MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

Metody odvozování kombinatorických výsledků

Diplomová práce

Nella Fedorowyczová

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc. **Brno 2020**

Obsah

Úvod

Diplomová práce navazuje na bakalářskou práci autorky, věnovanou principu bijekce a jeho využití při řešení kombinatorických úloh. Jejím cílem je ukázat rozmanitost dalších metod, jimiž lze kombinatorické úlohy řešit, a přitom seznámit čtenáře i s těmi méně obvyklými. Autorka studující učitelství matematiky a fyziky pro střední školy doufá, že s některými z úloh řešených v této práci jednou seznámí i své žáky. Vytvořená sbírka příkladů je určena i dalším studentům/absolventům učitelství matematiky.

Nejvíce úloh v práci bylo řešeno metodou „double counting“ (česky „počítání dvěma způsoby“). Tato metoda byla využita u úloh 1,1, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.10, 2.15, 2.22, 2.23, 3.4, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.11, 3.12, 3.20.

Několik dalších úloh v práci bylo řešeno pomocí aparátu matematické analýzy. Ten byl využit u úloh 1.9, 1.11 (důkazu identity *Li-Žen-Šu*, jejíž jiný důkaz uvádí bakalářská práce autorky), 1.12, 3.20, 3.24.

Rekurentní metoda byla využita u úloh 1.4, 1.5, 1.6, 2.13, 2.14, 2.20, 3.25, 3.26, 3.27.

Práce obsahuje také úlohy, při jejichž řešení byl využit Dirichletův princip; jde o úlohy 2.5, 2.6, 2.7, 3.1, 3.18.

Úlohy 2.18, 2.19, 3.10 byly řešeny pomocí konstrukce vhodného zobrazení.

U některých dalších úloh v této práci se čtenář setká kupříkladu s důkazem matematickou indukcí (úlohy 1.2, 1.5, 1.6, 1,8, 1,9, 1.12, 2.11) či důkazem sporem (úlohy 2.12, 2.17, 2.25, 3.5, 3.18, 3.22). Práce rovněž obsahuje úlohy řešené pomocí vhodného odhadu hledaného počtu daných prvků (úlohy 2.26, 3.2, 3.3, 3.15) či úlohy na pokrytí daného obrazce (úlohy 3.13, 3.14), úlohu řešenou jazykem teorie grafů (úloha 3.24) a rovněž několik úloh, které do žádné z předchozích skupin zařadit nelze (kupříkladu úlohy 1.3, 2.8, 3.16).

Práce je rozdělena do tří kapitol. První kapitola se skládá z důkazů vybraných kombinatorických identit převzatých z knihy *Kombinatorické identity* od J. Kauckého. Oproti původnímu textu jsou řešení v této práci sepsána podrobněji. Právě v první kapitole čtenáři najdou většinu úloh celé práce, při jejichž řešení je využit aparát matematické analýzy. Mnohé kombinatorické identity v této kapitole jsou dokázány matematickou indukcí.

Do druhé kapitoly byly zařazeny příklady z knihy *Combinatorial Problems in Mathematical Competitions* od Y. Zhanga. Kapitola obsahuje úlohy řešené téměř všemi výše uvedenými metodami. Také u úloh v této kapitole bylo třeba některá řešení sepsat podrobněji, v jednom případě autorka upravila i samotné zadání (úloha 2.24).

Třetí kapitola je tvořena příklady z dalších, převážně zahraničních zdrojů. Nejvíce z úloh v této kapitole bylo převzato z knihy *The IMO Compendium* od kolektivu autorů. Další úlohy v této kapitole byly převzaty například z webu www.matematickaolympiada.cz, z knihy *A Path to Combinatorics for Undergraduates* dvojice autorů Andreescu, Feng či z článku *Sets and Subsets* od T. W. Leunga. Zdroj každého příkladu kapitoly 3 je uveden v poznámce pod čarou, na niž je připojen odkaz na konci zadání příkladu. Také tato kapitola obsahuje úlohy řešené téměř všemi výše uvedenými metodami a i zde bylo třeba některá řešení příkladů doplnit a sepsat podrobněji (což se nejvíce projevilo u úlohy 3.24).

V rámci studia zahraničních zdrojů se autorka práce seznámila také s knihou *Combinatorics* od Russella Merrise, ze které však nakonec do práce žádnou úlohu nezařadila.

Kromě všeobecně vžitých matematických symbolů není v práci užito žádné další speciálně zaváděné symboliky. Upozorněme na tomto místě však, že zejména v kapitole 1 chápeme pojem kombinačního čísla v rozšířeném významu

$$\tbinom{x}{k} = \tfrac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!} \text{ pro každé } x \in \mathbb{R} \text{ a každé } k \in \mathbb{N}_0.$$

Ve druhé a třetí kapitole byla opakovaně využita **Cauchyova nerovnost**:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)^2,$$

kde $n \in \mathbb{N}$ a $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$.

U příkladu 3.24 byla rovněž využita **Weierstrassova věta**: Nechť funkce f je spojitá na kompaktní množině $M \subset \mathbb{R}^n$. Pak funkce f nabývá na M své nejmenší a největší hodnoty.

Text práce byl vysázen v T_EXu, všechny obrázky byly vytvořeny programem GeoGebra.

Kapitola 1

Příklady z knihy J. Kauckého

Kombinatorické identity v této kapitole a jejich důkazy jsou převzaty ze skript *Kombinatorické identity* od J. Kauckého ([5]).

Příklad 1. Dokažte, že pro libovolná celá čísla $p \geq 0$ a $q \geq 0$ platí následující rovnost dvou polynomů dvou reálných proměnných α a β:

$$\sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \binom{q}{i} \alpha^{p-i} \beta^{i} = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \binom{q+i}{i} (\alpha - \beta)^{p-i} \beta^{i}.$$ [1]

Řešení (Ljunggrenův důkaz). Danou identitu dokážeme tak, že dvěma způsoby vypočítáme koeficient u x^p v součinu

$$(\alpha x + \beta)^p (1+x)^q.$$

Využijeme binomickou větu a dostáváme

$$(\alpha x + \beta)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} (\alpha x)^{p-i} \beta^{i}, \qquad (1+x)^q = \sum_{i=0}^{q} \binom{q}{i} x^{i},$$

takže koeficient u x^p v daném součinu je roven

$$\sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \binom{q}{i} \alpha^{p-i} \beta^{i}.$$

Dále pro stejný součin ovšem platí

$$(\alpha x + \beta)^p (1+x)^q = \{x(\alpha - \beta) + \beta(1+x)\}^p (1+x)^q =$$

$$= \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} (\alpha - \beta)^{p-i} \beta^{i} x^{p-i} (1+x)^{q+i},$$

a proto koeficient u x^p v rozvoji tohoto součinu je rovněž roven

$$\sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \binom{q+i}{i} (\alpha - \beta)^{p-i} \beta^{i}.$$

[1] v knize str. 166

Porovnáním obou součtů dostaneme žádanou identitu.

Příklad 2. Dokažte, že pro každé celé číslo $n \geq 0$ a libovolná reálná čísla x a y platí Cauchyova kombinatorická formule (neboli takzvaný adiční teorém pro zobecněné binomické koeficienty):

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k} = \binom{x+y}{n}.\text{[2]} \tag{1}$$

Řešení. Pro $n = 0$ je daná formule zřejmě správná. Dále předpokládejme, že formule platí pro nějaké $n \geq 0$, a dokažme ji pro hodnotu n o 1 větší, tj. vztah

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{x}{k}\binom{y}{n+1-k} = \binom{x+y}{n+1}. \tag{2}$$

Jelikož

$$\binom{x+y}{n+1} = \frac{x+y-n}{n+1}\binom{x+y}{n},$$

pravá strana dokazované formule (2) vznikne z pravé strany předpokládané formule (1) vynásobením zlomkem

$$\frac{x+y-n}{n+1}.$$

Abychom dokázali správnost vztahu (2), vynásobíme i levou stranu předpokládané formule (1) tímto zlomkem a přesvědčíme se, že tak dostaneme levou stranu formule (2).

Tímto násobením a dalšími úpravami postupně dostáváme

$$\frac{x+y-n}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{x}{k}\binom{y}{n-k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\{y-n+k+(x-k)\}\binom{x}{k}\binom{y}{n-k} =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left\{\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)\binom{x}{k}\binom{y}{n-k}\frac{y-n+k}{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{x}{k}\frac{x-k}{k+1}\binom{y}{n-k}\right\} =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left\{\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)\binom{x}{k}\binom{y}{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{x}{k+1}\binom{y}{n-k}\right\}.$$

Tento výraz dále upravme tak, že v prvním součtu oddělíme první člen a ve druhém součtu poslední člen. Dostáváme:

$$\frac{x+y-n}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{x}{k}\binom{y}{n-k} =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left\{(n+1)\binom{x}{0}\binom{y}{n+1} + \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\binom{x}{k}\binom{y}{n-k+1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\binom{x}{k+1}\binom{y}{n-k} + (n+1)\binom{x}{n+1}\binom{y}{0}\right\}.$$

[2] v knize str. 45–46

Užijeme-li jednoduché substituce $k' = k+1$, druhý součet přejde ve výraz

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{x}{k} \binom{y}{n+1-k},$$

který lze člen po členu spojit s prvním součtem, takže dále

$$\frac{x+y-n}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} \binom{y}{n-k} = \frac{1}{n+1} \left\{ (n+1) \binom{x}{0} \binom{y}{n+1} + \right.$$

$$\left. + (n+1) \sum_{k=1}^{n} \binom{x}{k} \binom{y}{n+1-k} + (n+1) \binom{x}{n+1} \binom{y}{0} \right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{x}{k} \binom{y}{n+1-k}.$$

To je však levá strana vztahu (2). Tím jsme indukcí dokázali platnost Cauchyovy kombinatorické formule pro každé celé $n \geq 0$.

Příklad 3. Dokažte, že pro každé celé číslo $n \geq 0$ a libovolná reálná čísla x a y platí Hagenův vzorec: [3]

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{x-k}{n-k} \binom{y+k}{k} = \binom{x+y+1}{n}. \tag{3}$$

Řešení. Podle převodního vzorce

$$(-1)^m \binom{m-t-1}{m} = \binom{t}{m}$$

platí rovnosti

$$(-1)^{n-k} \binom{x-k}{n-k} = \binom{n-x-1}{n-k}, \qquad (-1)^k \binom{y+k}{k} = \binom{-y-1}{k},$$

$$(-1)^n \binom{n-x-y-2}{n} = \binom{x+y+1}{n}.$$

Jejich užitím dostáváme

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{x-k}{n-k} \binom{y+k}{k} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{x-k}{n-k} (-1)^k \binom{y+k}{k} =$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n-x-1}{n-k} \binom{-y-1}{k} = (-1)^n \binom{n-x-y-2}{n} = \binom{x+y+1}{n},$$

kde k určení sumy před čtvrtým rovnítkem jsme uplatnili Cauchyovu formuli z příkladu 2. Tím je Hagenova formule dokázána.

---

[3] v knize str. 48. Neúplné řešení ve zdroji doplněno vedoucím diplomové práce.

Pro zajímavost uveďme ještě důkaz z článku *Elementary Proofs for Convolution Identities of Abel and Hagen–Rothe* od W. Chua ([4]). Z Cauchyovy kombinatorické formule z příkladu 2 plyne, že pro každé $k = 0, 1, \ldots, n$ platí

$$\binom{x-k}{n-k} = \sum_{i=k}^{n} \binom{x+y+1}{n-i} \binom{-y-1-k}{i-k}. \tag{4}$$

Levou stranu vzorce (3) tedy můžeme s pomocí (4) přepsat do tvaru

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{y+k}{k} \binom{x-k}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{y+k}{k} \sum_{i=k}^{n} \binom{x+y+1}{n-i} \binom{-y-1-k}{i-k}.$$

Po „přesumování“ a zohlednění, že pro $k = 0, 1, \ldots, i$ platí

$$\binom{y+k}{k} \binom{-y-1-k}{i-k} =$$

$$= \frac{(y+k)(y+k-1)\cdots(y+1)}{k!} \cdot \frac{(-1)^{i-k}(y+k+1)(y+k+2)\cdots(y+i)}{(i-k)!} =$$

$$= (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \binom{y+i}{i},$$

dostáváme pro levou stranu (3) vyjádření

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{x+y+1}{n-i} \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \binom{y+i}{i}.$$

Jelikož koeficient $\binom{y+i}{i}$ na sumačním indexu k nezávisí, můžeme ho z vnitřní sumy vytknout a dostaneme

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{x+y+1}{n-i} \binom{y+i}{i} \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k}.$$

Vnitřní suma potom odpovídá binomickému rozvoji $(1-1)^i$, takže je pro každé $i > 0$ rovna nule.

Ve vnější sumě tedy stačí vzít $i = 0$. Dostáváme, že celá suma je rovna $\binom{x+y-1}{n}$ a důkaz Hagenova vzorce je hotov.

Příklad 4. Dokažte pro každé celé $n \geq 0$ Morleyovu–Dixonovu formuli:

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^3 = (-1)^n \frac{(3n)!}{(n!)^3}.$$ [4]

Řešení (Richmondův důkaz). Nejdříve dokážeme následující pomocnou větu, která pak bude základem důkazu dané formule.

[4] v knize str. 193, 201–204

Pomocná věta. Absolutní člen v rozvoji výrazu s přirozenými čísly p, q

$$(x-x^{-1})^{2p}(x+x^{-1})^{2q}$$

je roven

$$(-1)^p \frac{(2p)!(2q)!}{p!q!(p+q)!}.$$

Důkaz. Zapišme tento absolutní člen (tj. člen s mocninou x^0) ve tvaru

$$(-1)^p V(p,q).$$

Uvážíme-li, že

$$(x-x^{-1})^{2p}(x+x^{-1})^{2(q+1)} = (x-x^{-1})^{2(p+1)}(x+x^{-1})^{2q} + 4(x-x^{-1})^{2p}(x+x^{-1})^{2q},$$

dostaneme porovnáním absolutních členů obou stran rekurentní vztah

$$V(p,q+1) = 4V(p,q) - V(p+1,q).$$

Využijeme ho k důkazu pomocné věty indukcí vzhledem ke q. Pro libovolné p a $q=1$ je absolutní člen v rozvoji příslušného součinu

$$(x-x^{-1})^{2p}(x^2+2+x^{-2}) = (x^2+2+x^{-2}) \sum_{k=0}^{2p} (-1)^k \binom{2p}{k} x^{-k} x^{2p-k}$$

roven

$$2(-1)^p \binom{2p}{p} + (-1)^{p-1}\binom{2p}{p-1} + (-1)^{p+1}\binom{2p}{p+1} = (-1)^p \frac{(2p)!(2!)}{p!1!(p+1)!},$$

takže v tomto případě je tvrzení správné. Dále předpokládejme, že věta platí pro libovolné p a nějaké $q \geq 1$ a počítejme

$$(-1)^p V(p,q+1).$$

S užitím rekurentního vzorce je tento absolutní člen roven

$$4(-1)^p V(p,q) + (-1)^{p+1} V(p+1,q) =$$

$$= (-1)^p \frac{(2p)!(2q)!}{p!(q+1)!(p+q+1)!} \{4(q+1)(p+q+1) - 2(q+1)(2p+1)\}.$$

Jelikož závorka dává $(2q+2)(2q+1)$, je

$$(-1)^p V(p,q+1) = (-1)^p \frac{(2p)!(2q+2)!}{p!(q+1)!(p+q+1)!},$$

což je předpokládaný výraz s $(q+1)$ místo q. Indukce je dokončena a pomocná věta dokázána.

Vlastní důkaz Morleyovy–Dixonovy formule vychází z rozvoje podle binomické věty

$$(1-x)^{2n} = 1 - v_1 x + v_2 x^2 - v_3 x^3 + \cdots,$$

kde $v_k = \binom{2n}{k}$ jsou čísla z levé strany dokazované formule. Ukažme nejdříve, že

$$1 + v_1^2x^2 + v_2^2x^4 + v_3^2x^6 + \cdots$$

je součtem těch členů v rozvoji výrazu

$$(1 - xy)^{2n}(1 - xy^{-1})^{2n} = \{(1 + x^2) - (xy + xy^{-1})\}^{2n},$$

které neobsahují y. Skutečně, součin $(1 - xy)^{2n}(1 - xy^{-1})^{2n}$ má rozvoj

$$(1 - v_1xy + v_2x^2y^2 - \cdots)(1 - v_1xy^{-1} + v_2x^2y^{-2} - \cdots),$$

ze kterého členy, které neobsahují y, získáme tak, že každý člen z první závorky vynásobíme takovým členem ze druhé závorky, který se od něj liší pouze znaménkem exponentu u y. Jedná se tak o dvojici členů $(-1)^k v_k x^k y^k$ a $(-1)^k v_k x^k y^{-k}$, takže součet všech odpovídajících součinů je skutečně takový, jak jsme výše předpověděli.

Počítáme-li ovšem stejnou mocninu jako mocninu rozdílu

$$\{(1 + x^2) - (xy + xy^{-1})\}^{2n} = \sum_{j=0}^{2n} (-1)^j \binom{2n}{j} (1 + x^2)^{2n-j}(xy + xy^{-1})^j, \tag{5}$$

vidíme, že součet těch členů jejího rozvoje, které na y nezávisejí, je

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(2n-2k)!k!k!}(1 + x^2)^{2n-2k}x^{2k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(2n-2k)!k!k!}(x + x^{-1})^{2n-2k}x^{2n}.$$

Skutečně, v součtu (5) se stačí omezit na sudé indexy $j = 2k$, při kterých člen v rozvoji $(xy + xy^{-1})^{2k}$ nezávislý na y bude roven $\binom{2k}{k}x^{2k}$. Porovnáním obou postupů dostáváme identitu

$$1 + v_1^2x^2 + v_2^2x^4 + v_3^2x^6 + \cdots = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(2n-2k)!k!k!}(x + x^{-1})^{2n-2k}x^{2n}.$$

Všimneme-li si nyní, že

$$1 - v_1x^{-2} + v_2x^{-4} - \cdots = (1 - x^{-2})^{2n} = (x - x^{-1})^{2n}x^{-2n},$$

vidíme, že součet

$$1 - v_1^3 + v_2^3 - v_3^3 + \cdots,$$

jehož hodnotu chceme určit, je absolutní člen v součinu

$$(1 + v_1^2x^2 + v_2^2x^4 + \cdots)(1 - v_1x^{-2} + v_2x^{-4} - \cdots),$$

tedy podle odvozeného vyjádření prvního činitele absolutní člen v rozvoji

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(2n-2k)!k!k!}(x + x^{-1})^{2n-2k}(x - x^{-1})^{2n}.$$

Tento absolutní člen je dle pomocné věty roven

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(2n-2k)!k!k!}(-1)^n \frac{(2n)!(2n-2k)!}{n!(n-k)!(2n-k)!} = (-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(2n-k)!k!} \frac{n!}{(n-k)!k!} =$$

$$= (-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} \binom{n}{n-k} = (-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2} \binom{3n}{n} = (-1)^n \frac{(3n)!}{(n!)^3},$$

přičemž jsme využili i Cauchyovy kombinatorické formule z příkladu 2 pro $x = 2n$ a $y = n$.

Tím je důkaz Morleyovy–Dixonovy formule hotov.

Příklad 5. Dokažte pro každé celé $n \geq 0$ Jensenovu identitu:

$$\sum_{s=0}^{n} \binom{p-sd}{n-s} \binom{q+sd}{s} = \sum_{v=0}^{n} \binom{p+q-v}{n-v} d^v \text{[5]},$$

kde p, q a d jsou libovolná reálná čísla. (Pro $d = 0$ klademe na pravé straně $0^0 = 1$; tehdy Jensenova identita přechází v Cauchyovu kombinatorickou formuli z příkladu 2 v označení $x = q$ a $y = p$.)

Řešení. Ukážeme nejprve, že Jensenova identita s pevným n a libovolnými p, q, d je důsledkem identity

$$\sum_{s=0}^{n} \frac{1}{q+sd} \binom{p-sd}{n-s} \binom{q+sd}{s} = \frac{1}{q} \binom{p+q}{n},$$

jejíž důkaz uvedeme až poté stejně jako vysvětlení, jak tuto identitu chápeme v situacích, kdy některé z čísel $q, q+d, \ldots, q+nd$ je rovno nule.

Z této identity po vynásobení q je totiž

$$\binom{p+q}{n} = \sum_{s=0}^{n} \frac{q+sd-sd}{q+sd} \binom{p-sd}{n-s} \binom{q+sd}{s} =$$

$$= \sum_{s=0}^{n} \binom{p-sd}{n-s} \binom{q+sd}{s} - d \sum_{s=1}^{n} \binom{p-sd}{n-s} \binom{q-1+sd}{s-1} =$$

$$= \sum_{s=0}^{n} \binom{p-sd}{n-s} \binom{q+sd}{s} - d \sum_{s=0}^{n-1} \binom{p-sd-d}{n-s-1} \binom{q-1+sd+d}{s},$$

jelikož

$$\frac{sd}{q+sd} \binom{q+sd}{s} = \frac{sd \cdot (q+sd)!}{(q+sd) \cdot s!(q+sd-s)!} = d \frac{(q+sd-1)!}{(s-1)!(q+sd-s)!} = d \binom{q+sd-1}{s-1}.$$

A proto při označení

$$S(p, q; n) = \sum_{s=0}^{n} \binom{p-sd}{n-s} \binom{q+sd}{s}$$

[5] v knize str. 243–247

dostáváme rekurentní vztah

$$S(p,q;n) = \binom{p+q}{n} + dS(p-d, q-1+d; n-1).$$

Z něho máme postupně

$$dS(p-d, q-1+d; n-1) = d\binom{p+q-1}{n-1} + d^2S(p-2d, q-2+2d; n-2),$$

$$d^2S(p-2d, q-2+2d; n-2) = d^2\binom{p+q-2}{n-2} + d^3S(p-3d, q-3+3d; n-3),$$

$$\dots$$

$$d^{n-1}S(p-(n-1)d, q-(n-1)+(n-1)d; 1) = d^{n-1}\binom{p+q-(n-1)}{n-(n-1)} + d^n,$$

k tomu připíšeme zřejmou rovnost

$$d^n = d^n\binom{p+q-n}{n-n}.$$

Sečtením všech těchto rovností dostáváme Jensenův vzorec pro dané n a libovolná p,q,d.

Přejděme k důkazu užité pomocné identity, kterou pro přehlednost zopakujeme:

$$\sum_{s=0}^{n} \frac{1}{q+sd}\binom{p-sd}{n-s}\binom{q+sd}{s} = \frac{1}{q}\binom{p+q}{n}.$$

Nejprve vysvětlíme, jak tuto identitu chápeme, je-li některé z čísel $q, q+d, \dots q+nd$ rovno nule.

V případě $q=0$ nemá smysl ani levá, ani pravá strana identity. Smysl však má identita, kterou dostaneme po vynásobení obou stran q:

$$\sum_{s=0}^{n} \frac{q}{q+sd}\binom{p-sd}{n-s}\binom{q+sd}{s} = \binom{p+q}{n}.$$

Vrátíme-li se k důkazu samotné Jensenovy identity, vidíme, že jsme pracovali právě s takto vynásobenou pomocnou identitou.

Nyní přejdeme k případu, kdy některé z čísel $q+d, q+2d, \dots, q+nd$ je rovno nule. V případě, kdy $q+sd=0$ ($s \geq 1$), je i $\binom{q+sd}{s}=0$ a nedefinovaný součin na levé straně

$$\frac{1}{q+sd}\binom{q+sd}{s} = \frac{(q+sd)(q+sd-1)\cdots(q+sd-s+1)}{(q+sd)s!}$$

chápeme ve smyslu, který dostaneme, když „zkrátíme“ první dva činitele (rovné nule). „Zkrácený“ výraz můžeme přepsat ve tvaru, který už má smysl:

$$\frac{1}{s}\binom{q+sd-1}{s-1}.$$

Důkaz identity povedeme indukcí vzhledem k n, při kterém budeme využívat Jensenův vzorec pro ta n, pro něž bude už pomocná identita dokázána. Pro $n = 0$ vztah platí. Dále označme součet na levé straně jako $S(p,q;n,d)$ a předpokládejme, že pro nějaké $n \geq 0$ je

$$S(p,q;n,d) = \frac{1}{q}\binom{p+q}{n}.$$

Dokážeme, že pak platí i

$$S(p,q;n+1,d) = \frac{1}{q}\binom{p+q}{n+1}.$$

Proto zapišme

$$\frac{1}{q}\binom{p+q}{n+1} = \frac{1}{q}\binom{p+q}{n}\frac{p+q-n}{n+1} = \frac{p+q-n}{n+1}S(p,q;n,d) =$$

$$= \frac{p+q-n}{n+1}\left\{\frac{1}{q}\binom{p}{n} + \sum_{s=1}^{n}\frac{1}{s}\binom{p-sd}{n-s}\binom{q+sd-1}{s-1}\right\}.$$

Zlomkem složenou závorku roznásobme. Předně je

$$\frac{1}{q}\binom{p}{n}\frac{p+q-n}{n+1} = \frac{1}{q}\binom{p}{n}\frac{p-n}{n+1} + \frac{1}{n+1}\binom{p}{n} = \frac{1}{q}\binom{p}{n+1} + \frac{1}{n+1}\binom{p}{n}.$$

Dále máme

$$\frac{p+q-n}{n+1}\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{s}\binom{p-sd}{n-s}\binom{q-1+sd}{s-1} =$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{s=1}^{n}\frac{p-n-(d-1)s+q+(d-1)s}{s}\binom{p-sd}{n-s}\binom{q-1+sd}{s-1} =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left\{\sum_{s=1}^{n}\frac{n+1-s}{s}\cdot\frac{p-n-(d-1)s}{n+1-s}\binom{p-sd}{n-s}\binom{q-1+sd}{s-1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=1}^{n}\binom{p-sd}{n-s}\binom{q-1+sd}{s-1}\frac{q+(d-1)s}{s}\right\}.$$

Druhý součet v poslední závorce je roven

$$\sum_{s=1}^{n}\binom{p-sd}{n-s}\binom{q-1+sd}{s},$$

zatímco první součet dává

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{n+1-s}{s}\binom{p-sd}{n+1-s}\binom{q-1+sd}{s-1} =$$

$$= (n+1)\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{s}\binom{p-sd}{n+1-s}\binom{q-1+sd}{s-1} - \sum_{s=1}^{n}\binom{p-sd}{n+1-s}\binom{q-1+sd}{s-1} =$$

$$= (n+1)\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{s}\binom{p-sd}{n+1-s}\binom{q-1+sd}{s-1} - \sum_{s=0}^{n-1}\binom{p-d-sd}{n-s}\binom{q-1+d+sd}{s}.$$

S využitím těchto výsledků je

$$\frac{p+q-n}{n+1}\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{s}\binom{p-sd}{n-s}\binom{q-1+sd}{s-1} = \sum_{s=1}^{n}\frac{1}{s}\binom{p-sd}{n+1-s}\binom{q-1+sd}{s-1} -$$

$$-\frac{1}{n+1}\sum_{s=0}^{n-1}\binom{p-d-sd}{n-s}\binom{q-1+d+sd}{s} + \frac{1}{n+1}\sum_{s=1}^{n}\binom{p-sd}{n-s}\binom{q-1+sd}{s} =$$

$$= \sum_{s=1}^{n+1}\frac{1}{s}\binom{p-sd}{n+1-s}\binom{q-1+sd}{s-1} - \frac{1}{n+1}\sum_{s=0}^{n}\binom{p-d-sd}{n-s}\binom{q-1+d+sd}{s} +$$

$$+\frac{1}{n+1}\sum_{s=1}^{n}\binom{p-sd}{n-s}\binom{q-1+sd}{s}.$$

Vrátíme-li se nyní k začátku našeho důkazu indukcí, můžeme vidět, že výraz, kterému se má rovnat $S(p,q;n+1,d)$, má hodnotu

$$\frac{1}{q}\binom{p+q}{n+1} = \frac{1}{q}\binom{p}{n+1} + \frac{1}{n+1}\binom{p}{n} + \sum_{s=1}^{n+1}\frac{1}{s}\binom{p-sd}{n+1-s}\binom{q-1+sd}{s-1} -$$

$$-\frac{1}{n+1}\sum_{s=0}^{n}\binom{p-d-sd}{n-s}\binom{q-1+d+sd}{s} + \frac{1}{n+1}\sum_{s=1}^{n}\binom{p-sd}{n-s}\binom{q-1+sd}{s} =$$

$$= \frac{1}{q}\binom{p}{n+1} + \sum_{s=1}^{n+1}\frac{1}{s}\binom{p-sd}{n+1-s}\binom{q-1+sd}{s-1} -$$

$$-\frac{1}{n+1}\sum_{s=0}^{n}\binom{p-d-sd}{n-s}\binom{q-1+d+sd}{s} + \frac{1}{n+1}\sum_{s=0}^{n}\binom{p-sd}{n-s}\binom{q-1+sd}{s}.$$

Nyní ještě využijeme toho, že z předpokladu a platnosti vzorce pro $S(p,q;n,d)$ vyplývá, jak jsme v úvodu celého řešení ukázali, platnost Jensenovy identity pro dotyčné n a libovolné hodnoty p,q,d. Jejím užitím pro dvojice (p,q) zaměněné za $(p-d,q-1+d)$, resp. za dvojici $(p,q-1)$ dostaneme

$$\sum_{s=0}^{n}\binom{p-d-sd}{n-s}\binom{q-1+d+sd}{s} = \sum_{v=0}^{n}\binom{p+q-1}{n-v}d^v = \sum_{s=0}^{n}\binom{p-sd}{n-s}\binom{q-1+sd}{s},$$

takže předchozí odvozená rovnost se zjednoduší do tvaru

$$\frac{1}{q}\binom{p+q}{n+1} = \frac{1}{q}\binom{p}{n+1} + \sum_{s=1}^{n+1}\frac{1}{s}\binom{p-sd}{n+1-s}\binom{q-1+sd}{s-1},$$

kde na pravé straně stojí právě součet $S(p,q;n+1,d)$. Důkaz indukcí je tak ukončen.

