případě dělicího poměru tří různých kolineárních bodů. Na závěr kapitoly se budeme, oproti autorově diplomové práci [10], věnovat zvláštnímu případu rozložení čtyř různých bodů na přímce nebo kružnici, známému jako *harmonická čtveřice*.

První paragraf kapitoly z větší části vychází z knihy [2, s. 144–150] stejně jako úvodní pojednání o harmonické čtveřici, kde cenným zdrojem poznatků se stala rovněž publikace [7, s. 41–48], rozbor kladnosti a zápornosti dvojpoměru je pak původním příspěvkem autora převzatým z jeho diplomové práce. Původní, alespoň v tom smyslu, že jsme ji nepřevzali z žádné literatury, je i diskuse tzv. *Descartesova vztahu* přinášející spojení vzdálených a zdánlivě nesouvisejících oblastí přírodní vědy včetně konstrukce harmonické čtveřice bodů na přímce založené na poznatcích *geometrické (paprskové) optiky.*

Kvůli zestručnění některých formulací ponechme v platnosti úmluvu z posledního paragrafu předchozí kapitoly, že jednotkovou kružnici se středem v počátku O soustavy komplexních souřadnic budeme i nadále označovat symbolem ε.

Dodejme, že kniha [2] je jediným nám známým zdrojem, kde je podmínka koncyklicity čtyř bodů skutečně odvozována. Jinde, např. v [1] a [3], se k jejímu ověření bez důkazu využívá tvrzení elementární planimetrie známé jako *věta o obvodových úhlech* v kružnici.

2.1 Dvojpoměr čtyř bodů

Definice 12. Nechť A, B, C, D jsou čtyři navzájem různé body. Pak komplexní číslo

$$(A, B, C, D) := \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} \tag{2.1}$$

nazýváme *dvojpoměrem* bodů A, B, C, D.

Název „dvojpoměr“ je ve shodě s tím, že definiční vztah (2.1) lze zapsat pomocí dvou poměrů trojic bodů jako

$$(A, B, C, D) = (C; A, B) : (D; A, B)\,. \tag{2.2}$$

Uvědomme si dále, že přímo z definice dvojpoměru čtyř vzájemně různých bodů především ihned plyne, že se jedná o číslo různé od nuly, ale také od jedné, neboť podmínka

$$\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = 1 \qquad \text{neboli} \qquad \frac{c-a}{c-b} = \frac{d-a}{d-b}$$

by znamenala $A = B$, příp. $C = D$.

Jelikož lze ze čtyř prvků utvořit celkem $4! = 24$ permutací, lze pro čtyři navzájem různé body sestavit celkem 24 dvojpoměrů. Označme $\lambda = (A, B, C, D)$, pak

$$\begin{aligned}
(C, D, A, B) &= \frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d} = \frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} = \lambda,\\
(B, A, C, D) &= \frac{c-b}{c-a} : \frac{d-b}{d-a} = \frac{1}{\lambda},\\
(A, C, B, D) &= \frac{b-a}{b-c} : \frac{d-a}{d-c} = \frac{b-a}{c-b} \cdot \frac{c-d}{d-a} = \frac{bc-bd-ac+ad}{(c-b)\,(d-a)} =\\
&= \frac{cd-cd+ab-ab+bc-bd-ac+ad}{(c-b)\,(d-a)} =\\
&= \frac{(c-b)\,(d-a)-(c-a)\,(d-b)}{(c-b)\,(d-a)} = 1 - \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = 1-\lambda.
\end{aligned}$$

Slovně lze tyto vztahy popsat tak, že záměnou první a poslední dvojice bodů se dvojpoměr nezmění, záměna prvních dvou bodů vrací převrácenou hodnotu původního dvojpoměru a záměna prostředních dvou bodů dává „doplněk“ původního dvojpoměru do čísla 1.

$$
\begin{aligned}
(A,B,C,D) &= (B,A,D,C) = (C,D,A,B) = (D,C,B,A) = \lambda,\\
(A,B,D,C) &= (B,A,C,D) = (C,D,B,A) = (D,C,A,B) = \frac{1}{\lambda},\\
(A,C,B,D) &= (B,D,A,C) = (C,A,D,B) = (D,B,C,A) = 1-\lambda,\\
(A,C,D,B) &= (B,D,C,A) = (C,A,B,D) = (D,B,A,C) = \frac{1}{1-\lambda},\\
(A,D,C,B) &= (B,C,D,A) = (C,B,A,D) = (D,A,B,C) = \frac{\lambda}{\lambda-1},\\
(A,D,B,C) &= (B,C,A,D) = (C,B,D,A) = (D,A,C,B) = \frac{\lambda-1}{\lambda}.
\end{aligned}
$$

Tabulka 2.1

Na základě těchto pravidel lze snadno sestrojit úplnou tabulku všech možných hodnot dvojpoměru v závislosti na pořadí jeho bodů (tab. 2.1). Vidíme, že pro danou čtveřici bodů A, B, C, D jde buď o 24 reálných, nebo 24 imaginárních čísel.

Poznámka. Podobně jako známý poměr tří bodů při znalosti komplexních souřadnic dvou z nich určuje jednoznačně komplexní souřadnici třetího (viz poznámku uvedenou na str. 29), různého od obou, i známá hodnota dvojpoměru $\lambda = (A,B,C,D)$, $\lambda \neq (C;A,B)$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$ při zadaných komplexních souřadnicích tří různých bodů A, B, C dovoluje jednoznačně určit komplexní souřadnici zbývajícího bodu $D \notin \{A,B,C\}$. Opravdu,

$$
\begin{aligned}
\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} &= \lambda,\\
\frac{c-a}{c-b} &= \lambda \cdot \frac{d-a}{d-b},\\
(c-a)(d-b) &= \lambda (d-a)(c-b),\\
cd - bc - ad + ab &= \lambda (cd - bd - ac + ab),\\
d(c - a - \lambda c + \lambda b) &= bc - ab - \lambda ac + \lambda ab,
\end{aligned}
$$

avšak platí $c - a - \lambda c + \lambda b \neq 0$, neboť v opačném případě bychom dostali

$$
c - a = \lambda (c-b), \qquad \text{tj.} \qquad \lambda = \frac{c-a}{c-b} = (C;A,B), \qquad \text{a odtud} \qquad \frac{d-a}{d-b} = 1.
$$

Tuto situaci jsme však ze svých úvah vyloučili již v předpokladu, neboť poslední podmínku nelze vzhledem k požadavku $a \neq b$ pro konečnou hodnotu d splnit. Dvojpoměr

$\lambda = (A, B, C, D)$ tak jednoznačně určuje bod D o komplexní souřadnici

$$d = \frac{bc - ab - \lambda ac + \lambda ab}{c - a - \lambda c + \lambda b} = \frac{b\,(c-a) - \lambda a\,(c-b)}{c - a - \lambda\,(c-b)}.$$

Definiční vztah (2.1) pro dvojpoměr (A, B, C, D) bodů A, B, C, D lze zapsat řadou vzájemně ekvivalentních formulí. Jednu takovou, kterou později v práci využijeme, uvádí následující pomocné tvrzení:

Lemma 8. *Pro čtyři různé body A, B, C, D platí*

$$(A, B, C, D) = \frac{\dfrac{1}{b-a} - \dfrac{1}{d-a}}{\dfrac{1}{b-a} - \dfrac{1}{c-a}}. \tag{2.3}$$

Důkaz. Postupnou úpravou složeného zlomku na pravé stranně vztahu (2.3) dostaneme

$$\frac{\dfrac{1}{b-a} - \dfrac{1}{d-a}}{\dfrac{1}{b-a} - \dfrac{1}{c-a}} = \frac{\dfrac{d-a-b+a}{(b-a)\,(d-a)}}{\dfrac{c-a-b+a}{(b-a)\,(c-a)}} = \frac{d-b}{d-a} : \frac{c-b}{c-a} = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = (A, B, C, D)\,,$$

a tím je tvrzení lemmatu ověřeno. Q.E.D.

Nyní uvedeme včetně důkazu zásadní tvrzení, jež v řeči dvojpoměru čtyř různých bodů udává nutnou a dostatečnou podmínku jejich koncyklicity nebo kolinearity.

Věta 21. *Čtyři navzájem různé body A, B, C, D leží na jedné kružnici nebo přímce právě tehdy, když jejich dvojpoměr (A, B, C, D) je reálné číslo.*

Důkaz. Dokážeme nejprve implikaci „$\Rightarrow$“. Pro případ, kdy jsou dané čtyři vzájemně různé body A, B, C, D kolineární, je platnost implikace triviální, neboť oba poměry vystupující ve vyjádření dvojpoměru (2.2) uvedeném na str. 57 jsou pak nenulová reálná čísla (Věta 6, str. 29), a proto i jejich podíl, tj. dvojpoměr (A, B, C, D), je (nenulové) reálné číslo.

Nechť nyní čtyři navzájem různé body A, B, C, D leží na jedné kružnici, kterou můžeme pro tuto chvíli bez újmy na obecnosti považovat za kružnici ε (neboť změna měřítka ani případné posunutí o libovolný vektor v rovině nemá na hodnotu dvojpoměru bodů A, B, C, D vliv). S využitím vztahů $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c} = d\overline{d} = 1$

dostaneme

$$\overline{(A,B,C,D)} = \frac{\overline{c}-\overline{a}}{\overline{c}-\overline{b}} : \frac{\overline{d}-\overline{a}}{\overline{d}-\overline{b}} = \frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}} : \frac{\frac{1}{d}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{d}-\frac{1}{b}} = \frac{\frac{a-c}{ac}}{\frac{b-c}{bc}} : \frac{\frac{a-d}{ad}}{\frac{b-d}{bd}} = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \\ = (A,B,C,D)$$

čili dvojpoměr (A,B,C,D) je pro čtyři vzájemně různé koncyklické body reálné číslo. Důkaz části „$\Rightarrow$“ je tak hotov.

Nyní dokažme opačnou implikaci „$\Leftarrow$“. Buď tedy dvojpoměr (A,B,C,D) reálné číslo. Pak máme

$$\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{\overline{c}-\overline{a}}{\overline{c}-\overline{b}} : \frac{\overline{d}-\overline{a}}{\overline{d}-\overline{b}}. \tag{2.4}$$

Považujme nyní komplexní souřadnici d bodu D za proměnnou z takovou, že platí $z \neq a$, $z \neq b$ a označme dále $m = \frac{c-a}{c-b} \cdot \frac{\overline{c}-\overline{b}}{\overline{c}-\overline{a}}$, $|m| = 1$. Pak ekvivalentními úpravami podmínky (2.4) dostaneme

$$\frac{c-a}{c-b} \cdot \frac{z-b}{z-a} = \frac{\overline{c}-\overline{a}}{\overline{c}-\overline{b}} \cdot \frac{\overline{z}-\overline{b}}{\overline{z}-\overline{a}}, \tag{2.5}$$

$$m \cdot \frac{z-b}{z-a} = \frac{\overline{z}-\overline{b}}{\overline{z}-\overline{a}},$$

$$m\,(z-b)\,(\overline{z}-\overline{a}) = \left(\overline{z}-\overline{b}\right)(z-a)\,, \tag{2.6}$$

$$m\,(z\overline{z} - \overline{a}z - b\overline{z} + \overline{a}b) = z\overline{z} - a\overline{z} - \overline{b}z + a\overline{b},$$

$$(m-1)\,z\overline{z} - (mb-a)\,\overline{z} - \left(m\overline{a}-\overline{b}\right)z + m\overline{a}b - a\overline{b} = 0. \tag{2.7}$$

Pro $m = 1$ nabude poslední rovnice tvaru

$$(a-b)\,\overline{z} - \left(\overline{a}-\overline{b}\right)z + \overline{a}b - a\overline{b} = 0,$$

což je, podle vztahu (1.39) ze str. 44 zapsaného v komplexně sdružené podobě, komplexní rovnice přímky AB, a body A, B, D jsou proto kolineární. Ze způsobu zavedení komplexní jednotky m je však zřejmé, že platí $(C;A,B) = m \cdot \overline{(C;A,B)}$, tedy pro $m = 1$ dostáváme, že poměr $(C;A,B)$ je reálné číslo, a tedy také bod C je bodem přímky AB.

Uvažujme dále, že $m \neq 1$. Pak podmínka (2.7) po vydělení nenulovým číslem $m-1$ přejde do tvaru

$$z\overline{z} - \frac{mb-a}{m-1}\overline{z} - \frac{m\overline{a}-\overline{b}}{m-1}z + \frac{m\overline{a}b-a\overline{b}}{m-1} = 0. \tag{2.8}$$

Nyní ukážeme, podobným způsobem jako v důkazu Věty 20 o Apolloniově kružnici ze str. 53, že takto upravenou komplexní rovnicí je určena kružnice, jejímiž body jsou, kromě bodu D, rovněž body A, B, C. Podle Věty 19, str. 48, můžeme komplexní rovnici kružnice se středem v bodě S a poloměrem r psát jako

$$z\overline{z} - s\overline{z} - \overline{s}z + s\overline{s} - r^2 = 0.$$

Abychom dokázali, že rovnice (2.8) je komplexní rovnicí kružnice, musíme se přesvědčit, že komplexní číslo s, které definujeme podle koeficientu při členu $\overline{z}$ v (2.8) rovností $s = \frac{mb-a}{m-1}$, je číslo komplexně sdružené se záporně vzatým koeficientem při členu z v (2.8), takže představuje komplexní souřadnici jejího středu a že komplexní číslo $s\overline{s} - \frac{m\overline{a}b-a\overline{b}}{m-1}$ udává kvadrát jejího průměru, že se tedy jedná o jisté kladné reálné číslo. Je tak nutné ověřit, že platí

$$(s =)\,\frac{mb-a}{m-1} = \overline{\left(\frac{m\overline{a}-\overline{b}}{m-1}\right)} \qquad \text{a zároveň} \qquad s\overline{s} - \frac{m\overline{a}b-a\overline{b}}{m-1} > 0, \tag{2.9}$$

což provedeme v několika krocích, přitom využijeme zřejmého faktu $m\overline{m} = 1$ (viz zavedení čísla m). Ekvivalentními úpravami první z podmínek (2.9) postupně dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{mb-a}{m-1} &= \frac{\overline{m}a-b}{\overline{m}-1},\\
(mb-a)(\overline{m}-1) &= (m-1)(\overline{m}a-b),\\
b-mb-\overline{m}a+a &= a-mb-\overline{m}a+b,
\end{aligned}$$

což je triviálně splněno, a proto i rovnost z (2.9) platí. Zbývá tak ověřit nerovnost z (2.9), což provedeme postupnou úpravou její levé strany:

$$\begin{aligned}
s\overline{s} - \frac{m\overline{a}b-a\overline{b}}{m-1} &= \frac{mb-a}{m-1}\cdot\frac{\overline{m}\overline{b}-\overline{a}}{\overline{m}-1} - \frac{m\overline{a}b-a\overline{b}}{m-1} =\\
&= \frac{(mb-a)\left(\overline{m}\overline{b}-\overline{a}\right) - \left(m\overline{a}b-a\overline{b}\right)(\overline{m}-1)}{(m-1)(\overline{m}-1)} =\\
&= \frac{b\overline{b}-m\overline{a}b-\overline{m}a\overline{b}+a\overline{a}-\overline{a}b+m\overline{a}b+\overline{m}a\overline{b}-a\overline{b}}{|m-1|^2} = \frac{b\overline{b}-\overline{a}b-a\overline{b}+a\overline{a}}{|m-1|^2} =\\
&= \frac{(b-a)\left(\overline{b}-\overline{a}\right)}{|m-1|^2} = \frac{|b-a|^2}{|m-1|^2}.
\end{aligned}$$

Protože $a \neq b$, je poslední výraz kladný, tedy i druhá podmínka v (2.9) platí. Dokázali jsme tak, že rovnice (2.8) je skutečně rovnicí kružnice se středem S o komplexní souřadnici $s = \frac{mb-a}{m-1}$ s poloměrem r rovným $\frac{|a-b|}{|m-1|}$.

Body A, B, C, D leží na zmíněné kružnici tehdy a jen tehdy, když jejich komplexní souřadnice vyhovují její rovnici (2.8), resp. ekvivalentním rovnicím (2.7) a (2.6) (pro $m \neq 1$), příp. (2.5) (pro $z \neq a$). Avšak komplexní čísla $z = a$, $z = b$ evidentně vyhovují rovnici (2.6), tedy oba dva body A, B leží na oné kružnici. Komplexní souřadnice c bodu C pak zjevně splňuje rovnici (2.5), neboť pro $z = c$ jsou obě její strany rovné 1.

Z volby komplexní souřadnice d bodu D jako neznámé z plyne bezprostředně, že tento bod je prvkem kružnice o rovnici (2.8). Dohromady tak dostáváme, že v situaci, kdy $m \neq 1$, jsou body A, B, C, D koncyklické, a tím je důkaz věty kompletní.

Q.E.D.

Postup, který jsme uplatnili při důkazu Věty 21, vede rychle ke dvěma zajímavým výsledkům o kružnicích určených třemi body. Opusťme proto na chvíli téma dvojpoměru a dokažme dotyčné dvě věty.

Věta 22. *Komplexní souřadnice středu S kružnice libovolnému trojúhelníku ABC opsané je určena vztahem*

$$s = \frac{|a|^2(c-b) + |b|^2(a-c) + |c|^2(b-a)}{\overline{a}(c-b) + \overline{b}(a-c) + \overline{c}(b-a)}. \tag{2.10}$$

Důkaz. Podle postupu důkazu předchozí věty kružnice procházející třemi různými body A, B, C má komplexní souřadnici s svého středu S určenou vztahem $s = \frac{mb-a}{m-1}$, kde $m = \frac{c-a}{c-b} \cdot \frac{\overline{c}-\overline{b}}{\overline{c}-\overline{a}}$. Dosazením za m tak odsud dostáváme

$$\begin{aligned} s &= \frac{\frac{c-a}{c-b} \cdot \frac{\overline{c}-\overline{b}}{\overline{c}-\overline{a}} \cdot b - a}{\frac{c-a}{c-b} \cdot \frac{\overline{c}-\overline{b}}{\overline{c}-\overline{a}} - 1} = \frac{(c-a)\left(\overline{c}-\overline{b}\right)b - a(c-b)(\overline{c}-\overline{a})}{(c-a)\left(\overline{c}-\overline{b}\right) - (c-b)(\overline{c}-\overline{a})} = \\ &= \frac{b\overline{c}(c-a) - b\overline{b}(c-a) - a\overline{c}(c-b) + a\overline{a}(c-b)}{c\overline{c} - \overline{b}c - a\overline{c} + a\overline{b} - c\overline{c} + \overline{a}c + b\overline{c} - \overline{a}b} = \\ &= \frac{a\overline{a}(c-b) + b\overline{b}(a-c) + bc\overline{c} - ab\overline{c} - ac\overline{c} + ab\overline{c}}{\overline{a}c - \overline{a}b + a\overline{b} - \overline{b}c + b\overline{c} - a\overline{c}} = \\ &= \frac{|a|^2(c-b) + |b|^2(a-c) + |c|^2(b-a)}{\overline{a}(c-b) + \overline{b}(a-c) + \overline{c}(b-a)}. \end{aligned}$$

Získali jsme tak pro komplexní souřadnici s středu S kružnice trojúhelníku ABC opsané požadované vyjádření (2.10) a důkaz je tím hotov. Q.E.D.

Poznámka. Dodejme ještě, že důkaz existence středu kružnice opsané libovolnému trojúhelníku ABC jakožto průsečíku os všech tří jeho stran a platnosti vyjádření (2.10) jeho komplexní souřadnice podáme nezávisle později v kapitole třetí věnované geometrii trojúhelníku (Věta 29 na str. 83).

Věta 23. *Poloměr r kružnice opsané libovolnému trojúhelníku ABC je určený vztahem*

$$r = \frac{|a-b|\,|b-c|\,|c-a|}{\left|\overline{a}\,(c-b)+\overline{b}\,(a-c)+\overline{c}\,(b-a)\right|}. \tag{2.11}$$

Důkaz. Podle důkazu Věty 21 má kružnice procházející body A, B, C poloměr r rovný $\frac{|a-b|}{|m-1|}$, kde $m = \frac{c-a}{c-b} \cdot \frac{\overline{c}-\overline{b}}{\overline{c}-\overline{a}}$. Odtud s využitím vztahu $m\overline{m} = 1$ dostáváme

$$r^2 = \frac{|a-b|^2}{|m-1|^2} = \frac{|a-b|^2}{(m-1)\,(\overline{m}-1)} = \frac{|a-b|^2}{m\overline{m}-m-\overline{m}+1} = \frac{|a-b|^2}{2-m-\overline{m}},$$

což je po dosazení za m rovno

$$\frac{|a-b|^2}{2-\frac{c-a}{c-b}\cdot\frac{\overline{c}-\overline{b}}{\overline{c}-\overline{a}}-\frac{\overline{c}-\overline{a}}{\overline{c}-\overline{b}}\cdot\frac{c-b}{c-a}} = \frac{|a-b|^2}{\frac{2|b-c|^2|c-a|^2-\left(\overline{c}-\overline{b}\right)^2(c-a)^2-(c-b)^2(\overline{c}-\overline{a})^2}{|b-c|^2|c-a|^2}} =$$

$$= -\frac{|a-b|^2\,|b-c|^2\,|c-a|^2}{\left(\overline{c}-\overline{b}\right)^2(c-a)^2-2\,|b-c|^2\,|c-a|^2+(c-b)^2\,(\overline{c}-\overline{a})^2} =$$

$$= -\frac{|a-b|^2\,|b-c|^2\,|c-a|^2}{\left[\left(\overline{c}-\overline{b}\right)(c-a)-(c-b)\,(\overline{c}-\overline{a})\right]^2} =$$

$$= -\frac{|a-b|^2\,|b-c|^2\,|c-a|^2}{\left(c\overline{c}-a\overline{c}-\overline{b}c+a\overline{b}-c\overline{c}+\overline{a}c+b\overline{c}-\overline{a}b\right)^2} = -\frac{|a-b|^2\,|b-c|^2\,|c-a|^2}{\left(\overline{a}c-\overline{a}b+a\overline{b}-\overline{b}c+b\overline{c}-a\overline{c}\right)^2}.$$

Jelikož výraz v závorce jmenovatele posledního zlomku zřejmě představuje jisté ryze imaginární číslo, plyne odtud bezprostředně tvrzení věty. Q.E.D.

Vraťme se k hlavnímu tématu paragrafu a zkoumejme hlouběji situaci, kdy dvojpoměr $(A,B,C,D) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$ čtyř navzájem různých bodů A, B, C, D je reálné číslo. Z důkazu Věty 21 je vidět, že tyto body jsou kolineární tehdy a jen tehdy, když poměr $(C;A,B) = \frac{c-a}{c-b}$ je reálné číslo (tedy je dělicím poměrem bodů A, B, C). V opačném případě jsou body A, B, C, D koncyklické. Znamená to tedy, že konvexnímu čtyřúhelníku lze opsat kružnici, právě když dvojpoměr jeho vrcholů je reálný a žádné tři jeho vrcholy neleží na jedné přímce. Takovéto konvexní čtyřúhelníky nazýváme *tětivové*.

Dokázanou Větu 21 by bylo podle definice dvojpoměru možné formulovat také takto:

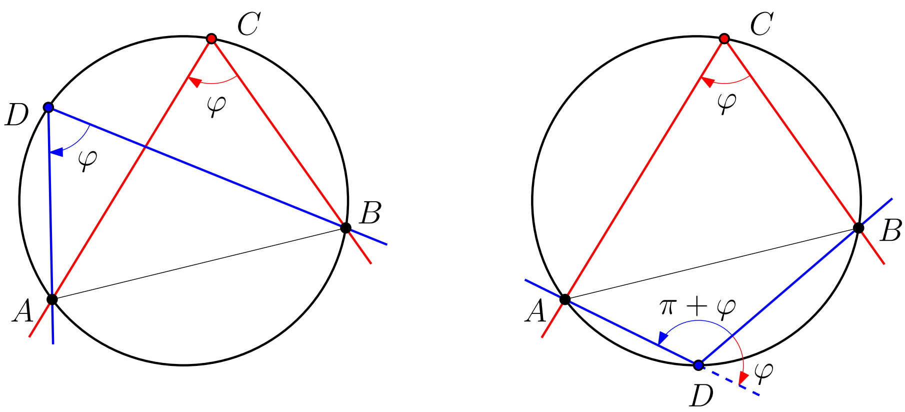
Věta 24. *Čtyři navzájem různé body A, B, C, D leží na jedné kružnici nebo přímce právě tehdy, když*

$$\arg\left(\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}\right) = 0 \qquad \text{nebo} \qquad \arg\left(\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}\right) = -\pi. \tag{2.12}$$

Jelikož podle pravidel pro počítání s argumenty (nenulových) komplexních čísel a Věty 14 uvedené na str. 41 platí

$$\arg\left(\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}\right) \sim \mathrm{m}(\widehat{BCA}) - \mathrm{m}(\widehat{BDA}), \tag{2.13}$$

říká poslední věta, že pro čtyři navzájem různé koncyklické nebo kolineární body A, B, C, D je rozdíl měr orientovaných úhlů sevřených polopřímkami $(CB$, $(CA$, resp. $(DB$, $(DA$ braných v obou případech v uvedeném pořadí roven 0 nebo $-\pi$ až na celočíselný násobek 2π (obr. 2.1, $\varphi \in (-\pi; 0)$). Odtud dostáváme následující dvě tvrzení známá z elementární planimetrie[1]:

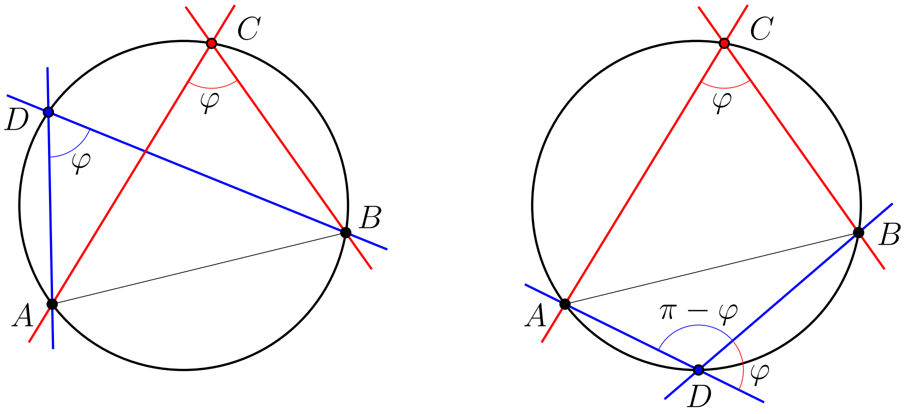


Obrázek 2.1

Důsledek 3. *Nechť čtyři navzájem různé body A, B, C, D leží na jedné kružnici, pak odchylka přímek AC, BC je rovna odchylce přímek AD, BD (obr. 2.2, $\varphi \in (0; \pi)$).*

Důsledek 4. *Konvexní čtyřúhelník je tětivový tehdy a jen tehdy, když součet velikostí dvou vnitřních úhlů při jeho protilehlých vrcholech je roven π.*

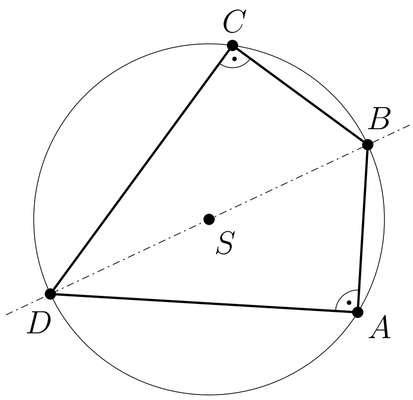
[1] V druhém z nich přitom využijeme termínu *velikost vnitřního úhlu* konvexního čtyřúhelníku, čímž myslíme velikost neorientovaného úhlu z intervalu $\langle 0; \pi\rangle$.



Obrázek 2.2

Poslední důsledek bývá rovněž označován jako *kritérium tětivového čtyřúhelníku.* Později v textu práce uvedeme ještě jedno méně známé (Ptolemaiovo) kritérium tětivového čtyřúhelníku (Důsledek 8 na str. 135).

Plyne odtud, že např. každý *pravoúhelník* (tj. čtverec nebo obdélník) je tětivovým čtyřúhelníkem. Jako další příklad uveďme ještě *deltoid* (tedy konvexní čtyřúhelník osově souměrný podle právě jedné své úhlopříčky), který je podle posledního důsledku tětivový tehdy a jen tehdy, když právě dva z jeho vnitřních úhlů při protilehlých vrcholech jsou pravé (obr. 2.3), nazýváme jej potom *tětivový deltoid.* Mimo jiné tak odtud lze vyvodit platnost tvrzení Thaletovy věty, kterou však později dokážeme analyticky (viz Větu 36 na str. 108).



Obrázek 2.3

2.2 Polarita reálného dvojpoměru

V tomto paragrafu se budeme zabývat otázkou, pro jaká uspořádání čtyř různých bodů A, B, C, D na kružnici nebo přímce je jejich dvojpoměr (A, B, C, D) kladné číslo a pro jaká se jedná o číslo záporné. Pro pohodlnost vyjadřování se dohodněme, že kladnost nebo zápornost (reálného) dvojpoměru budeme označovat stručně jako *polaritu (reálného) dvojpoměru.*

Věnujme se nejprve případu čtveřice různých kolineárních bodů A, B, C, D. Jejich jednotlivá uspořádání na přímce budeme přirozeným způsobem reprezentovat odpovídajícími permutacemi písmen A, B, C, D tak, že např. permutace $ACDB$ bude označovat to uspořádání, kdy $A - C - D$ a $C - D - B$ (viz Definici 4 na str. 23). Přitom z kontextu bude vždy zřejmé, že nehovoříme např. o čtyřúhelníku $ACDB$ apod. Uvědomme si, že těchto uspořádání je celkem $\frac{4!}{2} = 12$, neboť určitá permutace (např. $BADC$) čtená běžně zleva doprava přečtená zprava doleva (tj. $CDAB$) zřejmě popisuje totéž uspořádání bodů na přímce. Dohodněme se, že v dalších částech textu pro jisté uspořádání tří různých bodů na přímce budeme k jejímu popisu volit tu z obou možných permutací, která má v běžném slovníkovém uspořádání přednost (tj. $BADC$ namísto $CDAB$).

Podle vzorce (2.2) ze str. 57 a úvah na str. 63 uvedených za důkazem Věty 23 lze dvojpoměr (A, B, C, D) čtyř různých kolineárních bodů vyjádřit pomocí dvou dělicích poměrů, a to následujícím způsobem:

$$(A, B, C, D) = (C; A, B) : (D; A, B)\,. \tag{2.14}$$

Odtud dostáváme, že dvojpoměr (A, B, C, D) čtyř kolineárních bodů nabývá kladných hodnot v případě, že platí buď

$$(C; A, B) > 0 \qquad \text{a zároveň} \qquad (D; A, B) > 0, \tag{2.15}$$

nebo

$$(C; A, B) < 0 \qquad \text{a zároveň} \qquad (D; A, B) < 0; \tag{2.16}$$

záporných hodnot nabývá jen tehdy, když buď

$$(C; A, B) > 0 \qquad \text{a zároveň} \qquad (D; A, B) < 0, \tag{2.17}$$

nebo

$$(C; A, B) < 0 \qquad \text{a zároveň} \qquad (D; A, B) > 0. \tag{2.18}$$

Zbývá tedy určit, jakým uspořádáním čtyř různých bodů A, B, C, D na přímce tyto situace odpovídají.