1. Bartošova věta. Nechť

$$a_i,\, i=0,1,\dots,n, \qquad x_j,\, j=1,2,\dots,m,$$

jsou daná komplexní čísla. O číslech a_i předpokládáme, že jsou po dvou různá. Označíme-li

$$S(m,n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(a_i - x_1)(a_i - x_2)\cdots(a_i - x_m)}{(a_i - a_0)\cdots(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})\cdots(a_i - a_n)},$$

pak platí vztahy

$$S(n+1,n) = \sum_{i=0}^{n} a_i - \sum_{j=0}^{n+1} x_j, \qquad S(n,n) = 1,$$

$$S(m,n) = 0, \qquad 0 \le m < n.$$

Příklad 6. Dokažte platnost 1. Bartošovy věty.[6]

Řešení (Bartošův důkaz). Předně snadno zjistíme, že pro součty $S(m,n)$ platí rekurentní vztah

$$S(m,n) = S(m-1,n-1) + (a_n - x_m)S(m-1,n), \qquad m > 1, n > 1.$$

K jeho důkazu postupně pišme

$$S(m,n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(a_i - x_1)(a_i - x_2)\cdots(a_i - x_{m-1})(a_i - a_n + a_n - x_m)}{(a_i - a_0)\cdots(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})\cdots(a_i - a_n)} +$$

$$+ \frac{(a_n - x_1)(a_n - x_2)\cdots(a_n - x_m)}{(a_n - a_0)(a_n - a_1)\cdots(a_n - a_{n-1})} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(a_i - x_1)(a_i - x_2)\cdots(a_i - x_{m-1})}{(a_i - a_0)\cdots(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})\cdots(a_i - a_{n-1})} +$$

$$+(a_n - x_m)\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(a_i - x_1)(a_i - x_2)\cdots(a_i - x_{m-1})}{(a_i - a_0)\cdots(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})\cdots(a_i - a_n)} +$$

$$+(a_n - x_m)\frac{(a_n - x_1)(a_n - x_2)\cdots(a_n - x_{m-1})}{(a_n - a_0)(a_n - a_1)\cdots(a_n - a_{n-1})} =$$

$$= S(m-1,n-1) + (a_n - x_m)S(m-1,n).$$

Tím je daný rekurentní vztah dokázán.

Dále budeme potřebovat hodnoty součtů $S(1,n)$ pro $n > 1$. Označme

$$U(n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{(a_i - a_0)\cdots(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})\cdots(a_i - a_n)}$$

a

$$V(n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(a_i - a_0)\cdots(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})\cdots(a_i - a_n)}.$$

Potom máme

$$S(1,n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i - x_1}{(a_i - a_0)\cdots(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})\cdots(a_i - a_n)} = U(n) - x_1 V(n)$$

[6] v knize str. 252–257

a dále

$$S(1,n+1) = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{a_i - x_1}{(a_i-a_0)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)(a_i-a_{n+1})} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i - a_{n+1} + a_{n+1} - x_1}{(a_i-a_0)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)(a_i-a_{n+1})} +$$

$$+(a_{n+1}-x_1)\frac{1}{(a_{n+1}-a_0)(a_{n+1}-a_1)\cdots(a_{n+1}-a_n)} = V(n) + (a_{n+1}-x_1)V(n+1).$$

Proto platí vztah

$$S(1,n+1) = V(n) + (a_{n+1}-x_1)V(n+1). \tag{6}$$

Nyní dokážeme, že v proměnné x_1 platí identity

$$S(1,n) = 0, \qquad n > 1. \tag{7}$$

Důkaz provedeme matematickou indukcí. Jelikož

$$S(1,2) = \frac{a_0 - x_1}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)} + \frac{a_1 - x_1}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)} + \frac{a_2 - x_1}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)} = 0,$$

tvrzení platí pro $n = 2$.

Nyní předpokládejme, že vztah (7) platí pro nějaké $n \geq 2$. Jelikož v rovnosti

$$S(1,n) = U(n) - x_1 V(n)$$

je x_1 libovolné číslo, musí platit, že

$$V(n) = 0. \tag{8}$$

Nyní se zabývejme rovnicí

$$S(1,n+1) = 0, \tag{9}$$

kde x_1 je neznámá. S využitím vztahu (6) a výsledku (8) dostáváme

$$S(1,n+1) = (a_{n+1}-x_1)V(n+1), \tag{10}$$

proto rovnice (9) má kořen a_{n+1}.

Jelikož součet $S(1,n+1)$ je symetrická funkce v proměnných a_i, rovnice (9) má také kořeny $a_i, i = 1,2,\ldots,n$, což podle (10) znamená, že $V(n+1) = 0$, a tedy (9) platí identicky.

Vidíme, že platí-li identita (7) pro nějaké $n \geq 2$, platí i pro $n+1$, tudíž platí obecně.

V tuto chvíli můžeme přikročit k důkazu jednotlivých vztahů z 1. Bartošovy věty. Nejdříve dokážeme poslední. Jelikož rovnice (7) je splněna identicky, dokazovaný vztah platí pro $m = 1$. Budeme pokračovat indukcí vzhledem k m. Předpokládejme tedy, že vztah platí pro $m = m_1 > 1$ a všechna $n > m_1$ a dokažme, že potom také

$$S(m_1+1,n) = 0, \qquad n > m_1+1.$$

S ohledem na rekurentní vztah máme

$$S(m_1+1,n) = S(m_1,n-1) + (a_n - x_{m_1+1})S(m_1,n)$$

a oba součty na pravé straně jsou podle předpokladu rovny nule, neboť z $n > m_1 + 1$ dostáváme nerovnosti $n > m_1$ a $n-1 > m_1$. Tím je žádaný vztah dokázán a třetí vzorec z 1. Bartošovy věty tedy platí obecně.

Zbývá dokázat první a druhý vzorec. Jelikož

$$S(1,1) = \frac{a_0 - x_1}{a_0 - a_1} + \frac{a_1 - x_1}{a_1 - a_0} = 1,$$

druhý vztah platí pro $n = 1$. Nyní předpokládejme, že druhý vztah platí i pro nějaké $n \geq 1$ a dokažme, že pak platí i následující identita

$$S(n+1,n+1) = 1.$$

Z rekurentního vztahu je

$$S(n+1,n+1) = S(n,n) + (a_{n+1} - x_{n+1})S(n,n+1) = S(n,n) = 1,$$

neboť $S(n,n+1) = 0$ podle již dokázaného třetího vzorce. Tudíž i druhý vzorec platí obecně.

Analogicky dokážeme i první vztah. Pro $n = 1$ platí, neboť

$$S(2,1) = \frac{(a_0 - x_1)(a_0 - x_2)}{a_0 - a_1} + \frac{(a_1 - x_1)(a_1 - x_2)}{a_1 - a_0} = (a_0 + a_1) - (x_1 + x_2).$$

Předpokládejme tedy, že pro nějaké $n \geq 1$ je

$$S(n+1,n) = \sum_{i=0}^{n} a_i - \sum_{j=0}^{n+1} x_j$$

a ukažme, že poté

$$S(n+2,n+1) = \sum_{i=0}^{n+1} a_i - \sum_{j=0}^{n+2} x_j.$$

Opět z rekurentního vztahu máme

$$S(n+2,n+1) = S(n+1,n) + (a_{n+1} - x_{n+2})S(n+1,n+1) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i - \sum_{j=0}^{n+1} x_j + a_{n+1} - x_{n+2} = \sum_{i=0}^{n+1} a_i - \sum_{j=0}^{n+2} x_j,$$

neboť podle druhého vzorce je $S(n+1,n+1) = 1$.

Tedy i první vzorec platí obecně a 1. Bartošova věta je dokázána.

2. Bartošova věta. Buď x libovolné komplexní číslo a

$$a_i,\, i = 0, 1, \cdots, n,$$

navzájem různá komplexní čísla, a položme

$$a_k = a_{k-n-1}, \qquad k \geq n+1.$$

Potom

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{(x+a_i)(x+a_{i+1})\cdots(x+a_{i+n-1})}{(a_i-a_{i-1})(a_{i+1}-a_{i-1})\cdots(a_{i+n-1}-a_{i-1})} = 1.$$

Příklad 7. Dokažte platnost 2. Bartošovy věty.[7]

Řešení (Bartošův důkaz). Rovnice ze závěru 2. Bartošovy věty je v proměnné x algebraická, stupně nejvýše n. Má však, jak vzápětí ukážeme, $(n+1)$ navzájem různých kořenů

$$-a_1, -a_2, \cdots, -a_{n+1},$$

proto je to identita.

Skutečně, faktor $(x+a_k)$, $k = 1, 2, \cdots, n, n+1$, je obsažen v každém sčítanci dané sumy až na sčítanec s indexem $i = k+1$. Je tedy pro $x = -a_k$ pouze jediný sčítanec různý od nuly a má hodnotu

$$\frac{(-a_k+a_{k+1})(-a_k+a_{k+2})\cdots(-a_k+a_{k+n})}{(a_{k+1}-a_k)(a_{k+2}-a_k)\cdots(a_{k+n}-a_k)} = 1.$$

Tím je 2. Bartošova věta dokázána.

Příklad 8. Dokažte následující rovnost pro každé přirozené číslo n:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} = \frac{1}{n}.$$ [8]

Řešení. Důkaz založíme na následující pomocné větě, kterou předem dokážeme.

Pomocná věta. Pro každé přirozené číslo n platí

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{n}{n+1}.$$

Důkaz. Rozepsáním $(1-1)^{n+1} = 0$ podle binomické věty dostaneme

$$0 = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} = 1 + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n+1}{k+1} =$$

$$= 1 + (n+1) \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \binom{n}{k} = -n + (n+1) \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \binom{n}{k}.$$

Tím je pomocná věta dokázána.

[7] v knize str. 252–257

[8] v knize str. 40, 293–294

Samotnou identitu dokážeme matematickou indukcí. Pro $n = 1$ je to zřejmá rovnost. Nechť tedy pro dané n platí tak, jak je napsána, a počítejme dále s využitím pomocné věty a vzorce $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\binom{n+1}{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j} = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\binom{n}{k-1}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}\sum_{j=1}^{k+1}\frac{1}{j} + \frac{1}{n} = 1 - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j} - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} + \frac{1}{n} =$$

$$= 1 - \frac{1}{n} - \frac{n}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1}.$$

Zjistili jsme, že identita platí i s $(n+1)$ místo n, takže platí obecně.

Příklad 9. Dokažte pro každé celé $n > 1$ následující identitu:

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\sum_{j=1}^{2k}\frac{1}{j} = \frac{1}{2n} + \frac{2\cdot 4\cdots(2n-2)}{3\cdot 5\cdots(2n-1)}.$$ [9]

Řešení. I zde využijeme pomocné věty, kterou jsme dokázali v řešení příkladu 8, stejně jako vzorce $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$.

Identitu opět dokážeme indukcí. Pro $n = 2$ je zřejmě správná. Dále předpokládejme, že platí pro nějaké $n \geq 2$ a označme její levou stranu $V(n)$. Pak

$$V(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\binom{n+1}{k}\sum_{j=1}^{2k}\frac{1}{j} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\binom{n}{k-1}\sum_{j=1}^{2k}\frac{1}{j} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\sum_{j=1}^{2k}\frac{1}{j} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}\sum_{j=1}^{2k+2}\frac{1}{j} + V(n) =$$

$$= \frac{3}{2} - V(n) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2(k+1)}\right) + V(n) =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k}}{2k+1}\binom{n}{k}.$$

Hodnota první sumy z posledního výrazu je podle pomocné věty rovna

$$\frac{n}{n+1}.$$

[9] v knize str. 25–26, 40, 298–299

Pro druhou sumu z rozvoje podle binomické věty

$$(1-x^2)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^{2k}$$

integrací podle x od 0 do 1 vychází

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} = \int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t dt.$$

Nyní počítejme následující integrál ($u \geq 2$ je přirozené číslo) pomocí metody per partes:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^u t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{u-1} t \sin t dt = [-\sin^{u-1} t \cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} + (u-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{u-2} t \cos^2 t dt =$$

$$= (u-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{u-2} t dt - (u-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^u t dt.$$

Odtud vyplývá rekurentní vztah

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^u t dt = \frac{u-1}{u} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{u-2} t dt,$$

ze kterého s ohledem na hodnotu $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = 1$ užitím indukce vychází

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t dt = \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}.$$

Tím dostáváme hodnotu druhé sumy odvozeného vyjádření pro $V(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \sum_{j=1}^{2k} \frac{1}{j} = \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} - 1.$$

Dohromady pak obdržíme

$$V(n+1) = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}.$$

Identita tedy platí i s $(n+1)$ místo n, takže platí obecně.

Příklad 10. Dokažte pro každé celé $n \geq 1$ následující identitu:

$$n^2 \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \frac{(n+k-1)!}{(n-k)!k!k!} \sum_{j=1}^{n+k-1} \frac{1}{j} = 1.$$ [10]

Řešení. V důkazu využijeme Hagenův vzorec, který jsme dokázali v příkladu 3.

[10] v knize str. 48, 299–300

Pomocí rozkladu $n^2 = (n+k)(n-k)+k^2$ je postupně

$$n^2 \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \frac{(n+k-1)!}{(n-k)!k!k!} \sum_{j=1}^{n+k-1} \frac{1}{j} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n+k} \frac{(n+k)!}{(n-k-1)!k!k!} \sum_{j=1}^{n+k-1} \frac{1}{j} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k} \frac{(n+k-1)!}{(n-k)!(k-1)!(k-1)!} \sum_{j=1}^{n+k-1} \frac{1}{j} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n+k} \frac{(n+k)!}{(n-k-1)!k!k!} \sum_{j=1}^{n+k-1} \frac{1}{j} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n+k} \frac{(n+k)!}{(n-k-1)!k!k!} \sum_{j=1}^{n+k} \frac{1}{j} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n+k+1} \frac{(n+k-1)!}{(n-k-1)!k!k!} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} \binom{n-1}{n-1-k} \binom{n-1+k}{k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{-1-k}{n-1-k} \binom{n-1+k}{k} = \binom{n-1}{n-1} = 1,$$

s využitím převodního vzorce

$$(-1)^m \binom{m-t-1}{m} = \binom{t}{m}$$

pro $m = n-k-1$ a $t = -1-k$ v předpředposledním kroku a avizovaného Hagenova vzorce o krok později.

Příklad 11. Pro libovolná přirozená čísla $k \leq n$ dokažte identitu *Li-Žen-Šu*

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{n+2k-j}{2k} = \binom{n+k}{k}^2.$$ [11]

Řešení (Důkaz L. Takácse). Následující důkaz využívá diferenčního počtu, proto nejdříve zavedeme některé pro důkaz důležité pojmy.

Definice. Nechť $f(x)$ je daná reálná či komplexní funkce proměnné x a ω je libovolné komplexní číslo. *První diference funkce* $f(x)$ při rozpětí ω je výraz

$$\underset{\omega}{\Delta} f(x) = \frac{f(x+\omega) - f(x)}{\omega}.$$

Druhá diference je dána vztahem

$$\underset{\omega}{\Delta}^2 f(x) = \underset{\omega}{\Delta} \left\{ \underset{\omega}{\Delta} f(x) \right\} = \underset{\omega}{\Delta} \frac{f(x+\omega) - f(x)}{\omega} =$$

$$\frac{1}{\omega} \left\{ \frac{f(x+2\omega) - f(x+\omega)}{\omega} - \frac{f(x+\omega) - f(x)}{\omega} \right\} = \frac{f(x+2\omega) - 2f(x+\omega) + f(x)}{\omega^2}.$$

[11] V knize str. 45–46, 93, 96–97, 171, 174–176. Jiný důkaz stejné identity je uveden v bakalářské práci autorky.

Další diference se zavádějí podle rekurentního vzorce

$$\underset{\omega}{\Delta}^{n} f(x) = \underset{\omega}{\Delta}\left\{\underset{\omega}{\Delta}^{n-1} f(x)\right\}.$$

Diference s rozpětím $\omega = 1$ značíme

$$\Delta, \Delta^2, \ldots, \Delta^n, \ldots,$$

proto například

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

a

$$\Delta^2 f(x) = f(x+2) - 2f(x+1) + f(x).$$

Definice. Operátor posunutí je definován vztahem

$$E_\omega f(x) = f(x+\omega).$$

Pro $\omega = 1$ užíváme označení E a píšeme

$$E\, f(x) = f(x+1).$$

Proto platí

$$\underset{\omega}{\Delta} f(x) = \frac{1}{\omega}\{f(x+\omega) - f(x)\} = \frac{1}{\omega}(E_\omega - 1) f(x),$$

obecně

$$\underset{\omega}{\Delta}^{k} f(x) = \frac{1}{\omega^k}(E_\omega - 1)^k f(x).$$

Dále platí pro $\omega = 1$ a $\Delta = E - 1$ symbolický vztah

$$\underset{\omega}{\Delta} = \frac{1}{\omega}(E_\omega - 1).$$

S využitím výše uvedených vztahů dostáváme pro obecné ω

$$\underset{\omega}{\Delta}^{n} f(x) = \frac{1}{\omega^n}(E_\omega - 1)^n f(x) = \frac{1}{\omega^n}\sum_{u=0}^{n}(-1)^{n-u}\binom{n}{u} f(x+u\omega)$$

a speciálně pro $\omega = 1$

$$\Delta^n f(x) = \sum_{u=0}^{n}(-1)^{n-u}\binom{n}{u} f(x+u).$$

Nyní můžeme přikročit k samotnému důkazu identity *Li-Žen-Šu*, který spočívá ve dvojím použití posledního vzorce (pro $x = 0$):

$$\Delta^i f(0) = \sum_{s=0}^{i}(-1)^{i-s}\binom{i}{s} f(s). \tag{11}$$

Pro zvolenou funkci

$$f(x) = (-1)^i \binom{n+2k-x}{n}$$

je zřejmě

$$\Delta f(x) = (-1)^{i-1} \binom{n+2k-x-1}{n-1},$$

odkud indukcí vzhledem k číslu $i \geq 0$ vychází

$$\Delta^i f(x) = \binom{n+2k-x-i}{n-i}.$$

Volbou $x = 0$ dostáváme

$$\Delta^i f(0) = \binom{n+2k-i}{n-i} = \binom{n+2k-i}{2k}.$$

Máme tedy odvozen pomocný vztah

$$\binom{n+2k-i}{2k} = \sum_{s=0}^{i} (-1)^s \binom{i}{s} \binom{n+2k-s}{n}.$$

Identitu *Li-Žen-Šu*

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}^2 \binom{n+2k-i}{2k} = \binom{n+k}{k}^2$$

nyní dokážeme tak, že využijeme předcházející výsledek. Podle něho je levá strana dokazované identity rovna

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}^2 \sum_{s=0}^{i} (-1)^s \binom{i}{s} \binom{n+2k-s}{n} =$$

$$= \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{n+2k-s}{n} \sum_{i=s}^{k} \binom{k}{i}^2 \binom{i}{s} =$$

$$= \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} \binom{n+2k-s}{n} \sum_{i=s}^{k} \binom{k}{i} \binom{k-s}{i-s} =$$

$$= \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} \binom{n+2k-s}{n} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \binom{k-s}{k-i} =$$

$$= \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} \binom{n+2k-s}{n} \binom{2k-s}{k},$$

kde jsme v posledním kroku využili Cauchyovy kombinatorické formule z příkladu 2. Dále platí

$$\binom{n+2k-s}{n} \binom{2k-s}{k} = \frac{(n+2k-s)!}{n!(2k-s)!} \cdot \frac{(2k-s)!}{k!(k-s)!} =$$

$$= \frac{(n+k)!}{n!k!} \cdot \frac{(n+2k-s)!}{(n+k)!(k-s)!} = \binom{n+k}{k}\binom{n+2k-s}{n+k}.$$

Předchozí součet tedy můžeme dále upravit do tvaru

$$\binom{n+k}{k}\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\binom{k}{s}\binom{n+2k-s}{n+k}.$$

Nyní ukážeme, že poslední suma je rovna $\binom{n+k}{k}$, čímž bude důkaz dokončen. Diferencováním funkce

$$f_{n,k}(x) = \binom{n+k+x}{n+k}$$

vzhledem k proměnné x s rozpětím $\omega = 1$ dostaneme

$$\Delta f_{n,k}(x) = \binom{n+k+x+1}{n+k} - \binom{n+k+x}{n+k} = \binom{n+k+x}{n+k-1} = f_{n,k-1}(x+1),$$

kde jsme pro hodnoty $t = n+k+x$ a $m = n+k$ využili známý vzorec

$$\binom{t}{m-1} + \binom{t}{m} = \binom{t+1}{m}.$$

Ze vzorce pro $\Delta f_{n,k}(x)$ postupně pro $j = 1, 2, \ldots, k$ indukcí dostaneme

$$\Delta^j f_{n,k}(x) = f_{n,k-j}(x+j).$$

Speciálně pro $j = k$ a $x = 0$ vychází

$$\Delta^k f_{n,k}(0) = f_{n,0}(k) = \binom{n+k}{n} = \binom{n+k}{k}.$$

Podle vzorce (11) však platí

$$\Delta^k f_{n,k}(0) = \sum_{s=0}^{k}(-1)^{k-s}\binom{k}{s} f_{n,k}(s) = \sum_{s=0}^{k}(-1)^s\binom{k}{s} f_{n,k}(k-s) =$$

$$= \sum_{s=0}^{k}(-1)^s\binom{k}{s}\binom{n+2k-s}{n+k}$$

a výše určená hodnota pro $\Delta^k f_{n,k}(0)$ dává žádaný vztah. Tím je důkaz identity dokončen.

Příklad 12. Pro každé celé číslo $n \geq 0$ a libovolná komplexní čísla $\alpha \neq 0, \beta, x$ dokažte Abelovu formuli:

$$(x+\alpha)^n = \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\alpha(\alpha-\nu\beta)^{\nu-1}(x+\nu\beta)^{n-\nu}. \quad (12)$$[12]

Řešení (Abelův důkaz). Formuli dokážeme indukcí. Pro $n = 0$ je formule zřejmě správná.

[12] v knize str. 273–275

Dále předpokládejme, že formule platí pro nějaké $n \geq 0$, a dokažme ji pro hodnotu n o 1 větší. Za tímto účelem vynásobme obě strany formule číslem $(n+1)$ a integrujme podle proměnné x. Dostaneme

$$\begin{aligned}(x+\alpha)^{n+1} &= \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \frac{n+1}{n-v+1} \alpha(\alpha - v\beta)^{v-1}(x+v\beta)^{n-v+1} + c = \\ &= \sum_{v=0}^{n} \binom{n+1}{v} \alpha(\alpha - v\beta)^{v-1}(x+v\beta)^{n-v+1} + c, \end{aligned} \tag{13}$$

kde c je integrační konstanta.

Abychom konstantu c určili, dosaďme do (12) a (13) $x = -(n+1)\beta$. Obdržíme

$$[\alpha - (n+1)\beta]^{n} = \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \alpha(\alpha - v\beta)^{v-1}(-1)^{n-v}(n+1-v)^{n-v}\beta^{n-v}$$

a

$$[\alpha - (n+1)\beta]^{n+1} = c - (n+1)\beta \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \alpha(\alpha - v\beta)^{v-1}(-1)^{n-v}(n+1-v)^{n-v}\beta^{n-v}.$$

Vynásobíme-li obě strany první rovnosti číslem $(n+1)\beta$ a k výsledku přičteme druhou rovnost, dostaneme, že

$$c = [\alpha - (n+1)\beta]^{n+1} + (n+1)\beta[\alpha - (n+1)\beta]^{n} = \alpha[\alpha - (n+1)\beta]^{n}.$$

Dosadíme-li tento výraz za c ve (13), máme

$$(x+\alpha)^{n+1} = \sum_{v=0}^{n+1} \binom{n+1}{v} \alpha(\alpha - v\beta)^{v-1}(x+v\beta)^{n+1-v},$$

což je vztah, který jsme měli dokázat.

Kapitola 2

Příklady z knihy Y. Zhanga

Příklady v této kapitole a jejich řešení, které jsme místy upravili, jsou převzaty z knihy *Combinatorial Problems in Mathematical Competitions* od Y. Zhanga ([10]).

Příklad 1. Na soukromém gymnáziu pracuje u učitelů a navštěvuje je a studentů. Každý z učitelů učí právě v studentů. Pro každé dva studenty platí, že mají právě b společných učitelů. Dokažte, že platí

$$\frac{u}{b} = \frac{a(a-1)}{v(v-1)}.$$ [1]

Řešení. Uvažujme učitele I_k, který učí studenty E_l a E_m ($l \neq m$). Společně vytvářejí trojici (I_k, E_l, E_m). Celkový počet všech takovýchto trojic označme C.

Pro každého učitele platí, že učí v studentů, se kterými vytváří $\binom{v}{2}$ trojic. A učitelů na gymnáziu je právě u, z čehož pro celkový počet trojic vyplývá

$$C = u \cdot \binom{v}{2}.$$

Nyní se na situaci podívejme z pohledu dvojice studentů $E_l, E_m (l \neq m)$. Ti mají právě b společných učitelů, se kterými vytvářejí b trojic. A dvojici studentů můžeme vybrat $\binom{a}{2}$ způsoby, z čehož vyplývá, že

$$C = b \cdot \binom{a}{2}.$$

Dostáváme, že

$$u \cdot \binom{v}{2} = b \cdot \binom{a}{2}, \qquad \text{odkud} \qquad \frac{u}{b} = \frac{\binom{a}{2}}{\binom{v}{2}} = \frac{a(a-1)}{v(v-1)}.$$

Tím je řešení této úlohy hotovo.