Je-li splněna podmínka (2.15), pak podle poznámky uvedené na str. 29 za důkazem Věty 6 leží oba dva body C, D na přímce AB, avšak mimo úsečku $[AB]$. Takovéto uspořádání je zřejmě možné pouze pro permutace $ABCD$, $ABDC$, $BACD$ a $BADC$, $CABD$ a $CBAD$.

Pokud platí (2.16), pak oba body C, D leží ve vnitřku (AB) úsečky $[AB]$, čemuž odpovídají pouze uspořádání $ACDB$ a $ADCB$.

Situaci (2.17) pak vyhovují možnosti $ADBC$ a $BDAC$ a konečně poslední podmínce (2.18) odpovídají permutace $ACBD$ a $BCAD$, čímž je vyčerpáno všech dvanáct možností. Dokázali jsme tak následující tvrzení:

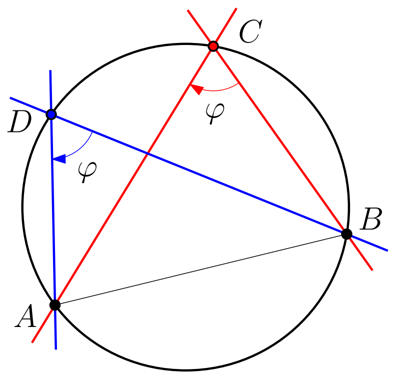
Věta 25. *Dvojpoměr (A, B, C, D) čtyř různých kolineárních bodů A, B, C, D nabývá kladných hodnot pro uspořádání popsaná permutacemi $ABCD$, $ABDC$, $ACDB$, $ADCB$, $BACD$, $BADC$, $CABD$, $CBAD$ (tj. tehdy, když body A, B nebo C, D jsou sousední) a záporných pro uspořádání podle permutací $ACBD$, $ADBC$, $BCAD$, $BDAC$ (tj. tehdy, když ani body A, B, ani body C, D spolu nesousedí).*

Zabývejme se nyní druhou nastolenou otázkou, a sice pro jaká z uspořádání čtyř různých bodů A, B, C, D na kružnici nabývá jejich dvojpoměr (A, B, C, D) kladných a pro jaká záporných hodnot, jinými slovy, kdy nastane případ $\arg(A, B, C, D) = 0$ a kdy $\arg(A, B, C, D) = -\pi$.

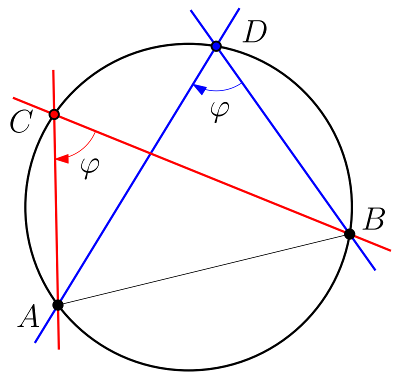
Čtyři vzájemně různé koncyklické body A, B, C, D je na kružnici možné uspořádat celkem $\frac{4!}{4} = 3! = 6$ způsoby. Všech šest možností je zachyceno na obrázcích 2.4, 2.5 a 2.6 ($\varphi \in (-\pi; 0)$), kde každé uspořádání je charakterizováno jednou ze šesti permutací písmen A, B, C, D začínajících písmenem A branou v kladném smyslu, tj. proti směru chodu hodinových ručiček.

Zdůrazněme, že na rozdíl od uspořádání čtyř různých bodů na přímce, záměrně nehodláme ztotožnit v případě koncyklických bodů uspořádání charakterizované permutacemi přečtenými zleva doprava a zprava doleva. Důvod je ten, že v mnohých planimetrických úlohách hraje orientace úhlů podstatnou roli a transformace (např. osová souměrnost podle osy procházející středem oné kružnice), která by převedla uspořádání čtyř různých koncyklických bodů popsané např. permutací $ACBD$ (obr. 2.5(a)) na uspořádání dané permutací $DBCA$, tj. $ADBC$ (obr. 2.6(a)) by sice, jak vzápětí odhalíme, polaritu dvojpoměru zachovala, avšak nutně by orientaci úhlů měnila.

Uvedené přiřazení permutací jistým uspořádáním čtyř různých bodů na kružnici bychom korektněji zavedli podobně jako v případě uspořádání těchto bodů na přímce, jen namísto relace uspořádání tří bodů bychom museli zavést obdobnou relaci pro tři body kružnice, resp. oblouku kružnice, přičemž by navíc bylo nutné brát v úvahu orientaci souhlasnou nebo nesouhlasnou se směrem chodu hodinových ručiček.



(a) $ABCD$



(b) $ABDC$

Obrázek 2.4

K určování polarity dvojpoměru čtveřice různých koncyklických bodů A, B, C, D využijeme vzorce (2.13) uvedeného na str. 64, tedy

$$\arg(A,B,C,D) = \arg\left(\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}\right) \sim \mathrm{m}(\widehat{BCA}) - \mathrm{m}(\widehat{BDA}).$$

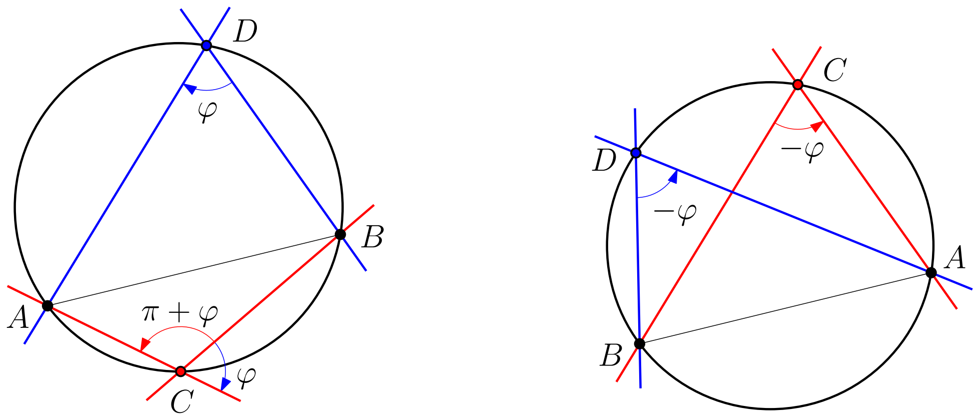
Věnujme se nejprve případům zachyceným na obr. 2.4. Pokud body A, B, C, D jsou na kružnici rozmístěny podle permutace $ABCD$ (obr. 2.4(a)), pak míra orientovaných úhlů $\widehat{BCA}$ a $\widehat{BDA}$ je podle úvah na str. 64 táž, označme ji podle obrázku φ. Pak ovšem

$$\arg\left(\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}\right) \sim \mathrm{m}(\widehat{BCA}) - \mathrm{m}(\widehat{BDA}) = \varphi - \varphi = 0,$$

tedy v tomto případě je dvojpoměr (A,B,C,D) kladné reálné číslo. Stejným způsobem bychom došli k závěru, že pro permutaci $ABDC$ (obr. 2.4(b)) je dvojpoměr (A,B,C,D) taktéž kladný, což mj. plyne také z toho, že pro toto uspořádání je podle předchozího případu dvojpoměr $(A,B,D,C) = \kappa$ kladný stejně jako dvojpoměr $(A,B,C,D) = \frac{1}{\kappa}$ (viz tab. 2.1 na str. 58).

V situaci $ACBD$ zachycené na obr. 2.5(a) dostáváme

$$\arg\left(\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}\right) \sim \mathrm{m}(\widehat{BCA}) - \mathrm{m}(\widehat{BDA}) \sim \pi + \varphi - \varphi \sim -\pi,$$

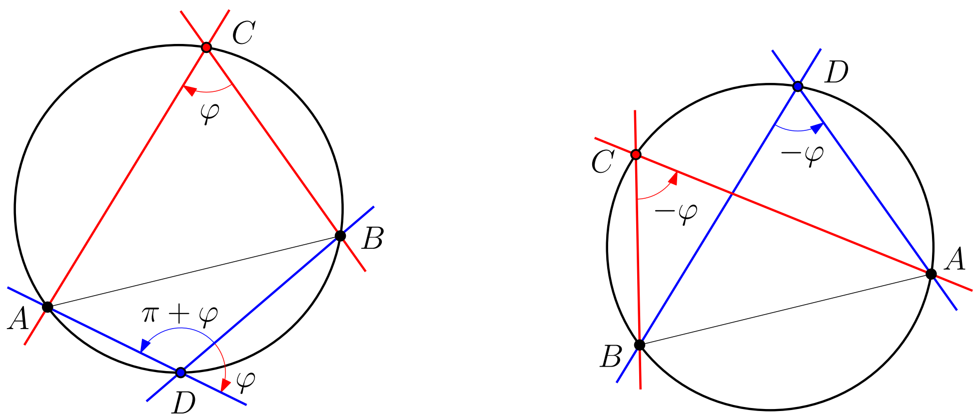


(a) $ACBD$ (b) $ACDB$

Obrázek 2.5

takže dvojpoměr (A, B, C, D) je pro tento případ záporné číslo.

Uspořádání bodů A, B, C, D na kružnici popsaných permutacemi $ACDB$, $ADBC$, $ADCB$ (po řadě obr. 2.5(b), 2.6(a), 2.6(b)) lze získat z prvních tří vyšetřených permutací $ABDC$, $ACBD$, $ABCD$ obrácením jejich směru, o kterém jsme diskutovali při zavádění reprezentace uspořádání čtyř koncyklických bodů pomocí permutací čtyř písmen. Tato uspořádání vzniknou např. osovou souměrností aplikovanou na dotyčné kružnice podle libovolných os vedených jejich středy. Je však zřejmé, že tato operace zachovává polaritu jednotlivých dvojpoměrů, neboť mění orientaci obou orientovaných úhlů $\widehat{BCA}$ a $\widehat{BDA}$ současně. Dostáváme tak, že dvojpoměr (A, B, C, D) je pro permutace $ACDB$, $ADBC$, $ADCB$ po řadě kladný, záporný a opět kladný (což je ostatně patrné i z příslušných obrázků). Právě jsme tak dokázali následující tvrzení:



(a) $ADBC$ (b) $ADCB$

Obrázek 2.6

Věta 26. *Dvojpoměr* (A, B, C, D) *čtyř různých koncyklických bodů* A, B, C, D *nabývá kladných hodnot pro uspořádání popsaná permutacemi* $ABCD$, $ABDC$, $ACDB$, $ADCB$ *(tj. tehdy, když body* A, B *i* C, D *jsou sousední) a záporných pro uspořádání podle permutací* $ACBD$, $ADBC$ *(tj. tehdy, když ani body* A, B, *ani body* C, D *spolu nesousedí).*

Poznámka. Dodejme, že odlišnou metodu určování polarity dvojpoměru čtyř různých koncyklických bodů od té, kterou jsme právě prezentovali, nastíníme v kapitole čtvrté, konkrétně v poznámce na straně 118 za důkazem Věty 42.

Porovnáním Vět 25 a 26 dojdeme k závěru, že je možné spojit je jednoduše v jediné tvrzení, neboť ze způsobu přiřazení permutací písmen A, B, C, D uspořádáním jim příslušných čtyř různých bodů na kružnici nebo přímce je zřejmé, že každá z permutací $BACD$, $BADC$, $CABD$, $CBAD$, pro něž je dvojpoměr (A, B, C, D) čtyř různých kolineárních bodů A, B, C, D kladný, odpovídá na kružnici uspořádání pro některou ze čtyř permutací $ABCD$, $ABDC$, $ACDB$, $ADCB$, pro kterou je dvojpoměr (A, B, C, D) rovněž kladný (toto přiřazení zřejmě není jednoznačné, neboť každé jedné z vyjmenovaných permutací pro čtveřice kolineárních bodů zjevně odpovídají dvě různé permutace pro uspořádání bodů na kružnici) a podobně permutace $BCAD$, $BDAC$, kdy dvojpoměr (A, B, C, D) je pro uspořádání jimi popsanými v případě kolineárních bodů záporný, představují na kružnici uspořádání podle některé z permutací $ADBC$, $ACBD$ (ani toto přiřazení zřejmě není jednoznačné), pro které je jejich dvojpoměr (A, B, C, D) záporný. Můžeme tedy vyslovit následující tvrzení:

Věta 27. *Dvojpoměr* (A, B, C, D) *čtyř různých koncyklických nebo kolineárních bodů* A, B, C, D *nabývá kladných hodnot pro uspořádání popsaná permutacemi* $ABCD$, $ABDC$, $ACDB$, $ADCB$, $BACD$, $BADC$, $CABD$, $CBAD$ *a záporných pro uspořádání podle permutací* $ACBD$, $ADBC$, $BCAD$, $BDAC$.

Poznámka. Možnost spojení Vět 25 a 26 v jediné tvrzení patrně není náhodná. Plyne ze způsobu reprezentace uspořádání čtyř různých bodů na kružnici či přímce a z toho, že každou přímku lze chápat jako jisté zobecnění kružnice (kružnice i přímka je tak interpretována jako zvláštní případ tzv. *zobecněné kružnice*), kdy její poloměr není konečný. Ovšem úvahy tohoto typu poněkud převyšují zaměření této rigorózní práce, proto jsme obě situace vyšetřili zvlášť.

2.3 Harmonická čtveřice

Jestliže $(A, B, C, D) = -1$, říkáme, že body A, B, C, D tvoří v tomto pořadí *harmonickou*[2] *čtveřici*. Jelikož je jejich dvojpoměr reálný a navíc záporný, leží tyto body buď na přímce, nebo na kružnici, a to v pořadí daných výsledkem poslední věty, tj. $ACBD$, $ADBC$, $BCAD$, $BDAC$, přitom v druhém jmenovaném případě tvoří vrcholy tzv. *harmonického čtyřúhelníku*, pro nějž platí

$$\left|\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}\right| = 1 \qquad \text{neboli} \qquad \left|\frac{c-a}{c-b}\right| = \left|\frac{d-a}{d-b}\right|,$$

tj.

$$|c-a| \cdot |d-b| = |d-a| \cdot |c-b|,$$

což značí, že součiny velikostí protilehlých stran harmonického čtyřúhelníku jsou stejné. Zdůrazněme, že tato vlastnost ještě nezaručuje, že daný konvexní čtyřúhelník je harmonický, neboť vyjadřuje pouze podmínku, že dvojpoměr (A, B, C, D) je komplexní jednotkou. K tomuto se vrátíme ještě v Důsledku 9 na str. 135.

Poznámka. Jediným pravoúhelníkem, který je tak zároveň harmonickým čtyřúhelníkem, je proto čtverec. Harmonickým čtyřúhelníkem je zřejmě i tětivový deltoid (viz obr. 2.3 na str. 65).

Upozorněme na další zajímavou vlastnost harmonické čtveřice, a sice, že počet možných hodnot dvojpoměru $(A, B, C, D) = \lambda$ čtyř různých bodů A, B, C, D při všech možných záměnách pořadí jeho bodů, tj. (podle tab. 2.1 na str. 58) $\left(\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1-\lambda, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}, \frac{\lambda-1}{\lambda}\right)$ se v případě harmonické čtveřice $\lambda = -1$ zredukuje na $\left(-1, -1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$, tedy na pouhé tři hodnoty -1, $\frac{1}{2}$ a 2. Odtud a z pravidel uvedených v tab. 2.1 mimo jiné plyne záměnnost bodů A, B, resp. C, D stejně jako dvojic (A, B), (C, D) v harmonické čtveřici.

Dodejme, že podobnou vlastnost redukce možných hodnot dvojpoměru má pouze případ, kdy $(A, B, C, D) = \frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, přitom možné hodnoty dvojpoměru bodů A, B, C, D jsou v obou případech pouze dvě, a sice právě $\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, jak se lze snadno přesvědčit. Jelikož tyto hodnoty dvojpoměru nejsou reálné, neleží jim příslušné body A, B, C, D na jedné přímce ani kružnici, a tvoří tak vrcholy jistého čtyřúhelníku, který bývá nazýván *ekvianharmonický čtyřúhelník* (pro nějž součiny velikostí jeho protilehlých stran jsou, stejně jako v případě harmonického čtyřúhelníku, stejné).

[2]Harmonie – slovo starořeckého původu ve významu souhra, soulad, souzvuk.

Je přitom zřejmé, že obdobnou úlohu hrají hodnoty -1, $\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ také v případě poměru tří různých bodů (viz Větu 5 na str. 28).

Jak jsme již jednou zmínili, existuje mnoho ekvivalentních zápisů dvojpoměru čtyř různých bodů, a s každým z nich je spojeno alternativní vyjádření podmínky definující harmonickou čtveřici. Jedno takové, které dále v tomto paragrafu využijeme, uvádíme v následujícím lemmatu:

Lemma 9. *Čtyři různé body A, B, C, D tvoří v tomto pořadí harmonickou čtveřici právě tehdy, když jejich komplexní souřadnice vyhovují rovnosti*

$$\frac{2}{b-a} = \frac{1}{c-a} + \frac{1}{d-a}. \tag{2.19}$$

Důkaz. Podle zavedení harmonické čtveřice a vztahu (2.3) uvedeného na str. 59 v Lemmatu 8 pro dvojpoměr (A, B, C, D) platí, že čtyři různé body tvoří harmonickou čtveřici právě tehdy, když jejich komplexní souřadnice splňují vztah

$$\frac{\frac{1}{b-a} - \frac{1}{d-a}}{\frac{1}{b-a} - \frac{1}{c-a}} = -1 \qquad \text{čili} \qquad \frac{1}{b-a} - \frac{1}{d-a} = \frac{1}{c-a} - \frac{1}{b-a},$$

a odtud již okamžitě plyne dokazované tvrzení. Q.E.D.

Poznámka. V situaci, kdy bod A splývá s počátkem O soustavy komplexních souřadnic, přejde vztah (2.19) v jednodušší rovnost

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}, \tag{2.20}$$

někdy (zejm. ve francouzsky mluvících zemích) označovanou jako *Descartesův*[3] *vztah.*

Pokusme se zde alespoň stručně naznačit šíři vzájemných souvislostí, které s sebou tato rovnost přináší. Za předpokladu $c, d \in \mathbb{R}^+$ totiž vyjadřuje skutečnost, že reálné číslo b je tzv. *harmonickým průměrem* reálných čísel c a d známým z matematické statistiky[4], což vnáší možnou souvislost s pojmenováním samotné harmonické čtveřice. Existuje dále přímý vztah mezi harmonickým průměrem a tzv. *harmonickou*

[3]**René Descartes** (1596–1650) – významný francouzský filosof, matematik a fyzik, který se mj. zabýval analytickou optikou, mnohými pokládaný za zakladatele analytické geometrie, jehož jméno se dodnes odráží v pojmu kartézské soustavy souřadnic.

[4]Harmonický průměr H (statistického) souboru n kladných reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je definován jako $H = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}\right)^{-1} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$.

posloupností studovanou v matematické analýze, neboť každý její člen je harmonickým průměrem svých sousedních členů vyjma prvního[5]. Harmonická řada pak úzce souvisí s naukou o zvuku čili *akustikou* a s tzv. *vyššími harmonickými tóny*, jejichž vlnové délky společně s vlnovou délkou *základního tónu* tvoří právě členy harmonické posloupnosti ([6, s. 476 a 477]). Lze tak z tohoto místa vytušit spojení geometrie prostřednictvím harmonické čtveřice vedoucí až k *nauce o harmonii*, jež je součástí hudební vědy.

Rovnosti tohoto typu proto přirozeně hrají významnou roli nejen v matematice samotné, ale i fyzice, kde např. známý vztah pro výpočet celkové odporu R_p dvou paralelně zapojených rezistorů s odpory R_1 a R_2 je tvaru ([6, s. 723 a 724])

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Jeho geometrický význam se však plně projeví až při aplikacích na poli střídavých elektrických proudů a napětí, kde odpory jsou nahrazeny (obecně komplexními) impedancemi.

Dokonce i v naší práci samotné se již jednou taková rovnost objevila, a sice v Lemmatu 4 ze str. 49, které udává komplexní souřadnici z průsečíku Z dvou různoběžných tečen kružnice ε s body dotyku T, U ve formě

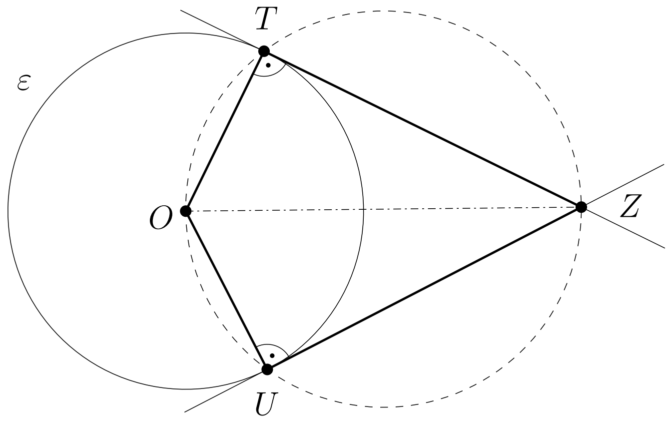
$$z = \frac{2tu}{t+u} \qquad \text{neboli} \qquad \frac{2}{z} = \frac{1}{t} + \frac{1}{u}.$$

Tento vztah tak vyjadřuje nyní zřejmou skutečnost $(O, Z, T, U) = -1$, neboť čtyřúhelník s vrcholy v bodech O, U, Z, T je buď čtvercem, nebo (podle Důsledku 4 uvedeného na str. 64) tětivovým deltoidem (obr. 2.7), tedy v obou případech harmonickým čtyřúhelníkem.

Dodejme ještě, že z rovnosti (2.19) je mj. dobře patrná záměnnost rolí bodů C, D v harmonické čtveřici.

Podle poznámky uvedené na str. 58 víme, že známou hodnotou dvojpoměru $\lambda = (A, B, C, D) \neq (C; A, B)$ různou od nuly i jedné, je při zadané poloze tří navzájem různých bodů A, B, C jednoznačně určena komplexní souřadnice čtvrtého bodu $D \notin \{A, B, C\}$. Ukažme tedy, jak jsou body harmonické čtveřice rozmístěny na kružnici nebo přímce, tj. ukažme, jakým způsobem by bylo konstrukčně možné trojici daných různých bodů A, B, C, kde $(C; A, B) \neq -1$ (bod C tedy není středem

[5]Nejznámějším příkladem posloupnosti uvedeného typu je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$.



Obrázek 2.7

úsečky $[AB]$), doplnit bodem D tak, aby platilo $(A, B, C, D) = -1$.

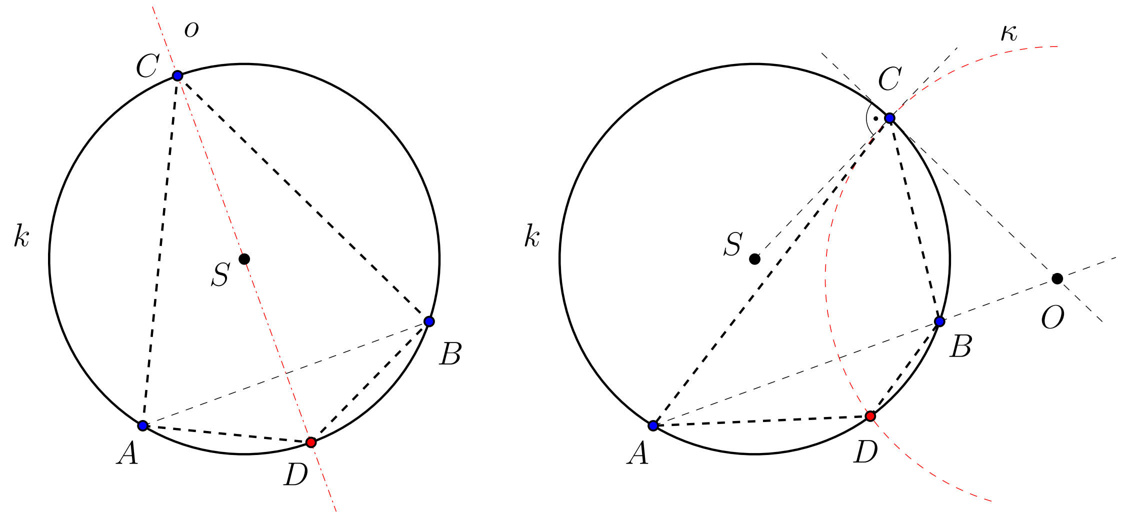
Uvažujme nejprve situaci na kružnici. Aby tři různé body A, B, C, které neleží na jedné přímce, tvořili společně s bodem D vrcholy harmonického čtyřúhelníku, musí bod D zřejmě být bodem kružnice k tomuto trojúhelníku opsané (jež byla předmětem Vět 22 a 23 uvedených na str. 62, resp. 63, a ke které se ještě vrátíme ve Věte 29 na str. 83), přitom z rovnosti

$$\left|\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}\right| = 1 \qquad \text{neboli} \qquad \left|\frac{d-a}{d-b}\right| = \left|\frac{c-a}{c-b}\right| = \lambda \tag{2.21}$$

plyne, že bod D je rovněž prvkem množiny bodů roviny majících konstantní poměr vzdáleností λ od dvou daných bodů A, B, jejímž jedním prvkem je i bod C. Touto množinou je podle Věty 20, str. 53, pro $\lambda = 1$, tedy v situaci, kdy bod C leží na ose o úsečky $[AB]$, sama tato osa (viz levou část obr. 2.8) a bod D je tak jejím jediným průsečíkem s kružnicí trojúhelníku ABC opsanou různým od bodu C a vniklý harmonický čtyřúhelník $ADBC$, příp. $ACBD$, je proto čtvercem nebo tětivovým deltoidem.

V případě $\lambda \neq 1$ je touto množinou Apolloniova kružnice κ dvou daných bodů A, B procházející bodem C (a kolmo protínající kružnici opsanou trojúhelníku ABC, viz poznámku uvedenou na str. 55 za důkazem Věty 20 a pravou část obr. 2.8). V této situaci je bod D jediným společným bodem těchto dvou kružnic různým od bodu C.

Poznámka. Povšimněme si, že uvedenou konstrukcí lze obdržet jedině očekávaná uspořádání $ACBD$, příp. $ADBC$ bodů A, B, C, D na kružnici (jelikož je role bodů C, D, resp. A, B, jak jsme již uvedli, v harmonické čtveřici bodů A, B, C, D



Obrázek 2.8

záměnná). Dodejme, že ve zkoumané situaci rovněž body A, B leží na jedné Apolloniově kružnici bodů C, D, což kromě vztahu (2.21) zapsaného v podobě

$$\left|\frac{a-c}{a-d}\right| = \left|\frac{b-c}{b-d}\right|$$

vyplývá i ze záměnnosti dvojic bodů (A, B), (C, D) v harmonické čtveřici.

Přejděme nyní k rozboru situace, kdy A, B, C jsou tři známé, různé body jediné přímky takové, že bod C není středem úsečky $[AB]$ a hledejme na této přímce bod D tak, aby bylo splněno $(A, B, C, D) = -1$.

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že bod A splývá s počátkem O soustavy komplexních souřadnic a komplexní souřadnice b, c bodů B, C jsou reálné. Komplexní souřadnice d hledaného bodu D pak zřejmě bude rovněž reálná a podle Lemmatu 9 bude jednoznačně určena vztahem (2.20) ze str. 72.

Zamysleme se nyní nad nápadnou podobností vztahu (2.20) s další (reálnou) rovnicí, a sice

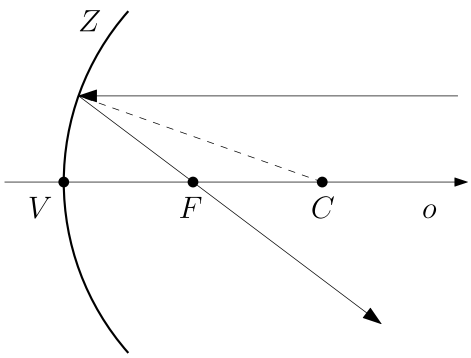
$$\frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'} \qquad \text{resp.} \qquad \frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}, \tag{2.22}$$

kde $c = 2f$, která je dobře známa z *geometrické optiky* a nese název *zobrazovací rovnice kulového zrcadla*, příp. *tenké čočky*, ve francouzsky mluvících zemích pak rovněž nazývána *Descartesova (zobrazovací) rovnice*, mnohdy i *Gaussova (zobrazovací) rovnice*, přičemž, jak víme, v naší situaci vyjadřuje fakt $(O, C, A, A') = -1$.

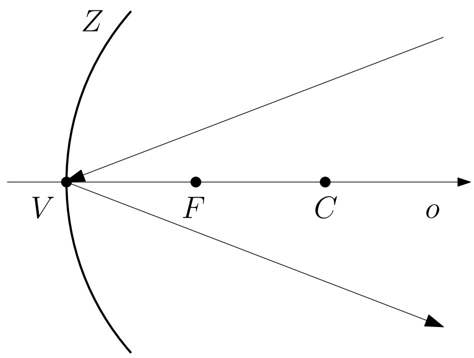
Pro náš účel se přitom ukáže být nejvhodnější uvažovat tuto rovnici pro *duté kulové zrcadlo*, kdy právě v uvedeném tvaru spojuje (v reálné situaci pouze přibližně) vzdálenost $a > 0$ zobrazovaného (bodového) předmětu A od vrcholu zrcadla umístěného na optickou osu o před zrcadlem s obrazovou vzdáleností a' jeho obrazu A', která je kladná pro (reálný[6]) obraz vzniklý před zrcadlem a záporná pro (myšlený, nereálný, zdánlivý) obraz vzniklý za zrcadlem při známé ohniskové vzdálenosti f ohniska F od zrcadla, jež je (jak se odvozuje v základním kursu geometrické optiky, např. [6, s. 937 a 938]) polovinou poloměru $c > 0$ kulové plochy tvořící odrazivý povrch zrcadla, tedy $f = \frac{c}{2}$.

Shodný tvar rovnic (2.22) a (2.20) nás přitom přivádí na myšlenku, zda by ke konstrukci harmonické čtveřice bodů na přímce nebylo možné využít postup grafického zobrazování předmětů kulovým zrcadlem (známý již ze základní školy). Odpověď je přitom kladná, jak vzápětí ukážeme.

V této práci se však dále nebudeme věnovat hlouběji fyzikálnímu pozadí situace ani přesnému popisu optických veličin, místo toho zde uvedeme finální konstrukci, kterou nakonec analyticky ověříme. Naznačme alespoň, že konstrukce vychází z poznatku, že paprsky rovnoběžné s optickou osou o se po dopadu na zrcadlo Z lámou směrem do ohniska F (obr. 2.9(a)) a paprsky mířící k vrcholu V zrcadla se lámou souměrně podle optické osy o zrcadla (obr. 2.9(b)). Podrobnější rozbor problematiky zobrazování čočkami a zrcadly lze najít např. v knize [6, s. 921–940].



(a)



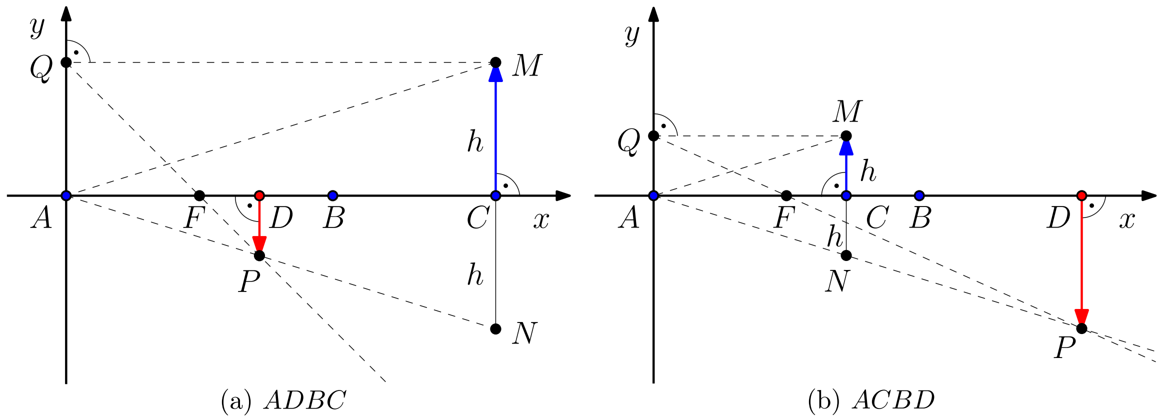
(b)

Obrázek 2.9

Připomeňme tedy řešený problém, kdy jsou dány tři navzájem různé kolineární body A, B, C, $(C; A, B) \neq -1$ a máme najít bod D, tak aby společně s body A, B, C tvořil harmonickou čtveřici, přitom počátek O soustavy komplexních souřadnice klademe do bodu A a komplexní souřadnice b, c bodů B, C považujeme za reálná čísla. Nechť je navíc pro určitost $b > 0$ (viz obr. 2.10 a 2.11, na kterých pro úsporu místa není explicitně vyznačena totožnost bodů A a O). Označme F střed úsečky $[AB]$ (oh-

[6] Tj. takový, který je možné zobrazit na stínítko.

nisko). Na kolmici k reálné ose x vztyčené z bodu C vyznačme dva různé body M a N mající od bodu C stejnou vzdálenost $h > 0$ (jak se později ukáže, tato vzdálenost není v našich úvahách podstatná). Označme dále kolmý průmět Q bodu M na imaginární osu y (ta zde vystupuje v roli zrcadla). Průsečík přímky QF s přímkou AN označme P. Jeho kolmý průmět na reálnou osu x je pak hledaný bod D.



Obrázek 2.10

Uvedenou konstrukci zbývá jen ověřit, a sice tak, že běžným postupem známým ze středoškolské analytické geometrie nalezneme první kartézskou souřadnici $\operatorname{Re} p$ průsečíku P přímek QF a AN neboli komplexní souřadnici d bodu D a ukážeme, že pro ni platí $(A, B, C, D) = -1$. Pro určitost předpokládejme, že $\operatorname{Im} m = h > 0$ (tato volba ovlivní pouze znaménka vystupující v následujících rovnicích), že tedy bod M se v souladu s obr. 2.10 a 2.11 nachází nad reálnou osou x. Směrnicová (reálná) rovnice přímky QF je ovšem evidentně

$$y = -\frac{h}{f}x + h, \tag{QF}$$

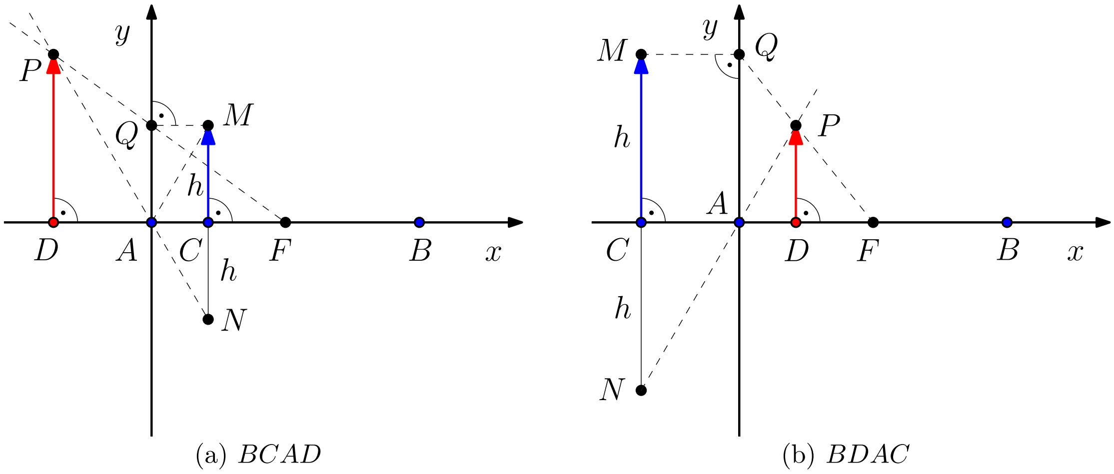
kde $f = |AF| = \frac{|AB|}{2} = \frac{b}{2}$, neboť se jedná o rovnici přímky, jíž vyhovuje jak bod F s kartézskými souřadnicemi $[f, 0]$, tak (od něj různý) bod Q s kartézskými souřadnicemi $[0, h]$. Podobně je směrnicová rovnice přímky AN tvaru

$$y = -\frac{h}{c}x, \tag{AN}$$

neboť kartézské souřadnice (dvou různých) bodů A, N jsou po řadě $[0, 0]$, $[c, -h]$.

Rovnici pro komplexní souřadnici d bodu D pak dostaneme v podobě

$$-\frac{h}{c}d = -\frac{h}{f}d + h,$$



Obrázek 2.11

odkud vydělením obou jejích stran nenulovým číslem h (tj. na jeho konkrétní hodnotě, jak jsme předpovídali, nezáleží) obdržíme rovnici

$$-\frac{d}{c} = -\frac{d}{f} + 1,$$

jejíž postupnou úpravou dále získáme

$$d\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{c}\right) = 1, \quad \text{tj.} \quad \frac{1}{f} - \frac{1}{c} = \frac{1}{d}, \quad \text{tedy} \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \quad \text{neboli} \quad \frac{2}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d},$$

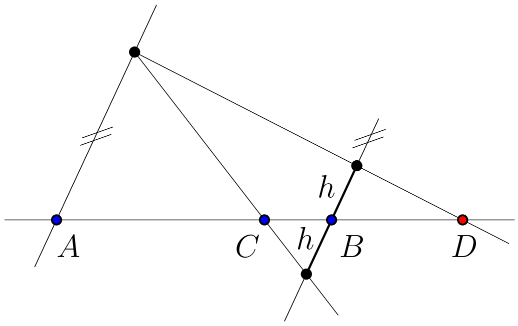
kde jsme nakonec využili vztahu $b = 2f$. Dostali jsme se tak až k rovnosti (2.20) uvedené na str. 72, která ovšem zaručuje, že $(A, B, C, D) = -1$, a tím je správnost konstrukce ověřena. Bylo přitom možné hledat průsečík P přímek vystupujících v konstrukci např. za pomoci Lemmatu 2 uvedeného na str. 45, námi provedený výpočet je však výhodnější neboť nás ve výsledku zajímá pouze reálná část komplexní souřadnice bodu P.

Tuto konstrukci lze zřejmě využít i v obecném případě, neboť přirozeně nezáleží na původní orientaci přímky bodů A, B, C, ani umístění bodu A.

Dodejme, že správnost konstrukce lze zdůvodnit i syntetickým postupem založeným na tom, že body C, D představují středy dvou stejnolehlostí, ve kterých bod A přejde do bodu B a které se liší pouze znaménkem koeficientu (obr. 2.12), neboť potom platí

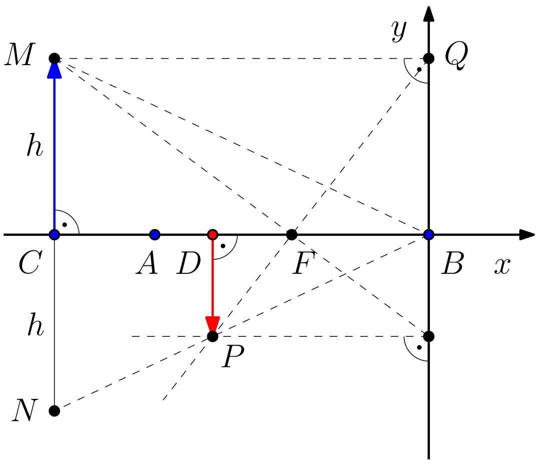
$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BD|}.$$

Obrázky 2.10 a 2.11 znázorňují všechny možné typy uspořádání čtyř kolineárních



Obrázek 2.12

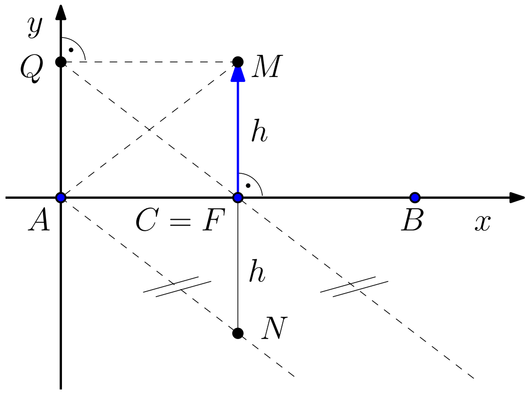
bodů A, B, C, D, jejichž dvojpoměr (A, B, C, D) je roven -1. Jsou jimi přitom vyčerpána všechna čtyři „dovolená“ pořadí $ACBD$, $ADBC$, $BCAD$, $BDAC$ těchto čtyř bodů na přímce, kdy jejich dvojpoměr je záporný. Rovněž si povšimněme, že z uvedených obrázků je opět dobře patrná záměnnost rolí bodů C s D, a z toho plynoucí možnost využití i „paprsků“ směřujících do ohniska a odrážejících se po dopadu na „zrcadlo“ rovnoběžně s optickou (reálnou) osou při konstrukci harmonické čtveřice bodů na přímce (jak je mj. naznačeno na obr. 2.13).



Obrázek 2.13

Ještě upozorněme na skutečnost, že obr. 2.11(b) odráží situaci, která je fyzikálně zcela nesmyslná, a sice, že zrcadlem zobrazuje se předmět umístěný v prostoru za zrcadlem. Geometricky zde nenastává potíž, ovšem v případě, že bychom chtěli harmonickou čtveřici nalézt, resp. demonstrovat, experimentálně, pomocí skutečného dutého kulového zrcadla, situací bychom byli nuceni se zabývat. Tuto nesrovnalost lze však elegantně obejít tím, že využijeme záměnnost bodů A, B v harmonické čtveřici bodů A, B, C, D, tj. zrcadlo umístíme nikoliv do bodu A, ale do bodu B, tj. bod B ztotožníme s počátkem O soustavy komplexních souřadnic (porovnejte obr. 2.13 s obr. 2.11(b)).

Umístěním zrcadla do bodu B lze navíc v i situaci znázorněné na obr. 2.11(a) docílit toho, že bod D se bude nacházet v prostoru „před zrcadlem“, bude tedy možné jej v reálné situaci zachytit na stínítko, což je v případě demonstrace umožňující měření vzdáleností jednotlivých bodů silně žádoucí. Tedy ve všech čtyřech možných uspořádáních bodů A, B, C, D na přímce tak, aby tvořili harmonickou čtveřici (obr. 2.10 a 2.11), lze dosáhnout toho, že bod D se bude vždy, na rozdíl od Alenky, nacházet „před zrcadlem“.



Obrázek 2.14

Na závěr dodejme, že z uvedené konstrukce je dobře patrné, proč je důležitý požadavek, aby bod C nesplýval se středem úsečky $[AB]$, který odpovídá známé fyzikální situaci, kdy zobrazovaný předmět je umístěn přímo do ohniska zrcadla. V tomto případě jsou totiž přímky QF s AN evidentně rovnoběžné a různé (obr. 2.14), neprotnou se proto nikde v konečném bodě.

Kapitola 3

Geometrie trojúhelníku

Trojúhelník představuje v geometrii roviny jeden z nejzákladnějších útvarů vůbec, jehož zkoumání sahá až na samý počátek historie jejího studia. Právě proto se budeme v prvním paragrafu této kapitoly věnovat dokazování elementárních tvrzení o trojúhelnících (věta o těžišti trojúhelníku a věta o jeho ortocentru; důkaz druhé jmenované jsme převzali z publikace [5, s. 90], resp. věta o středu kružnice trojúhelníku opsané, jejíž důkaz pochází z knihy [1, s. 59 a 60]) s použitím dřívějších výsledků o kolinearitě tří různých bodů a komplexních rovnicích vybraných přímek. Oproti autorově diplomové práci [10] doplňujeme tvrzení o středu kružnice trojúhelníku vepsané a kružnic jemu připsaných, námi poskytnuté důkazy přitom vychází z publikace [1, s. 97–99]. Některé další hlubší výsledky o trojúhelnících pak budou předmětem následující, závěrečné kapitoly celé práce.

Ve druhém paragrafu této kapitoly pak podáme teoretický rozbor *podobnosti dvou trojúhelníků*, neboť ta má pevné místo v geometrii roviny jako jedna z nejužívanějších a nejjednodušších relací mezi dvěma trojúhelníky. Dodejme, že tato pasáž je vlastním příspěvkem autora převzatým z jeho diplomové práce.

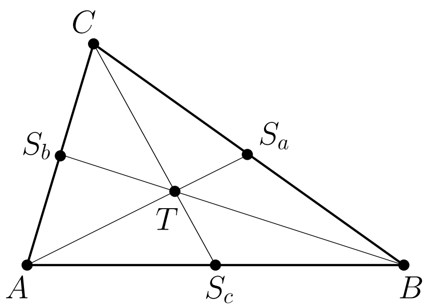
Připomeňme ještě naši úmluvu, že jednotkovou kružnici se středem v počátku O soustavy komplexních souřadnic pevně označujeme symbolem ε.

3.1 Vlastnosti obecných trojúhelníků

Věta 28. *Těžnice libovolného trojúhelníku ABC se protínají v jediném bodě T (v těžišti onoho trojúhelníku, obr. 3.1) o komplexní souřadnici*

$$t = \frac{a+b+c}{3}. \tag{3.1}$$

Tento bod dělí každou ze tří spojnic vrcholu trojúhelníku se středem protější strany v poměru $2:1$ *(počítáno od vrcholu).*



Obrázek 3.1

Důkaz. Uvažme bod T s komplexní souřadnicí danou vztahem (3.1), těžnici trojúhelníku ABC určenou vrcholem C a středem S_c strany $[AB]$ a dokažme, že body C, T, S_c jsou kolineární. Jak víme (viz Větu 6, str. 29), navzájem různé body C, T, S_c leží na téže přímce právě tehdy, když jejich poměr $(T; C, S_c)$ je reálné číslo. V naší situaci

$$(T; C, S_c) = \frac{t-c}{t-s_c} = \frac{\frac{a+b+c}{3} - c}{\frac{a+b+c}{3} - \frac{a+b}{2}} = \frac{\frac{a+b-2c}{3}}{\frac{-a-b+2c}{6}} = -2 < 0,$$

tedy body C, T, S_c jsou kolineární, bod T je navíc podle poznámky ze str. 29 uvedené za důkazem Věty 6 vnitřním bodem úsečky $[CS_c]$, přičemž ji zřejmě dělí v poměru $|CT| : |TS_c| = 2 : 1$, jak plyne z rovnosti $|t-c| = 2\,|t-s_c|$.

Vyjádření (3.1) je symetrické vůči každé cyklické záměně vrcholů trojúhelníku ABC, tj. nezmění se po libovolně mnoha aplikacích substitucí $a \to b$, $b \to c$, $c \to a$. Přitom ověření kolinearity bodů C, T, S_c po jednom provedení zmíněných záměn přejde v důkaz kolinearity bodů A, T, S_a a po jejich dvojí aplikaci pak v ověření kolinearity bodů B, T, S_b, přičemž v obou případech zůstane v platnosti i závěr o dělení příslušných úseček spojujících vrcholy se středy protilehlých stran bodem T.

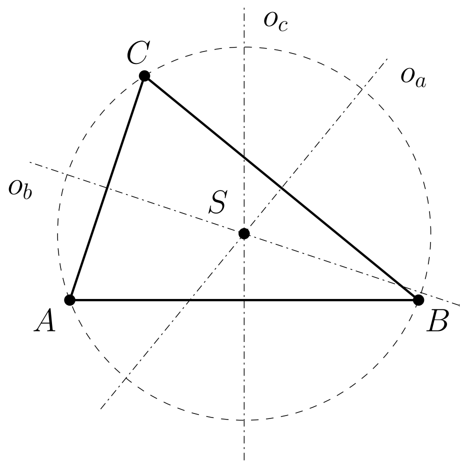
Odtud tak dostáváme, že bod T je rovněž vnitřním bodem úseček $[AS_a]$ a $[BS_b]$, kde S_a a S_b jsou středy stran $[BC]$ a $[CA]$ v tomto pořadí a dělí je rovněž v poměru $|AT| : |TS_a| = |BT| : |TS_b| = 2 : 1$. Tedy všechny tři těžnice trojúhelníku ABC se protínají v jediném bodě T, jehož komplexní souřadnice je dána vztahem (3.1), jak mělo být dokázáno. Q.E.D.

Poznámka. Obrat zahrnující symetrii určitých vyjádření vzhledem k libovolné cyklické záměně vrcholů trojúhelníku ještě několikrát v této kapitole využijeme v situacích, kdy dokazovaná tvrzení, resp. jejich části, evidentně nemohou záviset na označení vrcholů uvažovaných trojúhelníků. Přitom již nebudeme tento postřech komentovat tak podrobně, jako jsme tak učinili v posledním důkazu.

Na tomto místě uvedeme a dokážeme tvrzení o existenci středu kružnice opsané libovolnému trojúhelníku včetně tvrzení o jeho komplexní souřadnici. Připomeňme, že v této práci jsme vyjádření jeho komplexní souřadnice již jednou získali, a to na str. 62 ve Větě 22.

Věta 29. *Osy stran libovolného trojúhelníku ABC se protínají v jediném bodě S (ve středu kružnice onomu trojúhelníku opsané, obr. 3.2) o komplexní souřadnici*

$$s = \frac{|a|^2 (c-b) + |b|^2 (a-c) + |c|^2 (b-a)}{\overline{a}\,(c-b) + \overline{b}\,(a-c) + \overline{c}\,(b-a)}. \tag{3.2}$$



Obrázek 3.2

Důkaz. Zapišme rovnice os o_a, o_b, o_c stran $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ v tomto pořadí v proměnných s, $\overline{s}$ podle vzorce (1.50) uvedeného na str. 48 v poznámce za důkazem Věty 18:

$$\left(\overline{c} - \overline{b}\right) s + (c-b)\,\overline{s} + |b|^2 - |c|^2 = 0, \tag{o_a}$$
$$(\overline{a} - \overline{c})\, s + (a-c)\,\overline{s} + |c|^2 - |a|^2 = 0, \tag{o_b}$$
$$\left(\overline{b} - \overline{a}\right) s + (b-a)\,\overline{s} + |a|^2 - |b|^2 = 0. \tag{o_c}$$

Všimněme si, že sečtením kterýkoliv dvou z těchto rovnic tří os dostaneme rovnici zbývající vynásobenou číslem -1, což znamená, že řešení soustavy libovolných dvou z těchto rovnic automaticky vyhovuje rovnici třetí. Jinými slovy, průsečík kterýchkoliv dvou os stran trojúhelníku leží na ose zbývající strany. Řešme např. soustavu posledních dvou rovnic, které nejprve vhodně vydělíme nenulovými čísly $a-c$, resp. $a-b$

$$\frac{\overline{a}-\overline{c}}{a-c}s+\overline{s}+\frac{|c|^2-|a|^2}{a-c}=0, \qquad \frac{\overline{b}-\overline{a}}{a-b}s-\overline{s}+\frac{|a|^2-|b|^2}{a-b}=0$$

a po jejich sečtení vyloučíme neznámou $\overline{s}$

$$\left(\frac{\overline{a}-\overline{c}}{a-c}+\frac{\overline{b}-\overline{a}}{a-b}\right)s+\frac{|c|^2-|a|^2}{a-c}+\frac{|a|^2-|b|^2}{a-b}=0,$$

$$\frac{(\overline{a}-\overline{c})(a-b)+\left(\overline{b}-\overline{a}\right)(a-c)}{(a-c)(a-b)}s+\frac{\left(|c|^2-|a|^2\right)(a-b)+\left(|a|^2-|b|^2\right)(a-c)}{(a-c)(a-b)}=0.$$

Abychom mohli z poslední rovnice vyjádřit neznámou s, musíme se nejprve přesvědčit, že koeficient před ní stojící je různý od nuly, tj. platí $(\overline{a}-\overline{c})(a-b)+$ $+\left(\overline{b}-\overline{a}\right)(a-c)\neq 0$. Tato podmínka je však ekvivalentní nerovnosti

$$(\overline{a}-\overline{c})(a-b)\neq\left(\overline{a}-\overline{b}\right)(a-c)$$

neboli (po vydělení obou stran poslední nerovnosti nenulovým číslem $(a-c)(\overline{a}-\overline{c})$)

$$\frac{a-b}{a-c}\neq\frac{\overline{a}-\overline{b}}{\overline{a}-\overline{b}}, \qquad \text{tj.} \qquad (A;B,C)\neq\overline{(A;B,C)},$$

což je zřejmě splněno, neboť vrcholy trojúhelníku ABC představují tři různé body neležící na jedné přímce. Můžeme tak vyjádřit neznámou s, přičemž dostaneme

$$\begin{aligned} s &= \frac{\left(|a|^2-|c|^2\right)(a-b)+\left(|b|^2-|a|^2\right)(a-c)}{(\overline{a}-\overline{c})(a-b)+\left(\overline{b}-\overline{a}\right)(a-c)} = \\ &= \frac{a|a|^2-a|c|^2-|a|^2b+b|c|^2+a|b|^2-a|a|^2-|b|^2c+|a|^2c}{a\overline{a}-\overline{a}b-a\overline{c}+b\overline{c}+a\overline{b}-\overline{b}c-a\overline{a}+\overline{a}c} = \\ &= \frac{|a|^2(c-b)+|b|^2(a-c)+|c|^2(b-a)}{\overline{a}(c-b)+\overline{b}(a-c)+\overline{c}(b-a)}. \end{aligned}$$

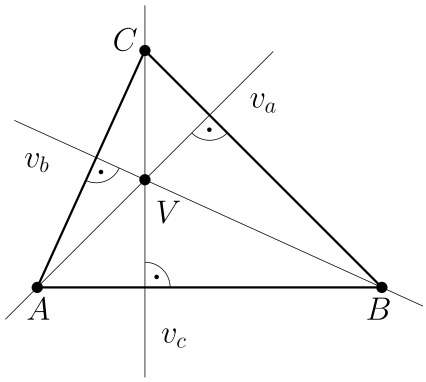
Tím je důkaz hotov. Q.E.D.

Poznámka. Povšimněme si, že vyjádření s z rovnice (3.2) má podobu zlomku, který je v proměnných a, b, c zjevně symetrický, jak bylo možné očekávat. Je z něj také dobře patrné, proč v případě $|a|=|b|=|c|$ vychází $s=0$.

Věta 30. *Přímky výšek libovolného trojúhelníku ABC se protínají v jediném bodě V (zvaném ortocentrum trojúhelníku ABC, obr. 3.3) o komplexní souřadnici*

$$v = a + b + c - 2s, \tag{3.3}$$

kde s zastupuje komplexní souřadnici středu kružnice trojúhelníku ABC opsané.



Obrázek 3.3

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že střed S kružnice trojúhelníku ABC opsané splývá s počátkem O soustavy komplexních souřadnic. Vyjádření (3.3) se tak zredukuje na

$$v = a + b + c. \tag{3.4}$$

Dokažme nyní, že přímky výšek takového trojúhelníku se protínají v jediném bodě, jehož komplexní souřadnice je určena tímto vztahem.

Přímka výšky v_a na stranu $[BC]$ je kolmicí spuštěnou na přímku BC z bodu A, tedy podle Definice 9 ze str. 35 bod V je bodem této přímky právě tehdy, když

$$\frac{v-a}{b-c} = -\frac{\overline{v}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{c}},$$

neboť uvedená rovnost zřejmě platí i pro $V = A$. Dosaďme sem $v = a + b + c$ a ekvivalentně upravujme:

$$\frac{b+c}{b-c} = -\frac{\overline{b}+\overline{c}}{\overline{b}-\overline{c}} \Leftrightarrow (b+c)\left(\overline{b}-\overline{c}\right) = -(b-c)\left(\overline{b}+\overline{c}\right) \Leftrightarrow 2b\overline{b} = 2c\overline{c},$$

což je, s uvážením toho, že body B a C mají od počátku O soustavy komplexních souřadnic stejnou vzdálenost, zřejmě splněno. Tedy bod V leží na přímce určené výškou v_a. Jelikož je vyjádření (3.4) invariantní vůči libovolné cyklické záměně vrcholů trojúhelníku ABC, plyne odtud, že bod V je také bodem přímek výšek v_b a v_c na strany $[CA]$, $[AB]$ v tomto pořadí.

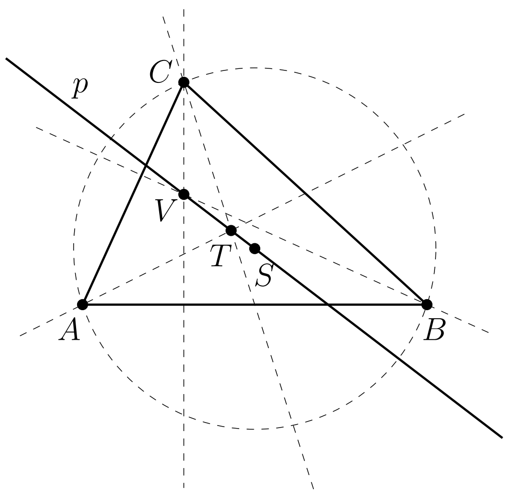
Tím je tedy dokázáno, že přímky výšek libovolného trojúhelníku ABC se protínají v jediném bodě (neboť vždy lze volit soustavu komplexních souřadnic tak, aby střed kružnice opsané danému trojúhelníku splýval s jejím počátkem O), jehož komplexní souřadnice v je v případě, kdy vrcholy A, B, C leží na kružnici se středem v počátku O soustavy komplexních souřadnic, dána vztahem (3.4).

Pokud však střed S kružnice opsané trojúhelníku ABC nesplývá s počátkem O, tj. má komplexní souřadnici s různou od nuly, komplexní souřadnici v ortocentra V trojúhelníku ABC určíme pomocí posunutí o vektor $\vec{u}\,(-s)$. Označme A', B', C', S', V' obrazy bodů A, B, C, S, V při tomto posunutí. Pak zřejmě platí

$$v' = a' + b' + c' = a - s + b - s + c - s = a + b + c - 3s \quad \text{a zároveň} \quad v' = v - s.$$

Porovnáním obou vyjádření komplexní souřadnice bodu V' však obdržíme vztah (3.3) ze znění dokazované věty. Q.E.D.

Důsledek 5. *Těžiště, ortocentrum a střed kružnice opsané libovolnému trojúhelníku leží na jedné přímce.*



Obrázek 3.4

Důkaz. Buď ABC trojúhelník a označme jeho těžiště jako T, jeho ortocentrum V a konečně střed kružnice jemu opsané S (obr. 3.4).

Pokud se nejedná o tři různé body, je tvrzení důsledku triviální. Předpokládejme tedy, že T, V, S jsou tři různé body. Podle Věty 6, str. 29, jsou tři různé body kolineární, právě tehdy, když jejich poměr je reálné číslo, avšak

$$(T;V,S)=\frac{t-v}{t-s}=\frac{\frac{a+b+c}{3}-(a+b+c-2s)}{\frac{a+b+c}{3}-s}=\frac{-2\frac{a+b+c}{3}+2s}{\frac{a+b+c}{3}-s}=-2\in\mathbb{R}.$$

Tím je důkaz hotov. Q.E.D.

Poznámka. Dodejme, že zmíněné tři významné body trojúhelníku (těžiště, ortocentrum a střed opsané kružnice) splývají pouze v případě rovnostranného trojúhelníku. V ostatních případech se jedná o tři různé body ležící na jediné přímce, která bývá nazývána *Eulerova*[1] *přímka* daného trojúhelníku, přičemž z důkazu předchozího důsledku je zřejmé, že těžiště T dělí úsečku $[VS]$ v poměru

$$|VT|:|TS|=2:1.$$

Nyní uvedeme a dokážeme lemma, které podstatným způsobem napomůže dokázání dvou tvrzení o dalších čtyřech významných bodech spojených s obecným trojúhelníkem, a sice o středu kružnice jemu vepsané a o středech kružnic jemu připsaných.

Lemma 10. *Nechť ABC je libovolný trojúhelník vepsaný kružnici ε. Pak komplexní jednotky a, b, c pro vyjádření komplexních souřadnic vrcholů $A\,(a^2)$, $B\,(b^2)$, $C\,(c^2)$ lze zvolit tak, aby středy A_1, B_1, C_1 těch oblouků $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$, resp. $\widehat{AB}$ kružnice ε, jež neobsahují bod A, B, resp. C (obr. 3.7 na str. 91), měly komplexní souřadnice vyjádřené vztahy*

$$a_1=-bc,\qquad b_1=-ac\qquad \text{a}\qquad c_1=-ab. \tag{3.5}$$

Důkaz. Zvolme nejprve komplexní jednotky a, b, c pro vyjádření komplexních souřadnic vrcholů $A\,(a^2)$, $B\,(b^2)$, $C\,(c^2)$ libovolně (pro každé z čísel a, b, c jistě máme dvojí volbu, a sice dvojici navzájem opačných čísel). Ukažme, že pak dotyčné středy A_1, B_1, C_1 uvažovaných oblouků mají komplexní souřadnice vyhovující rovnostem

$$a_1=\pm bc,\qquad b_1=\pm ac\qquad \text{a}\qquad c_1=\pm ab \tag{3.6}$$

[1]**Leonhard Paul Euler** (1707–1783) – švýcarský matematik a fyzik, mnohými pokládaný za jednoho z největších matematiků všech dob.

s vhodnými znaménky.