Příklad 2. Na večírku se sešlo u lidí, kteří splňují následující podmínky. Vybereme-li z nich libovolně $u-2$ lidí, pokaždé mezi nimi najdeme stejný počet dvojic, které se už dříve setkaly. Tento počet je roven 3^a, kde a je přirozené číslo. Najděte všechny možné hodnoty u.[2]

[1] v knize str. 88–89

[2] v knize str. 89–90

Řešení. Předpokládejme, že mezi všemi u lidmi, kteří se na večírku sešli, je právě v dvojic, které se už dříve setkaly. Je zřejmé, že $(u-2)$-člennou skupinu lidí můžeme vybrat $\binom{u}{u-2}$ způsoby. Ke každé této skupině patří 3^a dvojic, které se už setkaly. Nyní určíme, ke kolika $(u-2)$-členným skupinám každá takováto dvojice patří, abychom ji započetli do součtu v pouze jednou.

Uvažujme pevně zvolenou dvojici. Chceme ji doplnit na $(u-2)$-člennou skupinu, takže vybíráme zbylých $u-4$ lidí. Můžeme je vybrat $\binom{u-2}{u-4}$ způsoby. Právě k tomuto počtu skupin každá dvojice, která se už setkala, patří. Pro celkový počet „známých“ dvojic v tedy platí

$$v = \frac{3^a \cdot \binom{u}{u-2}}{\binom{u-2}{u-4}} = \frac{3^a \cdot \binom{u}{2}}{\binom{u-2}{2}} = \frac{3^a \cdot u(u-1)}{(u-2)(u-3)}.$$

Nyní rozlišíme dva případy, podle toho, zda číslo u je či není dělitelné třemi.

Pokud číslo u není dělitelné třemi, potom $(u,3) = (u-3,u) = (u-3,3^a) = 1$. Dále zřejmě $(u-1,u-2) = 1$, takže z vyjádření v dostáváme, že $(u-3)|(u-1)$. Jelikož dále $(u-1) = (u-3)+2$, musí platit, že $(u-3)|2$. Tudíž $u-3 \leq 2$, neboli $u \leq 5$. Zároveň ze zadání plyne $\binom{u-2}{2} \geq 3^a \geq 3$, z čehož dostáváme, že $u \geq 5$. Tudíž $u = 5$.

Pokud číslo u je dělitelné třemi, potom číslo $(u-2)$ zřejmě dělitelné třemi není. Pak platí $(u-2,3^a) = (u-2,u-1) = 1$. Tentokrát z vyjádření v plyne, že $(u-2)|u$. Jelikož $u = (u-2)+2$, dostáváme, že $(u-2)|2$. Tudíž $u-2 \leq 2$, tj. $u \leq 4$. To je však spor s podmínkou, že $\binom{u-2}{2} \geq 3^a \geq 3$.

Dospěli jsme tedy k závěru, že jediná vyhovující hodnota může být $u = 5$. Uvažme tedy 5člennou skupinu lidí, kteří se potkali na večírku. Předpokládejme, že libovolně vybraná dvojice lidí z této skupiny se už dříve setkala. A tak mezi $u-2 = 3$ členy skupiny jsou právě $\binom{3}{2} = 3^1$ dvojice lidí, kteří se už dříve setkali. To vyhovuje podmínce ze zadání pro přirozené číslo $a = 1$.

Příklad skupiny skutečně splňuje podmínky zadání a číslo 5 je jedinou možnou hodnotou u.

Příklad 3. Nechť u a a jsou přirozená čísla a V je množina u bodů v rovině takových, že žádná trojice bodů z V neleží v přímce a ke každému bodu z V existuje nejméně a dalších bodů z V, které od něj mají stejnou vzdálenost. Dokažte, že

$$a < \frac{1}{2} + \sqrt{2u}.$$ [3]

Řešení. Nechť $V = \{B_1, B_2, \ldots, B_u\}$. Z druhé podmínky v zadání dostáváme, že pro každý bod B_i z množiny V existuje kružnice k_i se středem B_i taková, že na ní leží nejméně a dalších bodů z V. Předpokládejme, že právě c_i bodů z V leží na kružnici $k_i (i = 1,2,\ldots,u)$ a že bod B_i je společným bodem právě d_i z těchto kružnic. Podle zadání platí nerovnost

$$a \cdot u \leq \sum_{i=1}^{u} c_i = \sum_{i=1}^{u} d_i.$$

Je-li bod B_i patřící do V společným bodem dvou kružnic $k_x, k_y (x \neq y)$, sestavíme trojici $\{B_i, k_x, k_y\}$ a množinu všech takovýchto trojic označíme R. Libovolná dvojice různých

[3] v knize str. 93–94

kružnic má nejvýše 2 průsečíky. Proto existují nejvýše 2 trojice, které obsahují tuto dvojici kružnic. Pro u kružnic je proto takovýchto trojic nejvýše $2 \cdot \binom{u}{2}$, z čehož dostáváme, že

$$|R| \leq 2 \cdot \binom{u}{2} = u(u-1).$$

Na druhou stranu, bod B_i je společným bodem právě d_i kružnic, což znamená, že tento bod je součástí právě $\binom{d_i}{2}$ trojic $(i = 1, 2, \ldots, u)$, a proto platí

$$|R| = \sum_{i=1}^{u} \binom{d_i}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{u} d_i^2 - \sum_{i=1}^{u} d_i\right).$$

S využitím výše odvozených vztahů a Cauchyovy nerovnosti postupně dostáváme

$$u(u-1) \geq \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{u} d_i^2 - \sum_{i=1}^{u} d_i\right),$$

$$u(u-1) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u}\left(\sum_{i=1}^{u} d_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{u} d_i\right) = \frac{1}{2u}\left(\sum_{i=1}^{u} d_i\right)\left(\sum_{i=1}^{u} d_i - u\right),$$

$$u(u-1) \geq \frac{1}{2u}(au)(au-u) = \frac{1}{2}au(a-1).$$

Obdrželi jsme tak kvadratickou nerovnici

$$a^2 - a - 2(u-1) \leq 0.$$

Jejím řešením dostáváme horní odhad

$$a \leq \frac{1+\sqrt{1+8(u-1)}}{2} < \frac{1+\sqrt{8u}}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{2u}.$$

Tím je důkaz požadované nerovnosti dokončen.

Příklad 4. Uvnitř čtverce je zadáno 1000 bodů. Mezi nimi a vrcholy daného čtverce neexistuje žádná trojice bodů ležících v přímce. Některé dvojice ze zadaných bodů a vrcholů čtverce jsou spojeny úsečkami tak, že výchozí čtverec je ve výsledku dokonale rozdělen na trojúhelníky. Strany těchto trojúhelníků jsou přitom tvořeny výhradně „spojovacími" úsečkami a stranami původního čtverce a žádné dvě „spojovací" úsečky nemají společný vnitřní bod. Najděte počet „spojovacích" úseček a počet trojúhelníků, na které je čtverec rozdělen.[4]

Řešení. Předpokládejme, že celý čtverec rozděluje celkem u „spojovacích" úseček na celkem v trojúhelníků. Součet velikostí vnitřních úhlů všech v trojúhelníků je roven $v \cdot 180°$. Dále platí, že součet velikostí vnitřních úhlů, jejichž vrchol je jedním z 1000 zadaných bodů, je $1000 \cdot 360°$. Součet velikostí vnitřních úhlů, jejichž vrcholem je jeden ze zadaných vrcholů čtverce, je roven $4 \cdot 90°$. Z toho vyplývá rovnost

$$v \cdot 180° = 1000 \times 360° + 4 \times 90°,$$

[4] v knize str. 87–88

takže $v = 2002$.

Daných v trojúhelníků má $3v$ stran. Každá „spojovací“ úsečka je společnou stranou dvou trojúhelníků. A každá ze stran původního čtverce je stranou jednoho trojúhelníku. Tudíž $3v = 2u + 4$, z čehož dostáváme, že $u = 3001$.

Dokázali jsme, že zadaný čtverec je rozdělen na 2002 trojúhelníků za pomoci 3001 „spojovacích“ úseček.

Příklad 5. Uvažujme množinu $A = \{1, 2, \ldots, 2005\}$. Z ní vyškrtneme u čísel tak, aby mezi zbylými čísly nebylo žádné, které by se rovnalo součinu některých dvou dalších čísel, která jsme také nevyškrtli. Určete nejmenší možnou hodnotu u.[5]

Řešení. Uvažme těchto 43 trojic čísel: $(2, 87, 2 \times 87); (3, 86, 3 \times 86); (4, 85, 4 \times 85); \ldots;$ $(43, 46, 43 \times 46); (44, 45, 44 \times 45)$. Pokud by vyškrtnutých čísel z množiny A bylo méně než 43, mezi zbylými čísly by některá z těchto trojic zůstala kompletní. To je však v rozporu se zadáním úlohy, takže musíme vyškrtnout minimálně 43 čísel.

Odstraňme nyní z množiny A právě 43 čísel $2, 3, \ldots, 44$. Potom součin dvou libovolných zbylých čísel je minimálně $45 \times 46 = 2070$, případně $1 \times c = c$ ($c \in \{45, \ldots, 2005\}$). Mezi zbylými čísly tedy není žádné, které by se rovnalo součinu některých dvou dalších z nich.

Tím jsme určili nejmenší možnou hodnotu $u = 43$.

Příklad 6. 49 studentů jsme nechali řešit stejnou trojici úloh. Každá úloha byla hodnocena celočíselným počtem bodů, maximum bylo 7 bodů, minimum 0 bodů. Dokažte, že existuje dvojice studentů U a A taková, že u žádné z trojice úloh nedostal student U nižší hodnocení než jeho kolega A.[6]

Řešení. Předpokládejme nejprve, že existuje dvojice studentů taková, že u prvních dvou úloh dostali stejné bodové hodnocení. Pak bez ohledu na to, jak dopadli s hodnocením u třetí úlohy, zřejmě existuje v této dvojici student (označme ho U), který u žádné úlohy nedostal nižší hodnocení než druhý kolega (označme ho A).

Nyní naopak předpokládejme, že pro libovolnou dvojici studentů platí, že jejich hodnocení u prvních dvou úloh nejsou úplně stejná. Každého z 49 studentů budeme dále reprezentovat bodem v rovině s dvojicí souřadnic (u, v), kde $0 \le u, v \le 7$, u (resp. v) odpovídá bodovému zisku studenta u první (resp. druhé) úlohy. Vzhledem k předpokladu dostáváme 49 různých bodů v rovině.

Uvažme následující množiny.

$$C = \{(u, v) | u, v \in \mathbb{Z}, 0 \le u, v \le 7\};$$

$$D_1 = \{(u, v) | (u, v) \in C, 0 \le u \le 7, v = 0 \text{ nebo } u = 7, 1 \le v \le 7\};$$

$$D_2 = \{(u, v) | (u, v) \in C, 0 \le u \le 6, v = 1 \text{ nebo } u = 6, 2 \le v \le 7\};$$

$$D_3 = \{(u, v) | (u, v) \in C, 0 \le u \le 5, v = 2 \text{ nebo } u = 5, 3 \le v \le 7\};$$

$$D_4 = \{(u, v) | (u, v) \in C, 0 \le u \le 4, v = 3 \text{ nebo } u = 4, 4 \le v \le 7\};$$

$$D_5 = \{(u, v) | (u, v) \in C, u = 2, 3 \text{ a } 4 \le v \le 7\};$$

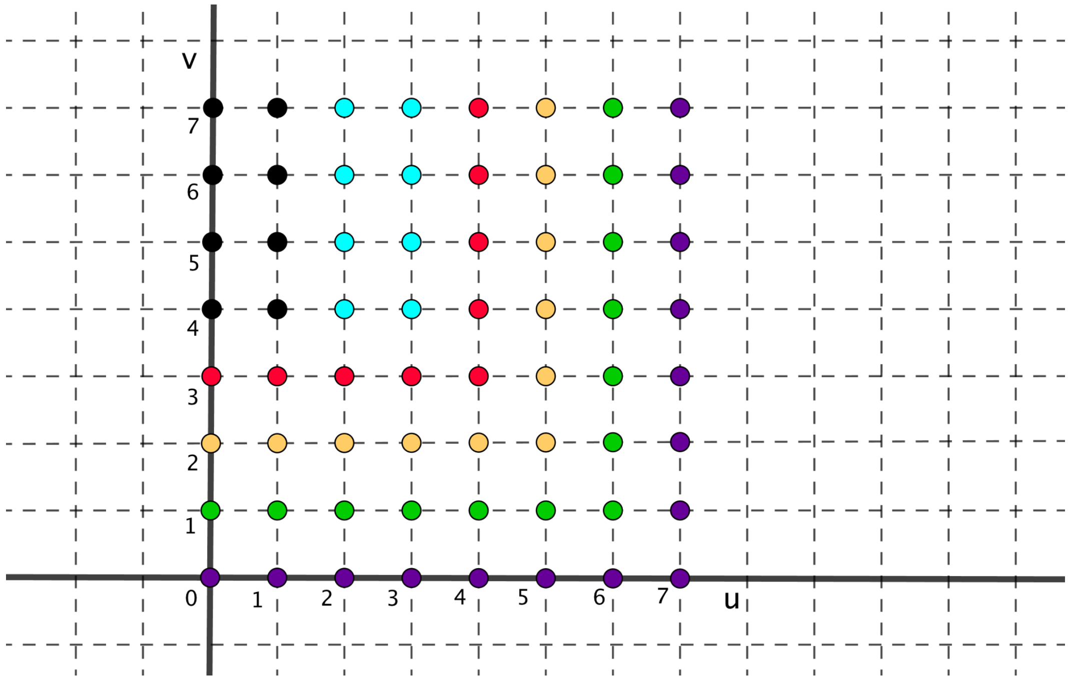
$$D_6 = \{(u, v) | (u, v) \in C, u = 0, 1 \text{ a } 4 \le v \le 7\}.$$

[5] v knize str. 24

[6] v knize str. 25–26

Z obrázku 2.1 dobře vidíme, že 49 bodů odpovídajících jednotlivým studentům patří do množiny

$$C = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup D_5 \cup D_6.$$



Obrázek 2.1: Ilustrace příkladu 12. Body patřící do množiny D_1 jsou vyznačeny fialově, body patřící do množiny D_2 zeleně, body množiny D_3 mají žlutou barvu, body množiny D_4 jsou vyznačeny červeně, body množiny D_5 jsou modré a body množiny D_6 černé.

Z Dirichletova principu vyplývá, že mezi těmito 49 body existuje 9 takových, že patří do stejné „déčkové" množiny. Jelikož množiny D_5 a D_6 jsou obě pouze osmiprvkové, danou množinou musí být některá z množin D_1, D_2, D_3, D_4.

Studenti, kterým daných 9 bodů odpovídá, pochopitelně dostali hodnocení i za třetí úlohu. Jelikož možných hodnocení je pouze 8 a studentů 9, někteří dva studenti z dané devítice dostali za třetí úlohu stejné hodnocení. Z konstrukcí množin D_1, D_2, D_3, D_4 vyplývá, že v této dvojici studentů existuje student (označme ho U), jehož hodnocení u žádné z prvních dvou úloh nebylo nižší než u druhého studenta (označme ho A).

Tím je řešení úlohy hotovo.

Příklad 7. Nechť M značí libovolnou n-prvkovou množinu přirozených čísel menších než $2n$ $(n \geq 4)$. Dokažte, že existuje neprázdná podmnožina A množiny M taková, že součet všech prvků z A je dělitelný $2n$.[7]

Řešení. Pro libovolnou uvažovanou množinu $M = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ rozlišíme dva případy, které odděleně vyřešíme.

V prvním případě $n \notin M$. Platí, že $2n$ přirozených čísel

$$u_1, u_2, \dots, u_n, 2n - u_1, 2n - u_2, \dots, 2n - u_n$$

[7] v knize str. 24–25

patří do množiny $\{1,2,\dots,2n-1\}$. Užitím Dirichletova principu dostáváme, že nutně mezi těmito čísly existují dvě sobě rovná. Ale čísla $u_1,u_2,\dots,u_n$ jsou navzájem různá. Stejně tak čísla $2n-u_1, 2n-u_2,\dots,2n-u_n$ jsou navzájem různá. Tudíž musí existovat indexy i, j takové, že $u_i = 2n-u_j, u_i \neq n, u_j \neq n$. Potom zřejmě $u_i \neq u_j$ a přitom $u_i + u_j = 2n$. Tím jsme našli požadovanou dvouprvkovou množinu A a první případ je vyřešen.

Ve druhém případě $n \in M$. Bez újmy na obecnosti položme $u_n = n$. Uvažme zbylých $n-1 (n-1 \geq 3)$ čísel $u_1,u_2,\dots u_{n-1}$. Připusťme existenci trojice čísel $u_a < u_b < u_c$ takové, že čísla $u_c - u_b$ a $u_b - u_a$ jsou dělitelná n. Potom $u_c - u_a = (u_c - u_b) + (u_b - u_a) \geq 2n$. To je však nemožné. Takže nutně existují 2 čísla $u_a < u_b (a,b \in \{1,2,\dots,n-1\})$ taková, že $u_b - u_a$ není dělitelné n. Opět bez újmy na obecnosti, nechť $u_2 - u_1$ není dělitelné n. Uvažme následujících n čísel

$$u_1, u_2, u_1+u_2, u_1+u_2+u_3, \dots, u_1+u_2+\dots+u_n+1.$$

Opět postupně rozebereme dva případy.

(1) Pokud mezi danými n čísly nejsou žádná dvě kongruentní modulo n, musí mezi nimi být jedno, které je dělitelné n. Toto číslo vyjádříme ve tvaru vn (v je přirozené číslo). Je-li v sudé, s hledáním požadované podmnožiny jsme hotovi. Je-li v liché, potom $v+1$ je sudé a $vn + u_n = (v+1)n$ je dělitelné $2n$ a s hledáním požadované podmnožiny jsme opět hotovi.

(2) Zbývá situace, kdy mezi danými n čísly jsou dvě kongruentní modulo n, takže jejich rozdíl je dělitelný n. Ovšem rozdíl $u_2 - u_1$ takový není. Z čehož vyplývá, že onen rozdíl dělitelný n je roven součtu několika (minimálně jednoho) z čísel $u_1,u_2,\dots,u_{n-1} (n-1 \geq 3)$. Potom už požadovanou podmnožinu snadno najdeme analogicky se situací (1).

Na závěr ještě čtenáře upozorníme, jak důležitá je podmínka $n (n \geq 4)$. Uvažujme situaci $n = 3$ a množinu $\{1,3,4\}$. V tomto případě žádná podmnožina splňující podmínky zadání neexistuje.

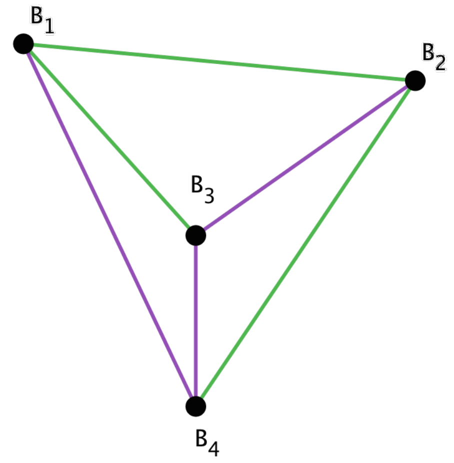
Příklad 8. V jisté společnosti lze každou dvojici zaměstnanců označit jako „přátelskou" nebo „nepřátelskou". Členové „přátelské" dvojice jsou skutečně přátelé (přátelství je oboustranné). Stejně tak členové „nepřátelské" dvojice jsou opravdu nepřátelé (tento vztah je rovněž oboustranný). Společnost má celkem a zaměstnanců a u „přátelských" dvojic. Dále platí, že mezi třemi libovolně vybranými zaměstnanci najdeme aspoň jednu „nepřátelskou" dvojici. Dokažte, že existuje zaměstnanec společnosti takový, že počet „přátelských" dvojic v množině jeho (případně jejích) nepřátel je menší nebo roven $u(1-\frac{4u}{a^2})$.[8]

Řešení. Každému zaměstnanci společnosti přiřadíme jeden bod v rovině: $B_1,B_2,\dots,B_a$ (body příslušné různým zaměstnancům jsou navzájem různé). Tvoří-li dva zaměstnanci „přátelskou" dvojici, jim příslušné body spojíme zelenou úsečkou. V opačném případě (zaměstnanci tvoří „nepřátelskou" dvojici) spojíme body, které těmto zaměstnanců přísluší, fialovou úsečkou. Označme w_i počet zelených úseček, které spojují bod B_i s dalšími body (což znamená, že zaměstnanec, kterému přísluší bod B_i, má w_i přátel). Potom zřejmě bod B_i je krajním bodem $a-w_i-1$ fialových úseček (neboli zaměstnanec, kterému přísluší bod B_i, má $a-w_i-1$ nepřátel). Platí to pro každé $i = 1,2,\dots,a$.

Dále platí, že

$$\sum_{i=1}^{a} w_i = 2u.$$

[8] v knize str. 169–172



Obrázek 2.2: Ilustrace příkladu 8 pro $a = 4$, $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$.

Vzniklé zelené a fialové úsečky tvoří strany trojúhelníků (viz obrázek 2.2). Počet trojúhelníků se 2 fialovými a 1 zelenou stranou označme F, počet trojúhelníků se 2 zelenými a 1 fialovou stranou označme Z. Protože podle podmínky ze zadání úlohy neexistuje trojúhelník se 3 zelenými stranami, pro počet Z trojúhelníků se 2 zelenými a 1 fialovou stranou platí vzorec

$$Z = \sum_{i=1}^{a} \binom{w_i}{2}.$$

Nyní uvažme úhly, jejichž vrcholem je některý z bodů B_i a jejichž ramena tvoří 2 z daných obarvených úseček. Takovýto úhel, jehož ramena mají různé barvy, nazveme *různobarevný úhel*. Celkový počet *různobarevných úhlů* je roven

$$2(F+Z) = \sum_{i=1}^{a} w_i(a-w_i-1).$$

S využitím výše uvedených vztahů a Cauchyovy nerovnosti dostáváme

$$F = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{a} w_i(a-w_i-1) - Z =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{a} w_i(a-w_i-1) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{a} w_i(w_i-1) = \frac{a}{2}\sum_{i=1}^{a} w_i - \sum_{i=1}^{a} w_i^2 \leq$$

$$\leq \frac{a}{2}\sum_{i=1}^{a} w_i - \frac{1}{a}\left(\sum_{i=1}^{a} w_i\right)^2 = au - \frac{4u^2}{a} = au\left(1 - \frac{4u}{a^2}\right).$$

Pro každé $i = 1, 2, \ldots, a$ označme y_i počet trojúhelníků s fialovými stranami B_iBj a B_iB_k a zelenou stranou B_jB_k. Potom y_i udává počet „přátelských“ dvojic mezi nepřáteli zaměstnance, kterému odpovídá bod B_i. Zřejmě platí $\sum_{i=1}^{a} y_i = F$, odkud dostáváme, že

$$\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a} y_i = \frac{F}{a} \leq u\left(1 - \frac{4u}{a^2}\right).$$

Z vlastností aritmetického průměru vyplývá, že nutně existuje zaměstnanec společnosti, kterému odpovídá hodnota $y_i \leq u(1 - \frac{4u}{a^2})$, a tudíž počet „přátelských" dvojic mezi nepřáteli tohoto zaměstnance je menší nebo roven $u(1 - \frac{4u}{a^2})$. Tím je důkaz hotov.

Příklad 9. Nechť U je a-prvková množina a $U_1, U_2, \ldots, U_v$ její podmnožiny takové, že žádná z nich není podmnožinou některé další z těchto podmnožin. Dokažte, že

$$\sum_{i=1}^{v} \frac{1}{\binom{a}{|U_i|}} \leq 1, \tag{1}$$

kde $|U_i|$ značí počet prvků podmnožiny U_i $(1 \leq i \leq v)$. [9]

Řešení. Nerovnost (1) je po rozepsání kombinačních čísel pomocí faktoriálů ekvivalentní s následující nerovností:

$$\sum_{i=1}^{v} |U_i|!(a - |U_i|)! \leq a!. \tag{2}$$

Na jednu stranu, počet všech permutací z a prvků množiny U je roven $a!$. Na druhou stranu, pro každou podmnožinu U_i můžeme sestrojit permutaci z a prvků množiny U následovně:

$$b_1 b_2 \cdots b_{|U_i|} c_1 c_2 \cdots c_{a-|U_i|}, \tag{3}$$

kde $b_1 b_2 \cdots b_{|U_i|}$ je kompletní permutace z prvků množiny U_i a $c_1 c_2 \cdots c_{a-|U_i|}$ je kompletní permutace z prvků množiny U_i* (U_i* je doplněk podmnožiny U_i v U). Počet všech permutací v podobě (3) je roven $|U_i|!(a - |U_i|)!$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, v$.

Dále ukážeme, že pro libovolná $i \neq j$ jsou všechny permutace typu (3) korespondující s podmnožinami U_i a U_j rozdílné. Označme libovolnou kompletní permutaci korespondující s U_j jako

$$b'_1 b'_2 \cdots b'_{|U_j|} c'_1 c'_2 \cdots c'_{a-|U_j|} \tag{4}$$

a předpokládejme, že $i \neq j$ a že permutace (3) a (4) jsou totožné. Rozlišme nyní případy $|U_i| \leq |U_j|$ a $|U_i| > |U_j|$. V prvním z nich platí $b_1 = b'_1, b_2 = b'_2, \ldots, b_{|U_i|} = b'_{|U_i|}$, a tedy $U_i \subseteq U_l$, což odporuje podmínce ze zadání úlohy. Podobně ve druhém případě, kdy platí $|U_i| \geq |U_j|$, odvodíme spornou inkluzi $U_j \subseteq U_i$. Skupiny permutací, které odpovídají jednotlivým množinám U_i, jsou tedy po dvou disjunktní, a proto pro celkový počet permutací v těchto skupinách s využitím pravidla součtu dostáváme nerovnost (2), kterou jsme chtěli dokázat.

Příklad 10. Nechť U je konečná množina bodů. Její prvky jsou zeleně a fialově obarveny a $V_1, V_2, \ldots, V_{68}$ jsou pětiprvkové podmnožiny U splňující následující podmínky:
(1) Každá z podmnožin $V_1, V_2, \ldots, V_{68}$ obsahuje alespoň 1 zelený bod.
(2) Pro libovolnou trojici bodů z U existuje právě jedna množina V_i $(i = 1, 2, \ldots 68)$, která tuto trojici bodů obsahuje.
Rozhodněte, jestli mezi množinami $V_1, V_2, \ldots, V_{68}$ nutně existuje taková, která obsahuje 4 nebo 5 zelených bodů.[10]

[9] v knize str. 176–177
[10] v knize str. 173–176

Řešení. Předpokládejme, že množina U má a prvků, a tedy $\binom{a}{3}$ tříprvkových podmnožin. Každá z těchto tříprvkových podmnožin patří právě do jedné z množin $V_1, V_2, \ldots, V_{68}$. Každá množina $V_i (i = 1, 2, \ldots, 68)$ obsahuje právě $\binom{5}{2} = 10$ tříprvkových podmnožin. Množiny $V_1, V_2, \ldots, V_{68}$ tedy celkem obsahují $68 \cdot 10 = 680$ tříprvkových podmnožin. Proto

$$\binom{a}{3} = 680,$$

z čehož dostáváme

$$a(a-1)(a-2) = 4080 = 17 \cdot 16 \cdot 15,$$

takže $a = 17$.

Nyní předpokládejme, že v množině U je celkem z zelených bodů a že oproti zkoumanému závěru každá z množin $V_1, V_2, \ldots, V_{68}$ obsahuje nejvýše 3 zelené body. Tříprvkovou podmnožinu Z množiny U nazveme „zelenou“, pokud obsahuje právě 1 zelený a 2 fialové body. Potom celkový počet „zelených“ tříprvkových podmnožin U je roven $\binom{z}{1}\binom{17-z}{2}$. Na druhou stranu, pro každé 3 zelené body existuje jediná pětiprvková množina V_i, která tuto trojici bodů obsahuje. Takže existuje právě $\binom{z}{3}$ pětiprvkových množin V_i, které obsahují 3 zelené body (každá z těchto množin obsahuje právě 3 „zelené“ 3prvkové podmnožiny). Dále platí, že každá ze zbylých 68 - $\binom{z}{3}$ podmnožin V_i obsahuje 1 nebo 2 zelené body, a tedy $\binom{1}{1}\binom{4}{2} = 6$ (obsahuje-li 1 zelený bod) nebo $\binom{2}{1}\binom{3}{2} = 6$ (obsahuje-li 2 zelené body) „zelených“ tříprvkových podmnožin. Proto celkový počet „zelených“ tříprvkových podmnožin je $3\binom{z}{3} + 6(68 - \binom{z}{3})$. Z toho dostáváme, že

$$3\binom{z}{3} + 6(68 - \binom{z}{3}) = \binom{z}{1}\binom{17-z}{2},$$

$$z^3 - 18z^2 + 137z - 408 = 0.$$

S využitím kongruence modulo 5 získaný vztah dále upravíme a dostaneme

$$3 \equiv z^3 - 3z^2 + 2z \equiv z(z-1)(z-2) \pmod 5.$$

Prověřme postupně všechny možnosti: $z \equiv 0, 1, 2, 3, 4$ (mod 5). Ani jedna z nich odvozené kongruenci nevyhovuje. Tak jsme sporem dokázali, že mezi množinami $V_1, V_2, \ldots, V_{68}$ existuje taková podmnožina, která obsahuje 4 nebo 5 zelených bodů.

Příklad 11. Nechť U je množina s 2002 prvky a nechť A je celé číslo, $0 \leq A \leq 2^{2002}$. Dokažte, že je možné obarvit každou podmnožinu množiny U zeleně nebo fialově tak, aby byly splněny následující podmínky:
(1) Sjednocení libovolných dvou zelených podmnožin je zelená množina.
(2) Sjednocení libovolných dvou fialových podmnožin je fialová množina.
(3) Množina U má právě A zelených podmnožin.[11]

Řešení. Dokážeme, že takové obarvení můžeme udělat pro každou n-prvkovou množinu $U_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, kde n je přirozené číslo, a pro každé celé číslo A_n, $0 \leq A_n \leq 2^n$.

Důkaz provedeme matematickou indukcí vzhledem k n. Případ $n = 1$ je triviální. Předpokládejme, že můžeme obarvit všechny podmnožiny množiny $U_n = \{1, 2, \ldots, n\}$

[11] v knize str. 172–173

požadovaným způsobem pro každé celé číslo A_n, $0 \leq A_n \leq 2^n$. Ukážeme, že existuje obarvení splňující podmínky ze zadání pro množinu $U_{n+1} = \{1, 2, \ldots, n+1\}$ a celé číslo A_{n+1}, $0 \leq A_{n+1} \leq 2^{n+1}$. Uvážíme následující dva případy.

V prvním případě $0 \leq A_{n+1} \leq 2^n$. Aplikujme indukční předpoklad na U_n a $A_n = A_{n+1}$. Dostáváme obarvení všech podmnožin U_n, které splňuje všechny podmínky ze zadání. Všechny zatím neobarvené podmnožiny množiny U_{n+1} obsahují prvek $n+1$ a obarvíme je všechny fialově. Dohromady dostaneme obarvení všech podmnožin množiny U_{n+1} , které zřejmě vyhovuje zadání.

Ve druhém případě $2^n + 1 \leq A_{n+1} \leq 2^{n+1}$, takže $A_{n+1} = 2^n + c$, kde $c \in \{1, 2, \ldots, 2^n\}$. S využitím prvního případu víme, že existuje obarvení všech podmnožin množiny U_n, které splňuje podmínky (1) a (2) a obsahuje právě c zelených podmnožin. Všechny zatím neobarvené podmnožiny množiny U_{n+1} obsahují prvek $n+1$ a je jich celkem 2^n. Všechny je obarvíme zeleně. Vzniklé obarvení všech podmnožin množiny U_{n+1} zřejmě splňuje podmínky (1) a (2) ze zadání a množina U_{n+1} má navíc právě $2^n + c = A_{n+1}$ zelených podmnožin, takže je splněna i podmínka (3). Tím je důkaz indukcí pro každé přirozené n hotov. Tvrzení tak platí i pro hodnotu $n = 2002$ ze zadání úlohy.

Příklad 12. 9 čtverečků (každý o obsahu $\frac{1}{5}\,\mathrm{cm}^2$) jsme náhodně položili do rovinného obrazce O o celkovém obsahu $1\,\mathrm{cm}^2$. Dokažte, že existují minimálně 2 čtverečky takové, že obsah jejich překrytí je alespoň $\frac{1}{45}\,\mathrm{cm}^2$.[12]

Řešení. Všechny dále uváděné obsahy jsou v cm^2.

Dané čtverečky $U_1, U_2, \ldots, U_9$ podle zadání mají stejné obsahy $|U_i| = \frac{1}{5}$. Jelikož dále $\sum_{i=1}^{9} |U_i| = \frac{9}{5} > 1$, nutně se dva ze čtverečků U_i překrývají.

Připusťme, že pro každé $i, j, 1 \leq i < j \leq 9$, je $|U_i \cap U_j| < \frac{1}{45}$. Potom obsah plochy pokryté čtverečky $U_1, U_2, \ldots, U_9$ je větší než 1. Skutečně

$$|U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_9| \geq \sum_{i=1}^{9} |U_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq 9} |U_i \cap U_j| > 9 \times \frac{1}{5} - \binom{9}{2} \times \frac{1}{45} = 1,$$

kde neostrá nerovnost vyplývá z toho, že zadání nevylučuje, že se na určitých místech překrývají více než 2 čtverečky. Avšak všechny čtverečky $U_1, U_2, \ldots, U_9$ leží uvnitř obrazce O o obsahu 1, proto

$$|U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_9| \leq 1,$$

a to je spor. Existuje tudíž dvojice čtverečků $U_i, U_j (1 \leq i < j \leq 9)$ taková, že $|U_i \cap U_j| \geq \frac{1}{45}$.

Příklad 13. Ve městě U žije n dívek a n chlapců, přitom každá z dívek zná všechny chlapce. Ve městě V žije n dívek $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ a $2n-1$ chlapců $(G_1, G_2, \ldots, G_{2n-1})$ a pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ platí, že dívka F_i zná právě chlapce $G_1, \ldots, G_{2i-1}$. Pro každé $c \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vyberme c dívek a c chlapců z města U a stejně tak c dívek a c chlapců z města V. Mládež, která žije ve stejném městě, „spárujeme“ pro chystaný ples, v obou případech dostaneme c párů. Při „spárování“ musíme dodržet následující pravidlo: taneční pár může utvořit pouze dívka a chlapec, kterého už tato dívka zná. Označme $U(c)$ (respektive $V(c)$) počet možností pro vyhovující výběr c dívek a c chlapců ve městě U (respektive V). Dokažte, že

$$U(c) = V(c).$$[13]

[12] v knize str. 168

[13] v knize str. 101–102. Neúplné řešení v originálním zdroji bylo doplněno vedoucím práce.

Řešení. Uvažujme popsanou situaci pro každé $n \geq 1$ a označme proto $U(c) = U_n(c)$ a $V(c) = V_n(c)$. Jelikož ve městě U zná každá dívka každého chlapce, pro každé $n \geq 1$ platí

$$U_n(c) = \binom{n}{c}^2 \cdot c! = \frac{(n!)^2}{[(n-c)!]^2 \cdot c!}. \tag{5}$$

Nyní odvodíme rekurentní vztahy pro hodnoty $V_n(c)$, kde $n \geq 3$ a $2 \leq c \leq n$. Pro dané n a c rozlišíme dva případy podle toho, jestli dívka F_n patří/nepatří mezi c vybraných dívek.

V prvním případě dívka F_n mezi c vybraných dívek patří. Potom počet možností, jak utvořit zbylých $c-1$ párů, je $V_{n-1}(c-1)$. Jelikož partnerem dívky F_n může být kterýkoliv ze zbylých $(2n-1)-(c-1) = 2n-c$ chlapců, s využitím pravidla součinu dostáváme, že celkový počet možností je $(2n-c)V_{n-1}(c-1)$.

Přejděme ke druhému případu, kdy dívka F_n mezi c vybraných dívek nepatří. Potom nutně platí $c < n$, dívky byly vybrány ze skupiny $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$ a jejich taneční partneři ze skupiny $G_1, G_2, \ldots, G_{2n-3}$. Celkový počet možností výběru je pak $V_{n-1}(c)$.

Shrneme-li naše výše uvedené úvahy, pro každé $n \geq 3$ dostáváme vztahy

$$V_n(c) = (2n-c)V_{n-1}(c-1) + V_{n-1}(c), \qquad V_n(n) = nV_{n-1}(n-1), \tag{6}$$

kde $c = 1, 2, \ldots, n-1$.

Zřejmě $U_n(1) = n^2 = V_n(1)$ a $U_2(2) = 2 = V_2(2)$. S využitím (5) víme, že

$$U_{n-1}(c) = \frac{[(n-1)!]^2}{[(n-1-c)!]^2 \cdot c!}$$

a také

$$U_{n-1}(c-1) = \frac{[(n-1)!]^2}{[(n-c)!]^2 \cdot (c-1)!}.$$

S pomocí právě uvedených vztahů snadno odvodíme, že

$$U_n(c) = (2n-c)U_{n-1}(c-1) + U_{n-1}(c), \qquad U_n(n) = nU_{n-1}(n-1), \tag{7}$$

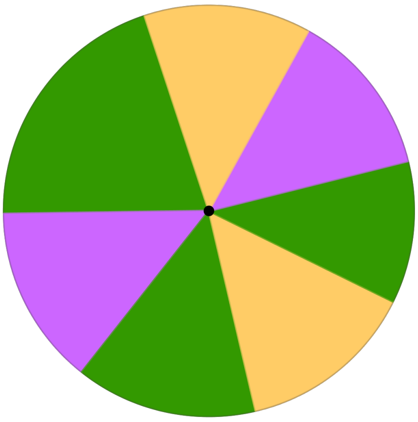
kde opět $c = 1, 2, \ldots, n-1$.

Porovnáme-li vztahy (6) a (7), matematickou indukcí vzhledem k n dostaneme, že posloupnosti $\Big(U_n(c)\Big)_{c=1}^{n}$ a $\Big(V_n(c)\Big)_{c=1}^{n}$ mají stejné první členy a jsou zadány stejným rekurentním vztahem, takže platí $U_n(c) = V_n(c)$ pro každé $c = 1, 2, \ldots, n$ a důkaz je dokončen.

Příklad 14. Kruh je rozdělen na u ($u \geq 2$) kruhových výsečí $S_1, S_2, \ldots, S_u$, každá výseč je obarvena jednou z a barev tak, že sousední výseče jsou obarveny různými barvami (jedno z možných obarvení pro $u = 7$, $a = 3$ ilustruje obrázek 2.3). Kolika různými způsoby lze takto výseče obarvit?[14]

Řešení. Počet různých obarvení pro daný počet výsečí u a barev a označme $f_u(a)$.

[14] v knize str. 102–103



Obrázek 2.3: Ilustrace příkladu 14 pro $u = 7$, $a = 3$.

Nejdříve uvažme případ, kdy $u = 2$. První výseč může být obarvena libovolnou z a daných barev, druhá výseč libovolnou z $a-1$ barev, které jsme při obarvení první výseče nepoužili. Tudíž

$$f_2(a) = a \cdot (a-1).$$

Nyní uvažme případ, kdy $u > 2$ a pokusme se odvodit rekurentní vztah. První výseč opět můžeme obarvit libovolnou z a daných barev, druhou výseč libovolnou z $a-1$ barev, které jsme při obarvení první výseče nepoužili. Třetí výseč opět jednou z $a-1$ barev („vyloučena“ je ta barva, kterou jsme obarvili druhou výseč). Stejně tak máme $a-1$ možností obarvení pro čtvrtou, pátou, $\dots$, u-tou výseč. Barvy výsečí S_u a S_1 mohou být různé, ale také mohou být obě výseče obarveny stejnou barvou. Dostáváme $a(a-1)^{u-1}$ různých obarvení. Tato obarvení rozdělíme do 2 skupin právě podle barev výsečí S_1 a S_u.

Do první skupiny zařadíme ta obarvení, při nichž jsou barvy výsečí S_1 a S_u různé. Počet obarvení v této skupině je právě hledaná hodnota $f_u(a)$.

Do druhé skupiny zařadíme zbylá obarvení, při nichž mají výseče S_1 a S_u stejnou barvu. Můžeme je pak „spojit“ do jediné větší výseče. Kruh pak bude rozdělen na $u-1$ výsečí, které mohou být obarveny $f_{u-1}(a)$ způsoby. To je zároveň počet obarvení ve druhé skupině.

Odvodili jsme rekurentní vztah (pro každé $u > 2$)

$$f_u(a) + f_{u-1}(a) = a(a-1)^{u-1}.$$

Nyní zaveďme $g_u(a) = \frac{f_u(a)}{(a-1)^u}$ pro každé $a \geq 2$ a každé $u \geq 2$. Z odvozeného rekurentního vztahu dostáváme, že

$$g_u(a) + \frac{1}{a-1} g_{u-1}(a) = \frac{a}{a-1},$$

$$g_u(a) - 1 = -\frac{1}{a-1}[g_{u-1}(a) - 1].$$

Čísla $g_u(a) - 1$ tedy utvoří při pevném a geometrickou posloupnost, takže platí

$$g_u(a) - 1 = (-\frac{1}{a-1})^{u-2}[g_2(a) - 1],$$

$$g_u(a) - 1 = (-\frac{1}{a-1})^{u-2}\left[\frac{f_2(a)}{(a-1)^2} - 1\right] = (-\frac{1}{a-1})^{u-2}\left[\frac{a(a-1)}{(a-1)^2} - 1\right],$$

$$g_u(a) - 1 = (-1)^u \frac{1}{(a-1)^{u-1}}.$$

Nyní už jednoduchou úpravou získáme výsledný vzorec

$$f_u(a) = (a-1)^u + (-1)^u(a-1) \qquad (u \geq 2)$$

pro hledaný počet různých obarvení kruhu při daném počtu výsečí u a barev a, který zřejmě platí i v případě $a = 1$.

Příklad 15. Na turnaji se každý hráč utkal právě jednou s každým z ostatních. Na konci každého utkání byly body rozděleny následovně: vítěz 2 body, poražený 0 bodů, v případě remízy každý hráč 1 bod. Po skončení turnaje bylo zjištěno, že každý z hráčů získal přesně polovinu svých bodů v utkáních s 10 hráči, kteří celkově získali nejméně bodů. (Tedy i každý z 10 hráčů s nejnižšími bodovými zisky získal polovinu svých bodů v utkáních s dalšími 9 bodově nejméně úspěšnými hráči.) Kolik hráčů celkem se turnaje zúčastnilo?[15]

Řešení. Celkový počet hráčů, kteří se turnaje zúčastnili, označme n. Všichni hráči dohromady získali $2\binom{n}{2} = n(n-1)$ bodů. 10 hráčů s nejnižším bodovým ziskem získalo ve vzájemných zápasech celkem $2\binom{10}{2} = 90$ bodů, což je polovina jejich celkového bodového zisku, takže 10 bodově nejméně úspěšných hráčů získalo celkem 180 bodů. Nejúspěšnějších $n-10$ hráčů ve vzájemných zápasech získalo $2\binom{n-10}{2} = (n-10)(n-11)$ bodů, což je dle zadání polovina jejich celkového bodového zisku. Tudíž nejúspěšnějších $n-10$ hráčů získalo celkem $2(n-10)(n-11)$ bodů. Dostáváme následující rovnici:

$$n(n-1) = 180 + 2(n-10)(n-11),$$

kterou upravíme do tvaru

$$n^2 - 41n + 400 = (n-25)(n-16) = 0.$$

Turnaje se tedy mohlo zúčastnit 25, případně 16 hráčů. Nyní ukážeme, že 16 hráčů se turnaje zúčastnit nemohlo. Průměrný bodový zisk nejúspěšnějších $n-10$ hráčů totiž nemůže být menší než průměrný bodový zisk 10 nejméně úspěšných hráčů, tj.

$$2(n-10)(n-11) : (n-10) \geq 180 : 10,$$

tedy $n \geq 20$. Turnaje se tak mohlo zúčastnit jedině 25 hráčů.

I když to zadání úlohy nevyžaduje, ukážeme, že takový turnaj s 25 hráči existuje. Hráče rozdělíme na 15 *úspěšných* a 10 *neúspěšných*. Každé utkání mezi dvěma *úspěšnými* necháme skončit remízou, každý z *úspěšných* tak z těchto zápasů získá 14 bodů. Všechna utkání mezi *neúspěšnými* také necháme skončit remízou, každý z *neúspěšných* z těchto zápasů získá 9 bodů. Zbývají utkání dvojice *úspěšný* - *neúspěšný*. Každého z *úspěšných* necháme v zápasech proti *neúspěšným* vybojovat 6 výher, 2 remízy a 2 porážky, což mu přinese dalších 14 bodů. Každého *neúspěšného* v těchto zápasech necháme dopadnout

[15] v knize str. 166, 270–271

stejně, tj. aby vybojoval 3 výhry, 3 remízy a 9 porážek, což mu přinese dalších 9 bodů. Je zřejmé, že v turnaji s námi navrženým průběhem každý z 25 hráčů získá právě polovinu svých bodů v utkáních s *neúspěšnými*, čímž jsme ukázali, že turnaj s vlastnostmi popsanými v zadání existuje.

Příklad 16. Na konci školního roku se 14 spolužáků domluvilo, že si společně zahrají japonské šachy *šógi*. Každý hráč hraje právě jednou s každým z ostatních 13 a každá hra končí vítězstvím jednoho z hráčů. Pokud hráč A porazí hráče B, hráč B porazí hráče C a hráč C porazí hráče A, trojici (A,B,C) nazveme „úplnou“. Určete maximální možný počet „úplných“ trojic.[16]

Řešení. Daných 14 hráčů označíme $A_1,\dots,A_{14}$ a počet výher hráče $A_i\,(i=1,2,\dots,14)$ označíme a_i. Pokud tři hráči netvoří „úplnou“ trojici, pak právě jeden z nich porazil oba další hráče z této trojice. Odtud plyne, že počet trojic, které nejsou „úplné“, je $\sum_{i=1}^{14}\binom{a_i}{2}$. Počet „úplných“ trojic je tudíž $U=\binom{14}{3}-\sum_{i=1}^{14}\binom{a_i}{2}$. Aby U nabylo maximální možné hodnoty, musí být počet „neúplných“ trojic minimální možný.

Dokážeme, že nabývá-li $\sum_{i=1}^{14}\binom{a_i}{2}$ minimální hodnoty, pak $|a_i-a_j|\le 1, 1\le i<j\le 14$. Připusťme, že naopak existují počty výher a_i, a_j takové, že $a_i-a_j\ge 2$. Jistě pak existuje hráč A_k, který prohrál s hráčem A_i a zároveň porazil hráče A_j. Změňme v celém turnaji výsledky pouze těchto dvou zápasů. Pak bude platit pro nové počty výher $a'_i=a_i-1, a'_j=a_j+1$, $a'_k=a_k, (k\ne i,j, 1\le k\le 14)$. Potom

$$\sum_{u=1}^{14}\binom{a'_u}{2}-\sum_{u=1}^{14}\binom{a_u}{2}=\binom{a_i-1}{2}+\binom{a_j+1}{2}-\left[\binom{a_i}{2}+\binom{a_j}{2}\right]=$$

$$-a_i+1+a_j=-(a_i-a_j)+1\le -2+1=-1.$$

Tedy

$$\sum_{u=1}^{14}\binom{a'_u}{2}<\sum_{u=1}^{14}\binom{a_u}{2},$$

což je ve sporu s tím, že hodnota $\sum_{i=1}^{14}\binom{a_i}{2}$ byla vybrána jako minimální možná.

Uvážíme-li, že $\sum_{i=1}^{14}a_i=\binom{14}{2}=91$ a $|a_i-a_j|\le 1 (1\le i,j\le 14)$, dostáváme, že mezi čísly $a_1,a_2,\dots,a_{14}$ najdeme sedmkrát číslo 6 a sedmkrát číslo 7. Minimální hodnota $\sum_{i=1}^{14}\binom{a_i}{2}$ se tedy rovná

$$7\left[\binom{6}{2}+\binom{7}{2}\right]=252$$

a maximální možný počet „úplných“ trojic se tedy rovná

$$U=\binom{14}{3}-\sum_{i=1}^{14}\binom{a_i}{2}=364-252=112.$$

Zjištěný počet 112 je skutečně možný, protože jsme popsali, jak se k němu dostaneme opakovanými změnami vždy dvou výsledků ze všech zápasů.

[16] v knize str. 136–138

Příklad 17. Dne karetních her se účastní 2004 dívky. Všechny sedí kolem kruhového stolu a hrají hru s 2004 kartami. Na začátku má všechny karty dívka D. Má-li některá z dívek u sebe více než jednu kartu, musí dát po jedné kartě každé ze svých dvou sousedek. Hra končí ve chvíli, kdy má každá z dívek právě jednu kartu. Dokažte, že za daných pravidel je nemožné hru ukončit.[17]

Řešení. Budeme předpokládat, že hru ukončit lze. Dívky označíme čísly $1, 2, \ldots, 2004$. Pokud dívka i má na úplném začátku nebo po některém tahu (tahem rozumíme, že některá z dívek předá karty svým sousedkám) u sebe kartu K, kartě K přiřadíme aktuální hodnotu i. Předpokládejme, že po u-tém tahu je součet všech aktuálních hodnot karet S_u, přitom na začátku hry má všechny karty dívka D s číslem a, tedy $S_0 = 2004 \cdot a$. Pokud v u-tém tahu předává karty sousedkám dívka 1 (dívkám 2 a 2004), součet všech aktuálních hodnot karet stoupne o

$$(2004-1)+(2-1)=2004, \qquad \text{tedy} \qquad S_u = S_{u-1}+2004.$$

Pokud v u-tém tahu předává karty sousedkám dívka 2004 (dívkám 1 a 2003), součet všech aktuálních hodnot karet klesne o

$$(2004-2003)+(2004-1)=2004, \qquad \text{tedy} \qquad S_u = S_{u-1}-2004.$$

Pokud v u-tém tahu předává karty sousedkám dívka $i\,(2 \leq i \leq 2003)$ (dívkám $i-1$ a $i+1$), součet všech aktuálních hodnot karet se nezmění, protože

$$[i-(i+1)]+[i-(i-1)]=0, \qquad \text{tedy} \qquad S_u = S_{u-1}.$$

Z předchozích úvah vyplývá, že součet S_u je vždy násobkem čísla 2004. Pokud hra po určitém počtu tahů skončí, pro součet aktuálních hodnot karet bude platit, že

$$S = 1+2+\cdots+2003+2004 = 1002 \cdot 2005.$$

Získaný součet však zřejmě není násobkem čísla 2004. Z nastalého sporu vyplývá, že náš úvodní předpoklad byl chybný a že za daných pravidel je skutečně nemožné hru ukončit.

Příklad 18. Je dána množina U obsahující 48 různých přirozených čísel, jejichž rozklady na prvočinitele obsahují pouze prvočísla menší nebo rovna 29. Dokažte, že množina U obsahuje čtyři různá přirozená čísla taková, že jejich součin je druhá mocnina přirozeného čísla.[18]

Řešení. Existuje právě 10 prvočísel, která jsou menší nebo rovna 29:

$$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11, p_6 = 13, p_7 = 17, p_8 = 19, p_9 = 23, p_{10} = 29.$$

Mějme množinu

$$A = \{p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_{10}^{a_{10}} \,|\, a_i = 0 \text{ nebo } 1,\, i = 1, 2, \ldots, 10\}$$

a systém množin B obsahující všechny dvouprvkové podmnožiny množiny U. Pro každou množinu $\{a, b\} \in B$ můžeme součin ab zapsat v jednoznačném tvaru: $ab = K_{ab}^2 \cdot l_{ab}$, kde

[17] v knize str. 125–126
[18] v knize str. 81–82

K_{ab} je přirozené číslo a $l_{ab} \in A$. To, že každé množině $\{a,b\} \in B$ můžeme jednoznačně přiřadit $l_{ab} \in A$, nám umožňuje definovat zobrazení $f : B \to A$ předpisem $f(\{a,b\}) = l_{ab}$.

Jelikož $|B| = \binom{48}{2} = 1128 > |A| = 2^{10} = 1024$, zobrazení f není injektivní. Existují tedy $\{a,b\},\{c,d\} \in B, \{a,b\} \neq \{c,d\}$ takové, že

$$l_{ab} = f(\{a,b\}) = f(\{c,d\}) = l_{cd},$$

z čehož dostáváme

$$abcd = K_{ab}^2 l_{ab} \cdot K_{cd}^2 l_{cd} = (K_{ab}K_{cd}l_{ab})^2.$$

Jsou-li čísla a,b,c,d různá, právě jsme našli čtveřici čísel požadovaných vlastností. Je však možné, že se množiny $\{a,b\}$ a $\{c,d\}$ v jednom čísle shodují. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a \neq c, b = d$. Potom $abcd = acb^2$ a ac je druhá mocnina přirozeného čísla.

Nyní čísla a,c z množiny U vyjmeme. Platí, že $|U \setminus \{a,c\}| = \binom{46}{2} = 1035 > |A|$. Zopakujeme předchozí úvahu. Z ní plyne, že existují dvě různé množiny $\{a',b'\},\{c',d'\}$ ze systému dvouprvkových podmnožin $U \setminus \{a,c\}$ takové, že součin $a'b'c'd'$ je druhou mocninou přirozeného čísla. Pokud jsou čísla a',b',c',d' různá, tvoří čtveřici čísel požadovaných vlastností. Je však možné, že se množiny $\{a',b'\}$ a $\{c',d'\}$ v jednom čísle shodují. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a' \neq c', b' = d'$. Potom $a'b'c'd' = a'c'b'^2$ a $a'c'$ je druhá mocnina přirozeného čísla. Dostáváme, že přirozená čísla a,c,a',c' jsou různá a jejich součin je druhá mocnina přirozeného čísla. Tím je důkaz hotov.

Příklad 19. Na soutěži zahrádkářů se sešlo 40 soutěžících. Libovolně vybraných 19 zahrádkářů sdílí obdiv k zelenině právě jednoho ze svých kolegů. Tento obdiv je vždy jednostranný, takže pokud zahrádkář A obdivuje zeleninu svého kolegy B, zahrádkář B zeleninu zahrádkáře A neobdivuje. Také neuvažujeme, že by zahrádkáři obdivovali svou vlastní zeleninu. Dokažte, že existuje množina U tvořená 20 zahrádkáři účastnícími se soutěže taková, že pro každého zahrádkáře $V \in U$ platí, že V není zahrádkářem, jehož zeleninu obdivuje všech 19 zbylých zahrádkářů patřících do U.[19]

Řešení. Množinu tvořenou všemi 40 zahrádkáři, kteří se zúčastnili soutěže, označme Z. 20prvkovou podmnožinu P množiny Z nazveme *dobrou*, pokud v ní najdeme zahrádkáře, jehož zeleninu obdivuje všech 19 dalších zahrádkářů patřících do P (ze zadání vyplývá, že není možné, aby v P bylo takových zahrádkářů víc než jeden). Chceme dokázat, že existuje 20prvková podmnožina množiny Z, která není *dobrá*. To je ekvivalentní s tvrzením, že *dobrých* 20prvkových podmnožin množiny Z je méně než $\binom{40}{20}$, což je počet všech 20prvkových podmnožin množiny Z.