Jelikož je bod A_1 bodem osy úsečky $[BC]$, jeho komplexní souřadnice a_1 splňuje rovnost

$$\left|b^2 - a_1\right| = \left|c^2 - a_1\right| \qquad \text{neboli} \qquad \left|b^2 - a_1\right|^2 = \left|c^2 - a_1\right|^2 \tag{3.7}$$

a zároveň $a_1\overline{a_1} = 1$, neboť bod A_1 je i bodem kružnice ε. Postupným rozepsáním druhé z rovností (3.7) a využitím tohoto, že rovněž $b^2\overline{b^2} = c^2\overline{c^2} = 1$ dostaneme

$$\begin{aligned}
\left(b^2 - a_1\right)\left(\overline{b^2} - \overline{a_1}\right) &= \left(c^2 - a_1\right)\left(\overline{c^2} - \overline{a_1}\right), \\
b^2\overline{b^2} - \overline{a_1}b^2 - a_1\overline{b^2} + a_1\overline{a_1} &= c^2\overline{c^2} - \overline{a_1}c^2 - a_1\overline{c^2} + a_1\overline{a_1}, \\
\overline{a_1}b^2 + a_1\overline{b^2} &= \overline{a_1}c^2 + a_1\overline{c^2}, \\
\frac{b^2}{a_1} + \frac{a_1}{b^2} &= \frac{c^2}{a_1} + \frac{a_1}{c^2},
\end{aligned}$$

odkud po vynásobení obou stran poslední rovnosti komplexní jednotkou $a_1b^2c^2$ dále obdržíme

$$\begin{aligned}
b^4c^2 + a_1^2c^2 &= b^2c^4 + a_1^2b^2, \\
a_1^2c^2 - a_1^2b^2 &= b^2c^4 - b^4c^2, \\
\left(c^2 - b^2\right)a_1^2 &= \left(c^2 - b^2\right)b^2c^2.
\end{aligned}$$

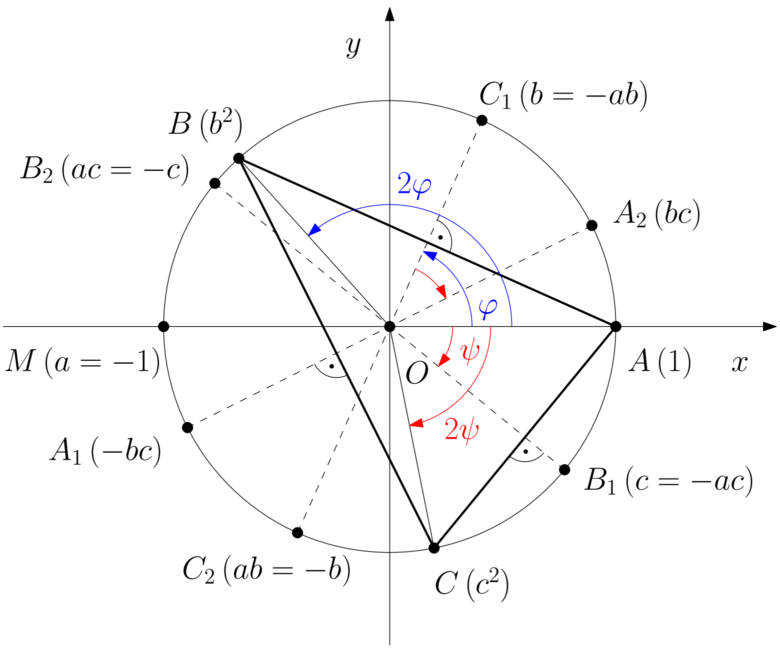
Jelikož je číslo $c^2 - b^2$ nenulové, získáme vydělením obou stran poslední rovnosti tímto číslem

$$a_1^2 = b^2c^2 \qquad \text{a podobně} \qquad b_1^2 = a^2c^2 \qquad \text{a} \qquad c_1^2 = a^2b^2,$$

tedy pro komplexní souřadnice středů A_1, B_1, C_1 platí vztahy (3.6). Ty zřejmě (po příslušných záměnách $a_1 \to a_2$, $b_1 \to b_2$, $c_1 \to c_2$) platí rovněž pro komplexní souřadnice středů A_2, B_2, C_2 oblouků $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$ v tomto pořadí, avšak s opačnými znaménky než pro středy A_1, B_1, C_1.

Ve druhé části důkazu vysvětlíme, proč z dvojích voleb komplexních jednotek a, b, c můžeme vždy vybrat takovou kombinaci, při které všechny tři rovnosti ve (3.6) platí se znaménkem minus. Podrobně rozebereme případ, kdy vrchol A má komplexní souřadnici 1 a trojúhelník ABC je kladně orientovaný (viz Definici 11 na str. 41 a obr. 3.5).

Zvolme $a = -1$ a dále $\varphi = \arg b$, $\psi = \arg c$ takové, že $0 < \varphi < \pi$, $-\pi < \psi < 0$ (takovou volbu je zřejmě, při zohlednění kladné orientace trojúhelníku ABC, možné



Obrázek 3.5

učinit). Potom platí

$$2\varphi \sim \arg b^2, \qquad 2\psi \sim \arg c^2,$$

tedy čísla 2φ, 2ψ hrají roli argumentů[2] komplexních souřadnic vrcholů B a C. Pak $b = -ab$ je evidentně komplexní souřadnicí středu C_1 oblouku $\widehat{AB}$ neobsahujícího vrchol C a $c = -ac$ je podobně komplexní souřadnicí středu B_1 oblouku $\widehat{CA}$, jehož bodem není vrchol B. Musíme nyní ukázat, že střed A_1 oblouku $\widehat{BC}$, který neobsahuje vrchol A, je v této situaci určený komplexní souřadnicí $-bc$, resp. střed A_2 oblouku $\widehat{BAC}$ má komplexní souřadnici bc.

Aby byl trojúhelník ABC kladně orientovaný, musí zvolená reálná čísla φ, ψ splňovat podmínku $2\varphi - 2\psi < 2\pi$. Proto z nerovností

$$2\psi < \psi < \varphi + \psi < \varphi < 2\varphi$$

pro argumenty (na jistém polouzavřeném intervalu délky 2π, jenž nutně obsahuje i číslo $0 = \arg a^2$) komplexních jednotek c^2, c, bc, b, b^2 v tomto pořadí plyne, že bod s komplexní souřadnicí bc leží na oblouku $\widehat{BAC}$ (a je tedy jeho středem A_2), takže středem A_1 druhého oblouku $\widehat{BC}$ musí nutně být bod o komplexní souřadnici $-bc$.

Podobně bychom se o existenci uvedené volby přesvědčili i v případě záporné

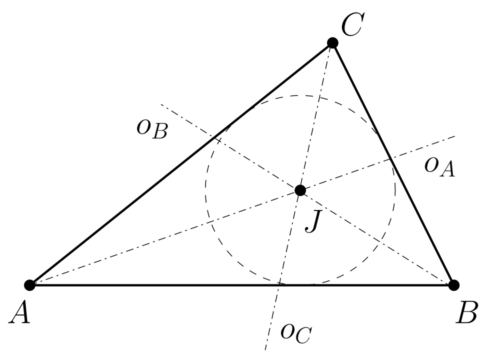
[2] V prvním případě argumentu na intervalu $\langle 0; 2\pi)$, ve druhém na intervalu $\langle -2\pi; 0)$; nejedná se tak nutně o hlavní argumenty komplexních jednotek b^2, c^2.

orientace trojúhelníku ABC a rovněž v obecné situaci, kdy a^2 je libovolná komplexní jednotka. Q.E.D.

Definice 13. Na označení komplexních souřadnic vrcholů trojúhelníku ABC vepsaného kružnici ε při splnění vztahů (3.5) pro komplexní souřadnice středů A_1, B_1, C_1 oblouků $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$, resp. $\widehat{AB}$ kružnice ε neobsahujících jeho vrcholy A, B, resp. C se budeme v dalším odkazovat jako na *kanonické značení trojúhelníku ABC*.

Ještě než přistoupíme k důkazům vět o existenci středu kružnice libovolnému trojúhelníku vepsané a středech kružnic jemu připsaných, připomeňme, že osou úhlu myslíme polopřímku s počátečním bodem ve vrcholu daného úhlu ležící v tomto úhlu, jež jej dělí na dva úhly stejné velikosti. V trojúhelníku potom rozeznáváme tři osy vnitřních úhlů (při jeho třech vrcholech) a šest os vnějších úhlů, kde každý je vedlejším úhlem právě jednoho z úhlů vnitřních.

Dodejme, že tvrzení o komplexních souřadnicích středu kružnice trojúhelníku vepsané a středech kružnic jemu připsaných zde již nebudeme uvádět v plné obecnosti, neboť pro naše pozdější výsledky (viz Větu 47 na str. 129) by postrádalo praktický význam, ačkoliv není těžké jej domyslet (podobným obratem jako v důkazu Věty 30 uvedené na str. 85).

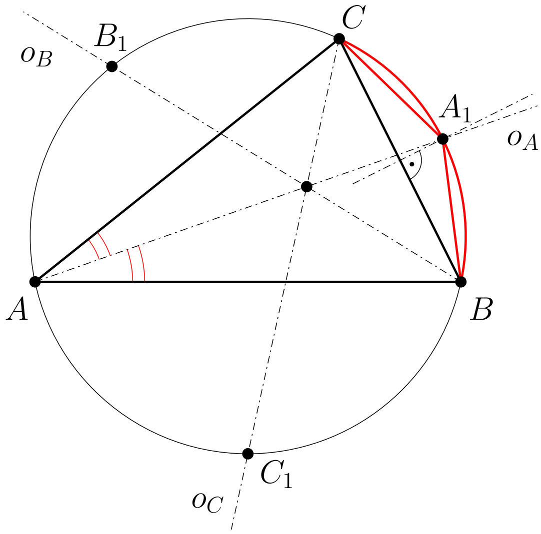


Obrázek 3.6

Věta 31. *Osy vnitřních úhlů libovolného trojúhelníku ABC se protínají v jediném bodě J (ve středu kružnice tomuto trojúhelníku vepsané, obr. 3.6), jehož komplexní souřadnici (při kanonickém označení) lze vyjádřit vztahem*

$$j = -(ab + bc + ac)\,. \tag{3.8}$$

Důkaz. Osa o_A vnitřního úhlu trojúhelníku ABC při vrcholu A prochází kromě samotného bodu A i středem A_1 oblouku $\widehat{BC}$ kružnice jemu opsané, na němž neleží vrchol A (obr. 3.7). To plyne z faktu, že (obvodové) úhly $\sphericalangle BAA_1$ a $\sphericalangle A_1AC$ v této kružnici příslušejí shodným obloukům $\widehat{BA_1}$, $\widehat{A_1C}$, jsou proto podle Důsledku 3 na str. 64 shodné.



Obrázek 3.7

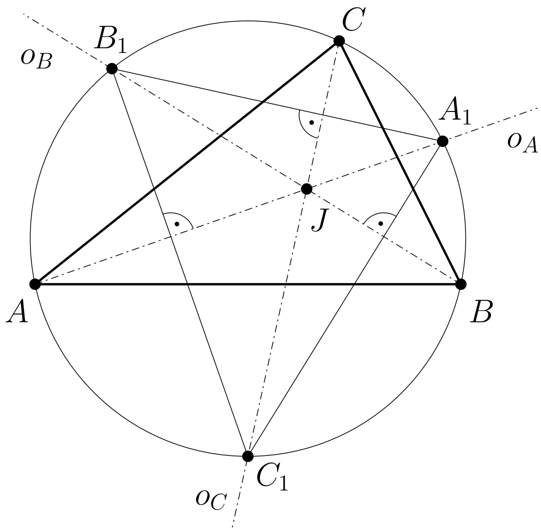
Podobně v případě vnitřního úhlu při vrcholu B jeho osa o_B prochází středem B_1 oblouku $\widehat{CA}$ neobsahujícím vrchol B a konečně osa o_C vnitřního úhlu při vrcholu C protíná oblouk $\widehat{AB}$ neprocházející vrcholem C v jeho středu C_1.

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že trojúhelník ABC je vepsán kružnici ε a je přitom využito jeho kanonického značení. Přímka osy o_A je potom určena dvěma různými body $A\,(a^2)$, $A_1\,(-bc)$ a podobně přímka osy o_B prochází dvěma různými body $B\,(b^2)$, $B_1\,(-ac)$. Komplexní souřadnice j jejich průsečíku (s ohledem na $a \neq b$) je přitom podle vzorce (1.57) uvedeného na str. 51 v Lemmatu 6 určena vztahem

$$\begin{aligned}\overline{j} &= \frac{a^2 - bc - (b^2 - ac)}{-a^2bc + ab^2c} = \frac{a^2 - b^2 + ac - bc}{abc\,(b-a)} = -\frac{(a-b)\,(a+b) + c\,(a-b)}{abc\,(a-b)} = \\ &= -\frac{a+b+c}{abc} = -\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}\right),\end{aligned} \tag{3.9}$$

odkud přechodem ke komplexně sdružené rovnosti pro komplexní souřadnici j s uvážením platnosti vztahů $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c} = 1$ obdržíme bezprostředně vztah (3.8) ze znění dokazované věty. Ten je však invariantní vůči libovolné cyklické záměně symbolů a, b, c, je proto možné jej získat jako průsečík kterýchkoliv dvou ze tří přímek os o_A, o_B, o_C, tj. přímek určených dvojicemi různých bodů $A\,(a^2)$, $A_1\,(-bc)$, resp. $B\,(b^2)$, $B_1\,(-ac)$, resp. $C\,(c^2)$, $C_1\,(-ab)$ v tomto pořadí (zmíněné cyklické záměny totiž zřejmě převádí i tyto dvojice bodů cyklickým způsobem). Jedná se tak o komplexní souřadnici společného průsečíku J těchto tří přímek, jehož existenci jsme společně s platností vyjádření (3.8) měli dokázat. Q.E.D.

Poznámka. Pohledem na vyjádření (3.8) komplexní souřadnice středu J kružnice vepsané trojúhelníku ABC lze podle Věty 30 ze str. 85 (případ $s = 0$) usoudit, že tento bod zároveň představuje ortocentrum trojúhelníku s vrcholy o komplexních souřadnicích $-bc$, $-ac$, $-ab$ (při kanonickém značení). Odtud plyne, že při zachování označení použitého v právě ukončeném důkazu, v trojúhelníku $A_1B_1C_1$ přímky os o_A, o_B, o_C vnitřních úhlů trojúhelníku ABC při vrcholech A, B, C v tomto pořadí hrají roli přímek jeho výšek (obr. 3.8).



Obrázek 3.8

Následující věta ukazuje, že rovněž komplexní čísla $a_2 = bc$, $b_2 = ac$, $c_2 = ab$ a jim po řadě příslušející (dosud nevyužité) zbylé středy A_2, B_2, C_2 oblouků $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$ v tomto pořadí, mají svůj podstatný geometrický význam. Uplatní se totiž při vyjádření komplexních souřadnic středů kružnic danému trojúhelníku připsaných.

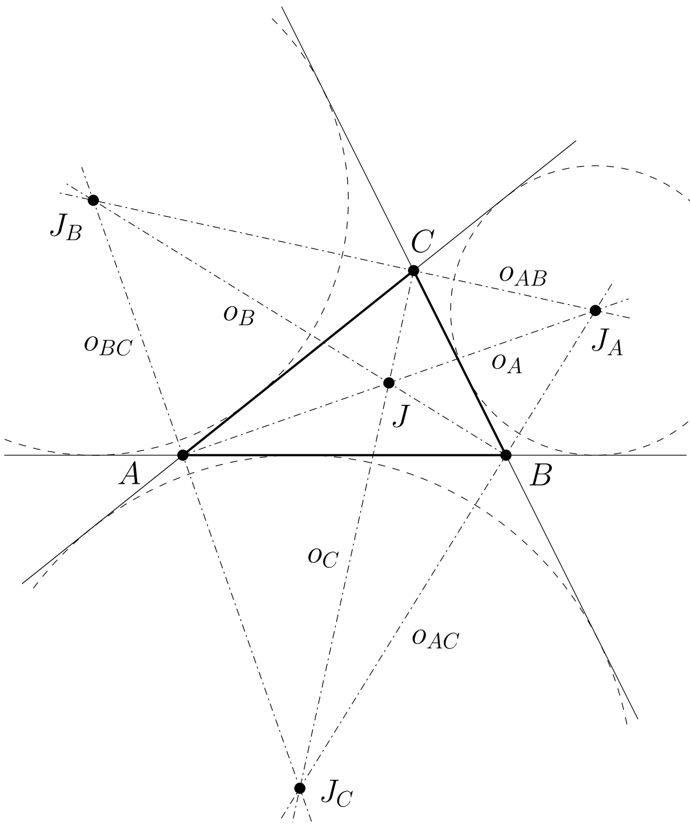
Věta 32. *Každá osa vnitřního úhlu trojúhelníku se s osami vnějších úhlů tohoto trojúhelníku při jeho zbylých dvou vrcholech protíná v jediném bodě (středu kružnice trojúhelníku připsané s dotykem na straně protilehlé vrcholu příslušného vnitřního úhlu, obr. 3.9). Přitom komplexní souřadnice středů J_A, J_B, J_C kružnic připsaných trojúhelníku ABC dotýkající se po řadě jeho stran $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ lze (při kano-*

nickém značení) vyjádřit vztahy

$$j_A = ab - bc + ac, \tag{3.10}$$

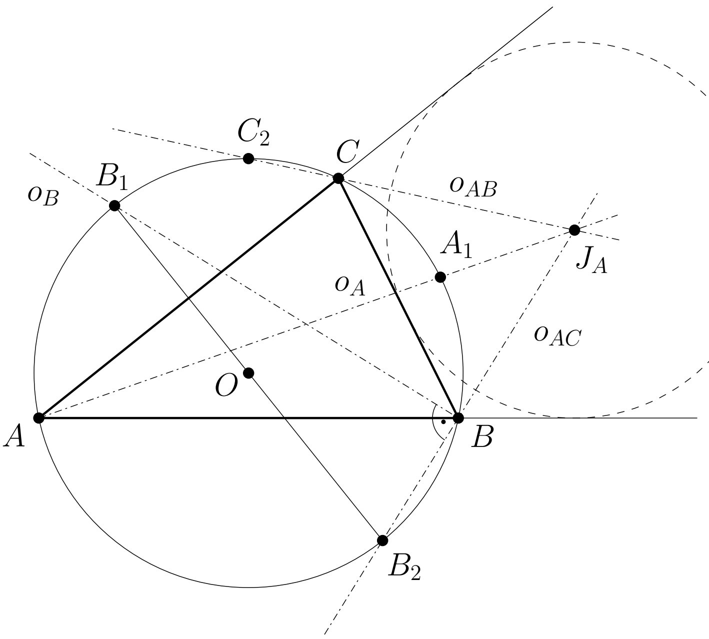
$$j_B = ab + bc - ac, \tag{3.11}$$

$$j_C = -ab + bc + ac. \tag{3.12}$$



Obrázek 3.9

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že trojúhelník ABC je vepsán kružnici ε a je využito jeho kanonické značení. Společná přímka o_{AC} os vnějších úhlů trojúhelníku ABC při vrcholu B prochází, kromě samotného bodu B, i středem B_2 oblouku $\widehat{ABC}$ (obr. 3.10), neboť přímky os vnitřního a vnějších úhlů trojúhelníku při témže vrcholu (v tomto případě o_B a o_{AC}) jsou, jak známo, navzájem kolmé, tvoří bod společný kružnici trojúhelníku ABC opsané, tj. kružnici ε, a přímce o_{AC} různý od bodu B (pokud takový existuje) společně se středem $B_1\,(-ac)$ podle Thaletovy věty (viz komentář k Důsledku 4 uvedený na str. 65, resp. Větu 36 ze str. 108) průměr kružnice opsané. Tímto bodem je proto bod s opačnou komplexní souřadnicí k $-ac$



Obrázek 3.10

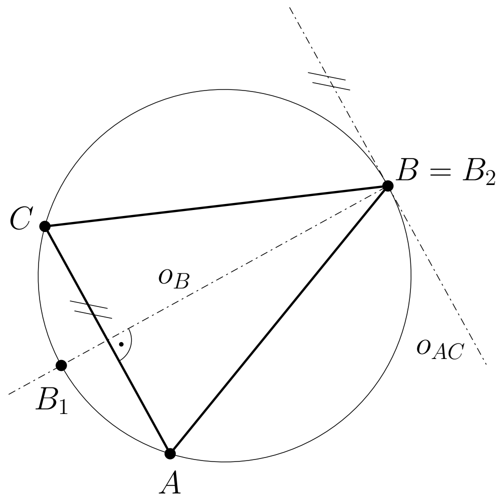
čili střed $B_2\,(ac)$. Podobně přímka o_{AB} os vnějších úhlů trojúhelníku při vrcholu C prochází středem C_2 oblouku $\widehat{ACB}$.

Uvědomme si dále, že střed J kružnice trojúhelníku ABC vepsané představuje společný průsečík všech tří přímek os vnitřních úhlů tohoto trojúhelníku, tj. přímek určených dvojicemi různých bodů $A\,(a^2)$, $A_1\,(-bc)$, resp. $B\,(b^2)$, $B_1\,(-ac)$, resp. $C\,(c^2)$, $C_1\,(-ab)$. Po substituci $a \to -a$ odtud a z důkazu předešlé věty ihned dostaneme existenci společného průsečíku J_A tří přímek určených dvojicemi bodů $A\,(a^2)$, $A_1\,(-bc)$, resp. $B\,(b^2)$, $B_2\,(ac)$, resp. $C\,(c^2)$, $C_2\,(ab)$. Těmi však jsou přímka osy o_A vnitřního úhlu trojúhelníku ABC při vrcholu A, resp. přímky o_{AC}, o_{AB} os vnějších úhlů tohoto trojúhelníku při vrcholech B a C. Existenci tohoto průsečíku J_A jsme však společně s vyjádřením jeho komplexní souřadnice, kterou obdržíme zmíněnou záměnou ve vyjádření (3.8), str. 90, komplexní souřadnice středu J kružnice trojúhelníku ABC vepsané, tj.

$$j_A = -\,(-ab + bc - ac) = ab - bc + ac,$$

měli dokázat. Podobně pro zbylé dva středy J_B, J_C kružnic připsaných trojúhelníku ABC obdržíme vztahy ze znění dokazované věty (což ostatně plyne i aplikací cyklických záměn symbolů a, b, c na vztah pro komplexní souřadnici středu J_A).

Q.E.D.



Obrázek 3.11

Poznámka. Upozorněme, že není vyloučena situace, že některé body z dvojic A, A_2, resp. B, B_2, resp. C, C_2 splývají, řekněme $B_2 = B$. Není pak těžké domyslet, že uvedená možnost nastane pouze v situaci, kdy bod B je bodem osy strany $[CA]$ trojúhelníku ABC, tedy zároveň bodem osy o_B jeho vnitřního úhlu při vrcholu B, a přímka o_{AC} os jeho vnějších úhlů při tomto vrcholu je tak tečnou ke kružnici trojúhelníku ABC opsané v bodě B (obr. 3.11). Trojúhelník ABC je pak rovnoramenný se základnou $[CA]$.

Z názoru je mj. zřejmé, že takto splynout nemusí buď žádná z dvojic bodů A, A_2, resp. B, B_2, resp. C, C_2, nebo právě jedna a trojúhelník ABC je potom rovnoramenný, nebo všechny tři a odpovídající trojúhelník ABC je rovnostranný. O tom se snadno můžeme přesvědčit i početně, neboť v situaci, kdy máme např. $B_2 = B$ a zároveň $C_2 = C$ neboli $ac = b^2$ a $ab = c^2$, je třetí rovnost $bc = a^2$ znamenající $A_2 = A$ již vynucena. Opravdu, z prvních dvou vztahů totiž dostaneme

$$c = \frac{b^2}{a}, \qquad b = \frac{c^2}{a}, \qquad \text{tedy} \qquad bc = \frac{b^2c^2}{a^2},$$

a odtud je již platnost zbývající rovnosti evidentní. Avšak v žádné z těchto situací není korektnost argumentace důkazu Věty 32 narušena, neboť příslušné výpočty vycházející z důkazu předchozí Věty 31 nanejvýš, po provedení patřičných substitucí, přejdou v hledání průsečíků tečny a s ní různoběžné sečny kružnice ε, případně dvou různoběžných tečen této kružnice, podobně jako jsme naznačili v poznámce za důkazem Lemmatu 6 ze str. 51.

Dodejme, že analogicky jako v případě středu J kružnice trojúhelníku ABC vepsané, lze středy kružnic jemu připsaných interpretovat jako ortocentra jistých trojúhelníků, např. střed J_A kružnice trojúhelníku připsané s dotykem na jeho stranu $[BC]$ je podle vyjádření (3.10) a Věty 30 uvedené na str. 85 (pro $s = 0$) ortocentrum trojúhelníku s vrcholy v bodech $A_1\,(-bc)$, $B_2\,(ac)$, $C_2\,(ab)$ (při kanonickém značení), a podobně v případě zbylých dvou středů J_B, J_C kružnic trojúhelníku ABC připsaných.

3.2 Podobnost trojúhelníků

V elementární geometrii jsou trojúhelníky základními rovinnými geometrickými útvary, přičemž jejich vzájemná podobnost je jednou z nejjednodušších i nejužívanějších relací nacházející bohaté využití v důkazech mnohých tvrzení planimetrie.

V našem textu sice uvedené výsledky o podobnosti trojúhelníků dále nevyužijeme, nicméně právě pro svoji zásadní roli v planimetrii věnujeme alespoň tento paragraf jejímu teoretickému rozboru. K zařazení pojednání o podobnosti trojúhelníků do této práce nás rovněž vedla jistá míra nedůslednosti ostatních autorů, kteří ve svých pracích o geometrii v komplexní rovině podobnost trojúhelníků často využívají, ačkoliv ekvivalenci vět známých jako *Věta sss*, *Věta sus* a *Věta uu* důsledně nedokazují. Tento dluh tak tímto paragrafem zamýšlíme napravit.

Nyní se tedy budeme věnovat formálnímu zavedení podobnosti dvou trojúhelníků pomocí komplexních čísel (jako zpřesnění intuitivně zřejmé představy stejného tvaru dvou trojúhelníků) a uvedeme a dokážeme ekvivalenci zmíněných podmínek jejich podobnosti. Přitom za definiční podmínku podobnosti dvou trojúhelníků zvolíme v souladu se středoškolským pojetím Větu sss:

Definice 14. O dvou trojúhelnících $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ řekneme, že jsou *podobné* a napíšeme

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2,$$

právě když existuje kladné reálné číslo k (tzv. *koeficient podobnosti*) tak, že platí

$$\frac{|b_1 - a_1|}{|b_2 - a_2|} = \frac{|c_1 - b_1|}{|c_2 - b_2|} = \frac{|c_1 - a_1|}{|c_2 - a_2|} = k. \tag{3.13}$$

Poznámka. Zdůrazněme, že podle této definice jsou pořadí vrcholů trojúhelníků $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ v zápisu $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ podstatné. Dodejme ještě, že v této souvislosti říkáme, že vrchol A_1 trojúhelníku $A_1B_1C_1$ odpovídá vrcholu A_2 trojúhelníku $A_2B_2C_2$, vrchol B_1 odpovídá vrcholu B_2 a vrchol C_1 pak odpovídá vrcholu C_2, podobně strana $[A_1B_1]$ trojúhelníku $A_1B_1C_1$ odpovídá straně $[A_2B_2]$ trojúhelníku $A_2B_2C_2$ a analogicky pro zbylé dvě dvojice jejich stran.

Přísně vzato předchozí definice není po formální stránce zcela v pořádku. Relace podobnosti dvou trojúhelníků by totiž neměla být vázána na označení jejich vrcholů (tj. jestliže např. $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$, pak by podle uvedené definice podobnosti obecně nemuselo platit $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle B_2C_2A_2$ apod.). Bylo by proto korektnější definovat ji tak, že dva trojúhelníky jsou podobné, pokud existuje takové označení jejich vrcholů A_1, B_1, C_1, resp. A_2, B_2, C_2, že je splněna definiční podmínka (3.13). Nicméně není obvyklé ani účelné takovouto definici zavádět, neboť by s sebou přinesla jisté vyjadřovací komplikace a v konkrétních případech ono vhodné označení dvou trojúhelníků bývá zpravidla „identifikováno předem".

Nyní se budeme věnovat odvození dvou významných samostatných podmínek podobnosti dvou trojúhelníků ekvivalentních s definiční podmínkou (3.13). V poznámkách za jejich důkazy vysvětlíme, že se jedná o výsledky, které byly již zmíněny v úvodu tohoto paragrafu a kterým se běžně říká Věta sus a Věta uu. Tak se také budeme na Věty 33 a 34 v dalších částech textu odvolávat.

Zdůrazněme, že důkazy obou výsledků jsme v dostupné literatuře nikde nenašli. V těchto textech se obvykle jeden nebo druhý výsledek bere za definici podobných trojúhelníků, námi uvedená Definice 14 je pak jejich bezprostředním důsledkem. Přínosem našeho postupu tedy je, že podobnost dvou trojúhelníků definujeme velice přirozenými metrickými vztahy (3.13).

Věta 33. *Dva trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ jsou podobné, právě když poměry $(A_1; B_1, C_1)$, $(A_2; B_2, C_2)$ jsou stejná nebo komplexně sdružená čísla.*

Důkaz. Hledejme vyjádření komplexní souřadnice c_2 bodu C_2 pomocí komplexních souřadnic a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 bodů A_1, B_1, C_1, A_2, B_2 tak, aby platilo $\triangle A_1B_1C_1 \sim$ $\sim \triangle A_2B_2C_2$ ve smyslu naší Definice 14.