Označme X systém množin obsahující všechny *dobré* 20prvkové podmnožiny Z a Y systém množin obsahujicí všechny 19prvkové podmnožiny Z. Pro každou množinu $R \in Y$ označíme $g(R)$ zahrádkáře, jehož zeleninu obdivuje všech 19 osob z R. Z definice *dobré* podmnožiny vyplývá, že pro každou množinu $T \in X$ existuje jediná osoba $O \in T$ taková, že $O = g(T \setminus \{O\})$. Můžeme tedy definovat zobrazení $f : X \to Y$ následovně

$$f(T) = T \setminus O.$$

Zobrazení f je zřejmě injektivní. Pokud by se totiž dvě různé množiny $T_1, T_2 \in X$ zobrazily na tutéž množinu $R \in Y$, všech 19 osob z R by sdílelo obdiv k zelenině dvou různých

[19] v knize str. 80–81

zahrádkářů O_1 a O_2, kde $O_1 \in T_1 \setminus R$ a $O_2 \in T_2 \setminus R$, což by bylo v rozporu se zadáním úlohy. Dostáváme, že

$$|X| \leq |Y| = \binom{40}{19} < \binom{40}{20},$$

což jsme chtěli dokázat. Skutečně tedy existuje množina U tvořená 20 zahrádkáři účastnícími se soutěže taková, že pro každého zahrádkáře $V \in U$ platí, že V není zahrádkářem, jehož zeleninu obdivuje všech 19 zbylých zahrádkářů patřících do U.

Příklad 20. Je dán kruh s obvodem 24 cm a obvodovou kružnicí rozdělenou na 24 shodných oblouků. Kolika způsoby můžeme vybrat 8 bodů z 24, které obvodovou kružnici rozdělují, tak, aby délka kratšího oblouku mezi libovolnými dvěma vybranými body nebyla ani 3 cm, ani 8 cm?[20]

Řešení. Daných 24 bodů označíme $1, 2, \ldots, 24$ podle pořadí na kružnici a zapíšeme je do tabulky 3×8:

1	4	7	10	13	16	19	22
9	12	15	18	21	24	3	6
17	20	23	2	5	8	11	14

V této tabulce dvě sousední čísla v řádku (první a poslední číslo v řádku také považujeme za sousední) odpovídají dvěma bodům takovým, že délka kratšího oblouku mezi nimi je 3 cm. Dále v této tabulce dvě sousední čísla ve sloupci (první a poslední číslo ve sloupci také považujeme za sousední) odpovídají dvěma bodům takovým, že délka kratšího oblouku mezi nimi je 8 cm. Z každého sloupce tedy můžeme vybrat nejvýše jedno číslo. Jelikož vybíráme právě 8 čísel (a jim odpovídající body), z každého sloupce musíme vybrat právě jedno číslo, přičemž čísla vybraná ze sousedních sloupců (první a poslední sloupec také považujeme za sousední) nesmějí ležet ve stejném řádku.

Podíváme-li se na každý sloupec jako na kruhovou výseč a na první, druhý a třetí řádek každého sloupce jako na tři barvy, je tento problém ekvivalentní s případem $u = 8, a = 3$ v příkladu 14. Hledaný počet způsobů, kterými můžeme požadovaným způsobem vybrat 8 bodů rozdělujících obvodovou kružnici, je tedy roven

$$f_8(3) = 2^8 + (-1)^8 \cdot 2 = 258.$$

Příklad 21. Předpokládejme, že skupina n lidí ($n \geq 6$) splňuje následující podmínky:
(1) Každý člen skupiny loni poslal přání k narozeninám nejvýše $n - \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor$ členům skupiny.
(2) Pro libovolně vybrané tři členy skupiny platí, že v této trojici minimálně dva lidé loni poslali přání k narozeninám oběma zbylým členům trojice.
Dokažte, že je možné těchto n osob rozdělit do dvou disjunktních množin tak, aby pro libovolnou dvojici osob z téže množiny platilo, že si loni k narozeninám popřály navzájem.[21]

Řešení. Členy skupiny budeme reprezentovat body v rovině, z nichž žádné tři neleží na jedné přímce. Pokud si dva lidé loni navzájem popřáli k narozeninám, spojíme jim příslušné body zelenou úsečkou. V opačném případě příslušné body spojíme fialovou úsečkou. Je zřejmé, že v žádném z bodů nekončí více $n - \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor$ zelených úseček. Dále pro libovolné tři body platí, že minimálně jedna dvojice bodů z této trojice je spojena zelenou úsečkou.

[20] v knize str. 104–105
[21] v knize str. 60–62

Původní problém jsme převedli na úkol dokázat, že je možné rozdělit uvažovaných n bodů do dvou disjunktních množin tak, aby každé dva body ze stejné množiny byly spojeny zelenou úsečkou.

Množinu daných n bodů označíme U. V každém z bodů množiny U končí nejméně

$$n-1-\left(n-\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor\right)=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$$

fialových úseček. Předpokládejme, že bod A_1 je spojen s $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ body $B_1,B_2,\ldots B_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$ fialovými úsečkami a že bod B_1 je spojen s $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ body $A_1,A_2,\ldots A_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$ fialovými úsečkami. Tak jsme definovali množiny

$$U_1=\{A_1,A_2,\ldots,A_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\} \qquad \text{a} \qquad U_2=\{B_1,B_2,\ldots,B_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\}.$$

Zřejmě $U_1\cap U_2=\emptyset$ a libovolné dva body z téže množiny U_i $(i=1,2)$ jsou spojeny zelenou úsečkou.

Je-li $n=2k$ sudé číslo, je množina U rozdělena do dvou disjunktních k-prvkových množin U_1 a U_2, které mají požadovanou vlastnost.

Je-li $n=2k+1\geq 6$ liché číslo, pak $k\geq 3$. Tehdy $|U_1\cup U_2|=2k$, takže existuje jediný bod $C\in U$, který nepatří do $U_1\cup U_2$.

Jsou-li body C a B_1 spojeny fialovou úsečkou, označme $U_1'=U_1\cup\{C\}$. Zřejmě libovolné dva body z množiny U_1' jsou spojeny zelenou úsečkou, stejně jako libovolné dva body z U_2. Dále $U_1'\cap U_2=\emptyset$ a $U_1'\cup U_2=U$. Tím je opět nalezeno požadované rozdělení množiny U.

Stejnou úvahu zopakujeme pro případ, kdy jsou body C a A_1 spojeny fialovou úsečkou. Požadované rozdělení množiny U opět existuje.

Zbývá případ, kdy je bod C s oběma body A_1,B_1 spojen zelenou úsečkou. Nutně existuje nejméně $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor=k\geq 3$ bodů, které jsou s bodem C spojeny fialově, a všechny tyto body neleží ve stejné množině U_i $(i=1,2)$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že bod C je spojen fialovými úsečkami s některým bodem $A_i\in U_1$ $(2\leq i\leq k)$ a s některými body $B_l,B_m\in U_2$ $(2\leq l<m\leq k)$. Víme, že bod A_i je spojen fialovými úsečkami nejméně s $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor=k$ body, z nichž nejméně $k-1$ bodů (mimo bod C) patří do U_2. Pomineme-li body $B_l,B_m\in U_2$, v množině U_2 zbývá pouze $k-2$ bodů. Bod A_i tedy musí být s některým z bodů B_l,B_m spojen fialovou úsečkou. Nechť je to bez újmy na obecnosti bod B_l. Potom však pro trojici bodů C, A_i a B_l platí, že žádná dvojice bodů z této trojice není spojena zelenou úsečkou. Vzniklý spor znamená, že není možné, aby byl bod C spojen s oběma body A_1,B_1 zelenou úsečkou.

Tím jsme dokázali, že daných n osob je skutečně možné rozdělit do dvou disjunktních množin tak, aby pro libovolnou dvojici osob z téže množiny platilo, že si loni k narozeninám popřály navzájem.

Příklad 22. Pro celé číslo $n\geq 0$ dokažte následující identitu:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\binom{n-k}{\lfloor(n-k)/2\rfloor}=\binom{2n+1}{n}.$$[22]

[22] v knize str. 95–97

Řešení. Začneme tím, že koeficient u x^n v mnohočlenu

$$(1+x)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} x^k$$

je právě $\binom{2n+1}{n}$. Zároveň

$$(1+x)^{2n+1} = (1+x^2+2x)^n \cdot (1+x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2x)^k (1+x^2)^{n-k} \cdot (1+x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k x^k (1+x^2)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k x^{k+1} (1+x^2)^{n-k}.$$

Je-li $n-k$ liché, potom sčítanec z první sumy

$$\binom{n}{k} 2^k x^k (1+x^2)^{n-k} = \binom{n}{k} 2^k x^k \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} x^{2i}$$

neobsahuje mocninu x^n, zatímco sčítanec z druhé sumy

$$\binom{n}{k} 2^k x^{k+1} (1+x^2)^{n-k} = \binom{n}{k} 2^k x^{k+1} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} x^{2i}$$

mocninu x^n obsahuje a příslušný koeficient je

$$\binom{n}{k} 2^k \binom{n-k}{(n-k-1)/2} = \binom{n}{k} 2^k \binom{n-k}{\lfloor (n-k)/2 \rfloor}.$$

Je-li naopak $n-k$ sudé, potom sčítanec z první sumy mocninu x^n obsahuje a příslušný koeficient je

$$\binom{n}{k} 2^k \binom{n-k}{(n-k)/2} = \binom{n}{k} 2^k \binom{n-k}{\lfloor (n-k)/2 \rfloor},$$

zatímco sčítanec z druhé sumy mocninu x^n neobsahuje.

Dohromady dostáváme, že koeficient u x^n v $(1+x)^{2n+1}$ je

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \binom{n-k}{\lfloor (n-k)/2 \rfloor}$$

a porovnáním s úvodním vyjádřením téhož koeficientu dostaneme žádanou identitu.

Příklad 23. Je dána množina $U = \{x_1, x_2, \ldots, x_{4n+3}\}$ a její podmnožiny $A_1, A_2, \ldots, A_{4n+3}$, které splňují následující podmínky:
(1) Libovolných $n+1$ prvků z U patří právě do jedné podmnožiny A_i $(1 \le i \le 4n+3)$.
(2) $|A_i| \ge 2n+1$ $(i = 1, 2, \ldots, 4n+3)$.
Dokažte, že pro libovolné dvě podmnožiny A_i, A_j $(1 \le i < j \le 4n+3)$ platí, že mají právě n společných prvků.[23]

[23] v knize str. 91–93

Řešení. Vytvoříme tabulku $(4n+3)\times(4n+3)$ tak, že číslo v i-tém řádku a j-tém sloupci zadáme předpisem

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{když } x_i \in A_j, \\ 0, & \text{když } x_i \notin A_j, \end{cases} \quad \text{kde}\, i,j = 1,2,\ldots,4n+3.$$

Položme $r_i = \sum_{j=1}^{4n+3} a_{ij}$, $l_j = \sum_{i=1}^{4n+3} a_{ij}$. Potom r_i udává počet podmnožin z $A_1,\ldots,A_{4n+3}$, které obsahují prvek x_i, a l_j udává počet prvků podmnožiny A_j (tedy $l_j = |A_j|$). Z podmínky (2) ze zadání dostáváme, že

$$\sum_{i=1}^{4n+3} r_i = \sum_{i=1}^{4n+3}\sum_{j=1}^{4n+3} a_{ij} = \sum_{j=1}^{4n+3}\sum_{i=1}^{4n+3} a_{ij} = \sum_{j=1}^{4n+3} |A_j| \geq (4n+3)(2n+1).$$

Je-li x_k společným prvkem podmnožin A_i, A_j $(i<j)$, vznikne nám trojice $\{x_k; A_i, A_j\}$. Množinu takovýchto trojic označíme V. Z podmínky (1) ze zadání dostáváme, že pro každé dvě různé podmnožiny A_i, A_j platí $|A_i \cap A_j| \leq n$. Existuje tedy nejvýše n trojic z V, které obsahují danou dvojici A_i, A_j, a proto

$$|V| \leq n \cdot \binom{4n+3}{2} = n(4n+3)(2n+1).$$

Na druhou stranu, každý prvek x_k patří do r_k podmnožin z $A_1,\ldots,A_{4n+3}$, existuje tedy právě $\binom{r_k}{2}$ trojic z V obsahujících daný prvek x_k. Proto

$$|V| = \sum_{k=1}^{4n+3} \binom{r_k}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{4n+3} r_k^2 - \sum_{k=1}^{4n+3} r_k\right).$$

Zkombinujeme-li výše odvozené vztahy a Cauchyovu nerovnost, dostaneme

$$n(4n+3)(2n+1) \geq \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{4n+3} r_k^2 - \sum_{k=1}^{4n+3} r_k\right) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4n+3}\left(\sum_{k=1}^{4n+3} r_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{4n+3} r_k\right) =$$

$$= \frac{1}{2(4n+3)}\left(\sum_{k=1}^{4n+3} r_k\right)\left(\sum_{k=1}^{4n+3} r_k - (4n+3)\right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2(4n+3)} \cdot (2n+1)(4n+3)[(2n+1)(4n+3)-(4n+3)] = n(2n+1)(4n+3).$$

Z toho vyplývá, že v nerovnosti $n(4n+3)(2n+1) \geq |V|$ musí nastat rovnost, což podle postupu jejího odvození znamená, že každé dvě podmnožiny A_i, A_j $(1 \leq i < j \leq 4n+3)$ skutečně mají právě n společných prvků.

Příklad 24. V rovině je dáno 18 bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce. Každé dva body jsou spojeny úsečkou, každá úsečka je obarvena zelenou, nebo fialovou barvou. Předpokládejme, že počet zelených úseček končících v jednom z daných bodů U je lichý a že počty zelených úseček končících v každém z dalších 17 bodů jsou navzájem různé. Určete počet „vícebarevných“ trojúhelníků (s alespoň jednou zelenou a s alespoň jednou

fialovou stranou), jejichž vrcholy jsou tvořeny trojicemi z 18 původně zadaných bodů.[24]
Řešení. Počet trojúhelníků se třemi zelenými stranami označíme m, počet trojúhelníků se dvěma zelenými a jednou fialovou stranou n a počet trojúhelníků s jednou zelenou a dvěma fialovými stranami p. Počet „vícebarevných" trojúhelníků, který chceme určit, je tudíž roven $n+p$. K tomu budeme v závěru řešení ještě potřebovat poznatek, že počet všech zelených úseček je $\frac{1}{16}(3m+2n+p)$, neboť každá z nich je stranou $18-2=16$ z uvažovaných trojúhelníků.

Jelikož počty zelených úseček končících v každém ze 17 bodů různých od U se navzájem liší, mohou být buď $0,1,\ldots,16$, nebo $1,2,\ldots,17$ (neboť počty 0 a 17 se navzájem vylučují). Uvažme první případ a počet zelených úseček končících v bodě U označme $2k-1$. Potom je celkový počet všech zelených úseček roven

$$\frac{1}{2}\{0+1+\cdots+16+2k-1\} = 4\cdot 17+k-\frac{1}{2},$$

což však zřejmě není celé číslo. Tento spor vylučuje první případ, přejděme tedy ke druhému. 17 bodů různých od U označíme $B_1,B_2,\ldots,B_{17}$ tak, aby počet zelených úseček končících v každém bodě B_i byl roven i. Potom bod B_{17} je spojen zelenými úsečkami se všemi 17 dalšími body a bod B_1 je spojen zelenou úsečkou právě s bodem B_{17}. Odtud se pro $i=1$ odvodí takové tvrzení: bod B_{17-i} je spojen zelenými úsečkami s dalšími $17-i$ body různými od bodů $B_1,B_2,\ldots,B_i$ a bod B_{i+1} je spojen zelenými úsečkami s $i+1$ body $B_{17},B_{16},\ldots,B_{17-i}$. Indukcí se platnost tohoto tvrzení celkově rozšíří na hodnoty $i=0,1,\ldots,7$ a jeho první část (o bodu B_{17-i}) i pro $i=8$. Odtud plyne, že bod U je spojen zelenými úsečkami s 9 body $B_{17},B_{16},\ldots,B_9$.

Úhel, jehož vrcholem je jeden ze zadaných bodů a rameny dvě zelené úsečky, nazveme *zeleným*. Podle počtů zelených úseček vycházejících z jednotlivých bodů B_i a rovněž z bodu U docházíme k závěru, že celkový počet *zelených* úhlů, které se vyskytují po třech v m trojúhelnících a ostatní po jednom v n trojúhelnících, je roven

$$3m+n = \sum_{i=2}^{17}\binom{i}{2}+\binom{9}{2} = 852. \tag{8}$$

Druhým závěrem je, že celkový počet zelených úseček, o kterém už jsme se zmínili v úvodním odstavci řešení, je roven

$$\frac{1}{16}(3m+2n+p) = \frac{1}{2}(1+2+\cdots+17+9) = 81. \tag{9}$$

Kombinací (8) a (9) dostáváme, že pro hledaný počet „vícebarevných" trojúhelníků platí

$$n+p = (3m+2n+p)-(3m+n) = 16\cdot 81-852 = 444.$$

Příklad 25. V republice R (která se dělí na kraje) je 1001 město, každá dvě z nich jsou spojena jednosměrnou cestou. Z každého města vychází právě 500 jednosměrných cest do 500 dalších měst a právě 500 takových jednosměrných cest do každého z měst vstupuje. V kraji K leží 668 ze všech měst. Dokažte, že po zmíněných cestách najdeme spojení

[24] v knize str. 166, 271–272. Originální zadání i řešení byly upraveny autorkou práce.

mezi libovolnými dvěma městy kraje K, aniž bychom během cesty museli navštívit některé z měst, které do kraje K nepatří.[25]

Řešení. Předpokládejme naopak, že v kraji K leží města U, V taková, že cesta z U do V, během které bychom nemuseli navštívit ani jedno město mimo kraj K, neexistuje. Rozdělme všechna města z kraje K do množin A, B takových, že pro každé město $C \in A$ platí, že existuje cesta z města U do města C taková, že během ní žádné město mimo kraj K navštívit nemusíme (předpokládejme, že $U \in A$), a pokud $C \notin A$, potom $C \in B$. Zřejmě $V \in B$, takže $B \neq \emptyset$.

Potom pro každá $U_i \in A$ a $V_i \in B$ platí, že jednosměrná cesta mezi těmito městy musí vést z V_i do U_i. V opačném případě by totiž existovala cesta $U \to U_i \to V_i$ bez návštěvy některého z měst mimo kraj K, což je ve sporu s tím, že $V_i \in B$.

Nechť $|A| = a, |B| = b$, zřejmě $a + b = 668$. Je-li $a \geq b$, potom $a \geq 334 \geq b$. Existuje celkem $\binom{b}{2}$ jednosměrných cest mezi městy v B, tudíž nutně existuje město $D \in B$ takové, že z něj vychází alespoň $\frac{1}{b}\binom{b}{2} = \frac{1}{2}(b-1)$ jednosměrných cest mířících do dalších měst z B. Město D je zároveň přímo spojeno a jednosměrnými cestami se všemi městy v množině A. Počet jednosměrných cest vycházejících z města D je tedy alespoň

$$a + \frac{1}{2}(b-1) = \frac{a + (a+b) - 1}{2} \geq \frac{334 + 668 - 1}{2} > 500,$$

což je v rozporu se zadáním úlohy.

Je-li $a < b$, potom $a < 334 < b$. Existuje celkem $\binom{a}{2}$ jednosměrných cest mezi městy v A, tudíž nutně existuje město $E \in A$ takové, že do něj vchází alespoň $\frac{1}{a}\binom{a}{2} = \frac{1}{2}(a-1)$ jednosměrných cest z dalších měst v A. Město E je zároveň přímo spojeno b jednosměrnými cestami se všemi městy v množině B. Počet jednosměrných cest vcházejících do města E je tedy alespoň

$$b + \frac{1}{2}(a-1) = \frac{b + (b+a) - 1}{2} \geq \frac{335 + 668 - 1}{2} > 500,$$

což je opět v rozporu se zadáním úlohy.

Shrneme-li předchozí závěry, dostáváme, že náš výchozí předpoklad byl chybný, a tudíž skutečně existuje spojení mezi libovolnými dvěma městy kraje K takové, že během cesty nemusíme navštívit některé z měst, které do kraje K nepatří.

Příklad 26. Centrum chemického výzkumu je tvořeno 99 laboratořemi. Mezi laboratořemi funguje potrubní pošta, každé dvě z nich jsou propojeny jednou potrubní cestou. Mezi všemi potrubními cestami je právě 99 obousměrných, ostatní jsou jednosměrné. Pokud čtveřice laboratoří splňuje, že do kterékoliv z těchto čtyř laboratoří můžeme poslat zprávu ze všech tří dalších laboratoří cestami v této čtveřici, označíme tuto čtveřici laboratoří jako „dobře propojenou“. Navrhněte schéma, aby počet „dobře propojených“ čtveřic byl co nejvyšší, a toto nejvyšší možné číslo určete.[26]

Řešení. Budeme uvažovat obecnější případ s n laboratořemi a n obousměrnými potrubními cestami ($n \geq 3$ je liché). Dále položme $m = \frac{1}{2}(n-3)$.

Je-li ve čtveřici laboratoří laboratoř L taková, že je se všemi dalšími laboratořemi ve čtveřici spojena jednosměrnou potrubní cestou a navíc všechny tyto potrubní cesty

[25] v knize str. 180, 275–276

[26] v knize str. 193–197. Neúplné řešení v originálním zdroji bylo doplněno vedoucím práce.

z laboratoře L vycházejí, daná čtveřice laboratoří „dobře propojenou“ není. Množinu všech čtveřic s takovouto laboratoří L označíme U a množinu zbylých čtveřic laboratoří, jež nejsou „dobře propojené“, označíme V. Potom počet „dobře propojených“ čtveřic je

$$A_n = \binom{n}{4} - |U| - |V|.$$

Laboratoře označme $1, 2, \dots, n$ a počet jednosměrných potrubních cest vycházejících z laboratoře i označme x_i. Potom

$$|U| = \sum_{i=1}^{n} \binom{x_i}{3}$$

a s ohledem na počet n obousměrných cest platí

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \binom{n}{2} - n = \frac{1}{2}n(n-3) = mn.$$

A_n nabyde největší hodnoty, když budou obě hodnoty $|U|$ a $|V|$ současně nejmenší možné. Nejdříve dokážeme, že $|U| \geq n\binom{m}{3}$. K tomu ukážeme, že $|U|$ nabývá nejmenší hodnoty na takovém systému cest, kdy pro každá možná $1 \leq i < j \leq n$ platí, že $|x_i - x_j| \leq 1$. Předpokládejme naopak, že existují taková $1 \leq i, j \leq n, i \neq j$, že $x_j - x_i \geq 2$. Jistě existuje laboratoř L_k, do které vede jednosměrná cesta z laboratoře L_j a zároveň z ní vychází jednosměrná cesta do laboratoře L_i. Změňme v celém systému cest pouze tyto dvě orientované cesty. Pak bude pro nové počty jednosměrných potrubních cest vycházejících z laboratoří platit $x'_i = x_i + 1, x'_j = x_j - 1, x'_k = x_k (k \neq i, j, 1 \leq k \leq 14)$. Potom $\sum_{l=1}^{n} x'_l = \sum_{l=1}^{n} x_l$. Je-li navíc $|U'| = \sum_{i=1}^{n} \binom{x'_i}{3}$, pak

$$|U| - |U'| = \binom{x_i}{3} + \binom{x_j}{3} - \binom{x'_i}{3} - \binom{x'_j}{3} =$$

$$= \binom{x_i}{3} + \binom{x_j}{3} - \binom{x_i+1}{3} - \binom{x_j-1}{3} = \binom{x_j-1}{2} - \binom{x_i}{2} > 0,$$

protože $(x_j - 1) - x_i \geq 1$. To je ve sporu s tím, že $|U|$ nabývá nejmenší hodnoty. Dodejme, že odvozená nerovnost $|U| > |U'|$ neplatí v případě $x_j = 2$ a $x_i = 0$, kdy obě kombinační čísla $\binom{x_j-1}{2}$ a $\binom{x_i}{2}$ jsou rovna nule. Tehdy platí $|U| = |U'|$, takže navrženou změnu hodnot x_j, x_i můžeme provést i v tomto případě, aniž hodnotu $|U|$ změníme.

Připomeňme, že $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = mn$, takže aritmetický průměr čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ je roven číslu m. Kdyby neplatilo $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = m$, měli bychom i a j taková, že $x_j \geq m+1$ a $x_i \leq m-1$, takže by platilo $x_j - x_i \geq 2$ a podle předchozího by hodnota $|U|$ nebyla nejmenší možná. Obecně proto platí $|U| \geq n\binom{m}{3}$, přičemž rovnost nastane pouze, když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = m$. To spolu s triviální nerovností $|V| \geq 0$ vede k odhadu

$$A_n = \binom{n}{4} - |U| - |V| \leq \binom{n}{4} - n\binom{m}{3} - 0 = \frac{1}{48}n(n-3)(n^2+6n-31). \tag{10}$$

Následující schéma ukáže situaci, kdy nerovnost (10) přejde v rovnost. Daných n laboratoří ztotožníme s body $B_1, B_2, \dots, B_n$ umístěnými na kružnici po směru chodu hodinových ručiček. Každé dvě sousední laboratoře spojíme obousměrnou cestou, tudíž obousměrné cesty jsou následující:

$$\overleftrightarrow{B_1B_2},\ \overleftrightarrow{B_2B_3},\ \ldots,\ \overleftrightarrow{B_{n-1}B_n},\ \overleftrightarrow{B_nB_1}.$$

Pro každá $i, j \in \{1,2,\ldots,n\}, i \neq j$, obsahuje-li oblouk $\widehat{B_iB_j}$ od B_i k B_j po směru hodinových ručiček lichý počet bodů, body B_i, B_j spojíme jednosměrnou cestou z B_i do B_j. Jelikož n je liché, právě jeden z oblouků s koncovými nesousedními body B_i, B_j obsahuje po směru hodinových ručiček lichý počet bodů, takže naše zavedení jednosměrných cest je korektní. Kupříkladu orientace jednosměrných cest s krajním bodem B_1 je následující:

$$\overrightarrow{B_1B_3},\ \overleftarrow{B_1B_4},\ \overrightarrow{B_1B_5},\ \overleftarrow{B_1B_6},\ \ldots,\ \overrightarrow{B_1B_{n-2}},\ \overleftarrow{B_1B_{n-1}}.$$

Orientaci cest s krajním bodem B_i pro každé $i \in \{2,3,\ldots,n\}$ dostaneme z předchozího výčtu tak, že všechny indexy bodů B zvětšíme o $i - 1$, přitom výsledné indexy větší než n o hodnotu n ještě zmenšíme.

Při popsaném zavedení jednosměrných cest je patrné, že pro každé i je počet jednosměrných cest, které z bodu B_i vycházejí, roven číslu $\frac{1}{2}(n-3) = m$, takže $|U| = n\binom{m}{3}$. Nyní dokážeme, že v tomto schématu $|V| = 0$.

Nejprve vysvětlíme, že pokud ve čtveřici laboratoří jsou některé dvě reprezentovány body B_i a B_j, které jsou na kružnici sousední, pak taková čtveřice je „dobře propojená“. Skutečně, pro každé $k \notin \{i, j\}$ platí, že pokud obě cesty B_kB_i a B_kB_j jsou jednosměrné, pak díky sousednosti B_j, B_j jedna z těchto dvou cest z bodu B_k vychází a druhá v něm končí. Proto je každá trojice B_k, B_i, B_j „dobře propojená“ a z této vlastnosti obou trojic B_k, B_i, B_j a B_l, B_i, B_j plyne, že „dobře propojená“ je i každá čtveřice B_i, B_j, B_k, B_l.

Proto není-li čtveřice laboratoří „dobře propojená“, všechny cesty mezi těmito laboratořemi jsou jednosměrné. Po směru chodu hodinových ručiček označme tyto laboratoře B_i, B_j, B_k, B_l a nechť b_i, b_j, b_k, b_l značí v tomto směru počty laboratoří mezi B_i a B_j, Bj a B_k, B_k a B_l a B_l a B_i. Potom součet $b_i + b_j + b_k + b_l = n - 4$ je liché číslo. To znamená, že počet lichých čísel mezi čísly b_i, b_j, b_k, b_l je rovněž lichý (tedy 1 nebo 3).

Nejdříve uvažme případ, kdy mezi čísly b_i, b_j, b_k, b_l je právě jedno liché (bez újmy na obecnosti je tímto číslem b_i). Potom s ohledem na to, že čísla $b_i, b_j + b_k + 1$ jsou lichá, zatímco čísla $b_j, b_k, b_l, b_i + b_j + 1$ jsou sudá, je orientace všech šesti cest mezi B_i, B_j, B_k, B_l jednoznačně určena a vyznačena na obrázku 2.4. Podle něho se snadno přesvědčíme, že jde o „dobře propojenou“ čtveřici, a to je spor.

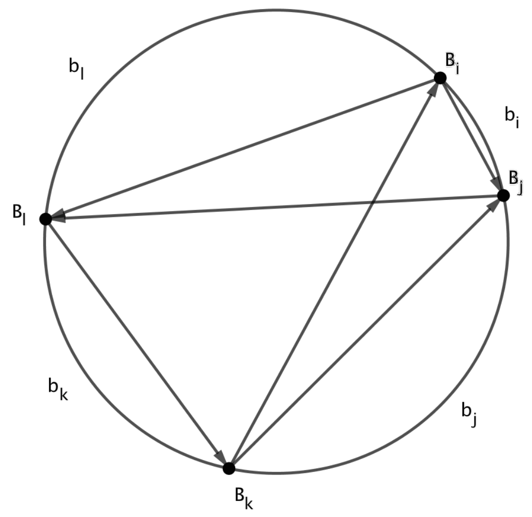
Nyní uvažme případ, kdy mezi čísly b_i, b_j, b_k, b_l je právě jedno sudé (bez újmy na obecnosti je tímto číslem b_i). V tomto případě jsou sudá čísla $b_i, b_i + b_j + 1$, zatímco lichá jsou čísla $b_j, b_k, b_l, b_j + b_k + 1$. Odpovídající orientace cest mezi B_i, B_j, B_k, B_l je vyznačena na obrázku 2.5. Protože z východu B_j všechny tři cesty vycházejí, patří čtveřice B_i, B_j, B_k, B_l do množiny U.

Dostáváme, že v tomto schématu skutečně platí $|V| = 0$, takže v dříve dokázané nerovnosti (10) pro dané schéma nastane rovnost. Nejvyšší možný počet „dobře propojených“ čtveřic je tedy

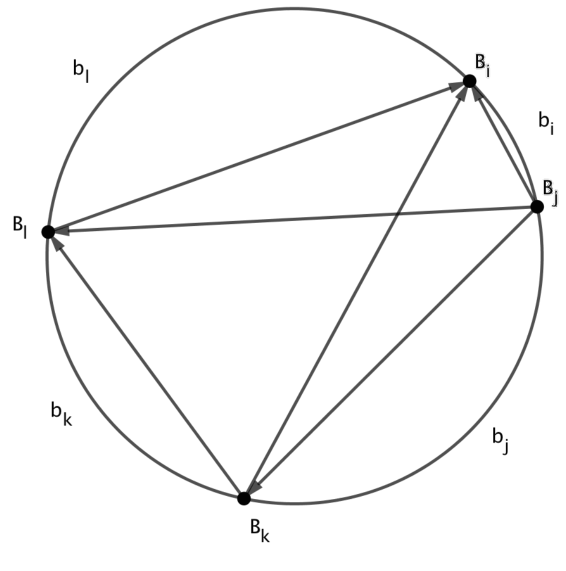
$$\frac{1}{48}n(n-3)(n^2+6n-31).$$

Na závěr dosadíme do výsledku hodnotu $n = 99$ ze zadání, pro kterou hledaný počet vyjde

$$\binom{99}{4} - 99\binom{48}{3} = 2\,052\,072.$$



Obrázek 2.4: Situace, kdy mezi čtveřicí laboratoří existují pouze jednosměrné cesty, číslo b_i je liché, čísla b_j, b_k, b_l sudá.



Obrázek 2.5: Situace, kdy mezi čtveřicí laboratoří existují pouze jednosměrné cesty, číslo b_i je sudé, čísla b_j, b_k, b_l lichá.

Kapitola 3

Příklady z dalších zdrojů

Příklady v této kapitole a jejich řešení, která jsme sepsali podrobněji a místy také upravili, jsou převzaty z nejrůznějších převážně zahraničních zdrojů (viz seznam literatury a poznámka u každého z příkladů).

Příklad 1. Je dáno 1978 množin, každá z těchto množin má 40 prvků. Každé dvě množiny mají právě jeden společný prvek. Dokažte, že všech 1978 množin má společný prvek.[1]

Řešení. Jednu ze zadaných množin označme U. Uvažujme zbylých 1977 množin, z nichž každá má s množinou U jediný společný prvek. Jelikož $\frac{1977}{40} > 49$, existuje prvek $u \in U$ takový, že patří do 50 dalších množin $U_1, U_2, \ldots, U_{50}$ a je jediným společným prvkem těchto množin. Nyní uvažujme libovolnou další ze zadaných množin, označme ji V.

Nechť $u \notin V$. Množina V má společný prvek s každou z množin $U_1, U_2, \ldots, U_{50}$. Těchto 50 prvků musí být navzájem různých, protože jediným společným prvkem $U_1, U_2, \ldots, U_{50}$ je prvek u, který za uvažované situace do množiny V nepatří. To však znamená, že množina V musí obsahovat minimálně 50 prvků, což je však ve sporu se zadáním, podle kterého množina V je 40prvková. Předpoklad $u \notin V$ byl tedy chybný.

Množinu V jsme volili obecně, takže pro každou z 1978 množin platí, že obsahuje prvek u. Tudíž všechny zadané množiny mají společný prvek a důkaz je hotov.

Příklad 2. 1600 radních vytvořilo celkem 16 000 výborů. Každý výbor má právě 80 členů. Ukažte, že existují dva takové výbory, které mají alespoň 4 společné členy.[2]

Řešení. Na příklad se budeme dívat z pohledu jednotlivých radních. Označme postupně $u_1, \ldots, u_{1600}$ počty výborů, jejichž členy jsou radní $1, \ldots, 1600$. Snadno odvodíme, že zde máme celkem $\binom{u_1}{2} + \cdots + \binom{u_{1600}}{2}$ „výborových dvojic“. Pod ní rozumíme každou neuspořádanou dvojici výborů, jež jsou „provázány“ radním, který je členem obou těchto výborů, přitom v předchozím součtu počítáme každou takovou dvojici tolikrát, kolik provazujících radních má.

Každý z $A = 16000$ výborů má právě 80 členů, takže musí platit

$$u_1 + \cdots + u_{1600} = 80A = 1\,280\,000.$$

Odhadněme výše určený počet „výborových dvojic“

$$\binom{u_1}{2} + \cdots + \binom{u_{1600}}{2} = \frac{u_1(u_1-1)}{2} + \cdots + \frac{u_{1600}(u_{1600}-1)}{2} =$$

[1] [6]
[2] [6]

$$= \frac{u_1^2+\cdots+u_{1600}^2}{2} - \frac{u_1+\cdots+u_{1600}}{2} \geq \frac{1}{2}\frac{(u_1+\cdots+u_{1600})^2}{1600} - \frac{u_1+\cdots+u_{1600}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(80A)^2}{1600} - \frac{80A}{2} = 2A^2 - 40A = 2A(A-20).$$

Upozorněme čtenáře, že jsme v odhadu využili Cauchyovu nerovnost.

Předpokládejme nyní, že každé dva výbory mají nejvýše 3 společné členy. Z toho vyplývá, že odhadnutý počet „výborových dvojic" je nejvýše

$$3\binom{A}{2} = 3\frac{A(A-1)}{2}.$$

Musí proto platit

$$2A(A-20) \leq 3\frac{A(A-1)}{2}.$$

Této nerovnosti však nevyhovuje žádné A větší než 77, což je ve sporu se zadaným $A = 16\,000$. Tím je existence dvou výborů, které mají alespoň 4 společné členy, dokázána.

Dodejme, že existenci dvou výborů s alespoň 5 společnými členy však uvedeným postupem nedokážeme, neboť nerovnost

$$2A(A-20) \leq 4\binom{A}{2}$$

platí.

Příklad 3. V soutěži se sešlo u účastníků, kteří jsou hodnoceni v porotci (v je přirozené liché číslo a zároveň $v \geq 3$). Každý soutěžící je hodnocen každým porotcem, ten mu buď udělí 1 bod, nebo 0 bodů. Předpokládejte, že libovolná dvojice porotců hodnotila stejně nejvýše a soutěžících. Dokažte, že

$$\frac{a}{u} \geq \frac{v-1}{2v}.$$ [3]

Řešení. Uvažujme soutěžícího $b, 1 \leq b \leq u$. Počet porotců, kteří tomuto soutěžícímu udělili 1 bod, označme x_b, počet porotců, kteří mu žádný bod neudělili, označme y_b. Zřejmě platí $x_b + y_b = v$. Potom počet dvojic porotců, které se na hodnocení tohoto soutěžícího shodly, je roven a lze zdola odhadnout takto:

$$\binom{x_b}{2} + \binom{y_b}{2} = \frac{x_b(x_b-1)}{2} + \frac{y_b(y_b-1)}{2} = \frac{x_b^2+y_b^2}{2} - \frac{x_b+y_b}{2} \geq \frac{1}{2}\frac{(x_b+y_b)^2}{2} - \frac{x_b+y_b}{2} =$$

$$= \frac{v^2}{4} - \frac{v}{2} = \frac{1}{4}(v-1)^2 - \frac{1}{4}.$$

Dle zadání je v liché, takže celé číslo $\binom{x_b}{2} + \binom{y_b}{2}$ je větší nebo rovno $\frac{1}{4}(v-1)^2$. Máme zde právě v porotců, z nichž libovolně zvolená dvojice se s hodnocením shodla nejvýše u a soutěžících. Proto existuje nejvýše $a\binom{v}{2}$ dvojic porotců, kteří se shodli na hodnocení některého ze soutěžících, když každou dvojici počítáme tolikrát, kolikrát se shodla.

[3] [6]

Z výše uvedeného dostáváme, že

$$a\binom{v}{2} \geq \sum_{c=1}^{u}\left[\binom{x_c}{2}+\binom{y_c}{2}\right] \geq \frac{u}{4}(v-1)^2,$$

z čehož jednoduchou úpravou již dostaneme dokazovanou nerovnost

$$\frac{a}{u} \geq \frac{v-1}{2v}.$$

Příklad 4. Na univerzitě je 10 001 studentů. Studenti společně vytvářejí *kluby*, každý student může být členem více *klubů*. *Kluby* se zase sdružují do *společností*, každý *klub* může patřit do více *společností*. Na univerzitě je celkem u *společností*. Uvažujte následující podmínky:
(1) Každá dvojice studentů se potkává v právě jednom *klubu*.
(2) Každý student patří do každé *společnosti* ovšem pouze do jediného z *klubů*, které tuto *společnost* tvoří.
(3) Do každého *klubu* patří lichý počet studentů. Každý *klub*, do kterého patří $2a+1$ studentů patří právě do a *společností*.
Určete všechny možné hodnoty u.[4]
Řešení. Ze všeho nejdříve zavedeme pojem *přípustná trojice*. Tou rozumíme uspořádanou trojici (e,K,S), kde e je student, K je klub, S společnost a zároveň $e \in K$ a $K \in S$. Celkový počet přípustných trojic nyní spočítáme dvěma různými způsoby.

Dle druhé podmínky v zadání pro každého studenta e a společnost S existuje právě jeden klub K takový, že uspořádaná trojice (e,K,S) je přípustná. Z čehož snadno vyvodíme, že všech přípustných trojic je právě $10\,001u$.

Dále, počet členů libovolného klubu K označme $|K|$. Ze třetí podmínky v zadání plyne, že klub K patří do $\frac{|K|-1}{2}$ společností. Tudíž daný klub K je coby druhá složka trojice součástí právě $\frac{|K|(|K|-1)}{2}$ přípustných trojic. Množinu všech klubů označme J. Potom všech přípustných trojic je

$$\sum_{K\in J}\frac{|K|(|K|-1)}{2} = \sum_{K\in J}\binom{|K|}{2}.$$

Dle první podmínky v zadání, toto číslo je rovnu počtu $\binom{10\,001}{2}$ všech dvojic studentů, takže z pozorování obou vyjádření počtu přípustných trojic

$$10\,001u = \binom{10\,001}{2} = 10\,001\cdot 5\,000,$$

z čehož vyplývá, že je možná jediná hodnota

$$u = 5\,000.$$

Příklad 5. Na škole je 2 007 studentek a 2 007 studentů. Žádná studentka ani student nejsou členy více než 100 školních spolků. Víme, že libovolná dvojice studentka + student

[4] [7]

se potkává v minimálně jednom společném spolku. Ukažte, že existuje spolek, do kterého patří nejméně 11 studentek a 11 studentů.[5]

Řešení. Připusťme, že v každém ze spolků je nejvýše 10 studentek nebo nejvýše 10 studentů.

Označme A počet všech uspořádaných trojic (g, f, s), kde g značí studenta, f studentku a s spolek, který je pro tuto dvojici společný. Jelikož se libovolná dvojice studentů opačného pohlaví alespoň v jednom spolku potkává, nutně

$$A \geq 2007^2 = 4\,028\,049.$$

Rozlišíme dva typy spolků. Nechť U je množina všech spolků, které mají nejvýše 10 mužských členů, a V je množina všech spolků s nejméně 11 mužskými členy (a proto, díky našemu předpokladu, s nejvýše 10 členkami).

Uspořádaných trojic (g, f, s), kde $s \in U$, je nejvýše $10 \times 2\,007 \times 100 = 2\,007\,000$, protože možností pro g je maximálně 10 (studentů v každém spolku je nejvýše 10), možností pro f je 2007 (celkový počet studentek) a možností pro s je maximálně 100 (žádný student ani studentka nenavštěvuje více než 100 spolků). Analogicky shora odhadneme počet všech trojic (g, f, s), kde $s \in V$, který tak opět nepřevyšuje $2\,007\,000$ (začneme jen s odhadem možností pro f). Takto dostáváme, že

$$A \leq 2\,007\,000 + 2\,007\,000 = 4\,014\,000,$$

což je však ve sporu s dolním odhadem A z úvodu řešení. Tím jsme ukázali, že skutečně musí existovat spolek, do kterého patří nejméně 11 studentek a 11 studentů.

Příklad 6. Čtverec 15×15 je tvořen jednotkovými čtverečky. Všechny jejich vrcholy obarvíme červeně nebo modře. Po obarvení máme 133 červených bodů. Dva z těchto červených bodů jsou vrcholy velkého čtverce, dalších 32 červených bodů leží na stranách velkého čtverce. Nyní obarvíme všechny strany jednotkových čtverečků podle následujícího pravidla. Strana, jejíž oba krajní body jsou červené, bude také červená. Strana, jejíž oba krajní body jsou modré, bude rovněž modrá. Strana s jedním červeným a jedním modrým koncovým bodem bude fialová. Předpokládejme, že vznikne 196 fialových stran. Kolik jich v tom případě bude modrých?[6]

Řešení. Každý řádek obsahuje 15 stran jednotkových čtverečků a takových řádků zde máme 16. Dostáváme $15 \cdot 16 = 240$ „horizontálních" stran. Analogicky odvodíme, že počet „vertikálních" stran jednotkových čtverečků je rovněž 240. Celkový počet stran jednotkových čtverečků je tedy 480.

Nyní celkový počet stran jednotkových čtverečků spočítáme druhým způsobem. Jednotkových čtverečků je celkem $15^2 = 225$. 60 stran jednotkových čtverečků dohromady tvoří strany velkého čtverce. Tyto strany vždy patří pouze jednomu čtverečku. Naopak ty strany jednotkových čtverečků, které leží uvnitř velkého čtverce, jsou vždy společné dvěma čtverečkům. Celkový počet stran jednotkových čtverečků je tedy $\frac{1}{2}(225 \cdot 4 + 60) = 480$.

Podle zadání máme $480 - 196 = 284$ stran, které jsou modré nebo červené. Předpokládejme, že z těchto stran je r červených a $284 - r$ modrých. Nyní dvěma způsoby spočítáme počet výskytů červených bodů jako koncových bodů stran čtverečků. Tento počet označíme $|U|$.

---

[5] [7]

[6] [1], str. 143–144

Na každou červenou stranu připadají dva výskyty, na fialovou stranu jeden a modré strany žádné červené koncové body nemají. Tedy $|U| = 2r+196$.

Na druhou stranu, každý červený bod, který je vrcholem velkého čtverce, patří dvěma stranám jednotkových čtverečků, a proto mu přísluší dva výskyty jako koncovému bodu. Každému červenému bodu, který leží uvnitř strany velkého čtverce, analogicky přísluší tři výskyty jako koncovému bodu. A každému červenému bodu, který leží uvnitř velkého čtverce, přísluší čtyři výskyty jako koncovému bodu. Takže podle zadaných počtů platí

$$|U| = 2\cdot 2+32\cdot 3+(133-2-32)\cdot 4 = 496.$$

Dostáváme, že $2r+196 = 496$, odkud $r = 150$. Hledaný počet modrých stran je tudíž $284-150 = 134$.

Příklad 7. Kurz kombinatoriky navštěvuje 12 studentů. Na začátku každého týdne vyučující zadá studentům nový projekt. Studenti se rozdělí do 6 dvojic, každá dvojice pracuje samostatně a na konci týdne projekt odevzdá. Každý týden se studenti znovu rozdělují do dvojic na základě vzájemné domluvy. Dokažte, že bez ohledu na to vždy bude existovat dvojice studentů taková, že nejméně 5 dalších studentů už buď spolupracovalo s oběma studenty z této dvojice, nebo ještě nespolupracovalo s nikým z této dvojice.[7]

Řešení. Mějme množinu všech studentů kombinatoriky $U = \{s_1,s_2,\dots,s_{12}\}$ a množinu všech dvojic studentů $V = \{(s_i,s_j) \mid 1 \le i < j \le 12\}$. Zřejmě $|V| = \binom{12}{2} = 66$. Řekneme, že student s_i je *propojen* s dvojicí (s_j,s_k), pokud studenti s_i,s_j,s_k jsou různé osoby a student s_i již spolupracoval právě s jedním studentem z dvojice (s_j,s_k). Nechť

$$\begin{aligned} A &= \{[s_i,(s_j,s_k)] \mid s_i \text{ a } (s_j,s_k) \text{ jsou } \textit{propojeni}\},\\ A(*,(s_j,s_k)) &= \{s_i \mid [s_i,(s_j,s_k)] \in A\},\\ A(s_i,*) &= \{(s_j,s_k) \mid [s_i,(s_j,s_k)] \in A\}. \end{aligned}$$

Nyní předpokládejme, že dokazované tvrzení neplatí, tedy že v určité chvíli je každá dvojice (s_j,s_k) taková, že je s ní *propojeno* alespoň 6 studentů ($|A(*,(s_j,s_k))| \ge 6$).

Následně
$$|A| = \sum_{(s_j,s_k)\in V} |A(*,(s_j,s_k))| \ge 6|V| = 396.$$

Na druhou stranu, pokud student s_i spolupracoval s d studenty, je *propojen* s $d(11-d)$ dvojicemi studentů. Pro celá čísla $0 \le d \le 11$ je maximální hodnota součinu $d(11-d)$ rovna 30 a získáme ji pro $d = 5$ nebo $d = 6$. Tudíž $|A(s_i,*)| \le 30$ pro každé i, a proto

$$|A| = \sum_{s_i\in U} |A(s_i,*))| \le 30|U| = 360.$$

Dostáváme $396 \le |A| \le 360$, což není možné. Náš předpoklad byl tedy chybný a dokazované tvrzení skutečně platí.

Příklad 8. Nechť U je konečná množina, $|U| = n$, a nechť $A_1,A_2,\dots,A_m$ jsou tříprvkové podmnožiny U takové, že $|A_i \cap A_j| \le 1$ pro každá $i \ne j$. Ukažte, že existuje podmnožina A množiny U s nejméně $\lfloor\sqrt{2n}\rfloor$ prvky neobsahující žádnou z podmnožin A_i.[8]

[7] [1], str. 145–146
[8] [1], str. 146–147

Řešení. Nechť A je podmnožina U s co největším počtem prvků taková, že žádná z podmnožin A_i není podmnožinou A. Nechť $|A| = k$. Nyní dvěma způsoby určíme počet prvků množiny $U \setminus A$. Ten je zřejmě $n-k$.

Dále nechť u je prvek z U, který nepatří do A. Vzhledem k maximálnímu počtu prvků A musí existovat tříprvková podmnožina $A_{i(u)}$ taková, že $A_{i(u)} \subseteq A \cup \{u\}$. Tudíž z $u \notin A$ plyne $u \in A_{i(u)}$ a množina $A_{i(u)} \setminus \{u\}$ je podmnožinou A. Množina $L_u = A \cap A_{i(u)}$ je dvouprvková. Protože $|A_i \cap A_j| \leq 1$ pro $i \neq j$, množiny L_u musejí být různé pro různá $u \in U \setminus A$.

Zjistili jsme, že zobrazení $f(u) = L_u$ množiny $U \setminus A$ do množiny dvouprvkových podmnožin A je injektivní. Z toho vyplývá, že

$$n-k \leq \binom{k}{2} = \frac{k^2-k}{2},$$

dále $k^2+k \geq 2n$, a tedy $k \geq \lfloor\sqrt{2n}\rfloor$, neboť zřejmě $(\lfloor\sqrt{2n}\rfloor - 1)^2 + (\lfloor\sqrt{2n}\rfloor - 1) < 2n$.

Příklad 9. Mějme n bodů ležících na téže přímce. Uvažujme všechny vzdálenosti mezi dvěma různými z těchto bodů. Předpokládejme, že každá vzdálenost se vyskytuje nejvýše dvakrát. Dokažte, že je zde nejméně $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ vzdáleností, které se vyskytují právě jednou.[9]

Řešení. Nechť u je počet vzdáleností, které se vyskytují právě jednou, a v počet vzdáleností, které se vyskytují dvakrát. Ze všeho nejdříve chceme určit dolní odhad celkového počtu různých vzdáleností, tedy $u+v$. Dané body označme zleva doprava $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Nyní budeme počítat podle jejich levých krajních bodů zleva doprava vzniklé úsečky B_iB_j. Bod B_1 je levým koncovým bodem $n-1$ úseček různých délek. Přejděme k bodu B_2. Ten je levým koncovým bodem $n-2$ úseček, je však možné, že některé jejich délky jsme již započetli u bodu B_1. To se však mohlo stát pouze jednou. Pokud by nastala situace, kdy by $|B_1B_i| = |B_2B_j|$ a $|B_1B_k| = |B_2B_l|$, pak by platilo $|B_1B_2| = |B_iB_j| = |B_kB_l|$, což by bylo v rozporu s tím, že každá vzdálenost se vyskytuje nejvýše dvakrát. Tudíž z délek, které jsme započetli u bodu B_1, se nám u bodu B_2 zopakuje nejvýše jedna. U úseček s levým koncovým bodem B_2 tedy získáme nejméně $n-3$ nových délek. Stejnou úvahu zopakujeme i u bodu B_3. Ten je levým koncovým bodem $n-3$ úseček, jedna vzdálenost už mohla být započtena u bodu B_1 a jedna další u bodu B_2. U úseček s levým koncovým bodem B_3 tedy získáme nejméně $n-5$ nových délek. Takto můžeme pokračovat a získáme dolní odhad počtu různých vzdáleností ve tvaru $(n-1)+(n-3)+(n-5)+\cdots$. Je-li n liché, je tento součet roven $\frac{n^2-1}{4}$, je-li n sudé, je roven $\frac{n^2}{4}$.

Víme, že celkový počet úseček (tedy $u+2v$) je $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Na základě našeho dolního odhadu máme $u+v \geq \lfloor\frac{n^2}{4}\rfloor$, takže $2u+2v \geq \lfloor\frac{n^2}{2}\rfloor$. Potom

$$u = (2u+2v)-(u+2v) \geq \left\lfloor\frac{n^2}{2}\right\rfloor - \left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}\right) = \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,$$

což jsme chtěli dokázat.

Příklad 10. Permutace $u_1u_2\cdots u_{2n}$ přirozených čísel $1,2,\ldots,2n$ má vlastnost V, pokud $|u_i - u_{i+1}| = n$ alespoň pro jednu hodnotu $i \in \{1,2,\ldots,2n-1\}$. Ukažte, že permutací s vlastností V je pro každé přirozené číslo n víc než permutací bez vlastnosti V.[10]

[9] [1], str. 155–156
[10] [3], str. 31–32

Řešení. Začněme krátkou úvahou nad zadaným problémem. Je zřejmé, že permutace $u_1u_2\cdots u_{2n}$ přirozených čísel $1,2,\dots,2n$ nemá vlastnost V pouze v případě, že neexistuje $k=1,2,\dots,n$ takové, že by spolu dvojice čísel k a $n+k$ v dané permutaci sousedila. Pro větší názornost uveďme množinu A (resp. množinu B) všech permutací přirozených čísel $1,2,\dots,2n$ bez vlastnosti V (resp. s vlastností V) pro $n=2$:

$$A=\{1234,1432,2143,2341,3214,3412,4123,4321\},$$

$$\begin{aligned}B=\{&1\underline{24}3,\underline{13}\,\underline{24},\underline{13}\,\underline{42},1\underline{42}3,2\underline{13}4,2\underline{31}4,\underline{24}\,\underline{13},\underline{24}\,\underline{31},\\ &\underline{31}\,\underline{24},\underline{31}\,\underline{42},3\underline{24}1,3\underline{42}1,4\underline{13}2,\underline{42}\,\underline{13},\underline{42}\,\underline{31},4\underline{31}2\}.\end{aligned}$$

Pro $n=2$ tedy platí $|B|=16>8=|A|$. Nyní přejděme k samotnému důkazu pro obecné n.

Případ $n=1$ je triviální, proto dále uvažujme $n\geq 2$ a množinu A (resp. množinu B) všech permutací přirozených čísel $1,2,\dots,2n$ bez vlastnosti V (resp. s vlastností V). Chceme ukázat, že $|B|>|A|$, a proto sestrojíme zobrazení $f:A\to B$, které je injektivní a zároveň není surjektivní.

Pro každé $k=1,2,\dots n$ nazveme čísla z dvojice $\{k,n+k\}$ *partnery*. Pokud spolu čísla k a $n+k$ v dané permutaci sousedí, dvojici $\{k,n+k\}$ nazveme *sousedním párem partnerů*.

Nechť $a=u_1u_2\cdots u_{2n}\in A$. Permutace a nemá vlastnost V, a proto *partnerem* u_1 je u_r, kde $3\leq r\leq 2n$. Nyní položíme

$$f(a)=u_2u_3\cdots u_{r-1}\underline{u_1u_r}u_{r+1}\cdots u_{2n}.$$

Je zřejmé, že v permutaci $f(a)$ je $\{u_1,u_r\}$ jediným *sousedním párem partnerů*. (Kupříkladu $f(\underline{1}2\underline{3}4)=2\underline{13}4$ a $f(\underline{2}1\underline{4}3)=1\underline{24}3$.) Zjevně $f(a)\in B$ a f je zobrazení množiny A do množiny B.