Definiční podmínku (3.13) podobnosti dvou trojúhelníku $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ lze zřejmě ekvivalentně zapsat jako

$$\frac{(b_1 - a_1)\left(\overline{b_1} - \overline{a_1}\right)}{(b_2 - a_2)\left(\overline{b_2} - \overline{a_2}\right)} = \frac{(c_1 - b_1)\left(\overline{c_1} - \overline{b_1}\right)}{(c_2 - b_2)\left(\overline{c_2} - \overline{b_2}\right)} = \frac{(c_1 - a_1)\left(\overline{c_1} - \overline{a_1}\right)}{(c_2 - a_2)\left(\overline{c_2} - \overline{a_2}\right)} = k^2.$$

Pro zjednodušení dalších výpočtů proveďme důležitou úmluvu. Protože vzdálenosti dvojic bodů ani poměry trojic bodů se nezmění při posunutí v rovině o jakýkoliv vektor, můžeme zkoumané trojúhelníky $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ posunout o vektory $\vec{u}\,(-a_1)$, resp. $\vec{v}(-a_2)$ a přejít tak k trojúhelníkům, jejichž vrcholy mají komplexní souřadnice $(a_1 - a_1, b_1 - a_1, c_1 - a_1)$, resp. $(a_2 - a_2, b_2 - a_2, c_2 - a_2)$. Jistě proto můžeme předpokládat, že komplexní souřadnice vrcholů původních trojúhelníků mají tvar $(0, b_1, c_1)$ a $(0, b_2, c_2)$. V tomto případě má vypsaná podmínka podobu

$$\frac{b_1\overline{b_1}}{b_2\overline{b_2}} = \frac{(c_1 - b_1)\left(\overline{c_1} - \overline{b_1}\right)}{(c_2 - b_2)\left(\overline{c_2} - \overline{b_2}\right)} = \frac{c_1\overline{c_1}}{c_2\overline{c_2}} = k^2$$

neboli (na hodnotě koeficientu k nám dále nezáleží)

$$\frac{(c_1 - b_1)\left(\overline{c_1} - \overline{b_1}\right)}{(c_2 - b_2)\left(\overline{c_2} - \overline{b_2}\right)} = \frac{b_1\overline{b_1}}{b_2\overline{b_2}} \qquad \text{a} \qquad \frac{c_1\overline{c_1}}{c_2\overline{c_2}} = \frac{b_1\overline{b_1}}{b_2\overline{b_2}}. \tag{3.14}$$

Upravme tuto soustavu dvou rovnic neznámých c_2 a $\overline{c_2}$

$$\overline{c_2} - \overline{b_2} = \frac{b_2\overline{b_2}\,(c_1 - b_1)\left(\overline{c_1} - \overline{b_1}\right)}{b_1\overline{b_1}\,(c_2 - b_2)}, \qquad \overline{c_2} = \frac{b_2\overline{b_2}c_1\overline{c_1}}{b_1\overline{b_1}c_2},$$

abychom odečtením upravených rovnic vyloučili neznámou $\overline{c_2}$

$$\overline{b_2} = \frac{b_2\overline{b_2}c_1\overline{c_1}}{b_1\overline{b_1}c_2} - \frac{b_2\overline{b_2}\,(c_1 - b_1)\left(\overline{c_1} - \overline{b_1}\right)}{b_1\overline{b_1}\,(c_2 - b_2)}$$

a využitím podmínky $b_2 \neq 0$, a tedy také $\overline{b_2} \neq 0$, po vydělení obou stran vzniklé rovnosti komplexním číslem $\overline{b_2}$ dále dostali

$$1 = \frac{b_2c_1\overline{c_1}}{b_1\overline{b_1}c_2} - \frac{b_2\,(c_1 - b_1)\left(\overline{c_1} - \overline{b_1}\right)}{b_1\overline{b_1}\,(c_2 - b_2)}.$$

Odsud po vynásobení obou stran poslední rovnice (nenulovým) komplexním číslem $b_1\overline{b_1}c_2\,(c_2 - b_2)$ a roznásobení všech závorek obdržíme

$$\begin{aligned} b_1\overline{b_1}c_2\,(c_2 - b_2) &= b_2c_1\overline{c_1}\,(c_2 - b_2) - b_2c_2\,(c_1 - b_1)\left(\overline{c_1} - \overline{b_1}\right), \\ b_1\overline{b_1}c_2^2 - b_1\overline{b_1}b_2c_2 &= b_2c_1\overline{c_1}c_2 - b_2^2c_1\overline{c_1} - b_2c_1\overline{c_1}c_2 + \overline{b_1}b_2c_1c_2 + b_1b_2\overline{c_1}c_2 - b_1\overline{b_1}b_2c_2. \end{aligned}$$

Po zrušení stejných členů tak získáváme rovnici v komplexním oboru pro neznámou c_2

$$b_1\overline{b_1}c_2^2 - \left(\overline{b_1}b_2c_1 + b_1b_2\overline{c_1}\right)c_2 + b_2^2c_1\overline{c_1} = 0, \tag{3.15}$$

která je kvadratická, neboť platí $b_1\overline{b_1} = |b_1|^2 \neq 0$, a jejíž kořeny c_{21}, c_{22} nyní určíme standardním postupem[3]:

$$c_{21}, c_{22} = \frac{\overline{b_1}b_2c_1 + b_1b_2\overline{c_1} + \sqrt{\left(\overline{b_1}b_2c_1 + b_1b_2\overline{c_1}\right)^2 - 4b_1\overline{b_1}b_2^2c_1\overline{c_1}}}{2b_1\overline{b_1}} =$$

$$= \frac{\overline{b_1}b_2c_1 + b_1b_2\overline{c_1} + \sqrt{\left(\overline{b_1}b_2c_1 - b_1b_2\overline{c_1}\right)^2}}{2b_1\overline{b_1}} = \frac{\overline{b_1}b_2c_1 + b_1b_2\overline{c_1} \pm \left(\overline{b_1}b_2c_1 - b_1b_2\overline{c_1}\right)}{2b_1\overline{b_1}},$$

a odtud obdržíme vyjádření obou kořenů c_{21}, c_{22} kvadratické rovnice (3.15) jako

$$c_{21} = \frac{\overline{b_1}b_2c_1 + b_1b_2\overline{c_1} + \overline{b_1}b_2c_1 - b_1b_2\overline{c_1}}{2b_1\overline{b_1}} = \frac{2\overline{b_1}b_2c_1}{2b_1\overline{b_1}} = \frac{b_2c_1}{b_1}$$

a

$$c_{22} = \frac{\overline{b_1}b_2c_1 + b_1b_2\overline{c_1} - \overline{b_1}b_2c_1 + b_1b_2\overline{c_1}}{2b_1\overline{b_1}} = \frac{2b_1b_2\overline{c_1}}{2b_1\overline{b_1}} = \frac{b_2\overline{c_1}}{\overline{b_1}}.$$

Pro kontrolu se lze snadným dosazením přesvědčit, že obě nalezené hodnoty c_2 splňují původní soustavu (3.14). Dostáváme tudíž, že $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ tehdy a jen tehdy, když

$$c_2 = \frac{b_2c_1}{b_1} \qquad \text{nebo} \qquad c_2 = \frac{b_2\overline{c_1}}{\overline{b_1}}. \tag{3.16}$$

Avšak rozepsáním poměrů v podmínce

$$(A_1; B_1, C_1) = (A_2; B_2, C_2) \qquad \text{nebo} \qquad (A_1; B_1, C_1) = \overline{(A_2; B_2, C_2)}$$

za našeho předpokladu $a_1 = a_2 = 0$ získáváme

$$\frac{0 - b_1}{0 - c_1} = \frac{0 - b_2}{0 - c_2} \quad \text{nebo} \quad \frac{0 - b_1}{0 - c_1} = \frac{0 - \overline{b_2}}{0 - \overline{c_2}} \qquad \text{čili} \qquad \frac{b_1}{c_1} = \frac{b_2}{c_2} \quad \text{nebo} \quad \frac{b_1}{c_1} = \frac{\overline{b_2}}{\overline{c_2}},$$

odkud pro komplexní souřadnici c_2 obdržíme v prvním případě

$$c_2 = \frac{b_2c_1}{b_1}, \quad \text{zatímco ve druhém případě vychází} \quad \overline{c_2} = \frac{\overline{b_2}c_1}{b_1} \quad \text{neboli} \quad c_2 = \frac{b_2\overline{c_1}}{\overline{b_1}}.$$

Porovnáním těchto vyjádření komplexní souřadnice c_2 se vztahy (3.16) je tvrzení věty dokázáno. Q.E.D.

[3]Symbol odmocniny v následujícím vzorci zastupuje *druhou odmocninu z komplexního čísla* mající pro každé nenulové komplexní číslo právě dvě navzájem opačné hodnoty. Jedná se tak o mnohoznačnou funkci a není proto nutné klást před ní dvojí znaménko $\pm$.

Poznámka. Předcházející věta je běžně známá jako Věta sus o podobnosti dvou trojúhelníků, neboť podmínku rovnosti komplexních čísel

$$(A_1; B_1, C_1) = (A_2; B_2, C_2) \qquad \text{nebo} \qquad (A_1; B_1, C_1) = \overline{(A_2; B_2, C_2)}$$

lze zřejmě ekvivalentně zapsat jako rovnost jejich absolutních hodnot

$$\frac{|a_1 - b_1|}{|a_1 - c_1|} = \frac{|a_2 - b_2|}{|a_2 - c_2|} \qquad \text{neboli} \qquad \frac{|a_1 - b_1|}{|a_2 - b_2|} = \frac{|a_1 - c_1|}{|a_2 - c_2|}$$

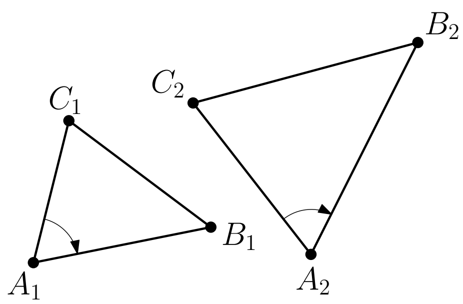
společně s rovností jejich argumentů[4]

$$\arg \frac{a_1 - b_1}{a_1 - c_1} = \arg \frac{a_2 - b_2}{a_2 - c_2} \quad \text{nebo} \quad \arg \frac{a_1 - b_1}{a_1 - c_1} = \arg \frac{\overline{a_2} - \overline{b_2}}{\overline{a_2} - \overline{c_2}} = -\arg \frac{a_2 - b_2}{a_2 - c_2}$$

neboli v řeči měr orientovaných úhlů (viz Větu 14 uvedenou na str. 41)

$$\mathrm{m}(\widehat{C_1 A_1 B_1}) = \mathrm{m}(\widehat{C_2 A_2 B_2}) \qquad \text{nebo} \qquad \mathrm{m}(\widehat{C_1 A_1 B_1}) = -\,\mathrm{m}(\widehat{C_2 A_2 B_2}).$$

Znamená to tedy, že dva trojúhelníky si jsou podobné právě tehdy, když se sobě rovnají poměry délek dvou dvojic odpovídajících si stran a úhly jimi sevřené mají stejnou velikost. V prvním případě pak mají i stejnou orientaci, stejně jako samy dotyčné trojúhelníky, v druhém případě naopak. To nás motivuje k následující definici:



Obrázek 3.12

Definice 15. Řekneme, že dva trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ jsou *přímo podobné* (obr. 3.12) a napíšeme

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim_+ \triangle A_2B_2C_2,$$

[4] I ve druhém případě můžeme opravdu psát přímo rovnost argumentů z intervalu $\langle -\pi; \pi)$, nejen pouhou kongruenci při modulu 2π, neboť poměr $(A_2; B_2, C_2)$ zřejmě není reálný a jeho argument je tím spíše různý od $-\pi$.

pokud platí

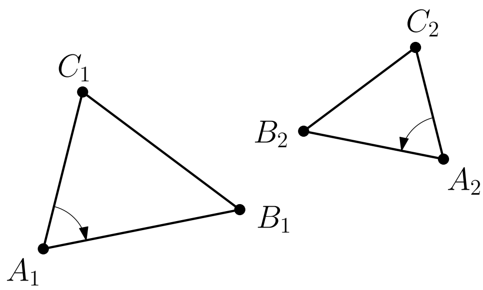
$$(A_1; B_1, C_1) = (A_2; B_2, C_2)\,. \tag{3.17}$$

V případě, že pro dva trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ je splněno

$$(A_1; B_1, C_1) = \overline{(A_2; B_2, C_2)}, \tag{3.18}$$

hovoříme o *nepřímo podobných* trojúhelnících $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ (obr. 3.13) a píšeme

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim_- \triangle A_2B_2C_2.$$



Obrázek 3.13

Uvědomme si, že v předchozí definici, stejně jako ve Větě sus samotné, nezáleží, díky tvrzení Věty 5, str. 28, na permutaci označení vrcholů obou trojúhelníků (je-li provedena současně při výpočtu obou poměrů), tedy platí např.

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim_+ \triangle A_2B_2C_2 \quad \Leftrightarrow \quad (A_1; C_1, B_1) = (A_2; C_2, B_2)$$

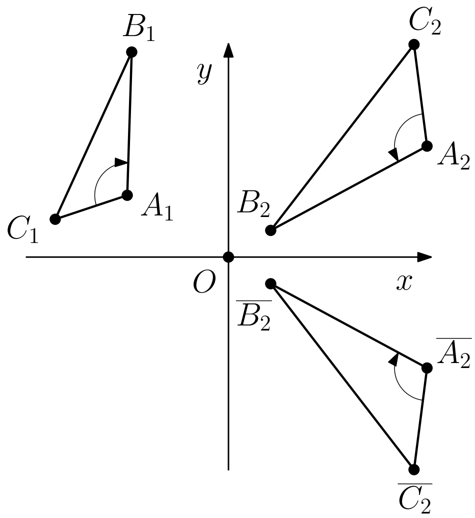
a podobně pro zbylé čtyři permutace, stejně jako

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim_- \triangle A_2B_2C_2 \quad \Leftrightarrow \quad (C_1; B_1, A_1) = \overline{(C_2; B_2, A_2)}$$

a tak podobně. Dále si povšimněme, že zřejmě platí

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim_- \triangle A_2B_2C_2 \quad \Leftrightarrow \quad \triangle A_1B_1C_1 \sim_+ \triangle \overline{A_2}\,\overline{B_2}\,\overline{C_2},$$

tedy, že dva trojúhelníky $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ jsou nepřímo podobné právě tehdy, když trojúhelníky $A_1B_1C_1$, $\overline{A_2}\,\overline{B_2}\,\overline{C_2}$ jsou podobné přímo (obr. 3.14) a naopak.



Obrázek 3.14

Důsledek 6. *Dva trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ jsou podobné právě tehdy, když platí*

$$\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_2 - b_2 \\ a_1 - c_1 & a_2 - c_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \textit{neboli} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.19}$$

nebo

$$\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & \overline{a_2} - \overline{b_2} \\ a_1 - c_1 & \overline{a_2} - \overline{c_2} \end{vmatrix} = 0 \qquad \textit{neboli} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & \overline{a_2} & 1 \\ b_1 & \overline{b_2} & 1 \\ c_1 & \overline{c_2} & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{3.20}$$

přičemž v případě splnění podmínky (3.19) *se jedná o podobnost přímou; v případě, že platí podmínka* (3.20)*, jde o podobnost nepřímou.*

Důkaz. Rozepsáním determinantů z (3.19) a (3.20) (podobným způsobem jako v důkazu Věty 4 uvedené na str. 26) snadno zjistíme, že tyto rovnosti vyjadřují právě to, co je o poměrech $(A_1; B_1, C_1)$ a $(A_2; B_2, C_2)$ uvedeno ve Větě sus a Definici 15. Q.E.D.

Poznámka. Ze zápisu relace podobnosti dvou trojúhelníků pomocí determinantů je mj. dobře patrná její nezávislost na (současné) permutaci označení vrcholů obou trojúhelníků, o které již byla řeč.

Také odtud dostáváme možnou interpretaci podmínky kolinearity tří různých bodů A, B, C uvedenou ve Větě 6, str. 29, jako

$$\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

neboť ta podle předchozího říká, že tři různé body A, B, C leží na jedné přímce právě tehdy, když „trojúhelníky“ ABC a $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ jsou podobné přímo, příp. „trojúhelník“ ABC je podobný sobě samému nepřímo.

Věta 34. *Dva trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ jsou podobné, právě když argumenty poměrů $(A_1; C_1, B_1)$, $(B_1; A_1, C_1)$ jsou v tomto pořadí buď rovny argumentům poměrů $(A_2; C_2, B_2)$, $(B_2; A_2, C_2)$, nebo to jsou čísla k nim opačná (v prvním případě jde o přímou, ve druhém o nepřímou podobnost).*

Důkaz. Implikaci „⇒“ dokážeme s využitím již dokázané Věty sus snadno, přitom rozlišíme, zda dané dva trojúhelníky jsou podobné přímo, nebo nepřímo. V prvním případě z $\triangle A_1B_1C_1 \sim_+ \triangle A_2B_2C_2$ plynou podle Věty sus rovnosti

$$(A_1; C_1, B_1) = (A_2; C_2, B_2) \quad \text{a} \quad (B_1; A_1, C_1) = (B_2; A_2, C_2)\,,$$

v jejichž důsledku máme potřebný závěr

$$\arg(A_1; C_1, B_1) = \arg(A_2; C_2, B_2) \ \text{ a zároveň } \ \arg(B_1; A_1, C_1) = \arg(B_2; A_2, C_2).$$

Ve druhém případě, kdy $\triangle A_1B_1C_1 \sim_- \triangle A_2B_2C_2$, Věta sus zaručuje rovnosti

$$(A_1; C_1, B_1) = \overline{(A_2; C_2, B_2)} \quad \text{a} \quad (B_1; A_1, C_1) = \overline{(B_2; A_2, C_2)},$$

které vedou k závěru, že

$$\arg(A_1; C_1, B_1) = \arg\overline{(A_2; C_2, B_2)} = -\arg(A_2; C_2, B_2)$$

a současně

$$\arg(B_1; A_1, C_1) = \arg\overline{(B_2; A_2, C_2)} = -\arg(B_2; A_2, C_2).$$

Tím je implikace „⇒“ dokázána.

Nyní dokážeme implikaci „⇐“. Mějme tedy dva trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ a zabývejme se nejprve případem, kdy platí

$$\arg(A_1; C_1, B_1) = \arg(A_2; C_2, B_2) \quad \text{a zároveň} \quad \arg(B_1; A_1, C_1) = \arg(B_2; A_2, C_2),$$

odkud po rozepsání všech poměrů máme

$$\arg\frac{a_1 - c_1}{a_1 - b_1} = \arg\frac{a_2 - c_2}{a_2 - b_2} \qquad \text{a zároveň} \qquad \arg\frac{b_1 - a_1}{b_1 - c_1} = \arg\frac{b_2 - a_2}{b_2 - c_2},$$

což lze zřejmě zapsat jako

$$\frac{a_1 - c_1}{a_1 - b_1} = k_1 \cdot \frac{a_2 - c_2}{a_2 - b_2} \qquad \text{a zároveň} \qquad \frac{b_1 - a_1}{b_1 - c_1} = k_2 \cdot \frac{b_2 - a_2}{b_2 - c_2}, \tag{3.21}$$

kde k_1, k_2 jsou jistá kladná reálná čísla.

K ověření potřebného závěru $\triangle A_1B_1C_1 \sim_+ \triangle A_2B_2C_2$ stačí zřejmě dokázat, že platí $k_1 = k_2 = 1$. Vyjádřením c_2 z obou rovností (3.21) obdržíme

$$c_2 = a_2 - \frac{1}{k_1} \cdot \frac{(a_2 - b_2)(a_1 - c_1)}{a_1 - b_1}, \qquad c_2 = b_2 - k_2 \cdot \frac{(b_1 - c_1)(b_2 - a_2)}{b_1 - a_1}.$$

Porovnáním těchto vyjádření dostáváme

$$\begin{aligned} a_2 - \frac{1}{k_1} \cdot \frac{(a_2 - b_2)(a_1 - c_1)}{a_1 - b_1} &= b_2 - k_2 \cdot \frac{(b_1 - c_1)(b_2 - a_2)}{b_1 - a_1}, \\ a_2 - b_2 &= \frac{1}{k_1} \cdot \frac{(a_2 - b_2)(a_1 - c_1)}{a_1 - b_1} - k_2 \cdot \frac{(b_1 - c_1)(b_2 - a_2)}{b_1 - a_1}. \end{aligned}$$

Vydělením obou stran poslední rovnosti nenulovým číslem $a_2 - b_2$ a následným vynásobením (nenulovým) číslem $a_1 - b_1$ postupně získáme

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{k_1} \cdot \frac{a_1 - c_1}{a_1 - b_1} - k_2 \cdot \frac{b_1 - c_1}{a_1 - b_1}, \\ a_1 - b_1 &= \frac{1}{k_1} \cdot (a_1 - c_1) - k_2 \cdot (b_1 - c_1), \\ a_1 - b_1 &= \frac{1}{k_1} a_1 - k_2 b_1 + k_2 c_1 - \frac{1}{k_1} c_1, \\ (1 - k_2)(a_1 - b_1) &= \left(\frac{1}{k_1} - k_2\right)(a_1 - c_1). \end{aligned}$$

Kdyby neplatilo $1 - k_2 = 0$, z poslední rovnosti by plynulo

$$(A_1; B_1, C_1) = \frac{a_1 - b_1}{a_1 - c_1} = \frac{\frac{1}{k_1} - k_2}{1 - k_2} \in \mathbb{R},$$

což odporuje tomu, že body A_1, B_1, C_1 jsou různé a neleží na jedné přímce. Proto platí $1 - k_2 = 0$, a tedy rovněž $\frac{1}{k_1} - k_2 = 0$ neboli $k_1 = k_2 = 1$. Přímá podobnost trojúhelníků $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ je tak dokázána.

Podobně provedeme důkaz implikace „$\Leftarrow$“ pro druhý případ, kdy pro trojúhelníky $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ platí

$$\arg(A_1; C_1, B_1) = -\arg(A_2; C_2, B_2) = \arg\overline{(A_2; C_2, B_2)}$$

a současně

$$\arg(B_1; A_1, C_1) = -\arg(B_2; A_2, C_2) = \arg\overline{(B_2; A_2, C_2)}.$$

Rozepsáním poměrů dostaneme ekvivalentní podmínku

$$\frac{a_1 - c_1}{a_1 - b_1} = k_3 \cdot \frac{\overline{a_2} - \overline{c_2}}{\overline{a_2} - \overline{b_2}} \qquad \text{a zároveň} \qquad \frac{b_1 - a_1}{b_1 - c_1} = k_4 \cdot \frac{\overline{b_2} - \overline{a_2}}{\overline{b_2} - \overline{c_2}}, \tag{3.22}$$

kde k_3, k_4 jsou jistá kladná reálná čísla.

K ověření vztahu $\triangle A_1B_1C_1 \sim_- \triangle A_2B_2C_2$ jistě stačí dokázat, že $k_3 = k_4 = 1$. Další postup je však až na záměnu označení $a_2 \to \overline{a_2}$, $b_2 \to \overline{b_2}$, $c_2 \to \overline{c_2}$, $k_1 \to k_3$, $k_2 \to k_4$ totožný jako v předešlém případě. Odtud tak plyne, že $k_3 = k_4 = 1$. Tím je celá věta dokázána. Q.E.D.

Poznámka. Právě dokázaná věta se běžně označuje jako Věta uu o podobnosti dvou trojúhelníků, neboť podmínky

$$\arg(A_1; C_1, B_1) = \arg(A_2; C_2, B_2) \quad \text{a} \quad \arg(B_1; A_1, C_1) = \arg(B_2; A_2, C_2),$$

respektive

$$\arg(A_1; C_1, B_1) = -\arg(A_2; C_2, B_2) \quad \text{a} \quad \arg(B_1; A_1, C_1) = -\arg(B_2; A_2, C_2),$$

vyjadřují rovnosti velikostí dvou dvojic odpovídajících si vnitřních úhlů zkoumaných trojúhelníků $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$. Jak jsme ověřili v průběhu důkazu, první podmínka odpovídá situaci, kdy $\triangle A_1B_1C_1 \sim_+ \triangle A_2B_2C_2$, a naopak případ $\triangle A_1B_1C_1 \sim$ $\sim_- \triangle A_2B_2C_2$ charakterizuje podmínka druhá.

Kapitola 4

Klasické věty elementární geometrie

V této kapitole uvedeme a dokážeme dvanáct významných tvrzení elementární geometrie roviny, z nichž mnohá bývají v české matematické literatuře často opomenuta (např. tvrzení o *Mongeově bodě* nebo *Gaussova* i *Newtonova věta*). Využijeme přitom většinu dostupných početních prostředků, které jsme si pro tento účel připravili v kapitolách předchozích a ukážeme tak, že komplexní čísla mohou být užitečným nástrojem i v případě dokazování hlubších geometrických výsledků.

Oproti diplomové práci [10] jsme doplnili důkaz hluboké *Feuerbachovy věty*, rovněž zde nově uvádíme nepříliš známý, a ve srovnání s ostatními námi prezentovanými tvrzeními poměrně nedávný (publikovaný v roce 1900) výsledek zvaný *Schickova věta*, jenž přirozeným způsobem rozšiřuje tvrzení o existenci *Simsonovy přímky.*

Zdůrazněme, že ačkoliv většina důkazů složitějších tvrzení této kapitoly byla převzata z literatury uvedené v seznamu, bylo třeba převážnou část z nich podstatně upravit, opatřit vhodným komentářem, příp. i doplnit o opomenuté situace a zvláštní případy.

Připomeňme ještě naši úmluvu, že jednotkovou kružnici se středem v počátku O soustavy komplexních souřadnic pevně označujeme symbolem ε.

4.1 Pythagorova věta

Přehled klasických vět elementární geometrie otevřeme jednou z nejslavnějších vět celé geometrie, snad i matematiky jako takové, se kterou se takřka každý člověk vzdělaného světa setká již během povinné školní docházky. Je jí věta pojmenovaná podle věhlasného Pýthagora[1], jenž ji v 6. století př. n. l. objevil pro Evropu, resp. starověké

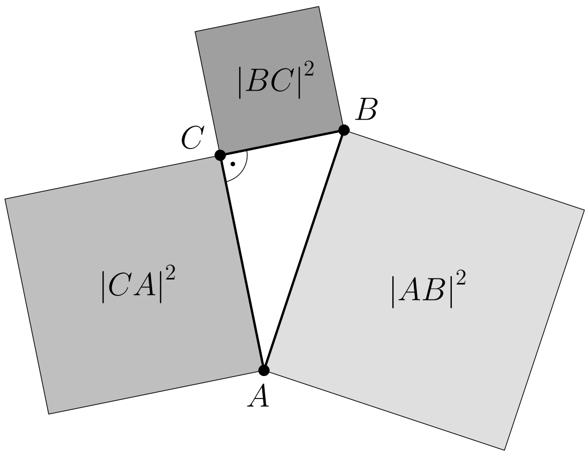
[1]**Pýthagorás ze Samu** (cca. 570 př. n. l. – cca. 495 př. n. l.) – bájný řecký filosof, matematik a astronom, z jehož díla, pokud nějaké sepsal, se do dnešní doby nic nezachovalo.

Řecko, ačkoliv byla zřejmě známa už dřívějším starověkým civilizacím, např. Číně, částečně snad i Egyptu.

Dodejme ještě, že důkaz Pythagorovy věty, který zde podáme a který nebyl převzat z literatury ze seznamu ani z žádné jiné, není z logického hlediska zcela korektní, neboť její platnost v celém předešlém textu předpokládáme a využíváme, zejména tehdy, kdy eukleidovskou vzdálenost $|AB|$ dvou bodů A, B vyjadřujeme číslem $|b-a|$ (Definice 3 na str. 22).

Věta 35. *Trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C (obr. 4.1) právě tehdy, když pro velikosti jeho stran platí*

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |CA|^2 . \tag{4.1}$$



Obrázek 4.1

Důkaz. Ekvivalentním přepsáním podmínky (4.1) pomocí komplexních souřadnic vrcholů A, B, C dostaneme

$$(b-a)\left(\overline{b}-\overline{a}\right) = (c-b)\left(\overline{c}-\overline{b}\right) + (a-c)\left(\overline{a}-\overline{c}\right),$$

což po roznásobení obou stran rovnosti přejde v

$$b\overline{b} - \overline{a}b - a\overline{b} + a\overline{a} = c\overline{c} - \overline{b}c - b\overline{c} + b\overline{b} + a\overline{a} - a\overline{c} - \overline{a}c + c\overline{c}$$

neboli (po zrušení členů $a\overline{a}$ a $b\overline{b}$)

$$-\overline{a}b - a\overline{b} = c\overline{c} - \overline{b}c - b\overline{c} - a\overline{c} - \overline{a}c + c\overline{c},$$

$$-c\overline{c}+b\overline{c}+\overline{a}c-\overline{a}b=c\overline{c}-\overline{b}c-a\overline{c}+a\overline{b},$$
$$-\left(\overline{c}-\overline{a}\right)\left(c-b\right)=\left(c-a\right)\left(\overline{c}-\overline{b}\right),$$

odkud po vydělení obou stran poslední rovnosti nenulovým číslem $(c-b)\left(\overline{c}-\overline{b}\right)$ dostaneme konečně

$$-\frac{\overline{c}-\overline{a}}{\overline{c}-\overline{b}}=\frac{c-a}{c-b}$$

neboli poměr $(C;A,B)$ vrcholů trojúhelníku ABC je ryze imaginární (neboť obě strany poslední rovnosti jsou zřejmě různé od nuly), což podle Důsledku 2, str. 36, znamená právě to, že trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C. Jelikož všechny provedené kroky byly ekvivalentní, je tím důkaz hotov.

Q.E.D.

Poznámka. Pythagorova věta bývá obvykle uváděna jako tvrzení, které je pouze jednou z implikací z Věty 35: *Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou libovolného pravoúhlého trojúhelníku je roven součtu obsahů čtverců nad oběma jeho odvěsnami.* Dále v textu podáme ještě jeden nezávislý důkaz tohoto slabšího tvrzení (jako jeden z důsledků Ptolemaiovy věty uvedený na str. 135). Druhá, méně uváděná implikace z Věty 35, pak bývá označována jako *obrácená Pythagorova věta.*

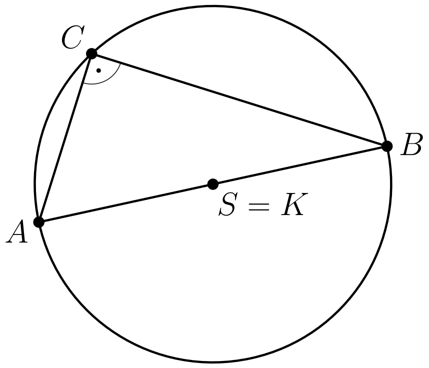
4.2 Thaletova věta

Thaletova věta, pojmenovaná podle starořeckého učence Thaléta z Milétu[2], který ji jako první dokázal, je po Pythagorově větě snad druhou nejznámější větou planimetrie, známou již žákům většiny základních škol. Podobně jako Pythagorova věta byla i Thaletova věta empiricky známá a využívaná i před Thalétovým důkazem, a to např. ve starověkém Egyptě či Babylonii, a stejně jako ona udává ekvivalentní podmínku toho, že trojúhelník je pravoúhlý. Ani v tomto případě jsme důkaz nepřevzali z žádné literatury.

Věta 36. *Trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C právě tehdy, když střed kružnice jemu opsané splývá se středem jeho strany $[AB]$ (obr. 4.2).*

Důkaz. Označme po řadě střed strany $[AB]$ a střed kružnice trojúhelníku ABC opsané písmeny S a K. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že trojúhelník ABC

[2]**Thalés z Milétu** (cca. 625 př. n. l. – cca. 545 př. n. l.) – předsókratovský řecký filosof, geometr a astronom.



Obrázek 4.2

je vepsaný kružnici ε. Pro poměr $(C; A, B) = \frac{c-a}{c-b}$ jeho vrcholů pak s využitím toho, že $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c} = 1$, dostaneme

$$\frac{c-a}{c-b} = \frac{\frac{1}{\overline{c}} - \frac{1}{\overline{a}}}{\frac{1}{\overline{c}} - \frac{1}{\overline{b}}} = \frac{\frac{\overline{a}-\overline{c}}{\overline{a}\overline{c}}}{\frac{\overline{b}-\overline{c}}{\overline{b}\overline{c}}} = \frac{\overline{c}-\overline{a}}{\overline{c}-\overline{b}} \cdot \frac{\overline{b}}{\overline{a}}.$$

Podle Důsledku 2 užitého již při důkazu minulé věty je trojúhelník ABC pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C právě tehdy, když poměr $(C; A, B)$ je ryze imaginární, což podle odvozené rovnosti nastane právě v případě, že druhý činitel na pravé straně je roven -1, že tedy $\overline{b} = -\overline{a}$, tj. $b = -a$ neboli $(s =)\frac{a+b}{2} = 0$, což je kýžená podmínka splynutí středu S strany $[AB]$ se středem $O = K$ opsané kružnice. Q.E.D.

4.3 Heronův vzorec

Na tomto místě uvedeme a dokážeme platnost známého vztahu pro výpočet obsahu trojúhelníku ze znalosti délek všech tří jeho stran. Tento výsledek byl formulován a dokázán Hérónem z Alexandrie[3], který jej publikoval ve své práci *Métrika*, dodnes tak nese jeho jméno. Historikové rovněž připouštějí možnost, že tento vzorec byl znám již dříve, neboť Métrika představuje soubor tehdejšího vědění antického Řecka; v této souvislosti bývá zmiňováno jméno Archiméda[4]. Jisté zůstává, že vztah ekvivalentní Heronovu vzorci nezávisle na poznatcích starověkého Řecka objevil a ve svém díle *Matematické pojednání v devíti knihách* publikoval čínský matematik Čin Džjušao[5].