Nyní ukážeme, že f je injektivní zobrazení. Nechť

$$a=u_1u_2\cdots u_{2n}\qquad\text{a}\qquad b=v_1v_2\cdots v_{2n}$$

jsou permutace z množiny A, kde *partnerem* u_1 je u_r a *partnerem* v_1 je v_s, $3\leq r,s\leq 2n$. Předpokládejme, že $f(a)=f(b)$, tedy

$$u_2u_3\cdots u_{r-1}\underline{u_1u_r}\cdots u_{2n}=v_2v_3\cdots v_{s-1}\underline{v_1v_s}\cdots v_{2n}.$$

Jelikož $\{u_1,u_r\}$ (resp. $\{v_1,v_s\}$) je jediným *sousedním párem partnerů* v $f(a)$ (resp. $f(b)$), musí platit, že $r=s$, $u_1=v_1$ a $u_r=v_s$. Z čehož dále vyplývá, že $u_i=v_i$ pro každé $i=1,2,\dots 2n$, a proto $a=b$ a zobrazení f je tak skutečně injektivní.

Na závěr poznamenejme, že $f(A)$ obsahuje pouze permutace čísel $1,2,\dots,2n$, které mají právě jeden *sousední pár partnerů*. Množina B však obsahuje i permutace, které mají více než jeden *sousední pár partnerů*, kupříkladu permutaci $1(n+1)2(n+2)\cdots$. Tudíž $f(A)\subsetneq B$ a zobrazení f není surjektivní. Tím je důkaz hotov.

Příklad 11. Pro libovolné přirozené číslo n dokažte rovnost

$$\sum_{i=1}^{2n} i(2n+1-i)=4\sum_{k=1}^{n} i^2$$

bez výpočtu hodnot obou stran. [11]

Řešení. Uvažme trojúhelníkovou tabulku tvořenou jednotkovými čtverečky o základně obsahující $2n$ takových čtverečků. Do všech čtverečků v i-tém řádku odspodu vepišme číslo i (situaci pro $n = 5$ ilustruje obrázek 3.1).

Sečtěme čísla v tabulce po řádcích. Součet stejných čísel v i-tém řádku je roven

$$i(2n+1-i),$$

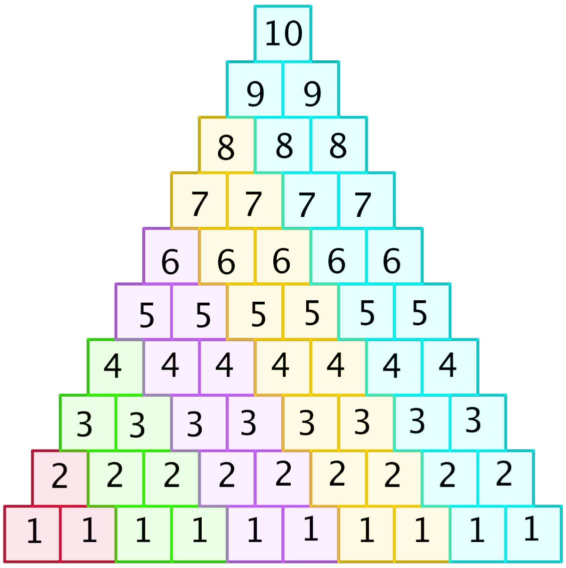
proto sečtením čísel ve všech řádcích tak dostaneme součet z levé strany rovnosti ze zadání.

Součet všech čísel v trojúhelníku nyní určíme druhým způsobem. Trojúhelník rozdělíme na n „dvousloupců“ (barevně rozlišených na obrázku 3.1). Součet čísel v i-tém „dvousloupci“ je roven

$$1+2+\cdots+(2i-1)+2i+(2i-1)+\cdots+2+1,$$

což odpovídá postupnému sčítání počtu polí na šachovnici $(2i)\times(2i)$ po diagonálách jednoho ze dvou možných směrů, takže uvedený součet je roven $4i^2$.

Sečtením čísel ve všech „dvousloupcích“ proto dostaneme součet z pravé strany rovnosti ze zadání. Její důkaz je tak hotov.



Obrázek 3.1: Trojúhelníková tabulka s vyznačenými „dvousloupci“ k řešení příkladu 11.

Příklad 12. Pro libovolné přirozené číslo n dokažte rovnost

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3$$

bez výpočtu hodnot obou stran. [12]

Řešení. Uvažme tabulku $n\times n$, kde do polí i-tého řádku pro $i = 1,2,\ldots,n$ vepíšeme zleva

[11] [8]

[12] [8]. S touto úlohou i jejím řešením se autorka seznámila už dříve v rámci předmětu M8502, který vyučuje vedoucí práce.

doprava postupně čísla $i, 2i, \cdots, ni$ (situaci pro $n = 5$ ilustruje obrázek 3.2). Součet čísel v i-tém řádku je zřejmě roven

$$i(1+2\cdots+n),$$

proto sečtením čísel v celé tabulce po řádcích dostaneme

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2.$$

1	2	3	4	5
2	4	6	8	10
3	6	9	12	15
4	8	12	16	20
5	10	15	20	25

Obrázek 3.2: Tabulka s vyznačenými „úhelníky“ k řešení příkladu 12.

Stejný součet nyní určíme druhým způsobem. Tabulku rozdělíme od horního levého rohu postupně na n „úhelníků“ (rozdělení pro $n = 5$ je barevně vyznačeno na obrázku 3.2). Součet čísel v i-tém „úhelníku“ je roven

$$i + 2i + \cdots + (i-1)i + i^2 + (i-1)i + \cdots + 2i + i =$$

$$= i\Big(1 + 2 + \cdots + (i-1) + i + (i-1) + \cdots + 2 + 1\Big) = i^3,$$

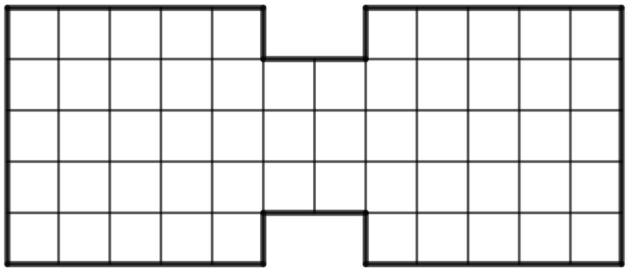
neboť součet ve velké závorce odpovídá postupnému sčítání počtu polí na šachovnici $i \times i$ po diagonálách jednoho ze dvou možných směrů, a je tedy roven i^2. Sečtením čísel celé tabulky po „úhelnících“ tudíž dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} i^3$$

a porovnáním obou vyjádření získáme požadovanou formuli.

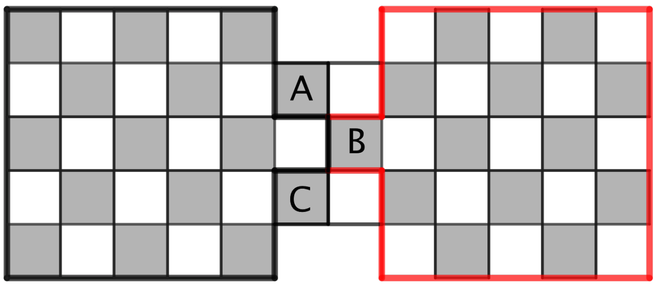
Příklad 13. Dokažte, že počet možností, jak lze útvar na obrázku 3.3 vydláždit dominovými kostkami, je druhou mocninou celého čísla. (Dominová kostka pokrývá vždy dvě políčka sousedící stranou).[13]

Řešení. Pole daného útvaru obarvíme jako šachovnici. Ukážeme, že útvar U tvořený levým čtvercem 5×5 spolu s jedním polem navíc (jak ukazuje obrázek 3.4) je nutně také beze zbytku (a bez překryvu) vydlážděn.



Obrázek 3.3: Útvar ze zadání příkladu 13.

Označme V útvar, který pokrývají ty dominové kostky, jež zasahují do útvaru U. Každá dominová kostka zakryje jedno bílé a jedno černé pole, a proto má útvar V stejný počet bílých a černých polí. Ověříme, že totéž platí i pro útvar U. Útvar V může oproti U obsahovat navíc pouze tři pole sousedící s U (na obrázku 3.4 označená jako A, B, C). Jelikož tato pole jsou všechna černá, musí platit, že $U = V$. Skutečně tedy platí, že každé dláždění celého útvaru obsahuje jako svou část dláždění útvaru U.



Obrázek 3.4: Řešení příkladu 13.

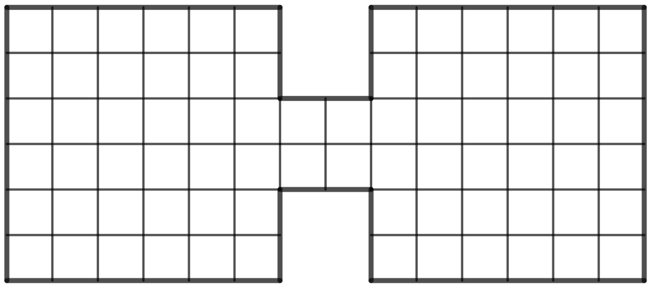
Podobně můžeme argumentovat pro souměrně sdružený útvar U' na pravé straně. Nyní si stačí uvědomit, že každé dláždění celého obrazce je jednoznačně určeno vydlážděními útvarů U a U'. Úplným vydlážděním útvaru $U \cap U'$ je jednoznačně určena poloha dvou dominových kostek, které pokrývají zbytek daného útvaru s poli A a C.

Označíme-li počet dláždění útvaru U jako n, celkový počet možností, jak zadaný útvar vydláždit, bude roven n^2. Tím jsme ukázali, že hledaný počet způsobů je skutečně roven druhé mocnině celého čísla.

[13] [9], ročník 69, kategorie A, domácí kolo, úloha 2

Příklad 14. Ukažte, že počet způsobů, jimiž lze vydláždit útvar na obrázku 3.5 dominovými kostkami, lze vyjádřit jako součet dvou druhých mocnin přirozených čísel.[14]

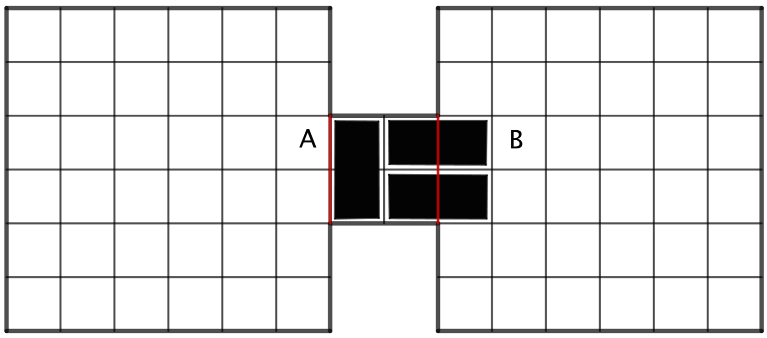
Řešení. Pokud by některá ze dvou červených úseček na obrázku 3.6 protínala právě jednu dominovou kostku, zbylo by nám ve čtverci 6×6, který tato úsečka z daného útvaru vyčleňuje, 35 polí k vydláždění. To je však nemožné, neboť 35 je liché číslo.



Obrázek 3.5: Útvar ze zadání příkladu 14.

Platí tedy, že kterákoli ze dvou červených úseček buď neprotíná žádnou dominovou kostku (případ A na obrázku 3.6), anebo protíná právě dvě dominové kostky (případ B na obrázku 3.6).

Nastane-li u některé červené úsečky případ A, v příslušném čtverci 6×6 zbyde k vydláždění 36 polí. Označme a počet způsobů, jimiž lze tato pole vydláždit. Podobně nastane-li případ B, v příslušném čtverci zůstane k vydláždění 34 polí. Počet způsobů, jimiž lze tato pole vydláždit, označme b. Nyní rozlišme tři případy.



Obrázek 3.6: Řešení příkladu 14.

Dláždění, v nichž u obou červených úseček nastane případ B, je přesně b^2.

U dláždění, v nichž u obou červených úseček nastane případ A, je možné zbylý čtverec 2×2 vymezený červenými úsečkami vydláždit dvěma způsoby, a výsledných dláždění je tedy $2a^2$.

Zbývá případ, kdy u jedné červené úsečky nastane případ A a u druhé případ B. Potom je dláždění zbylého čtverce 2×2 vymezeného červenými úsečkami určeno jednoznačně podle toho, zda případ A nastal vlevo nebo vpravo. Dláždění tohoto typu je tudíž $2ab$.

[14] [9], ročník 69, kategorie A, školní kolo, úloha 3

Celkový počet dláždění je $2a^2+2ab+b^2$, což můžeme upravit na požadovaný součet dvou druhých mocnin jako $(a+b)^2+a^2$. Tím je úloha vyřešena.

Příklad 15. Matematické soutěže se zúčastnilo $2(m-1)(n-1)+1$ dívek a stejný počet chlapců (m,n jsou celá čísla větší než 1). Po skončení soutěže se zjistilo, že každý z účastníků vyřešil nejvýše m ze zadaných úloh. Dále se ukázalo, že pro každou dvojici dívka–chlapec existuje aspoň jedna úloha, kterou oba soutěžící vyřešili. Ukažte, že mezi zadanými úlohami existuje taková, kterou vyřešilo aspoň n dívek a současně aspoň n chlapců.[15]

Řešení. Nechť $N=2(m-1)(n-1)+1$. Úlohu nazveme *náročnou pro chlapce*, pokud ji vyřešilo nejvýše $n-1$ chlapců, a *náročnou pro dívky*, pokud ji vyřešilo nejvýše $n-1$ dívek. Nejdříve odhadneme počet dvojic dívka–chlapec takových, že oba soutěžící vyřešili úlohu náročnou pro chlapce. Uvažme libovolnou dívku. Mezi nejvýše m úlohami, které vyřešila, musí být alespoň jedna, kterou vyřešilo alespoň n chlapců. Kdyby tomu tak nebylo, taková dívka by každou úlohu vyřešila s nejvýše $n-1$ chlapci, takže celkový počet chlapců, se kterými by tato dívka měla vyřešenu aspoň jednu úlohu, by nepřevýšoval číslo $m(n-1)$. To by byl spor, neboť, jak nyní ukážeme, číslo $m(n-1)$ je menší než počet N všech chlapců. Skutečně, dotyčná ostrá nerovnost

$$m(n-1)<N=2(m-1)(n-1)+1$$

je totiž ekvivalentní s neostrou nerovností

$$m(n-1)\leq 2(m-1)(n-1),$$

která po vydělení kladným číslem se redukuje na $m\geq 2$. Tak jsme dokázali, že každá dívka vyřešila nejvýše $m-1$ úloh, jež byly pro chlapce náročné. Jelikož každá z těchto úloh byla vyřešena nejvýše $n-1$ chlapci a soutěžilo N dívek, odhadovaný počet dvojic nemůže být vyšší než $(m-1)(n-1)N$. Stejně tak může být nejvýše $(m-1)(n-1)N$ dvojic dívka–chlapec takových, že oba soutěžící vyřešili úlohu náročnou pro dívky. Celkový počet dvojic dívka–chlapec je N^2. Jelikož $N^2=[2(m-1)(n-1)+1]^2>2(m-1)(n-1)N$, musí existovat dvojice dívka–chlapec taková, že úloha, kterou vyřešili, nebyla těžká ani pro chlapce, ani pro dívky. Tím jsme ukázali, že mezi zadanými úlohami skutečně existuje taková, kterou vyřešilo aspoň n dívek a současně aspoň n chlapců.

Příklad 16. Na hřišti si spolu hraje n dívek ($n\geq 2$), každá z nich má míč. Každá z $\binom{n}{2}$ dvojic dívek si postupně (v náhodném pořadí) jednou vymění míče. Hru nazveme *zajímavou*, pokud na konci žádná z dívek nemá svůj původní míč. Hru naopak nazveme *nudnou*, pokud na konci každá z dívek má svůj původní míč. Určete hodnoty n, pro které existuje *zajímavá* hra, a rovněž hodnoty n, pro které existuje *nudná* hra.[16]

Řešení. Hra je určena pořadím $t_1,t_2,\dots,t_N$ ($N=\binom{n}{2}$) všech transpozic (i,j) prvků množiny $\{1,2,\dots,n\}$. Hra je zajímavá, pokud permutace $P=t_Nt_{N-1}\cdots t_1$ nemá žádný pevný bod, a je nudná, pokud je identitou (kterou označíme I). Připomeňme, že každou neidentickou permutaci můžeme zapsat jako složení několika nezávislých cyklů (a to jednoznačně až na pořadí těchto cyklů).

Tvrdíme, že zajímavá hra existuje, právě když $n\neq 3$. Je-li $n=2$, potom $P_2=t_1=(1,2)$ a hra zřejmě zajímavá je. Je-li $n=3$, pro každou hru bude $P=(b,c)(a,c)(a,b)=(a,c)$

[15] [2], str. 314, 681

[16] [2], str. 304, 653–654

pro vhodně zvolené označení hráčů a hra nemůže být zajímavá. Nyní pro každé $n \geq 4$ definujme $P_n = (1,2)(1,3)(2,3)\cdots(1,n)(2,n)\cdots(n-1,n)$. Platí, že

$$P_n = P_{n-1}(1,n,n-1,\ldots,3,2) = (1,n)(2,n-1)\cdots(i,n+1-i)\cdots$$

a příslušná hra bude zajímavá pro každé sudé $n \geq 4$.

Je-li $n = 2k+1$ liché, potom definujme permutaci

$$Q_n = P_{n-1}(1,n)(2,)\cdots(k,n)(n-1,n)(n-2,n)\cdots(k+1,n),$$

která zobrazí i na $n+1-i$ pro $i \leq k$, na $n-1-i$ pro $k+1 \leq i \leq 2k-1$ a na $3k+1-i$ pro $i \in \{2k, 2k+1\}$. Příslušná hra tak bude zajímavá pro každé liché $n \geq 5$.

Nyní dokážeme, že nudná hra existuje pouze tehdy, když $n \equiv 0,1 \pmod 4$. Zřejmě každá transpozice mění paritu permutace. Potom $sgn(P) = (-1)^{\binom{n}{2}}$ a má-li být permutace P identita, musí $2|\binom{n}{2}$, což je možné pouze pro $n \equiv 0,1 \pmod 4$.

Zkonstruujme nudnou hru pro zmíněná n. Pro $n = 4k$ dívky rozdělíme do čtyřčlenných skupin. V každé čtyřčlenné skupině nechme proběhnout hru, které odpovídá následující permutace $P_4 = (3,4)(1,3)(2,4)(2,3)(1,4)(1,2) = I$. Nyní uvažme libovolné dvě různé čtyřčlenné skupiny, například $\{1,2,3,4\}$ a $\{5,6,7,8\}$, a přiřaďme jim permutaci

$$\begin{aligned} P_8 = {} & (4,7)(3,7)(4,6)(1,6)(2,8)(3,8)(2,7)(2,6)\cdot \\ & \cdot(4,5)(4,8)(1,7)(1,8)(3,5)(3,6)(2,5)(1,5) = I. \end{aligned}$$

Ze všech těchto $\binom{k}{2}$ permutací P_8 společně s k permutacemi P_4 pak sestavíme hledanou permutaci, které odpovídá nudná hra.

Pro $n = 4k+1$ dívky rozdělíme do čtyřčlenných skupin jako v předchozím případu, zůstane nám jedna dívka navíc. Uvažme čtyřčlennou skupinu $\{1,2,3,4\}$ a tuto dívku navíc (pojmenujme ji 5). Jejich hru by mohla popisovat následující permutace

$$P_5 = (3,5)(3,4)(4,5)(1,3)(2,4)(2,3)(1,4)(1,5)(1,2)(2,5) = I,$$

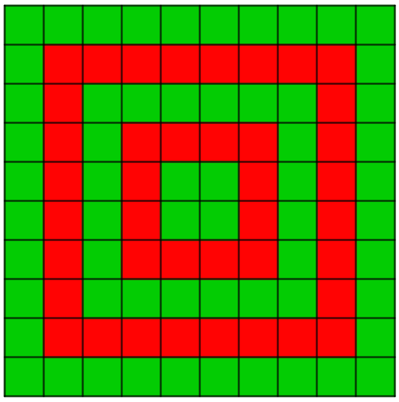
zbytek konstrukce je podobný jako v případě $n = 4k$.

Příklad 17. Nechť n je sudé přirozené číslo. Řekneme, že dvě různá pole čtvercové šachovnice $n \times n$ jsou *sousedé*, mají-li aspoň jednu společnou stranu. Určete minimální počet těchto polí, která musíme označit křížkem, aby každé z polí (bez ohledu na to, jestli toto pole samo je, nebo není označeno křížkem) mělo aspoň jednoho *souseda*, který křížkem označen je.[17]

Řešení. Nechť $n = 2k$. Všechna krajní pole šachovnice obarvíme zeleně. Všechna pole, která s těmito poli sousedí, obarvíme červeně. Všechna pole, která sousedí s takto získanými červenými poli a ještě obarvena nejsou, obarvíme zeleně. Všechna pole, která sousedí s těmito zelenými poli a ještě nejsou obarvena, obarvíme červeně a tak dále, až obarvíme všechna pole šachovnice. Situaci pro $k = 5$ ilustruje obrázek 3.7.

Strukturu tvořenou poli, která jsme obarvili stejnou barvou v rámci jednoho kroku, nazveme *rámeček*. Je zřejmé, že každé z polí bez ohledu na svou barvu sousedí právě se dvěma zelenými poli. Zelených polí je celkem $2k(k+1)$, takže aby každé z nich mělo

[17] [2], str. 306, 658



Obrázek 3.7: Ilustrace příkladu 17 pro $k = 5$.

souseda s křížkem, potřebujeme označit křížkem minimálně $k(k+1)$ polí (každý křížek „uspokojí" jen dvě zelená pole).

Na druhou stranu, půjdeme-li podél každého ze zelených rámečků, můžeme střídavě vždy dvě po sobě jdoucí pole označit a potom dvě nechat neoznačená. Protože počet polí v každém zeleném rámečku je násobkem čtyř, každé zelené pole tak bude mít jednoho označeného souseda. Je jistě možné takto označit dva po sobě jdoucí zelené rámečky tak, aby každé pole z červeného rámečku mezi nimi mělo právě jednoho označeného souseda. Začneme-li od největšího zeleného rámečku a budeme pokračovat až k tomu nejmenšímu, dostaneme šachovnici, na které bude křížkem označeno právě $k(k+1)$ zelených polí a pro libovolné pole šachovnice bude platit, že má označeného souseda.

Minimální počet polí, která musíme označit křížkem, abychom vyhověli zadání, je tedy právě $k(k+1)$, neboli $\frac{1}{4}n(n+2)$.

Příklad 18. Mezinárodní matematická společnost má celkem 1978 členů, kteří jsou příslušníky 6 různých států (každý člen je občanem pouze jednoho státu). Jména členů společnosti jsou uvedena na očíslovaném seznamu, každému členu společnosti tedy přísluší jedno z čísel $1, 2, \ldots, 1978$. Dokažte, že mezi členy společnosti existuje minimálně jeden takový, že jeho číslo je součtem dvou (ne nutně různých) čísel, která patří jeho spoluobčanům.[18]

Řešení. Předpokládejme opak. Jeden z 6 států, nazvěme ho A, je nutně vlastí alespoň 330 členů společnosti. Ty označme podle jejich čísel vzestupně $m_1, m_2, \ldots, m_{330}$. Uvažme rozdíly $m_{330} - m_i$, kde $i = 1, 2, \ldots, 329$. Lidé, jejichž čísla odpovídají těmto rozdílům, nemohou být občany A a minimálně 66 (sestupně $m_{330} - m_{i_1}, \ldots, m_{330} - m_{i_{66}}$) z nich patří do stejného z 5 zbylých států, nazvěme ho B. Nyní uvažme rozdíly $(m_{i_{66}} - m_{330}) - (m_{i_j} - m_{330}) = m_{i_{66}} - m_{i_j}$, kde $j = 1, 2, \ldots, 65$. Lidé, jejichž čísla odpovídají těmto rozdílům, nemohou být občany ani jednoho ze států A, B a minimálně 17 z nich patří do stejné ze 4 zemí, nazvěme ji C. Zopakujeme-li naši úvahu z předchozího kroku, dostaneme 16 rozdílů, pro které platí, že lidé, jejichž číslem je některý z těchto rozdílů, nemohou být občany ani jedné ze zemí A, B, C. Šest takovýchto lidí musí být občany stejné země, nazvěme ji D. Naši úvahu zopakujeme ještě jednou, dostaneme pět rozdílů a následně tři lidi, kteři musí být občany stejné země různé od A, B, C, D, nazvěme ji E. Zopakujeme-li naši úvahu ještě

[18] [2], str. 129, 429

jednou, dostaneme dva rozdíly, pro které platí, že lidé s těmito čísly nemohou být občany žádné ze zemí A,B,C,D,E. Dle zadání máme ještě šestou zemi, nazvěme ji F. Uvažme rozdíl dvou rozdílů z posledního kroku. Člověk s tímto číslem nemůže patřit do žádné ze zemí A,B,C,D,E,F. Z toho vyplývá, že náš výchozí předpoklad byl chybný, a tedy skutečně existuje minimálně jeden člen společnosti s požadovanou vlastností.

Příklad 19. V rovině je dáno 1991 bodů, některé z nich jsou spojené úsečkou. Pro každý z těchto bodů platí, že je úsečkou spojen s minimálně 1593 dalšími body. Ukažte, že mezi danými body existuje šest takových, že každé dva z nich jsou spojeny úsečkou.[19]
Řešení. Množinu daných 1991 bodů označme C. Uvažme body B_1,B_2 z C, které jsou spojeny úsečkou. V $C\setminus\{B_1,B_2\}$ najdeme nejvýše 397 bodů, se kterými bod B_1 úsečkou spojen není, a stejně tak nejvýše 397 bodů, se kterými není úsečkou spojen bod B_2. Nutně tedy existuje bod B_3, který je spojen s oběma body B_1,B_2. V $C\setminus\{B_1,B_2,B_3\}$ je nejvýše $3\cdot 397=1191$ bodů, které nejsou spojeny s minimálně jedním z bodů B_1,B_2,B_3, takže jistě existuje bod B_4, který je spojen se všemi třemi body B_1,B_2,B_3. V $C\setminus\{B_1,B_2,B_3,B_4\}$ je nejvýše $4\cdot 397=1588$ bodů, které nejsou spojeny s minimálně jedním z bodů B_1,B_2,B_3,B_4, takže jistě existuje i bod B_5, který je spojen se všemi čtyřmi body B_1,B_2,B_3,B_4. A konečně, mezi 1986 body různými od bodů B_1,B_2,B_3,B_4,B_5 je nejvýše $5\cdot 397=1985$ bodů, které nejsou spojeny s minimálně jedním z bodů B_1,B_2,B_3,B_4,B_5, takže bod B_6, který je spojen se všemi pěti body B_1,B_2,B_3,B_4,B_5, také existuje. Tím jsme ukázali, že šestice bodů požadovaných vlastností opravdu existuje.

Příklad 20. Na konferenci se sešlo $12k$ lidí, kde k je přirozené číslo. Každý člověk si vyměnil vizitku s právě $3k+6$ dalšími účastníky. Počet lidí, kteří si vyměnili vizitku s oběma členy jakkoli zvolené dvojice účastníků, je vždy stejný, tj. nezávisí na volbě dotyčné dvojice. Kolik lidí se sešlo na konferenci?[20]
Řešení. Označme u počet lidí, kteří si vyměnili vizitku s oběma členy kterékoli dvojice. Nyní dvěma způsoby určíme počet trojic účastníků konference (A,B,C) takových, že A si vyměnil vizitku s B i C, ale B a C si vizitky nevyměnili.