[3] **Hérón z Alexandrie** (cca. 10–70) – starověký matematik, fyzik a vynálezce, který se jako první pokusil využít sílu páry.

[4] **Archimédés ze Syrakus** (287 př. n. l. – 212 př. n. l.) – řecký matematik, fyzik, filosof, vynálezce a astronom považovaný za největšího matematika své doby a jednoho z největších učenců všech dob.

[5] **Čin Džjušao** psáno rovněž přepisem **Qin Jiushao** (cca. 1202–1261) – čínský matematik a politik.

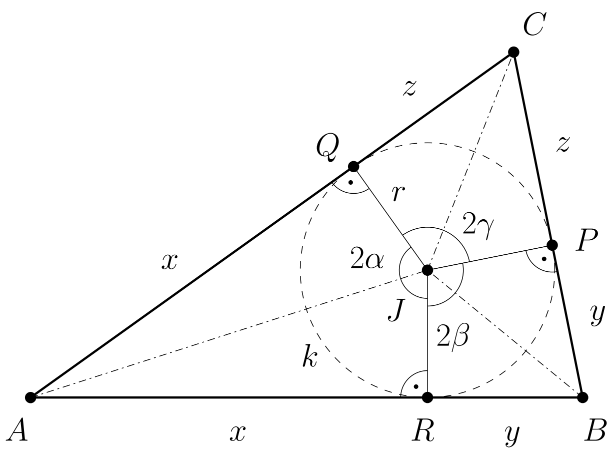
Námi uvedený důkaz, jehož původním autorem je Miles Dillon Edwards (v době vzniku důkazu student střední školy), je převzatý z článku [9].

Věta 37. *Pro obsah S trojúhelníku se stranami a, b, c platí*

$$S = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}, \tag{4.2}$$

kde $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Důkaz. Uvažme trojúhelník ABC se stranami označenými podle běžné zvyklosti a kružnici k jemu vepsanou se středem J a poloměrem r, která se stran a, b, c dotýká po řadě v bodech P, Q, R (obr. 4.3). Označme dále délky úseček $[AQ]$ a $[AR]$, resp. $[BR]$ a $[BP]$, resp. $[CP]$ a $[CQ]$ jako x, y z v tomto pořadí a $2\alpha = |\sphericalangle QJR|$, $2\beta = |\sphericalangle RJP|$ a $2\gamma = |\sphericalangle PJQ|$. Ze soustavy tří lineárních rovnic



Obrázek 4.3

$$x + y = c, \qquad y + z = a, \qquad x + z = b$$

pro neznámé x, y, z dostaneme jejich vyjádření

$$x = \frac{b+c-a}{2} = s - a, \quad y = \frac{a+c-b}{2} = s - b, \quad z = \frac{a+b-c}{2} = s - c, \tag{4.3}$$

kde s je veličina zavedená ve znění dokazované věty. Odtud navíc dostáváme, že $x + y + z = s$ (což plyne rovněž z významu veličiny s). Uvažujme nyní komplexní čísla

$$u = r + x\mathrm{i}, \qquad v = r + y\mathrm{i}, \qquad w = r + z\mathrm{i}.$$

Jelikož zřejmě platí (viz obr. 4.3) $\arg u = \alpha$, $\arg v = \beta$ a $\arg w = \gamma$ a $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, dostáváme odtud, že součin

$$\begin{aligned} uvw &= (r + x\mathrm{i})(r + y\mathrm{i})(r + z\mathrm{i}) = \left[r^2 + r(x+y)\mathrm{i} - xy\right](r + z\mathrm{i}) = \\ &= r^3 + r^2(x+y)\mathrm{i} - rxy + r^2 z\mathrm{i} - rz(x+y) - xyz\mathrm{i} = \\ &= r^3 - rxy - rz(x+y) + \left[r^2(x+y+z) - xyz\right]\mathrm{i} \end{aligned}$$

je reálné číslo, tedy jeho imaginární část je nulová, tj.

$$r^2(x+y+z) - xyz = 0 \qquad \text{neboli} \qquad r = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}. \tag{4.4}$$

Pro obsah S trojúhelníku ABC zřejmě platí

$$S = xr + yr + zr = (x+y+z)\,r = sr,$$

odkud po dosazení za poloměr r kružnice vepsané ze vztahu (4.4) a využitím vztahů (4.3) dostáváme

$$S = s\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}} = \sqrt{sxyz} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

což mělo být dokázáno. Q.E.D.

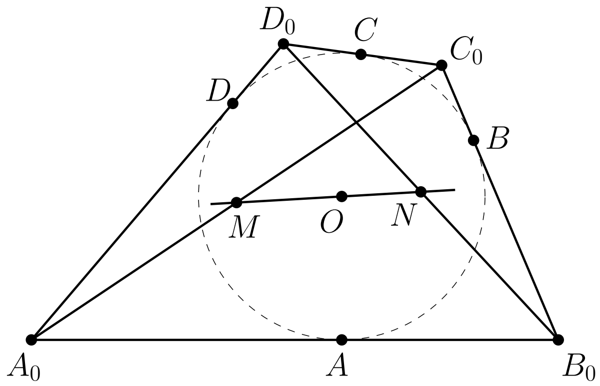
4.4 Newtonova přímka

Následující tvrzení popisuje kolinearitu jistých tří významných bodů tzv. *tečnového čtyřúhelníku*, tj. takového konvexního čtyřúhelníku, jemuž lze vepsat kružnici. Samotné tvrzení je pak známo jako *Newtonova*[6] *věta*. Důkaz, který zde podáváme, je převzatý z knihy [3, s. 26 a 27].

Věta 38. *Střed kružnice vepsané tečnovému čtyřúhelníku a středy obou jeho úhlopříček leží na jedné přímce (obr. 4.4).*

Důkaz. Buď $A_0B_0C_0D_0$ tečnový čtyřúhelník. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že kružnice jemu vepsaná je kružnice ε. Označme A, B, C, D body jejího

[6]**Isaac Newton** (1642, resp. 1643–1727) – anglický fyzik a matematik, jeden ze dvou tvůrců kalkulu, mnohými považovaný za největšího fyzika, jaký kdy žil.



Obrázek 4.4

dotyku s jeho stranami $[A_0B_0]$, $[B_0C_0]$, $[C_0D_0]$, $[D_0A_0]$ v tomto pořadí a M, N po řadě středy jeho úhlopříček $[A_0C_0]$ a $[B_0D_0]$.

Nejsou-li M, N, O tři různé body, je tvrzení věty triviální. Předpokládejme tedy, že se jedná o tři různé body. Podle vzorce (1.54) uvedeného na str. 50 v Lemmatu 4 dostáváme pro komplexní souřadnice vrcholů A_0, B_0, C_0, D_0 vyjádření

$$a_0 = \frac{2ad}{a+d}, \qquad b_0 = \frac{2ab}{a+b}, \qquad c_0 = \frac{2bc}{b+c}, \qquad d_0 = \frac{2cd}{c+d}.$$

Pak pro komplexní souřadnice bodů M, N platí

$$m = \frac{a_0 + c_0}{2} = \frac{ad}{a+d} + \frac{bc}{b+c}, \qquad n = \frac{b_0 + d_0}{2} = \frac{ab}{a+b} + \frac{cd}{c+d}$$

a pro poměr $(O; M, N) = \frac{0-m}{0-n} = \frac{m}{n}$ bodů M, N, O tak máme

$$\frac{m}{n} = \frac{\frac{ad}{a+d} + \frac{bc}{b+c}}{\frac{ab}{a+b} + \frac{cd}{c+d}} = \frac{\frac{ad(b+c)+bc(a+d)}{(a+d)(b+c)}}{\frac{ab(c+d)+cd(a+b)}{(a+b)(c+d)}} = \frac{abd + acd + abc + bcd}{abc + abd + acd + bcd} \cdot \frac{(a+b)\,(c+d)}{(a+d)\,(b+c)} =$$
$$= \frac{(a+b)\,(c+d)}{(a+d)\,(b+c)}.$$

Body M, N, O leží na jedné přímce tehdy a jen tehdy, když jejich poměr $(O; M, N)$ je reálné číslo (Věta 6, str. 29). S využitím toho, že $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c} = d\overline{d} = 1$, máme

$$\overline{\left(\frac{m}{n}\right)} = \frac{\left(\overline{a} + \overline{b}\right)\left(\overline{c} + \overline{d}\right)}{\left(\overline{a} + \overline{d}\right)\left(\overline{b} + \overline{c}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{d}\right)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} = \frac{\frac{(a+b)(c+d)}{abcd}}{\frac{(a+d)(b+c)}{abcd}} = \frac{m}{n},$$

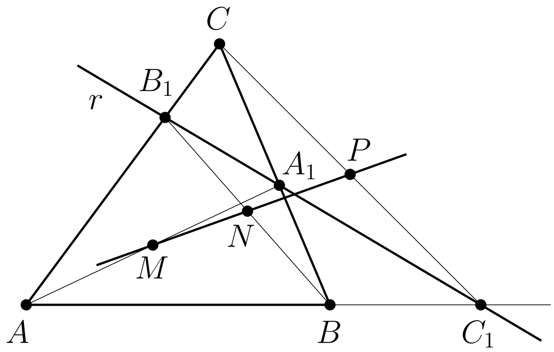
tedy body M, N, O skutečně leží na jedné přímce. Q.E.D.

Poznámka. Dodejme, že body M, N, O splývají pouze v situaci, kdy výchozí tečnový čtyřúhelník $A_0B_0C_0D_0$ je kosočtvercem nebo čtvercem. V opačném případě všechny tři leží na jediné přímce známé jako *Newtonova přímka* daného tečnového čtyřúhelníku. V případě deltoidu jde zřejmě o jeho osu souměrnosti.

4.5 Gaussova přímka

Následující tvrzení, známé jako *Gaussova věta*, se podobně jako předchozí zabývá kolinearitou jistých tří různých bodů, tentokrát ovšem získaných za pomoci trojúhelníku a přímky protínající přímky všech tří jeho stran. Důkaz, který zde uvádíme, vychází z knihy [3, s. 27].

Věta 39. *Buď r přímka různoběžná s každou z přímek stran $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ trojúhelníku ABC, která je protíná po řadě v bodech C_1, A_1, B_1 (některé dva z nich mohou splývat). Pak středy úseček $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ jsou kolineární (obr. 4.5).*



Obrázek 4.5

Důkaz. Podle Důsledku 1 ze str. 30 můžeme podmínky kolinearity bodů A, B, C_1, resp. A_1, B, C, resp. A, B_1, C a A_1, B_1 C_1 psát po řadě jako

$$\left(\overline{b} - \overline{c_1}\right) a + \left(\overline{c_1} - \overline{a}\right) b + \left(\overline{a} - \overline{b}\right) c_1 = 0, \tag{4.5}$$

$$\left(\overline{b} - \overline{c}\right) a_1 + \left(\overline{c} - \overline{a_1}\right) b + \left(\overline{a_1} - \overline{b}\right) c = 0, \tag{4.6}$$

$$\left(\overline{b_1} - \overline{c}\right) a + \left(\overline{c} - \overline{a}\right) b_1 + \left(\overline{a} - \overline{b_1}\right) c = 0, \tag{4.7}$$

$$\left(\overline{b_1} - \overline{c_1}\right) a_1 + \left(\overline{c_1} - \overline{a_1}\right) b_1 + \left(\overline{a_1} - \overline{b_1}\right) c_1 = 0. \tag{4.8}$$

Označme M, N, P středy úseček $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ v tomto pořadí. Pak pro jejich komplexní souřadnice platí

$$m = \frac{a + a_1}{2}, \qquad n = \frac{b + b_1}{2}, \qquad p = \frac{c + c_1}{2}. \tag{4.9}$$

K tomu, aby body M, N, P ležely na jedné přímce, je podle téhož důsledku nutné a stačí splnění podmínky

$$(\overline{n} - \overline{p})\, m + (\overline{p} - \overline{m})\, n + (\overline{m} - \overline{n})\, p = 0$$

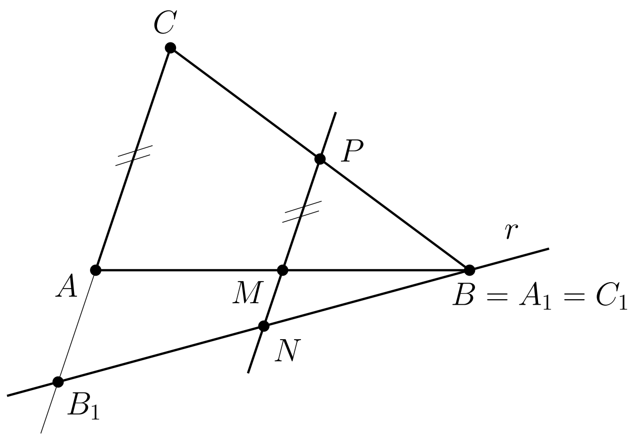
neboli po dosazení vyjádření komplexních souřadnic m, n, p z (4.9)

$$\left(\overline{b} + \overline{b_1} - \overline{c} - \overline{c_1}\right)(a + a_1) + (\overline{c} + \overline{c_1} - \overline{a} - \overline{a_1})(b + b_1) + \left(\overline{a} + \overline{a_1} - \overline{b} - \overline{b_1}\right)(c + c_1) = 0.$$

Odtud po dílčím roznásobení získáme ekvivalentní podmínku

$$\begin{aligned}
&\left(\overline{b_1} - \overline{c}\right) a + \left(\overline{b} - \overline{c_1}\right) a + \left(\overline{b_1} - \overline{c_1}\right) a_1 + \left(\overline{b} - \overline{c}\right) a_1 + \\
&+ (\overline{c_1} - \overline{a})\, b + (\overline{c} - \overline{a_1})\, b + (\overline{c_1} - \overline{a_1})\, b_1 + (\overline{c} - \overline{a})\, b_1 + \\
&+ \left(\overline{a_1} - \overline{b}\right) c + \left(\overline{a} - \overline{b_1}\right) c + \left(\overline{a_1} - \overline{b_1}\right) c_1 + \left(\overline{a} - \overline{b}\right) c_1 = 0,
\end{aligned}$$

která je vzhledem k podmínkám (4.5) až (4.8) zřejmě splněna. Body M, N, P tedy skutečně leží na jedné přímce a důkaz je tím hotov. Q.E.D.

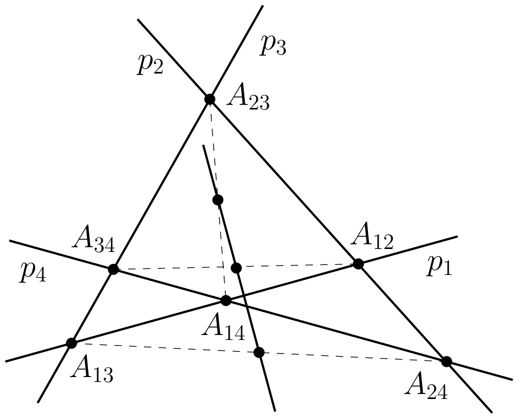


Obrázek 4.6

Poznámka. Tvrzení právě dokázané věty zůstává v platnosti i v případě, že přímka r prochází právě jedním vrcholem trojúhelníku ABC, neboť středy úseček $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ pak zřejmě leží na některé ze tří přímek středních příček trojúhelníku ABC (obr. 4.6 znázorňuje situaci, kdy přímka r prochází vrcholem B).

Přímka bodů M, N, P z poslední věty bývá obvykle nazývána *Gaussova přímka* nebo *Newtonova–Gaussova přímka*, příp. i *Newtonova přímka*, neboť v situaci, kdy některé z bodů A, B, A_1, B_1, resp. B, C, B_1, C_1, resp. C, A, C_1, A_1 představují po řadě vrcholy tečnového čtyřúhelníku, leží na této přímce podle Věty 38 rovněž střed odpovídající kružnice jemu vepsané, a touto přímkou je právě Newtonova přímka onoho čtyřúhelníku vyšetřovaná v předchozím paragrafu.

Uvedenou přímku přitom spojujeme s každou čtveřicí různých přímek, jež jsou po dvou různoběžné a žádné tři z nich neprocházejí jedním bodem. Každý takový systém čtyř přímek p_1, p_2, p_3, p_4 a jejich šesti průsečíků A_{ij}, $1 \leq i < j \leq 4$ (viz obr. 4.7) se nazývá *úplný čtyřúhelník* a úsečky $[A_{12}A_{34}]$, $[A_{13}A_{24}]$ a $[A_{14}A_{23}]$ jsou označovány jako jeho úhlopříčky. Větu 39 (pokud z ní vypustíme předpoklad o možném splynutí některých dvou z bodů A_1, B_1, C_1) lze tedy ekvivalentně formulovat takto: *Středy všech tří úhlopříček úplného čtyřúhelníku leží na jedné přímce.* Tato přímka se pak nazývá *Gaussova přímka úplného čtyřúhelníku.*



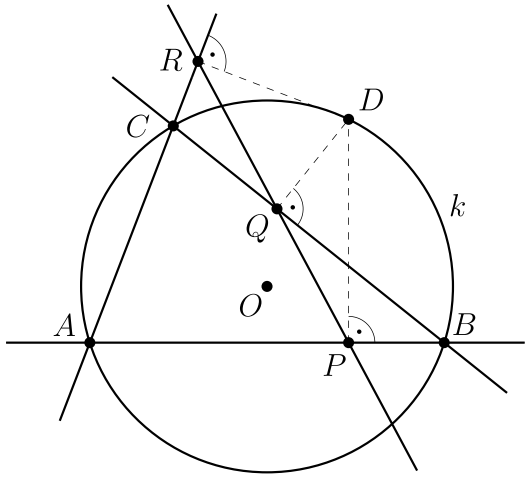
Obrázek 4.7

4.6 Simsonova přímka

Nyní uvedeme a dokážeme tvrzení, jež říká, že paty kolmic vedených z libovolného bodu kružnice opsané obecnému trojúhelníku na přímky jeho stran leží na jedné přímce, jež je známá pod názvem *Simsonova*[7] *přímka.* Námi poskytnutý důkaz tohoto tvrzení jsme přitom převzali z literatury [3, s. 28].

[7]**Robert Simson** (1687–1768) – skotský matematik a profesor matematiky na Univerzitě v Glasgowě.

Věta 40. *Nechť ABC je trojúhelník a k je kružnice jemu opsaná. Pak paty kolmic vedených z libovolného bodu D kružnice k na přímky stran $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ leží v jedné přímce závislé na bodu D (obr. 4.8).*



Obrázek 4.8

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme kružnice k a ε pokládat za totožné. Vypišme podle vzorce (1.59) uvedeného na str. 52 v Lemmatu 7 pro kolmý průmět bodu na přímku určenou dvěma různými body kružnice ε komplexní souřadnice pat P, Q, R kolmic vedených bodem D na přímky AB, BC, AC v tomto pořadí. S využitím toho, že $d\overline{d} = 1$, podle zmíněného vzorce platí

$$p = \frac{1}{2}\left(a + b + d - ab\overline{d}\right) = \frac{1}{2}\left(a + b + d - \frac{ab}{d}\right)$$

a podobně

$$q = \frac{1}{2}\left(b + c + d - \frac{bc}{d}\right) \qquad \text{a} \qquad r = \frac{1}{2}\left(a + c + d - \frac{ac}{d}\right).$$

Body P, Q, R jsou navzájem různé, právě když je bod D různý od bodů A, B, C; v případě $D \in \{A, B, C\}$ je tedy tvrzení věty triviální. Předpokládejme proto, že $D \notin \{A, B, C\}$. Pro poměr trojice bodů P, Q, R tak máme

$$(P; Q, R) = \frac{p - q}{p - r} = \frac{a - c - \frac{b(a-c)}{d}}{b - c - \frac{a(b-c)}{d}} = \frac{a - c}{b - c} \cdot \frac{d - b}{d - a} = \frac{c - a}{c - b} : \frac{d - a}{d - b} = (A, B, C, D)\,,$$

tj. poměr $(P; Q, R)$ je roven dvojpoměru (A, B, C, D) bodů A, B, C, D. Ten je ovšem podle Věty 21, str. 59, reálný, neboť tyto čtyři různé body leží na jedné kružnici, tudíž i poměr $(P;Q,R)$ je reálný a body P, Q, R jsou proto kolineární, jak mělo být dokázáno. Q.E.D.

Právě dokázaná věta říká, že pokud je bod D bodem kružnice k opsané trojúhelníku ABC, pak paty kolmic P, Q, R z tohoto bodu spuštěných na přímky stran $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ trojúhelníku ABC leží v jedné přímce. Nabízí se proto přirozená otázka, zda je toto vlastnost charakteristická pouze pro body kružnice k a předchozí větu lze formulovat jako ekvivalenci namísto pouhé implikace, nebo existuje i jiný bod neležící na této kružnici, jemuž příslušné paty kolmic opět leží na jedné přímce.

Povšimněme si ještě, že z postupu jejího důkazu navíc dostáváme, že pro každý bod $D \in k - \{A,B,C\}$ platí

$$(A,B,C,D) = (P;Q,R)\,, \tag{4.10}$$

neboť hodnota dělicího poměru ani dvojpoměru zřejmě nezávisí na zvoleném měřítku ani posunutí o libovolný vektor v rovině.

Odpověď na nastolenou otázku nám pomůže získat následující věta udávající vztah dvojpoměru (A,B,C,D) a jemu příslušnému poměru $(P;Q,R)$ v obecné situaci. V knize [7, s. 188] je toto tvrzení uvedeno jako *Schickova*[8] *věta*; odtud jsme rovněž převzali její znění, nicméně důkaz v ní prezentovaný využívá hlubších znalostí zobrazení komplexní roviny. Námi podaný elementární důkaz přitom vychází, podobně jako v případě Věty 40, z aplikace Lemmatu 7, str. 52.

Věta 41. *Nechť A, B, C, D jsou čtyři různé body takové, že A, B, C neleží v jedné přímce a nechť P, Q, R jsou po řadě paty kolmic vedených z bodu D na přímky AB, BC, AC. Pak dvojpoměr (A,B,C,D) je roven číslu komplexně sdruženému k poměru $(P;Q,R)$, tj. platí*

$$(A,B,C,D) = \overline{(P;Q,R)}. \tag{4.11}$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že body A, B, C leží na kružnici ε, tedy že pro jejich komplexní souřadnice platí $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c} = 1$. Přímo podle vzorce (1.59) z Lemmatu 7 pro kolmý průmět bodu na přímku určenou dvěma různými body kružnice ε obdržíme pro komplexní souřadnice pat P, Q, R kolmic vedených bodem D po řadě na přímky AB, BC, AC vztahy

$$p = \frac{1}{2}\left(a + b + d - ab\overline{d}\right), \quad q = \frac{1}{2}\left(b + c + d - bc\overline{d}\right) \quad \text{a} \quad r = \frac{1}{2}\left(a + c + d - ac\overline{d}\right).$$

[8] **Josef Schick** (1859–1944) – německý anglista, jazykovědec, filosof a matematik.

Pro poměr tří různých bodů P, Q, R tak dostáváme

$$(P;Q,R)=\frac{p-q}{p-r}=\frac{a-c-ab\overline{d}+bc\overline{d}}{b-c-ab\overline{d}+ac\overline{d}}=\frac{a-c-(a-c)\,b\overline{d}}{b-c-(b-c)\,a\overline{d}}=\frac{(a-c)\left(1-b\overline{d}\right)}{(b-c)\left(1-a\overline{d}\right)}$$

a pro číslo k němu komplexně sdružené s využitím vztahů $a\overline{a}=b\overline{b}=c\overline{c}=1$ máme

$$\overline{(P;Q,R)}=\frac{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)\left(1-\frac{d}{b}\right)}{\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\left(1-\frac{d}{a}\right)}=\frac{\frac{(c-a)(b-d)}{abc}}{\frac{(c-b)(a-d)}{abc}}=\frac{c-a}{c-b}:\frac{d-a}{d-b}=(A,B,C,D)\,.$$

Tento vztah ovšem zřejmě platí i v obecném případě, kdy společná kružnice k bodů A, B, C, D je volena libovolně. Q.E.D.

K situaci z právě dokázané věty dodejme následující. Protože podle Věty 6 ze str. 29 a Věty 21 ze str. 59 víme, kdy je číslo $(P;Q,R)$, resp. číslo (A,B,C,D) reálné, přivádí nás Schickova věta okamžitě ke slíbenému obrácení Věty 40, kterou proto nyní můžeme upřesnit jako ekvivalenci v podobě následujícího tvrzení:

Věta 42. *Nechť ABC je trojúhelník a k je kružnice jemu opsaná. Paty kolmic vedených z libovolného bodu D na přímky stran $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ leží v jedné přímce právě tehdy, když bod D leží na kružnici k.*

Poznámka. Z rovnosti (4.10) platné pro čtveřici různých bodů A, B, C, D ležících na jedné kružnici dostáváme alternativní způsob, jakým lze určovat polaritu dvojpoměru čtyř různých koncyklických bodů, kterou jsme se zabývali ve druhém paragrafu kapitoly druhé (viz str. 67). Např. pro rozložení bodů A, B, C, D na kružnici podle obrázku 4.8, str. 116, tj. podle permutace $ABDC$, je zřejmé, že dělicí poměr $(P;Q,R)$ je kladný (neboť bod P v této situaci leží vně úsečky $[QR]$; viz poznámku uvedenou na str. 29 za důkazem Věty 6), proto i dvojpoměr (A,B,C,D) musí být kladný, což je v souladu s tvrzením Věty 26, str. 70. V případě určování polarity dvojpoměru (A,B,C,D) ve zbylých pěti možnostech rozložení čtyř různých bodů na kružnici by zřejmě bylo možné postupovat podobně.

Dodejme na závěr, že Simsonova přímka bývá někdy nazývána *úpatnice trojúhelníku ABC příslušná bodu D* jeho opsané kružnice. Její objev bývá přisuzován Robertu Simsonovi, avšak první, kdo výsledek o ní publikoval, byl až William Wallace[9], proto se někdy označuje i jeho jménem[10].

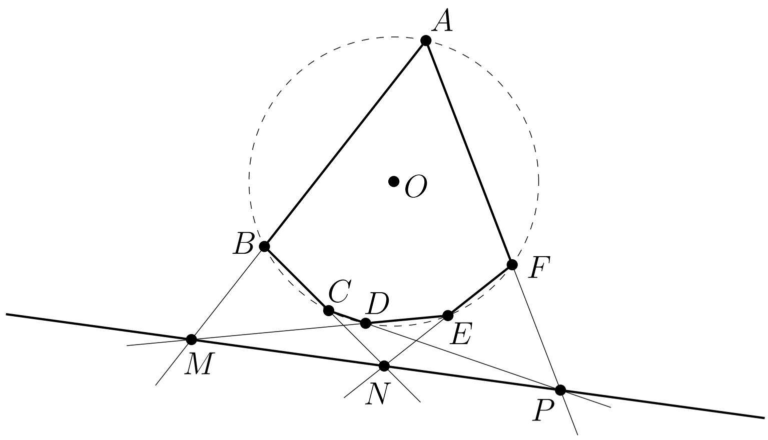
[9]**William Wallace** (1768–1843) – skotský matematik, astronom a vynálezce.

[10]V některých publikacích bývá mylně zaměňován, zřejmě díky podobnosti příjmení, s **Johnem Wallisem** (1616–1703), anglickým matematikem Newtonovy éry.

4.7 Pascalova přímka

Nyní uvedeme a dokážeme významnou větu projektivní geometrie popisující kolinearitu jistých tří významných různých bodů spojených s *tětivovým šestiúhelníkem*, tj. takovým konvexním šestiúhelníkem, jemuž lze opsat kružnici. Námi poskytnutý důkaz jsme převzali z knihy [3, s. 28 a 29].

Věta 43. *Nechť $ABCDEF$ je tětivový šestiúhelník takový, že každé dvě jeho protilehlé strany jsou různoběžné. Pak průsečíky přímek těchto tří dvojic jeho stran leží na jedné přímce.*



Obrázek 4.9

Důkaz. Označme M, N, P po řadě (tři různé) průsečíky přímek protilehlých stran $[AB]$, $[DE]$, resp. $[BC]$, $[EF]$, resp. $[CD]$, $[FA]$ tětivového šestiúhelníku $ABCDEF$ (obr. 4.9). Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že kružnice jemu opsaná je kružnicí ε. Podle vzorce (1.57) uvedeného na str. 51 v Lemmatu 6 tak dostáváme pro komplexní souřadnice bodů M, N, P po řadě vztahy

$$\overline{m} = \frac{a+b-(d+e)}{ab-de}, \quad \overline{n} = \frac{b+c-(e+f)}{bc-ef}, \quad \overline{p} = \frac{c+d-(a+f)}{cd-af}.$$

Počítejme

$$\overline{n} - \overline{m} = \frac{(ab-de)\,[b+c-(e+f)] - (bc-ef)\,[a+b-(d+e)]}{(bc-ef)\,(ab-de)} =$$

$$= \frac{ab^2+abc-abe-abf-bde-cde+de^2+def-\left(abc+b^2c-bcd-bce-aef-bef+def+e^2f\right)}{(bc-ef)(ab-de)} =$$

$$= \frac{bce-cde+de^2-e^2f+aef-abe-b^2c+bcd-bde+bef-abf+ab^2}{(bc-ef)\,(ab-de)} =$$

$$= \frac{(e-b)(bc-cd+de-ef+af-ab)}{(bc-ef)(ab-de)},$$

odkud substitucemi $a \to b$, $b \to c$, $c \to d$, $d \to e$, $e \to f$, $f \to a$ obdržíme $\overline{p}-\overline{n}$, resp.

$$\overline{n}-\overline{p} = \frac{(f-c)(de-cd+af-ef+bc-ab)}{(bc-ef)(cd-af)}.$$

Odtud získáme pro poměr komplexně sdružený k poměru $(N; M, P)$ bodů M, N, P vyjádření

$$\overline{(N; M, P)} = \frac{\overline{n}-\overline{m}}{\overline{n}-\overline{p}} = \frac{(e-b)(cd-af)}{(f-c)(ab-de)}.$$

S využitím rovností $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c} = d\overline{d} = e\overline{e} = f\overline{f} = 1$ však máme

$$(N; M, P) = \frac{\left(\overline{e}-\overline{b}\right)\left(\overline{c}\overline{d}-\overline{a}\overline{f}\right)}{\left(\overline{f}-\overline{c}\right)\left(\overline{a}\overline{b}-\overline{d}\overline{e}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{cd}-\frac{1}{af}\right)}{\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{ab}-\frac{1}{de}\right)} =$$
$$= \frac{\frac{b-e}{be}\cdot\frac{af-cd}{acdf}}{\frac{c-f}{cf}\cdot\frac{de-ab}{abde}} = \frac{(b-e)(af-cd)}{(c-f)(de-ab)} = \overline{(N; M, P)},$$

tedy poměr $(N; M, P)$ je reálné číslo, takže body M, N, P leží na jedné přímce, a tím je věta dokázána. Q.E.D.

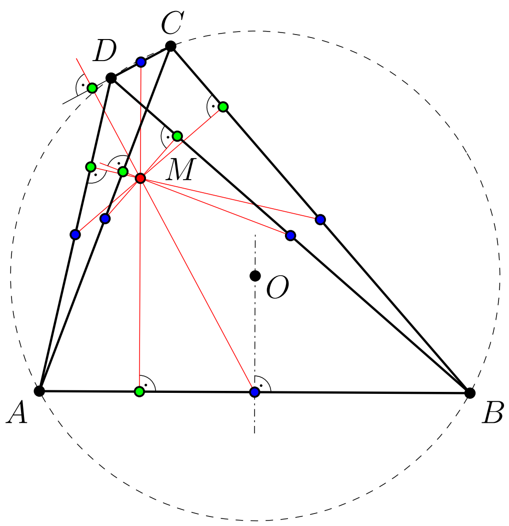
Poznámka. Přímka z právě dokázané věty se nazývá *Pascalova*[11] *přímka* daného tětivového šestiúhelníku. Blaise Pascal ji objevil v roce 1639, tj. ve svých šestnácti letech. Jeho vlastní důkaz její existence, pokud jej kdy nalezl, se však do současnosti nedochoval.

4.8 Mongeův bod

Následující tvrzení říká, že s každým tětivovým čtyřúhelníkem (připomeňme, že se jedná o takový čtyřúhelník, jemuž lze opsat kružnici) je možné spojit šest významných, obecně různých přímek, které všechny procházejí jedním a týmž bodem. Uvedený důkaz toho tvrzení pochází z literatury [3, s. 29 a 30].

Věta 44. *V tětivovém čtyřúhelníku se kolmice ke každé z jeho stran vedené středem protější strany a kolmice na každou z jeho diagonál spuštěné ze středu zbylé diagonály protínají v jediném bodě.*

[11]**Blaise Pascal** (1623–1662) – významný francouzský matematik, fyzik, spisovatel, teolog a náboženský filosof.



Obrázek 4.10

Důkaz. Označme vrcholy tětivového čtyřúhelníku A, B, C, D (obr. 4.10). Je zřejmé, že osy jeho stran se protínají v jediném bodě, a sice ve středu kružnice jemu opsané. Tento bod můžeme bez újmy na obecnosti pokládat za počátek O soustavy komplexních souřadnic.

Osu strany $[AB]$ lze charakterizovat jako kolmici na ni vedenou jejím středem, tj. bod Z je podle Definice 9, str. 35, jejím bodem tehdy a jen tehdy, když komplexní číslo $\frac{z-\frac{a+b}{2}}{a-b}$ je buď nulové (pak bod Z je středem strany $[AB]$), nebo je ryze imaginární. Zejména tedy číslo $-\frac{a+b}{2(a-b)}$ je rovno nule, anebo je ryze imaginární, neboť bod $Z = O$ o komplexní souřadnici $z = 0$ leží podle předchozího na ose strany $[AB]$.

Podobně bod Z je bodem kolmice na stranu $[AB]$ vedené středem strany $[CD]$ právě tehdy, když komplexní číslo $\frac{z-\frac{c+d}{2}}{a-b}$ je buď ryze imaginární, nebo rovno nule. Nyní dokážeme, že bod M o komplexní souřadnici $m = \frac{a+b+c+d}{2}$ je bodem této kolmice. Skutečně

$$\frac{m-\frac{c+d}{2}}{a-b} = \frac{\frac{a+b+c+d}{2}-\frac{c+d}{2}}{a-b} = \frac{a+b}{2\,(a-b)},$$

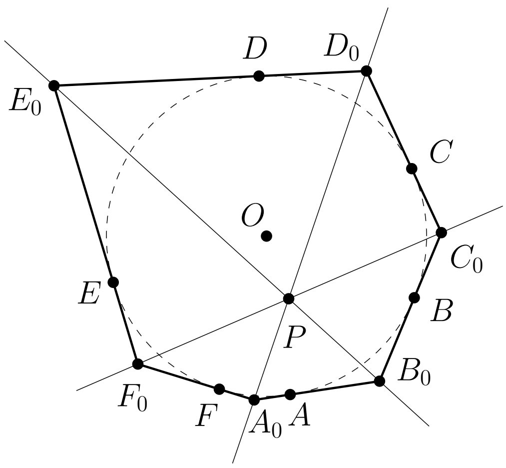
což, jak jsme ukázali, je číslo nulové nebo ryze imaginární, tedy bod M leží na kolmici na stranu $[AB]$ vedenou středem strany $[CD]$. Jelikož je vyjádření komplexní souřadnice bodu M invariantní vůči libovolné permutaci vrcholů čtyřúhelníku $ABCD$, plyne odtud, že bodem M prochází i zbývajících pět obdobně určených přímek ze znění dokazované věty. Q.E.D.

Poznámka. Bod M z právě dokázané věty je známý jako *Mongeův*[12] *bod tětivového čtyřúhelníku* $ABCD$. Z vyjádření jeho komplexní souřadnice m uvedeného v předchozím důkazu plyne, že spojnice bodu M se středem O kružnice onomu čtyřúhelníku opsané je úsečka, jejíž střed splývá se středy tří úseček, jež spojují středy protilehlých stran a středy úhlopříček daného čtyřúhelníku.

4.9 Brianchonův bod

Následující tvrzení známé podle svého objevitele jako *Brianchonova*[13] *věta* říká, že přímky spojnic protějších vrcholů *tečnového šestiúhelníku*, tj. takového konvexního šestiúhelníku, jemuž lze vepsat kružnici, procházejí jediným bodem (který někdy bývá nazýván *Brianchonovým bodem* takového šestiúhelníku). Dodejme, že námi poskytnutý důkaz nebyl převzat z žádné literatury.

Věta 45. *Přímky spojnic tří dvojic protějších vrcholů tečnového šestiúhelníku prochází jedním bodem (obr. 4.11).*



Obrázek 4.11

Důkaz. Nechť $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$ je tečnový šestiúhelník. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že kružnice jemu vepsaná je kružnicí ε. Označme A, B, C, D, E, F body jejího dotyku s jeho stranami $[A_0B_0]$, $[B_0C_0]$, $[C_0D_0]$, $[D_0E_0]$, $[E_0F_0]$, $[F_0A_0]$ v tomto pořadí.

[12]**Gaspard Monge** [čti „Gaspár Monž“] (1746–1818) – francouzský přírodovědec, matematik a revoluční politik, pokládaný za tvůrce deskriptivní geometrie.

[13]**Charles Julien Brianchon** [čti „Šárl Žiljen Brianšon“] (1783–1864) – francouzský matematik a chemik.

Podle vzorce (1.54) uvedeného na str. 50 v Lemmatu 4 dostáváme pro komplexní souřadnice vrcholů A_0, B_0, C_0, D_0, E_0, F_0 vyjádření

$$a_0 = \frac{2af}{a+f}, \quad b_0 = \frac{2ab}{a+b}, \quad c_0 = \frac{2bc}{b+c}, \quad d_0 = \frac{2cd}{c+d}, \quad e_0 = \frac{2de}{d+e}, \quad f_0 = \frac{2ef}{e+f}.$$

Dokažme nyní, že bod P, jehož komplexní souřadnice p je určena vztahem

$$\frac{p}{2} = \frac{abcd-abcf+abef-adef-bcde+cdef}{abd+abe+acd-acf-ade-adf-bce-bcf-bde+bef+cdf+cef}, \tag{4.12}$$

je oním hledaným bodem, tj. že platí $P \in A_0D_0 \cap B_0E_0 \cap C_0F_0$. Pro přehlednost ještě označme čitatel a jmenovatel zlomku na pravé straně vyjádření (4.12) po řadě písmeny m a n.

Povšimněme si nejprve zajímavé vlastnosti vyjádření (4.12), kterou by vztah pro komplexní souřadnici hledaného bodu měl splňovat, a sice, že zůstává nezměněno při libovolné cyklické záměně komplexních souřadnic bodů A, B, C, D, E, F. Opravdu, substitucemi (na něž se budeme dále v důkazu odvolávat jako na substituce σ) $a \to b$, $b \to c$, $c \to d$, $d \to e$, $e \to f$, $f \to a$ (ostatní cyklické záměny bychom zřejmě dostali opakovaným použitím právě těchto substitucí) aplikovanými na (4.12) totiž dostaneme

$$\frac{p'}{2} = \frac{bcde-abcd+abcf-abef-cdef+adef}{bce+bcf+bde-abd-bef-abe-cdf-acd-cef+acf+ade+adf} = \frac{-m}{-n} = \frac{p}{2}.$$

Navíc tak zjišťujeme, že po jednom užití substitucí σ na výrazy m a n platí $m \to -m$ a $n \to -n$.

Nyní ukážeme, že bod P leží na přímce A_0D_0. Pro poměr bodů A_0, D_0, P dostáváme

$$\begin{aligned}\lambda = (P; A_0, D_0) &= \frac{p-a_0}{p-d_0} = \frac{p-\frac{2af}{a+f}}{p-\frac{2cd}{c+d}} = \frac{\frac{p}{2}-\frac{af}{a+f}}{\frac{p}{2}-\frac{cd}{c+d}} = \frac{\frac{m}{n}-\frac{af}{a+f}}{\frac{m}{n}-\frac{cd}{c+d}} = \\ &= \frac{(a+f)\,m-afn}{n\,(a+f)} \cdot \frac{n\,(c+d)}{(c+d)\,m-cdn} = \frac{(a+f)\,m-afn}{(c+d)\,m-cdn} \cdot \frac{c+d}{a+f}.\end{aligned}$$

Označme ještě $x = (a+f)\,m - afn$, $y = (c+d)\,m - cdn$, pak tedy

$$\lambda = \frac{x}{y} \cdot \frac{c+d}{a+f}.$$

Jelikož výraz $-y$ zřejmě dostaneme trojí aplikací substitucí σ (tj. $a \to d$, $b \to e$, $c \to f$, $d \to a$, $e \to b$ a $f \to c$, přitom $m \to -m$ a $n \to -n$) na výraz x, můžeme nyní upravovat pouze vyjádření x, které pak snadno přepíšeme na obdobné vyjádření y. Po dosazení za m a n do vztahu pro x máme

$$x = (a+f)(abcd - abcf + abef - adef - bcde + cdef) -$$
$$- af(abd + abe + acd - acf - ade - adf - bce - bcf - bde + bef + cdf + cef),$$

a po roznásobení všech závorek dostaneme, že výraz x má hodnotu

$$a^2bcd - a^2bcf + a^2bef - a^2def - abcde + acdef + abcdf - abcf^2 + abef^2 -$$
$$- adef^2 - bcdef + cdef^2 - a^2bdf - a^2bef - a^2cdf + a^2cf^2 + a^2def + a^2df^2 +$$
$$+ abcef + abcf^2 + abdef - abef^2 - acdf^2 - acef^2,$$

která je po zrušení stejných členů a přeskupení zbývajících rovna

$$a^2bcd - a^2bcf - a^2bdf + abcdf - a^2cdf + a^2cf^2 + a^2df^2 - acdf^2 - abcde + abcef +$$
$$+ abdef - bcdef + acdef - acef^2 - adef^2 + cdef^2 =$$
$$= (ab - af - be + ef)(acd - acf - adf + cdf).$$

Dostáváme tak, že

$$x = (a-e)(b-f)(acd - acf - adf + cdf).$$

Pro y pak máme po trojím uplatnění substitucí σ na x

$$y = -(d-b)(e-c)(adf - cdf - acd + acf) =$$
$$= (b-d)(c-e)(acd - acf - adf + cdf),$$

tak pro poměr λ získáváme vyjádření

$$\lambda = \frac{(a-e)(b-f)(c+d)(acd - acf - adf + cdf)}{(b-d)(c-e)(a+f)(acd - acf - adf + cdf)} = \frac{(a-e)(b-f)(c+d)}{(a+f)(b-d)(c-e)}.$$

Pro číslo komplexně sdružené k λ proto platí

$$\overline{\lambda} = \frac{(\overline{a} - \overline{e})\left(\overline{b} - \overline{f}\right)\left(\overline{c} + \overline{d}\right)}{\left(\overline{a} + \overline{f}\right)\left(\overline{b} - \overline{d}\right)(\overline{c} - \overline{e})},$$

odkud s využitím vztahů $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c} = d\overline{d} = e\overline{e} = f\overline{f} = 1$ dále dostaneme

$$\overline{\lambda} = \frac{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{e}\right)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{f}\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{f}\right)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{d}\right)\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{e}\right)} = \frac{\frac{(e-a)(f-b)(c+d)}{abcdef}}{\frac{(a+f)(d-b)(e-c)}{abcdef}} = \frac{(a-e)\,(b-f)\,(c+d)}{(a+f)\,(b-d)\,(c-e)} = \lambda,$$

poměr λ je tak reálný a různý od nuly, neboť $a \neq -f$ a $c \neq -d$, jak plyne z různoběžnosti sousedních stran šestiúhelníku $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$, a bod P proto leží na přímce A_0D_0.

Zbývá tedy ověřit, že bod P je i bodem přímek B_0E_0 a C_0F_0. Avšak ověření těchto tvrzení dostaneme jednou, resp. dvěma, aplikacemi substitucí σ na poměr $(P; A_0, D_0)$, resp. provedený výpočet.

Až doposud jsme mlčky předpokládali, že komplexní souřadnice bodu P určená vztahem (4.12) je zavedena korektně, a sice, že je konečná, tj. platí

$$n = abd + abe + acd - acf - ade - adf - bce - bcf - bde + bef + cdf + cef \neq 0.$$

Tato podmínka je však ekvivalentní tomu, že přímky A_0D_0, B_0E_0 jsou různoběžné[14], jak za okamžik ukážeme. Podle vzorce (1.30) z Definice 8, str. 34, lze podmínku $A_0D_0 \nparallel B_0E_0$ zapsat nerovností

$$\frac{d_0 - a_0}{e_0 - b_0} \neq \frac{\overline{d_0} - \overline{a_0}}{\overline{e_0} - \overline{b_0}}. \tag{4.13}$$

Postupnou úpravou její levé strany dostaneme

$$\frac{d_0 - a_0}{e_0 - b_0} = \frac{\frac{2cd}{c+d} - \frac{2af}{a+f}}{\frac{2de}{d+e} - \frac{2ab}{a+b}} = \frac{\frac{cd(a+f)-af(c+d)}{(a+f)(c+d)}}{\frac{de(a+b)-ab(d+e)}{(a+b)(d+e)}} = \frac{cd\,(a+f) - af\,(c+d)}{de\,(a+b) - ab\,(d+e)} \cdot \frac{(a+b)\,(d+e)}{(a+f)\,(c+d)}$$

a pro její pravou stranu potom s využitím vztahů $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c} = d\overline{d} = e\overline{e} = f\overline{f} = 1$ obdržíme

$$\begin{aligned}\frac{\overline{d_0} - \overline{a_0}}{\overline{e_0} - \overline{b_0}} &= \frac{\frac{1}{cd}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{f}\right) - \frac{1}{af}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)}{\frac{1}{de}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - \frac{1}{ab}\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{e}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{e}\right)}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{f}\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)} = \frac{\frac{a+f-c-d}{acdf}}{\frac{a+b-d-e}{abde}} \cdot \frac{\frac{(a+b)(d+e)}{abde}}{\frac{(a+f)(c+d)}{acdf}} = \\ &= \frac{a+f-c-d}{a+b-d-e} \cdot \frac{(a+b)\,(d+e)}{(a+f)\,(c+d)}.\end{aligned}$$

[14]Poznamenejme, že lze dokázat, že nerovnost $n \neq 0$ je stejně tak ekvivalentní podmínkám různoběžnosti zbylých dvojic přímek B_0E_0, C_0F_0, resp. C_0F_0, A_0D_0.

Původní nerovnost (4.13) tak po vydělení nenulovým číslem $\frac{(a+b)(d+e)}{(a+f)(c+d)}$ přejde do tvaru

$$\frac{cd\,(a+f)-af\,(c+d)}{de\,(a+b)-ab\,(d+e)} \neq \frac{a+f-c-d}{a+b-d-e},$$

je tedy ekvivalentní nerovnostem

$$[cd\,(a+f)-af\,(c+d)]\,(a+b-d-e) \neq (a+f-c-d)\,[de\,(a+b)-ab\,(d+e)]\,,$$
$$(acd+cdf-acf-adf)\,(a+b-d-e) \neq (a+f-c-d)\,(ade+bde-abd-abe)$$

neboli po roznásobení všech závorek

$$a^2cd+acdf-a^2cf-a^2df+abcd+bcdf-abcf-abdf-acd^2-cd^2f+acdf+$$
$$+ad^2f-acde-cdef+acef+adef\neq$$
$$\neq a^2de+abde-a^2bd-a^2be+adef+bdef-abdf-abef-acde-bcde+abcd+$$
$$+abce-ad^2e-bd^2e+abd^2+abde,$$

odkud po zrušení stejných členů a přenesení zbylých na levou stranu nerovnosti dostaneme

$$a^2bd+a^2be+a^2cd-a^2cf-a^2de-a^2df-abce-abcf-abde+abef+acdf+$$
$$+acef-abd^2-abde-acd^2+acdf+ad^2e+ad^2f+bcde+bcdf+bd^2e-bdef-$$
$$-cd^2f-cdef\neq 0.$$

Poslední nerovnost je dále ekvivalentní podmínce

$$(a-d)\,(abd+abe+acd-acf-ade-adf-$$
$$-bce-bcf-bde+bef+cdf+cef)\neq 0,$$

která po vydělení nenulovým číslem $a-d$ přejde v požadovanou podmínku $n\neq 0$. Komplexní souřadnice bodu P je tedy vyjádřením (4.12) zavedena korektně a celý důkaz je tím hotov. Q.E.D.

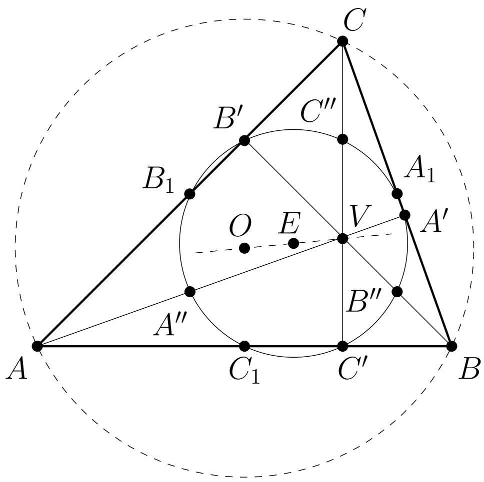
Poznámka. Za zmínku stojí, že Brianchonova věta obecněji formulovaná pro šestiúhelník opsaný kuželosečce (objevená roku 1806) je duální k větě Pascalově (Věta 43 uvedená na str. 119, rovněž v obecnější formě), dokázané o bezmála 170 let dříve, a to ve smyslu *principu duality* známého z *teorie kuželoseček a kvadrik.*

4.10 Kružnice devíti bodů

Mějme dán obecný trojúhelník ABC. Za kružnici jemu opsanou můžeme bez újmy na obecnosti zvolit kružnici ε. Podle Věty 30, str. 85, je pak komplexní souřadnice ortocentra V tohoto trojúhelníku určena rovností (3.4), tj.

$$v = a + b + c.$$

Označme ještě A_1, B_1, C_1 po řadě středy stran $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$, A', B', C' paty



Obrázek 4.12

výšek na přímky těchto stran a A'', B'', C'' středy úseček $[AV]$, $[BV]$, $[CV]$ v tomto pořadí (obr. 4.12), tedy

$$a_1 = \frac{b+c}{2}, \qquad b_1 = \frac{a+c}{2}, \qquad c_1 = \frac{a+b}{2},$$
$$a'' = \frac{a+v}{2} = a + \frac{b+c}{2}, \qquad b'' = b + \frac{a+c}{2}, \qquad c'' = c + \frac{a+b}{2}.$$

Dále podle vzorce (1.59) uvedeného na str. 52 v Lemmatu 7 pro kolmý průmět bodu na sečnu kružnice ε dostáváme s využitím rovností $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c} = 1$ pro komplexní souřadnice bodů A', B', C' vyjádření

$$a' = \frac{1}{2}\left(a + b + c - \frac{bc}{a}\right), \quad b' = \frac{1}{2}\left(a + b + c - \frac{ac}{b}\right), \quad c' = \frac{1}{2}\left(a + b + c - \frac{ab}{c}\right).$$

Pro takto zavedené body platí následující tvrzení, jehož důkaz jsme převzali z literatury [1, s. 71–74].

Věta 46. *V každém trojúhelníku ABC leží body A_1, B_1, C_1, A', B', C', A'', B'', C'' na jedné kružnici se středem splývajícím se středem úsečky spojující ortocentrum* *tohoto trojúhelníku se středem kružnice jemu opsané a s poloměrem rovným polovině jejího poloměru.*

Důkaz. Označme E střed úsečky $[OV]$. Díky naší volbě soustavy komplexních souřadnic v předchozím výkladu pak máme

$$e = \frac{a+b+c}{2},$$

tedy pro vzdálenost bodů A_1 a E dostáváme

$$|A_1E| = \left|\frac{a+b+c}{2} - \frac{b+c}{2}\right| = \left|\frac{a}{2}\right| = \frac{1}{2},$$

přitom je zřejmé, že ke stejnému výsledku bychom došli i v případě bodů B_1 a C_1.

Pro vzdálenost bodů A'' a E získáme

$$|A''E| = \left|a + \frac{b+c}{2} - \frac{a+b+c}{2}\right| = \left|\frac{a}{2}\right| = \frac{1}{2}.$$

Opět se snadno nahlédne, že pro body B'', C'' by byl výsledek výpočtu stejný jako pro bod A''.

Konečně pro vzdálenosti bodů A' a E máme

$$|A'E| = \left|\frac{a+b+c}{2} - \frac{1}{2}\left(a+b+c-\frac{bc}{a}\right)\right| = \left|\frac{bc}{2a}\right| = \frac{1}{2}.$$

Výpočet vzdáleností $|B'E|$, $|C'E|$ by se provedl podobně se stejným výsledkem. Dohromady tedy dostáváme tvrzení věty a důkaz je tím hotov. Q.E.D.

Kružnice z předchozí věty je známá jako *kružnice devíti bodů daného trojúhelníku.* Za zmínku stojí, že její střed E leží v případě nerovnostranného trojúhelníku na Eulerově přímce, jak je patrné ze způsobu jeho zavedení v úvodu důkazu.

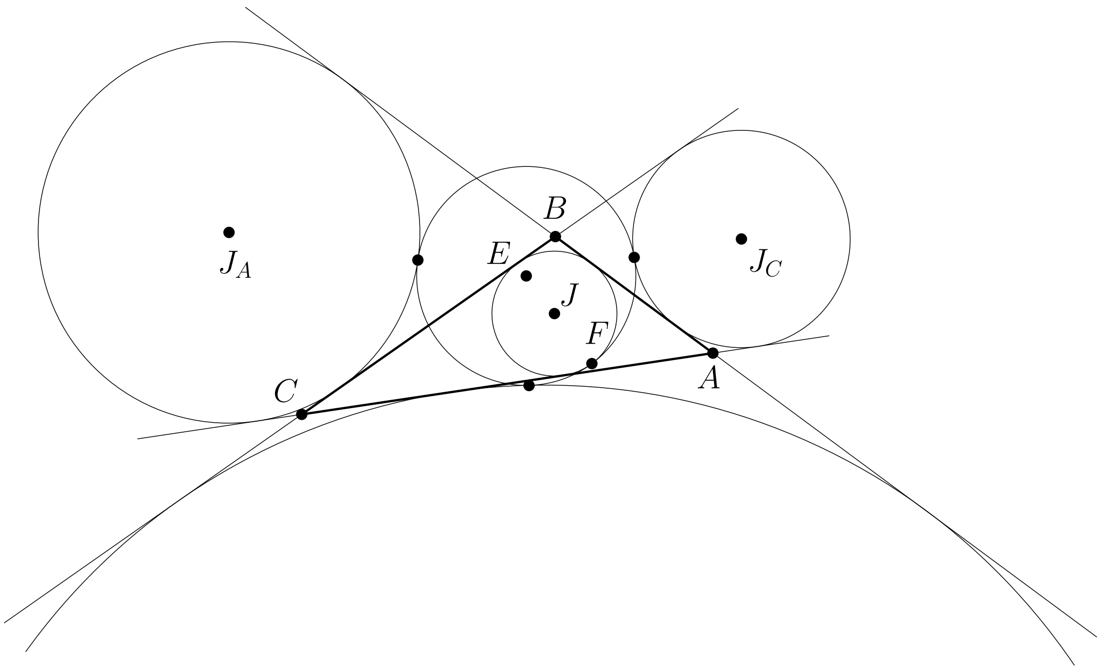
Dodejme ještě, že některé z devíti významných bodů spojených s trojúhelníkem ležících na jeho kružnici devíti bodů mohou splývat, přičemž nejméně jich je pro rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník, kde se jejich počet redukuje na čtyři.

Zejména v německy mluvících zemích je pak kružnice devíti bodů známá jako *Feuerbachova*[15] *kružnice daného trojúhelníku.* Feuerbach sám kružnici devíti bodů sice neobjevil (poprvé ji uvažoval Euler, proto se lze setkat i s označením *Eulerova*

[15]**Karl Wilhelm Feuerbach** (1800–1834) – německý matematik, jenž se zabýval geometrií.

kružnice), jako první však dokázal následující slavné tvrzení známé jako *Feuerbachova věta*, jehož důkaz, který zde prezentujeme, vychází z knihy [1, s. 99–100].

Věta 47. *Kružnice devíti bodů libovolného trojúhelníku ABC, jenž není rovnostranný, má vnitřní dotyk s kružnicí jemu vepsanou (v bodě označovaném jako* Feuerbachův bod trojúhelníku*, obr. 4.13) a v každém trojúhelníku má vnější dotyk se všemi třemi kružnicemi jemu připsanými.*



Obrázek 4.13

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že trojúhelník ABC je vepsán kružnici ε. Navíc předpokládejme, že komplexní souřadnice vrcholů A, B, C tohoto trojúhelníku jsou vyjádřeny pomocí kanonického značení $A\,(a^2)$, $B\,(b^2)$, $C\,(c^2)$ zavedeného Definicí 13 na str. 90. Vzorec (3.8) uvedený ve Věty 31 na str. 90 v této situaci udává komplexní souřadnici středu J kružnice trojúhelníku ABC vepsané v podobě

$$j = -\,(ab + bc + ac)\,.$$

Komplexní souřadnici středu E kružnice devíti bodů podle předchozí věty dostaneme jako polovinu součtu komplexních souřadnic všech tří vrcholů trojúhelníku ABC, proto

$$e = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}. \tag{4.14}$$

Spočtěme nyní s využitím rovností $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c} = 1$ vzdálenost $d = |EJ|$ těchto dvou středů:

$$d = |EJ| = \left|\frac{a^2+b^2+c^2}{2} + ab + bc + ac\right| = \frac{1}{2}\left|a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ac\right)\right| =$$
$$= \frac{1}{2}\left|(a+b+c)^2\right| = \frac{1}{2}\left(a+b+c\right)\left(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}\right) = \frac{1}{2}\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ac\right)}{abc}.$$

Povšimněme si, že podle odvozeného vzorce

$$d = |EJ| = \frac{1}{2}\left|(a+b+c)^2\right| \tag{4.15}$$

platí

$$d = 0 \Leftrightarrow |a+b+c| = \left|\frac{a+b+c}{abc}\right| = \left|\overline{bc}+\overline{ac}+\overline{ab}\right| = |ab+bc+ac| = |OJ| = 0,$$

kde jsme využili toho, že abc představuje jistou komplexní jednotku. Podmínka $|OJ| = 0$ přitom znamená právě to, že střed O kružnice trojúhelníku ABC opsané leží na všech třech osách jeho vnitřních úhlů, což pro jednotlivé osy nastane, právě když úsečka $[AA_1]$, $[BB_1]$, resp. $[CC_1]$ z obr. 3.8 na str. 92 je průměrem opsané kružnice, tj. když souřadnice jejích krajních bodů A, B, resp. C splňují po řadě vztahy $a^2 = bc$, $b^2 = ac$, resp. $c^2 = ab$. Tyto tři rovnosti dohromady znamenají podle poznámky uvedené na str. 94 za důkazem Věty 32 právě to, že trojúhelník ABC je rovnostranný.

Poloměr Feuerbachovy kružnice je roven polovině poloměru kružnice trojúhelníku ABC opsané, tedy v naší situaci je roven $\frac{1}{2}$. Určeme ještě poloměr r kružnice vepsané trojúhelníku ABC, a to tak, že nalezneme komplexní souřadnici paty P kolmice vedené jejím středem J např. na přímku strany $[AB]$. Podle vzorce (1.59) uvedeného na str. 52 v Lemmatu 7 a výpočtu (3.9) provedeného na str. 91 pro ni máme

$$p = \frac{1}{2}\left(a^2+b^2+j-a^2b^2\overline{j}\right) = \frac{1}{2}\left(a^2+b^2-ab-bc-ac+a^2b^2\frac{a+b+c}{abc}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[a^2+b^2-ab-bc-ac+\frac{ab\left(a+b+c\right)}{c}\right].$$

Hledaný poloměr r vepsané kružnice tak dostáváme jako vzdálenost bodů J, P, tj.

$$\begin{aligned} r = |JP| &= \left|\frac{1}{2}\left[a^2 + b^2 - ab - bc - ac + \frac{ab\,(a+b+c)}{c}\right] + ab + bc + ac\right| = \\ &= \frac{1}{2}\left|a^2 + b^2 + \frac{ab\,(a+b+c)}{c} + ab + bc + ac\right|, \end{aligned}$$

což je, s uvážením platnosti $|c| = 1$, dále rovno

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2}\left|c\left(a^2+b^2\right) + ab\,(a+b+c) + c\,(ab+bc+ac)\right| = \\ &= \frac{1}{2}\left|a^2c + b^2c + a^2b + ab^2 + 2abc + bc^2 + ac^2\right| = \\ &= \frac{1}{2}\left|a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2 + 3abc - abc\right|, \end{aligned}$$

odkud s využitím vztahu $|abc| = 1$ dostaneme

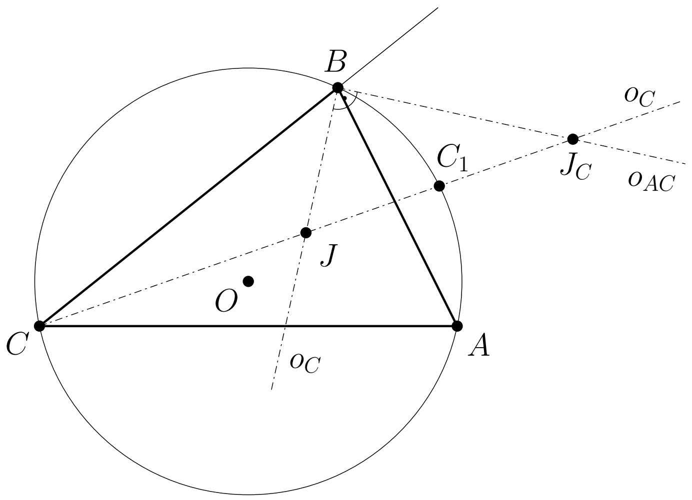
$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2}\left|\frac{a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2 + 3abc}{abc} - 1\right| = \\ &= \left|\frac{1}{2}\cdot\frac{(a+b+c)\,(ab+bc+ac)}{abc} - \frac{1}{2}\right| = \left|d - \frac{1}{2}\right|. \end{aligned}$$

Abychom nyní dokázali, že kružnice vepsaná trojúhelníku ABC má s jeho kružnicí devíti bodů vnitřní dotyk, je třeba ukázat, že platí $0 < d < \frac{1}{2}$. Z poslední rovnosti totiž v tomto případě dostaneme

$$r = \frac{1}{2} - d \qquad \text{neboli} \qquad d = \frac{1}{2} - r, \qquad \text{tj.} \qquad d + r = \frac{1}{2}.$$

Platnost nerovnosti $d > 0$ (která značí, že dotyčné kružnice nejsou soustředné) je však zaručena, neboť trojúhelník ABC podle předpokladu není rovnostranný. Druhá nerovnost $d < \frac{1}{2}$ je podle vzorce (4.15) ekvivalentní podmínce $|a + b + c| < 1$. Díky následně odvozené rovnosti $|a + b + c| = |OJ|$ tak máme dokázat platnost podmínky $|OJ| < 1$. Avšak střed J kružnice trojúhelníku ABC vepsané je zřejmě vnitřním bodem tětivy $[CC_1]$ kružnice jemu opsané (obr. 4.14), která v naší situaci má poloměr rovný jedné. Proto je jeho vzdálenost od počátku O menší než jedna a tak nerovnost $d < \frac{1}{2}$ platí. To ovšem znamená, že kružnice vepsaná trojúhelníku ABC má s jeho kružnicí devíti bodů vnitřní dotyk, jak jsme měli dokázat.

Abychom nyní ověřili, že kružnice devíti bodů má rovněž vnější dotyk s kružnicí trojúhelníku připsanou s dotykem s jeho stranou $[AB]$, stačí ve všech provedených



Obrázek 4.14

výpočtech komplexní souřadnici

$$j = -(ab + bc + ac) = -ab - bc - ac$$

středu J kružnice trojúhelníku ABC vepsané nahradit podle vzorce (3.12) uvedeného na str. 93 ve Větě 32 komplexní souřadnicí

$$j_C = -ab + bc + ac$$

středu J_C zmíněné kružnice připsané trojúhelníku ABC. To ovšem snadno provedeme pouhou záměnou $c \to -c$, vůči níž je vztah (4.14) pro střed Feuerbachovy kružnice neměnný. Všechny výsledky tedy zůstanou stejné, krom vzorce svazujícího vzdálenost d_C středů E kružnice devíti bodů a J_C kružnice připsané trojúhelníku ABC dotýkající se jeho strany $[AB]$ s jejím poloměrem r_C. V této situaci totiž platí podmínka $d_C > \frac{1}{2}$ ekvivalentní nerovnosti $|OJ_C| > 1$, která je splněna vzhledem k tomu, že střed J_C oné připsané kružnice leží na prodloužení tětivy $[CC_1]$ za krajní bod C_1 (obr. 4.14), tudíž má od počátku O vzdálenost větší než jedna. Proto vychází

$$r_C = d_C - \frac{1}{2} \qquad \text{neboli} \qquad d_C = \frac{1}{2} + r_C,$$

tedy kružnice devíti bodů má s uvažovanou kružnicí připsanou vnější dotyk. Stejným způsobem se dokáže tvrzení věty pro zbylé dvě kružnice trojúhelníku ABC připsané, a tím je důkaz hotov. Q.E.D.

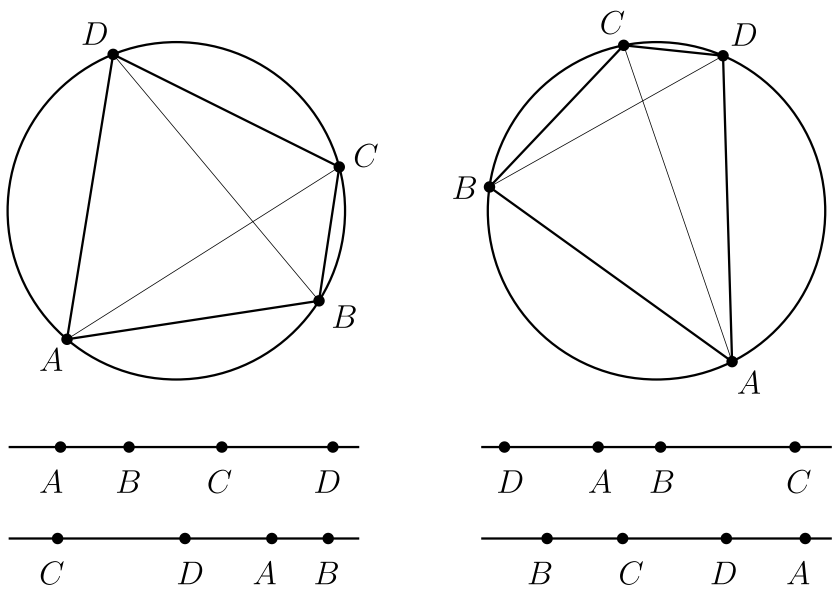
4.11 Ptolemaiova nerovnost

Nyní uvedeme a s využitím poznatků o polaritě dvojpoměru v závislosti na uspořádání jeho bodů na kružnici či přímce dokážeme významné tvrzení známé jako *Ptolemaiova*[16] *nerovnost*, které mj. obohatí naše poznatky o tětivových čtyřúhelnících. Důkaz tohoto tvrzení jsme převzali z knihy [1, s. 64 a 65], přitom jeho dílčí korekce byly inspirovány článkem [4].

Věta 48. *Pro libovolné čtyři body A, B, C, D platí*

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| \geq |AC| \cdot |BD| , \tag{4.16}$$

přičemž rovnost zde nastane právě tehdy, když alespoň některé dva body z dvojic A, B, resp. B, C, resp. C, D, resp. A, D splývají nebo jsou všechny čtyři po dvou různé a leží na jedné kružnici nebo přímce tak, že jsou uspořádány podle některé z permutací $ABCD$, $ADCB$, $BADC$, $CBAD$ (tj., cyklicky vzato, v abecedním pořádku, obr. 4.15).



Obrázek 4.15

[16]**Klaúdios Ptolemaios** (cca. 87 – cca. 166) – řecký geograf, astronom a astrolog a římský občan, který pravděpodobně žil a pracoval v egyptské Alexandrii.

Důkaz. Úvodem připomeňme obsah Lemmatu 1 ze str. 16, že pro libovolná dvě komplexní čísla z_1, z_2 platí trojúhelníková nerovnost v podobě

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \,,$$

přičemž rovnost v ní nastane tehdy a jen tehdy, když alespoň jedno z čísel z_1, z_2 je nulové nebo jsou obě nenulová a mají stejné argumenty, tj. číslo $\frac{z_1}{z_2}$ je reálné kladné číslo.

Nerovnost (4.16), kterou máme dokázat, souvisí s nápadně podobnou zajímavou algebraickou identitou

$$(a-b)\,(c-d) + (b-c)\,(a-d) = (a-c)\,(b-d)\,, \tag{4.17}$$

kterou nejprve pro libovolná komplexní čísla a, b, c, d ověříme. Skutečně

$$\begin{aligned}(a-b)\,(c-d) + (b-c)\,(a-d) &= ac - ad - bc + bd + ab - bd - ac + cd = \\ &= ab - ad - bc + cd = (a-c)\,(b-d)\,.\end{aligned}$$

Odtud a z připomenuté trojúhelníkové nerovnosti pro čísla $z_1 = (a-b)\,(c-d)$ a $z_2 = (b-c)\,(a-d)$ dostáváme, že pro libovolná různá komplexní čísla a, b, c, d platí

$$|a-b|\,|c-d| + |b-c|\,|a-d| \geq |a-c|\,|b-d|\,,$$

což dokazuje platnost vztahu (4.16), když za a, b, c, d vybereme komplexní souřadnice čtyř bodů A, B, C, D. Přitom rovnost zde nastane tehdy a jen tehdy, když $z_1 = 0$ nebo $z_2 = 0$, což je splněno v situacích $a = b$, $b = c$, $c = d$, příp. $a = d$, tedy jedině tehdy, když splynou alespoň některé dva body z dvojic A, B, resp. B, C, resp. C, D, resp. A, D, nebo komplexní číslo $\frac{(a-b)(c-d)}{(b-c)(a-d)}$ je reálné kladné číslo neboli číslo $\frac{a-b}{a-d} : \frac{c-b}{c-d} = (B, D, A, C)$ je reálné záporné číslo, což mj. podle Věty 21 uvedené na str. 59 znamená, že body A, B, C, D jsou koncyklické nebo kolineární.

Podle Věty 27, str. 70, o polaritě dvojpoměru (A, B, C, D) vzhledem k uspořádání jeho bodů na kružnici nebo přímce je nám známo, že je záporný pro permutace $ACBD$, $ADBC$, $BCAD$ a $BDAC$. Po provedení příslušných substitucí $A \to B$, $B \to D$, $C \to A$, $D \to C$ a abecedním uspořádání vzniklých permutací dostaneme, že dvojpoměr (B, D, A, C) je záporný pro permutace $ABCD$, $ADCB$, $BADC$ a $CBAD$, jak mělo být dokázáno. Q.E.D.

Z právě dokázané věty dostáváme bezprostředně následující tvrzení známé jako *Ptolemaiova věta*:

Důsledek 7. *V libovolném tětivovém čtyřúhelníku je součet součinů délek jeho protilehlých stran roven součinu délek jeho úhlopříček.*

Zároveň však platí i výsledek k Ptolemaiově větě opačný, jak plyne z tvrzení o případu rovnosti v Ptolemaiově nerovnosti. Vedle prvního kritéria (Důsledek 4 na str. 64) tak dostáváme druhé kritérium pro tětivové čtyřúhelníky někdy nazývané *Ptolemaiovo kritérium tětivového čtyřúhelníku*:

Důsledek 8. *Konvexní čtyřúhelník je tětivový tehdy a jen tehdy, když součet součinů délek jeho protilehlých stran je roven součinu délek jeho úhlopříček.*

Odtud navíc získáme elegantní kritérium pro harmonické čtyřúhelníky (viz úvahy bezprostředně předcházející poznámku na str. 71):

Důsledek 9. *Konvexní čtyřúhelník je harmonický, právě když se oba součiny délek jeho protilehlých stran rovnají polovině součinu délek jeho úhlopříček.*

Poznámka. Ptolemaiova věta je spojována se slavným řeckým astronomem Klaúdiem Ptolemaiem, který ji použil ve svém nejznámějším díle *Almagest* k výpočtům délek tětiv kružnice v závislosti na jejich středovém úhlu. Zřejmě však byla známa již před Ptolemaiem, neboť ke stejnému účelu jako on ji použil o více než dvě století dříve řecký astronom Hipparchos[17]. Pozdějším výsledkem je pak Ptolemaiova nerovnost objevená až o více než půl druhého tisíciletí později Leonhardem Eulerem a pojmenovaná na Ptolemaiovu počest.

Dalším snadným důsledkem dokázané Ptolemaiovy nerovnosti, o kterém se zmíníme, je první z implikací Pythagorovy věty (Věta 35, str. 107).

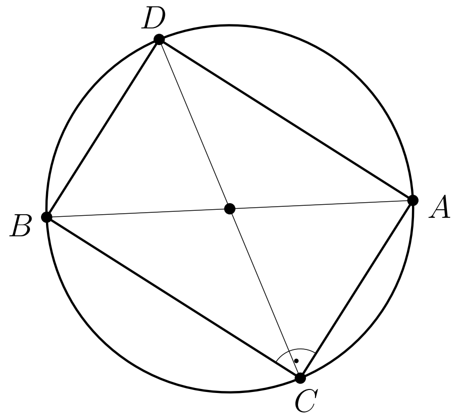
Předpokládejme, že ABC je trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu C, a doplňme jej na rovnoběžník, tedy pravoúhelník $ABCD$. Podle Thaletovy věty (Věta 36, str. 108) je $ACBD$ tětivový čtyřúhelník (se shodnými úhlopříčkami, průměry opsané kružnice, obr. 4.16), takže platí

$$|AC| \cdot |BD| + |BC| \cdot |AD| = |AB| \cdot |CD|,$$

jež s ohledem na rovnosti $|AC| = |BD|$, $|BC| = |AD|$, $|AB| = |CD|$ přejde v

$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2.$$

[17]**Hipparchos** (cca. 190 př. n. l. – cca. 121 př. n. l.) – jeden z největších antických astronomů, který sestavil první velký katalog hvězd.



Obrázek 4.16

4.12 Pappova věta

Na tomto místě uvedeme včetně důkazu významné tvrzení, jež ukazuje zásadní roli dvojpoměru čtyř kolineárních bodů v rámci projektivní geometrie. Důkaz tohoto tvrzení užitím komplexních souřadnic nebyl převzat z žádné literatury.

Věta 49. *Nechť q_1, q_2, q_3, q_4 jsou čtyři navzájem různé přímky protínající se v jediném bodě P. Nechť r je libovolná přímka protínající přímky q_1, q_2, q_3, q_4 ve čtyřech různých bodech A, B, C, D v tomto pořadí. Pak hodnota dvojpoměru (A, B, C, D) nezávisí na umístění přímky r.*

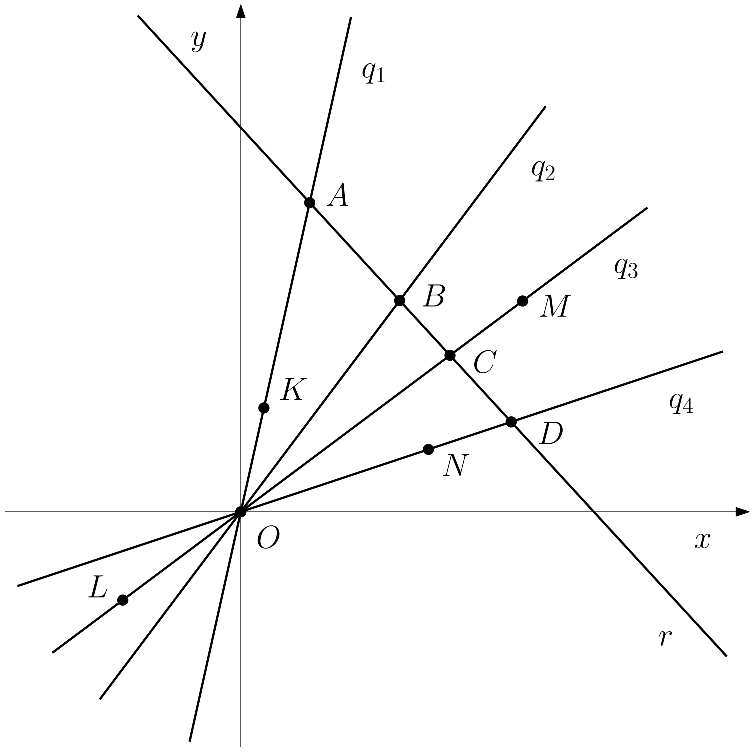
Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme počátek O soustavy komplexních souřadnic ztotožnit s bodem P. Přímky q_1, q_2, q_3, q_4 pak kromě počátku O jistě procházejí ještě některými dalšími čtyřmi různými body K, L, M, N s počátkem O nesplývajícími tak, že žádná z jejich komplexních souřadnic k, l, m, n není reálným násobkem jiné (opak by znamenal, že některá dvě ze čtyř přímek q_1, q_2, q_3, q_4 jsou totožné; obr. 4.17).

K přímce r a jí odpovídající čtveřici různých bodů A, B, C, D budeme hledat vyjádření komplexních souřadnic c, d pomocí komplexních souřadnic a, b, m, n.

Bod C je průsečíkem různoběžných přímek $r = AB$, $q_3 = OM$. Jeho komplexní souřadnici c tedy dostaneme podle vzorce (1.42) uvedeného na str. 45 v Lemmatu 2 (po provedení příslušných substitucí $z \to c$, $c \to m$ a $d \to 0$) jako

$$c = \frac{\left(a\overline{b} - \overline{a}b\right) m + (b-a)\cdot 0}{-\left(\overline{a} - \overline{b}\right) m + (a-b)\,\overline{m}} = \frac{\left(a\overline{b} - \overline{a}b\right) m}{(a-b)\,\overline{m} - \left(\overline{a} - \overline{b}\right) m},$$

a odtud bychom záměnou $m \to n$ (a $\overline{m} \to \overline{n}$) obdrželi vyjádření komplexní souřad-



Obrázek 4.17

nice d bodu D, které zde nebudeme explicitně vypisovat.

Pro poměr $(C; A, B) = \frac{c-a}{c-b}$ tak máme

$$\frac{c-a}{c-b} = \frac{\frac{\left(a\overline{b}-\overline{a}b\right)m}{(a-b)\overline{m}-\left(\overline{a}-\overline{b}\right)m} - a}{\frac{\left(a\overline{b}-\overline{a}b\right)m}{(a-b)\overline{m}-\left(\overline{a}-\overline{b}\right)m} - b} = \frac{\left(a\overline{b}-\overline{a}b\right)m - a\,(a-b)\,\overline{m} + a\left(\overline{a}-\overline{b}\right)m}{\left(a\overline{b}-\overline{a}b\right)m - b\,(a-b)\,\overline{m} + b\left(\overline{a}-\overline{b}\right)m} =$$

$$= \frac{a\overline{b}m - \overline{a}bm - a^2\overline{m} + ab\overline{m} + a\overline{a}m - a\overline{b}m}{a\overline{b}m - \overline{a}bm - ab\overline{m} + b^2\overline{m} + \overline{a}bm - b\overline{b}m} = \frac{ab\overline{m} + a\overline{a}m - \overline{a}bm - a^2\overline{m}}{a\overline{b}m - ab\overline{m} + b^2\overline{m} - b\overline{b}m},$$

a odtud výše zmíněnou záměnou komplexní souřadnice m za n dostaneme pro poměr $(D; A, B) = \frac{d-a}{d-b}$ vyjádření

$$\frac{d-a}{d-b} = \frac{ab\overline{n} + a\overline{a}n - \overline{a}bn - a^2\overline{n}}{a\overline{b}n - ab\overline{n} + b^2\overline{n} - b\overline{b}n}.$$

Nyní máme připraveno vše k tomu, abychom vyjádřili dvojpoměr $(A, B, C, D) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$ bodů A, B, C, D v závislosti na komplexních souřadnicích a, b, m, n.

Počítejme

$$\frac{c-a}{c-b}:\frac{d-a}{d-b}=\frac{ab\overline{m}+a\overline{a}m-\overline{a}bm-a^2\overline{m}}{a\overline{b}m-ab\overline{m}+b^2\overline{m}-b\overline{b}m}:\frac{ab\overline{n}+a\overline{a}n-\overline{a}bn-a^2\overline{n}}{a\overline{b}n-ab\overline{n}+b^2\overline{n}-b\overline{b}n}=$$
$$=\frac{\left(ab\overline{m}+a\overline{a}m-\overline{a}bm-a^2\overline{m}\right)\left(a\overline{b}n-ab\overline{n}+b^2\overline{n}-b\overline{b}n\right)}{\left(ab\overline{n}+a\overline{a}n-\overline{a}bn-a^2\overline{n}\right)\left(a\overline{b}m-ab\overline{m}+b^2\overline{m}-b\overline{b}m\right)}.$$

Odtud budeme upravovat čitatele posledního zlomku samostatně, jelikož se od jmenovatele liší pouze záměnou komplexních souřadnic m a n. Po roznásobení obou jeho závorek dostaneme

$$a^2b\overline{b}\overline{m}n-a^2b^2\overline{m}\overline{n}+ab^3\overline{m}\overline{n}-ab^2\overline{b}\overline{m}n+a^2\overline{a}\overline{b}mn-a^2\overline{a}bm\overline{n}+a\overline{a}b^2m\overline{n}-a\overline{a}b\overline{b}mn-$$
$$-a\overline{a}b\overline{b}mn+a\overline{a}b^2m\overline{n}-\overline{a}b^3m\overline{n}+\overline{a}b^2\overline{b}mn-a^3\overline{b}\overline{m}n+a^3b\overline{m}\overline{n}-a^2b^2\overline{m}\overline{n}+a^2b\overline{b}\overline{m}n,$$

což je po sečtení stejných členů a jejich následném přeskupení rovno

$$a^3b\overline{m}\overline{n}-a^3\overline{b}\overline{m}n-a^2\overline{a}bm\overline{n}+a^2\overline{a}\overline{b}mn-2a^2b^2\overline{m}\overline{n}+2a^2b\overline{b}\overline{m}n+$$
$$+2a\overline{a}b^2m\overline{n}-2a\overline{a}b\overline{b}mn+ab^3\overline{m}\overline{n}-ab^2\overline{b}\overline{m}n-\overline{a}b^3m\overline{n}+\overline{a}b^2\overline{b}mn=$$
$$=a^2\left(ab\overline{m}\overline{n}-a\overline{b}\overline{m}n-\overline{a}bm\overline{n}+\overline{a}\overline{b}mn\right)-2ab\left(ab\overline{m}\overline{n}-a\overline{b}\overline{m}n-\overline{a}bm\overline{n}+\overline{a}\overline{b}mn\right)+$$
$$+b^2\left(ab\overline{m}\overline{n}-a\overline{b}\overline{m}n-\overline{a}bm\overline{n}+\overline{a}\overline{b}mn\right)=\left(a^2-2ab+b^2\right)\left(a\overline{m}-\overline{a}m\right)\left(b\overline{n}-\overline{b}n\right)=$$
$$=(a-b)^2\left(a\overline{m}-\overline{a}m\right)\left(b\overline{n}-\overline{b}n\right).$$

Jmenovatel zkoumaného zlomku je pak analogicky roven výrazu

$$(a-b)^2\left(a\overline{n}-\overline{a}n\right)\left(b\overline{m}-\overline{b}m\right).$$

Dohromady tak dostáváme, že

$$(A,B,C,D)=\frac{(a-b)^2\left(a\overline{m}-\overline{a}m\right)\left(b\overline{n}-\overline{b}n\right)}{(a-b)^2\left(a\overline{n}-\overline{a}n\right)\left(b\overline{m}-\overline{b}m\right)}=\frac{\left(a\overline{m}-\overline{a}m\right)\left(b\overline{n}-\overline{b}n\right)}{\left(a\overline{n}-\overline{a}n\right)\left(b\overline{m}-\overline{b}m\right)}.$$

Nyní připomeňme, že A, B jsou proměnné body pevných přímek $q_1=OK$, resp. $q_2=OL$, takže jejich souřadnice jsou zřejmě tvaru $a=\alpha k$, resp. $b=\beta l$, kde parametry α, β jsou reálná čísla (různá od nuly, neboť $A\neq O\neq B$ podle předpokladu věty). Dosazením těchto vyjádření čísel a, b do odvozeného vzorce pro dvojpoměr

(A, B, C, D) dostaneme

$$(A, B, C, D) = \frac{\alpha\beta\left(k\overline{m} - \overline{k}m\right)\left(l\overline{n} - \overline{l}n\right)}{\alpha\beta\left(k\overline{n} - \overline{k}n\right)\left(l\overline{m} - \overline{l}m\right)} = \frac{\left(k\overline{m} - \overline{k}m\right)\left(l\overline{n} - \overline{l}n\right)}{\left(k\overline{n} - \overline{k}n\right)\left(l\overline{m} - \overline{l}m\right)}. \tag{4.18}$$

Hodnota dvojpoměru (A, B, C, D) tudíž závisí pouze na umístění přímek q_1, q_2, q_3, q_4, nikoliv však na poloze přímky r, jak mělo být dokázáno. Q.E.D.

Poznámka. Povšimněme si, že podmínka, že žádná z komplexních souřadnic k, l, m, n bodů K, L, M, N není reálným násobkem jiné odpovídá tomu, že hodnota dvojpoměru (A, B, C, D) udaná vzorcem (4.18) je reálná (tedy i konečná) a různá od nuly i jedné. Poslední možnost by totiž znamenala

$$\frac{\left(k\overline{m} - \overline{k}m\right)\left(l\overline{n} - \overline{l}n\right)}{\left(k\overline{n} - \overline{k}n\right)\left(l\overline{m} - \overline{l}m\right)} = 1,$$

což je ekvivalentní tomu, že

$$\begin{gathered}\left(k\overline{m} - \overline{k}m\right)\left(l\overline{n} - \overline{l}n\right) = \left(k\overline{n} - \overline{k}n\right)\left(l\overline{m} - \overline{l}m\right), \\ kl\overline{m}\overline{n} - k\overline{l}\overline{m}n - \overline{k}lm\overline{n} + \overline{k}\overline{l}mn = kl\overline{m}\overline{n} - k\overline{l}m\overline{n} - \overline{k}l\overline{m}n + \overline{k}\overline{l}mn,\end{gathered}$$

odkud po zrušení stejných členů na obou stranách poslední rovnosti a jednoduché úpravě dostaneme

$$k\overline{l}\overline{m}n + \overline{k}lm\overline{n} = k\overline{l}m\overline{n} + \overline{k}l\overline{m}n \qquad \text{neboli} \qquad k\overline{l}\left(\overline{m}n - m\overline{n}\right) = \overline{k}l\left(\overline{m}n - m\overline{n}\right),$$

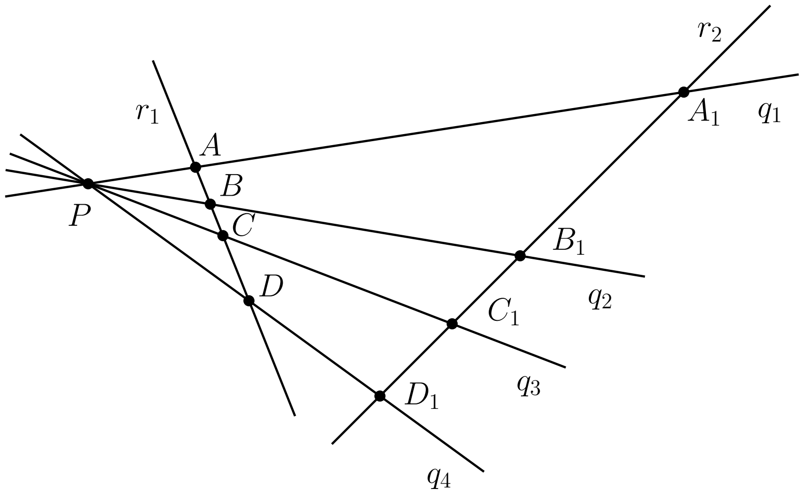
přičemž hodnota výrazu v závorkách vystupujících na obou stranách poslední rovnosti je nenulová, neboť opak by znamenal

$$\overline{m}n = m\overline{n} \qquad \text{čili} \qquad \frac{m}{n} = \overline{\left(\frac{m}{n}\right)},$$

jelikož $n \neq 0$, tedy rovněž $\overline{n} \neq 0$. Tuto možnost však požadavek $m \neq tn$, $t \in \mathbb{R}^*$ vylučuje, proto by muselo platit $k\overline{l} = \overline{k}l$, avšak i tato eventualita je ze stejného důvodu vyloučena.

Pappova[18] věta, kterou v pozdně-antickém Řecku dokázal Pappos z Alexandrie, bývá obvykle uváděna v poněkud odlišném, avšak zřejmě ekvivalentním znění, ze kterého je patrnější její význam v projektivní geometrii:

[18] **Pappos z Alexandrie** (cca. 290 – cca. 350) – jeden z posledních starověkých řeckých matematiků, známý svým dílem *Synagogé* čili *Sbírka*.



Obrázek 4.18

Věta 50. *Nechť q_1, q_2, q_3, q_4 jsou čtyři vzájemně různé přímky protínající se v jediném bodě P. Nechť libovolné přímky r_1, r_2 protínají přímky q_1, q_2, q_3, q_4 právě ve čtyřech různých bodech A, B, C, D, resp. A_1, B_1, C_1, D_1 v tomto pořadí (obr. 4.18). Pak dvojpoměr (A, B, C, D) je roven dvojpoměru (A_1, B_1, C_1, D_1).*

Řečí projektivní geometrie tedy Pappova věta tvrdí, že středové promítání čtveřice kolineárních bodů na obecně jinou čtveřici kolineárních bodů zachovává jejich dvojpoměr.

Závěr

Hlavní smysl předložené rigorózní práce vidím v završení a sjednocení veškeré práce, kterou jsem na tomto tématu vykonal během svého bakalářského a magisterského studia. Domnívám se, že její přednost a hlavní přínos spočívá ve zpracování netradičního tématu, které v české ani zahraniční matematické literatuře není výrazně zastoupeno. Práce by tak jistě mohla najít svoje využití jako doplněk základního vysokoškolského kurzu geometrie, který v současnosti spojení komplexních čísel s geometrickými aplikacemi poněkud opomíjí. Zároveň umožňuje čtenáři vázanému na česky psanou matematickou literaturu seznámit se s poznatky, jakými jsou tvrzení o Mongeově bodě nebo výsledky označované jmény Newtona či Gausse, které nebývají běžnou součástí našich geometrických učebnic.

Jsem si dobře vědom toho, že téma eukleidovské geometrie v komplexní rovině není předloženým textem ani zdaleka vyčerpáno. Tato práce se např. nevěnuje hlouběji studiu rovnostranných trojúhelníků, složitějším geometrickým zobrazením (explicitně je užíváno jen posunutí a otočení), není ani rozebráno bohaté využití podobnosti trojúhelníků ani praktické aplikace v přírodních vědách, zejména fyzice. Těmto a dalším otázkám je proto věnováno moje doktorské studium a bude o nich pojednávat moje budoucí disertační práce.

Seznam použité literatury

[1] Hahn L.-s. *Complex Numbers and Geometry*, The Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1994.

[2] Ráb M. *Komplexní čísla v elementární matematice*, MU, Brno, 1997.

[3] Ponarin Ja. P. *Algebra komplexnych čisel v geometričeskich zadačach*, MCNMO, Moskva, 2004.

[4] Leischner P. *Ptolemaiova nerovnost*, Matematika – Fyzika – Informatika, Vol. 15, 2005/2006 No. 3 (Listopad 2005), 385–387, Praha.

[5] Andreescu T., Andrica T. *Complex Numbers from A to... Z*, Birkhäuser Boston, Boston, 2006.

[6] Halliday D., Resnick. R., Walker. J. (překlad Musilová J., Dub P., Obdržálek J. a kol.) *Fyzika*, VUTIUM a PROMETHEUS, Brno, 2006.

[7] Deaux R. (překlad Eves H.) *Introduction to the Geometry of Complex Numbers*, Dover Publications, Inc., New York, 2008.

[8] Boháč P. *Geometrie komplexních čísel, Bakalářská práce*, MU, Brno, 2010.

[9] Kuřina F. *Důkazy a kalkuly*, Matematika – Fyzika – Informatika, Vol. 20, 2010/2011 No. 1 (Září 2010), 12–18, Praha.

[10] Boháč P. *Eukleidovská geometrie v komplexní rovině, Diplomová práce*, MU, Brno, 2012.

[11] Elbelová J. *Otáčení v rovině a komplexní čísla, Rigorózní práce*, MU, Brno, 2012.