Pro výběr prvního člena trojice A máme $12k$ možností. Vybíráme-li k A jejího druhého člena B, máme $3k+6$ možností. Jelikož je zde u lidí, kteří si vyměnili vizitku s A i B, pro výběr třetího člena C, který si vyměnil vizitku s A, ale ne s B, máme $3k+5-u$ možností. Všech trojic (A,B,C) je tedy $12k(3k+6)(3k+5-u)$.

Na druhou stranu, vybírame-li nejdříve prostředního člena trojice B, máme pro něj opět $12k$ možností. Vybíráme-li k B osobu C, která si s ní vizitku nevyměnila, máme pro ni $12k-1-(3k+6)=9k-7$ možností. Pro danou dvojici B,C můžeme osobu A vybrat u způsoby. Všech trojic (A,B,C) je tedy $12ku(9k-7)$.

Dostáváme, že $(3k+6)(3k+5-u)=u(9k-7)$, odkud $u=\frac{3(3k+5)(k+2)}{12k-1}$. Protože 3 nedělí $12k-1$, musí $\frac{4u}{3}=\frac{12k^2+44k+40}{12k-1}=k+4-\frac{3k-44}{12k-1}$ být celé číslo. Tedy rovněž $\frac{3k-44}{12k-1}$ je celé číslo. Z průběhu racionální lomené funkce $f(x)=\frac{3k-44}{12k-1}$ vyplývá, že existuje jediná možná hodnota $k=3$.

V zadání příkladu se předpokládá, že takové k existuje, proto je podané řešení kompletní. Ukažme navíc, že popsaná situace skutečně může nastat, a to na příkladu konference 36 účastníků, kdy $k=3$. Každému z účastníků přiřadíme jedno z polí tabulky 6×6.

[19][2], str. 255, 547
[20][2], str. 284, 596–597

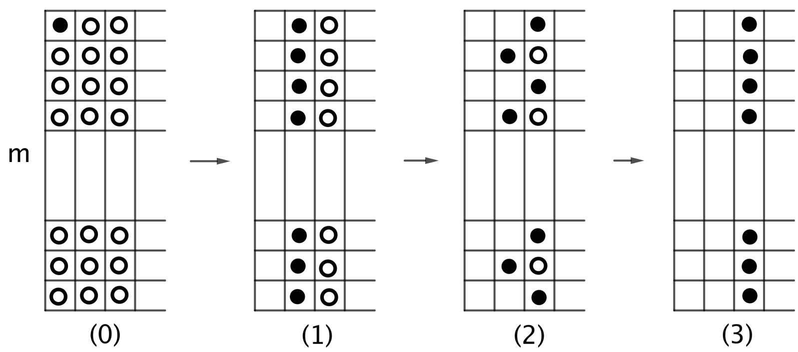
Předpokládejme, že dvě osoby O_{ij} a O_{kl} si vymění vizitky pouze tehdy, když $i = k$ nebo $j = l$ nebo $i - j \equiv k - l \pmod 6$. V tomto případě si každý účastník vymění vizitku s 15 dalšími a pro každou dvojici účastníků platí, že s oběma členy dvojice si vizitku vyměnilo 6 osob. Navržená konference tedy splňuje všechny podmínky ze zadání.

Příklad 21. Hra *solitér* je hrána na obdélníkové desce $m \times n$ a používá mn hracích kamenů, které jsou z jedné strany bílé a z druhé černé. Na začátku hry leží na každém hracím poli (s výjimkou jednoho rohového pole) jeden hrací kámen s bílou stranou nahoře. Na výjimečném rohovém poli leží poslední hrací kámen s černou stranou nahoře. V každém kroku je možné odebrat jeden hrací kámen s černou stranou nahoře, což musí být doplněno otočením všech kamenů ležících na polích, která sousedí (společnou stranou, nikoliv jen jedním vrcholem) s polem odebraného kamene. Určete všechny dvojice přirozených čísel (m,n) takové, aby bylo možné z hrací desky postupně odebrat všechny kameny.[21]

Řešení. Označme U aktuální počet všech kamenů s bílou stranou nahoře a V aktuální počet všech dvojic kamenů takových, že pole, na kterých tyto kameny leží, spolu sousedí. Tvrdíme, že parita součtu $U+V$ se během hry nemění. Předpokládejme, že v některém kroku odebereme kámen, který má přesně a sousedních kamenů, mezi kterými je b bílou stranou nahoru ($0 \le b \le a \le 4$). Odebraný kámen měl samozřejmě nahoře černou stranu. Po jeho odebrání otočíme b kamenů černou stranou nahoru a $a-b$ kamenů bílou stranou nahoru. Počet bílých kamenů U se tak změní o $a-2b$. Počet V všech dvojic sousedních kamenů se zmenší o a. Součet $U+V$ tudíž klesne o $2b$ a skutečně si zachová paritu.

Uvažme situaci na začátku hry, kdy platí, že $U = mn-1$ a $V = m(n-1)+n(m-1)$, takže $U+V = 3mn-m-n-1$. Podaří-li se nám odebrat všechny hrací kameny, bude nakonec $U+V = 0$. Což znamená, že $3mn-m-n-1$ musí být sudé číslo, což je možné pouze tehdy, je-li alespoň jedno z čísel m,n liché.

Nyní ukážeme, že je-li aspoň jedno z čísel m,n liché, skutečně můžeme postupně odebrat všechny hrací kameny. Předpokládejme, že kupříkladu m je liché číslo. Jak ukazuje obrázek 3.8, po m krocích se dostaneme z pozice (0) do pozice (1). Po dalších $\frac{m+1}{2}$ krocích se dostaneme do pozice (2). Po dalších $\frac{m-1}{2}$ krocích se dostaneme do pozice (3). Je zřejmé, že takto můžeme postupovat až do chvíle, kdy odebereme poslední kámen.



Obrázek 3.8: Ilustrace příkladu 21.

Příklad 22. Skupinu k lidí nazveme *k-člennou partou*, pokud platí, že libovolní dva lidé

[21] [2], str. 301, 645

z této skupiny se už v minulosti setkali. Na jistém večírku platí, že libovolná dvojice tříčlenných part má minimálně jednoho společného člena. Dále platí, že na večírku nenajdeme ani jednu pětičlennou partu. Dokažte, že na večírku existuje osoba, případně dvojice osob taková, že k tomu, aby na večírku nezůstala žádná tříčlenná parta, stačí, aby večírek opustila právě tato osoba, případně dvojice osob.[22]

Řešení. Uvažme jeden takový večírek. Je-li na večírku pouze jedna tříčlenná parta, je tvrzení triviální. Proto dále předpokládejme, že na večírku najdeme alespoň dvě tříčlenné party, označme je P_1 a P_2. Rozlišme, zda mají společného jednoho, či dva členy.

V prvním případě $P_1 = \{a,b,c\}$ a $P_2 = \{a,d,e\}$, kde a,b,c,d,e jsou navzájem různé osoby, které se účastní večírku. Pokud po odchodu a na večírku žádná tříčlenná parta nezůstane, jsme hotovi. V opačném případě musí existovat třetí tříčlenná parta P_3, která má společného člena jak s partou P_1, tak s partou P_2, a přitom osoba a jejím členem není. Předpokládejme tedy, že $P_3 = \{b,d,f\}$ pro nějakou osobu f účastnící se večírku. Takto získáme další tříčlennou partu $P_4 = \{a,b,d\}$, která má s partou P_3 dva společné členy a dostáváme se do situace, kterou řeší druhý případ.

Ve druhém případě $P_1 = \{a,b,c\}$ a $P_2 = \{a,b,d\}$ pro navzájem různé osoby a,b,c,d. Pokud po odchodu osob a,b na večírku žádná tříčlenná parta nezůstane, jsme hotovi. V opačném případě musí existovat třetí tříčlenná parta $P_3 = \{c,d,e\}$ pro nějakou osobu e účastnící se večírku.

Nyní ukážeme, že po odchodu osob c,d na večírku žádná tříčlenná skupina nezůstane. Předpokládejme opak, tedy že i bez osob c,d na večírku najdeme tříčlennou partu P. Jelikož P musí mít společného člena s partami, $\{c,d,e\},\{c,d,a\},\{c,d,b\}$, potom nutně $P = \{a,b,e\}$. Tehdy však dostáváme pětičlennou partu$\{a,b,c,d,e\}$, což je v rozporu se zadáním úlohy. Z toho vyplývá, že odchod osob c,d stačí k tomu, aby na večírku žádná tříčlenná skupina nezůstala, a řešení úlohy je hotovo.

Příklad 23. Nechť n značí sudé přirozené číslo. Nechť $A_1,A_2,\dots,A_{n+1}$ jsou n-prvkové množiny takové, že každé dvě z nich mají nejvýše jeden společný prvek a zároveň pro každý prvek sjednocení všech z nich platí, že je prvkem minimálně dvou z daných $n+1$ množin. Pro která n je možné každému prvku sjednocení všech daných množin přiřadit jedno z čísel 0, 1 tak, aby prvky každé z množin $A_1,A_2,\dots,A_{n+1}$ měly přiřazeny právě $\frac{n}{2}$ nul?[23]

Řešení. Nechť $n = 2k$ a $A = \{A_1,\dots,A_{2k+1}\}$ je systém množin vyhovující zadání úlohy. Z toho, že každý prvek sjednocení U všech těchto množin je prvkem minimálně dvou z daných množin, plyne, že $A_j = \bigcup_{i\neq j} A_i \cap A_j$ pro každé $1 \le j \le 2k+1$. Protože každý průnik v uvedeném sjednocení má nejvýše jeden prvek a A_j má $2k$ prvků, plyne odtud, že průniky $A_i \cap A_j (i \neq j)$ jsou všechny jednoprvkové a že každý prvek z A_j (a tedy i každý prvek ze sjednocení U, neboť j je libovolné) je prvkem právě dvou množin z A.

Nyní předpokládejme, že dané přiřazení čísel $0,1$ existuje, a dokážeme, že k musí být sudé. Již jsme ukázali, že pro každou dvojici indexů $1 \le i,j \le 2k+1, i \neq j$ existuje jediný prvek, který patří do obou množin A_i,A_j. Nyní uvažme matici $2k \times 2k$. Prvek a_{ij} (pro $i \neq j$) bude shodný s číslem, které bylo přiřazeno jedinému prvku $A_i \cap A_j$. Prvek a_{ii} bude shodný s číslem, které bylo přiřazeno jedinému prvku $A_i \cap A_{2k+1}$. Z vlastnosti přiřazení čísel $0,1$ plyne, že v každém řádku musí být stejný počet ($\frac{n}{2} = k$) nul. Celkový počet nul v dané

[22] [2], str. 313, 679

[23] [2], str. 226, 502–503. Chyba v originálním zadání zjištěna vedoucím diplomové práce.

matici s $2k$ řádky je tedy sudé číslo $2k^2$. Jelikož je matice symetrická, počet nul v této matici mimo hlavní diagonálu musí být také sudý. Tedy i počet nul na hlavní diagonále musí být sudý a zároveň se rovná počtu prvků množiny A_{2k+1}, kterým byla přiřazena nula. Těch je právě k, a tedy k musí být sudé.

Pro sudé k platí, že matici $2k \times 2k$ můžeme rozdělit na matice 4×4. Zvolíme-li za každou z nich matici

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dostaneme podle výše uvedeného popisu prvků $a_{ij} (i \neq j)$ a a_{ii} přiřazení čísel $0, 1$, které splňuje všechny požadavky zadání, neboť v každém řádku i na hlavní diagonále sestavené matice je stejně nul jako jedniček, tedy obou je po k exemplářích, a přitom každému prvku x sjednocení U odpovídá v matici jediná pozice s dvojicí indexů (i, j) určenou rovností $\{x\} = A_i \cap A_j$ pro $i \neq j$ a $\{x\} = A_i \cap A_{2k+1}$ pro $i = j$. Ukázali jsme, že požadované přiřazení existuje právě tehdy, když k je sudé, neboli když n je dělitelné čtyřmi.

Příklad 24. Jazykovou školu navštěvuje 120 studentů, někteří z nich jsou přátelé (přátelství je vždy vzájemné). Čtveřici studentů, mezi nimiž najdeme právě jednu dvojici přátel, nazveme *slabou*. Jaký je největší možný počet takto slabých čtveřic?[24]

Řešení. Každému studentovi jazykové školy můžeme přiřadit jeden z vrcholů grafu G, který má právě 120 vrcholů, jehož hrany odpovídají relaci přátelství. Počet slabých čtveřic v grafu G označme $q(G)$. Naše řešení bude mít tři části.

Nejdříve dokážeme, že existuje graf s maximálním počtem slabých čtveřic takový, že ho lze rozdělit na několik navzájem disjunktních úplných grafů. Toho dosáhneme, když ukážeme, že každé dva jeho sousední vrcholy mají stejné sousedy (až na ně samé).

Nechť G je graf s maximálním počtem slabých čtveřic a x, y jeho sousední vrcholy. Nechť G_x je graf, který dostaneme z G „kopírováním x na y“ tak, že pro každý vrchol $z \neq x, y$ přidáme hranu zy, jsou-li vrcholy z, x spojeny hranou, a odstraníme hranu zy, pokud vrcholy z, x hranou spojeny nejsou. Analogicky z G získáme „kopírováním y na x“ graf G_y. Tvrdíme, že $2q(G) \leq q(G_x) + q(G_y)$. Tato nerovnost vyplyne z následujících pozorování:

1. Množina všech slabých čtveřic, které neobsahují ani vrchol x ani vrchol y, je pro všechny tři grafy G, G_x, G_y stejná.
2. Množina všech slabých čtveřic, které obsahují oba vrcholy x a y, je pro graf G podmnožinou obou takových množin pro grafy G_x a G_y.
3. Počet slabých čtveřic v grafu G_x, které obsahují právě jeden z vrcholů x a y, je alespoň dvojnásobkem počtu slabých čtveřic v grafu G, které obsahují vrchol x, ne však y.
4. Počet slabých čtveřic v grafu G_y, které obsahují právě jeden z vrcholů x a y, je alespoň dvojnásobkem počtu slabých čtveřic v grafu G, které obsahují vrchol y, ne však x.

Protože tvrzení 1 a 2 jsou zřejmá, dokážeme pouze tvrzení 3 (důkaz tvrzení 4 je analogický).

Uvažme libovolnou slabou čtveřici v G, která obsahuje vrchol x, ale ne y. Tato čtveřice zůstane slabou i v grafu G_x. Jelikož žádný soused vrcholu x nepřibyl ani neubyl, tímto

[24] [2], str. 321, 699–700. Neúplné řešení ze zdroje bylo doplněno o aplikaci Weierstrassovy věty vedoucím diplomové práce.

způsobem slabost čtveřice narušena nebyla. A libovolnému ze tří vrcholů, které x ve čtveřici doplňují, mohl přibýt nebo ubýt pouze jeden soused – vrchol y. Ten však členem čtveřice není, a proto jeho sousedství/nesousedství slabost čtveřice neovlivňuje. Tudíž slabých čtveřic v G_x. které obsahují vrchol x, ale ne y, je nejméně tolik jako slabých čtveřic v G, které obsahují x, ale ne y. Z toho, jak jsme vytvořili graf G_x, plyne, že každý jeho vrchol různý od x a y má k vrcholům x a y stejný vztah (sousedství/nesousedství). To nám umožňuje sestrojit mezi množinou všech slabých čtveřic v G_x obsahujících x, ale ne y a množinou všech slabých čtveřic v G_x obsahujících y, ale ne x bijekci (tři vrcholy zůstanou zachovány, pouze vrchol x nahradíme vrcholem y). Tím je tvrzení 3 dokázáno.

Z nerovnosti $2q(G) \le q(G_x) + q(G_y)$, kterou jsme právě ověřili, plyne, že pro graf G s maximální hodnotou $q(G)$ musí platit $q(G) = q(G_x) = q(G_y)$, což nastane, jen když vrcholy x, y mají stejné množiny všech sousedních vrcholů $z \ne x, y$ (to plyne z rovnosti tří množin slabých čtveřic z výše uvedeného tvrzení 2). Postupným opakováním „kopírování“ pro každou dvojici sousedních vrcholů nakonec dostaneme graf G' s maximálním $q(G')$, který lze rozdělit na několik navzájem disjunktních úplných grafů.

Dále, předpokládejme, že graf G' lze takto rozložit na n úplných grafů, jejichž počty vrcholů jsou $a_1, a_2, \dots, a_n$, kde $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 120$. Potom

$$q(G') = \sum_{i=1}^{n} \binom{a_i}{2} \sum_{\substack{j<k,\\ j,k\ne i}} a_j a_k.$$

Podle pravé strany poslední rovnosti definujme předpisem

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} \binom{a_i}{2} \sum_{\substack{j<k,\\ j,k\ne i}} a_j a_k$$

funkci n reálných proměnných $a_1, a_2, \dots, a_n$ na množině $M \subset \mathbb{R}^n$ zadané podmínkami

$$0 \le a_i \le s \quad (i = 1, 2, \dots, n), \qquad a_1 + a_2 + \cdots + a_n = s,$$

kde s je dané kladné číslo (v naší situaci $s = 120$). Protože funkce F je spojitá (jde dokonce o mnohočlen n proměnných) a množina M je v prostoru $\mathbb{R}^n$ ohraničená a uzavřená, existuje podle Weierstrassovy věty takový bod z M, ve kterém funkce F nabývá na M své největší hodnoty. Ukážeme dále, že takový bod je v M jediný a má souřadnice

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{s}{n}.$$

Protože v něm má funkce F hodnotu

$$Q_n = \sum_{i=1}^{n} \binom{s/n}{2} \sum_{\substack{j<k,\\ j,k\ne i}} \frac{s^2}{n^2} = \frac{s^2}{n} \cdot \binom{s/n}{2} \binom{n-1}{2},$$

bude to znamenat, že pro výše uvažovanou hodnotu $q(G')$ platí odhad

$$q(G') \le Q_n.$$

Tvrzení o tvaru souřadnic bodu maxima funkce F na množině M dokážeme sporem. Připusťme, že tento bod má dvě souřadnice, řekněme a_j a a_k, kde $j \neq k$, různé, tedy $a_j \neq a_k$. Označme $u = a_j + a_k$ a považujme všechny ostatní souřadnice a_i, kde $i \notin \{j,k\}$ za pevné. Potom hodnota F jako funkce dvou proměnných a_j a a_k, kde

$$0 \leq a_j \leq u, \qquad 0 \leq a_k \leq u \qquad \text{a} \qquad a_j + a_k = u,$$

je tvaru

$$K_1 + K_2 a_j a_k + K_3 \left(\binom{a_j}{2} + \binom{a_k}{2} \right) + K_4 \left(a_k \binom{a_j}{2} + a_j \binom{a_k}{2} \right) = C_1 + C_2 a_j a_k,$$

C_1 a C_2 (stejně jako K_1, K_2, K_3 a K_4) jsou kladná čísla, která závisí pouze na hodnotě u. Z rovnosti

$$4a_j a_k = (a_j + a_k)^2 - (a_j - a_k)^2 = u^2 - (a_j - a_k)^2$$

vidíme, že uvažovaná hodnota $C_1 + C_2 a_j a_k$ funkce F se zvětší, pokud obě různé hodnoty a_j, a_k zaměníme jejich aritmetickým průměrem $\frac{1}{2}(a_j + a_k)$. Při takové záměně se však nenaruší podmínky, které na n-tici čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ od počátku klademe, a tak docházíme ke sporu s předpokladem, že bod se souřadnicemi $a_j \neq a_k$ je bodem maxima funkce F na množině M.

Dokázaný výsledek o funkci F s hodnotou $s = 120$ ukazuje, že pokud je graf G' sjednocením n disjunktních úplných grafů, platí pro počet $q(G')$ všech slabých čtveřic v G' odhad

$$q(G') \leq \frac{120^2}{n} \cdot \binom{120/n}{2} \binom{n-1}{2},$$

přitom rovnost v této nerovnosti nastane, pokud je číslo $120/n$ celé a je rovno počtu vrcholů a_i v každé z n komponent grafu G'. Užitím diferenciálního počtu nyní ukážeme, že funkce f s předpisem

$$f(x) = \frac{120^2}{x} \cdot \binom{120/x}{2} \binom{x-1}{2} = 30 \cdot 120^2 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(120-x)}{x^3}$$

nabude na množině všech přirozených čísel od 1 do 120 své největší hodnoty pro $x = 5$. Rutinním výpočtem zjistíme, že derivace funkce f má vyjádření

$$f'(x) = -\frac{K \cdot (123x^2 - 724x + 720)}{x^4} = -\frac{123K \cdot (x - x_1)(x - x_2)}{x^4},$$

kde $K = 432 \cdot 10^3$, $x_1 \doteq 1{,}267$ a $x_2 \doteq 4{,}619$. Podle znaménka derivace tak vidíme, že funkce f je rostoucí na intervalu $\langle 2; 4 \rangle$ a klesající na intervalu $\langle 5; \infty)$. Protože

$$f(1) = f(2) = 0, \qquad f(4) = 4\,698\,000 \qquad \text{a} \qquad f(5) = 4\,769\,280,$$

je $f(5)$ skutečně hledané maximum. Protože navíc zlomek $\frac{120}{5}$ je roven celému číslu 24, docházíme k odpovědi na řešenou úlohu. Největší možný počet slabých čtveřic v uvažovaných grafech o 120 vrcholech je roven 4 769 280 a dosáhne se, pokud je graf sjednocením pěti disjunktních úplných grafů o 24 vrcholech.

Příklad 25. Označme $p(n)$ počet všech n-místných čísel složených jen z číslic 1, 2, 3, 4, 5, v nichž se každé dvě sousední číslice liší alespoň o 2. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí
$$5 \cdot 2{,}4^{n-1} \leq p(n) \leq 5 \cdot 2{,}5^{n-1}.$$[25]

Řešení. Odtrhneme-li poslední číslici vyhovujícího $(n+1)$-místného čísla, dostaneme vyhovující n-místné číslo. Uvažme naopak, jak z vyhovujícího n-místného čísla vytvoříme vyhovující $(n+1)$-místné číslo. Pokud n-místné číslo končí číslicí 1, můžeme na konec přidat některou z číslic 3, 4, 5. Za číslici 2 můžeme přidat některou z číslic 4, 5, za číslicí 3 může následovat některá z číslic 1, 5, za číslici 4 můžeme přidat některou z číslic 1, 2 a za číslicí 5 může následovat některá z číslic 1, 2, 3. Jak vidíme, záleží na tom, jaká je poslední číslice. Označme proto a_n počet vyhovujících n-místných čísel, která končí některou z číslic 1, 5, b_n počet čísel končících některou z číslic 2, 4 a c_n počet čísel zakončených číslicí 3. Potom $p(n) = a_n + b_n + c_n$. Zřejmě $a_1 = b_1 = 2$, $c_1 = 1$, $p(1) = 5 = 5 \cdot 2{,}4^0 = 5 \cdot 2{,}5^0$, $a_2 = 6$, $b_2 = 4$, $c_2 = 2$, $p(2) = 12 = 5 \cdot 2{,}4^1 < 5 \cdot 2{,}5^1$.

Z předcházejících úvah plynou rekurentní vztahy

$$a_{n+1} = a_n + b_n + 2c_n, \qquad b_{n+1} = a_n + b_n, \qquad c_{n+1} = a_n. \tag{1}$$

Z těchto vztahů vyplývá, že $a_3 = 14, b_3 = 10, c_3 = 6, p(3) = 30 \in \left\langle 5 \cdot 2{,}4^2; 5 \cdot 2{,}5^2 \right\rangle$.

Matematickou indukcí dokážeme, že pro každé $n \geq 3$ platí

$$a_n \geq 2{,}4^n, \qquad b_n \geq \frac{2}{3} \cdot 2{,}4^n, \qquad c_n \geq 2{,}4^{n-1}.$$

Pro $n = 3$ to platí. Jestliže $a_n \geq 2{,}4^n, b_n \geq \frac{2}{3} \cdot 2{,}4^n, c_n \geq 2{,}4^{n-1}$, tak také

$$a_{n+1} = a_n + b_n + 2c_n \geq 2{,}4^n + \frac{2}{3} \cdot 2{,}4^n + 2 \cdot 2{,}4^{n-1} = \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{5}{6}\right) \cdot 2{,}4^n =$$
$$= 2{,}5 \cdot 2{,}4^n > 2{,}4^{n+1},$$
$$b_{n+1} = a_n + b_n \geq 2{,}4^n + \frac{2}{3} \cdot 2{,}4^n = \frac{5}{3} \cdot 2{,}4^n > \frac{2}{3} \cdot 2{,}4^{n+1},$$
$$c_{n+1} = a_n \geq 2{,}4^n.$$

Z právě dokázaných nerovností vyplývá, že

$$p(n) = a_n + b_n + c_n \geq 2{,}4^n + \frac{2}{3} \cdot 2{,}4^n + 2{,}4^{n-1} = (2{,}4 + 1{,}6 + 1) \cdot 2{,}4^{n-1} = 5 \cdot 2{,}4^{n-1}.$$

Podobně dokážeme i druhou nerovnost. Ověříme, že pro $n \geq 3$ platí

$$a_n \leq k \cdot 2{,}5^n, \qquad b_n \leq k \cdot \frac{2}{3} \cdot 2{,}5^n, \qquad c_n \leq k \cdot 2{,}5^{n-1}, \tag{2}$$

kde k je vhodně zvolené číslo. Potom bude

$$p(n) = a_n + b_n + c_n \leq k \cdot 2{,}5^{n-1} \cdot \left(2{,}5 + \frac{5}{3} + 1\right) = k \cdot 2{,}5^{n-1} \cdot \frac{31}{6} = 5k \cdot \frac{31}{30} \cdot 2{,}5^{n-1}.$$

[25] [9], ročník 62, kategorie A, domácí kolo, úloha 3

Zvolíme-li tedy $k = \frac{30}{31}$, bude pro každé $n \geq 3$ platit $p(n) \leq 5 \cdot 2{,}5^{n-1}$.

Zbývá matematickou indukcí dokázat nerovnosti (2), ve kterých $k = \frac{30}{31}$. Pro $n = 3$ nerovnosti platí. Platí-li (2), je rovněž

$$a_{n+1} = a_n + b_n + 2c_n \leq k \cdot 2{,}5^n \cdot \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right) = k \cdot 2{,}5^n \cdot \frac{37}{15} < k \cdot 2{,}5^{n+1},$$

$$b_{n+1} = a_n + b_n \leq k \cdot 2{,}5^n \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right) = k \cdot \frac{2}{3} \cdot 2{,}5^{n+1},$$

$$c_{n+1} = a_n \leq k \cdot 2{,}5^n.$$

Příklad 26. Pro libovolné přirozené číslo n sestavme z písmen A, B všechna možná „slova“ délky n. Rozdělme je do dvou skupin S_n a L_n podle toho, zda je v daném slově sudý, resp. lichý počet „slabik“ BA (za sudý považujeme i počet 0). Například slova $\underline{BA}BBB\underline{BA}$ a $AAAAAAB$ obě patří do skupiny S_7, slova $AAB\underline{BA}BB$ a $\underline{BA}\,\underline{BA}A\underline{BA}$ obě patří do skupiny L_7. Určete, pro která n mají skupiny S_n a L_n stejný počet prvků.[26]

Řešení. Skupinu S_n rozdělme na dvě části $(SA)_n$ a $(SB)_n$ podle toho, zda slovo skupiny S_n končí písmenem A, resp. B. Skupinu L_n rozdělme analogicky na dvě části $(LA)_n$ a $(LB)_n$ podle toho, zda slovo skupiny L_n končí písmenem A, resp. B. Dále označme $s_n, l_n, (sA)_n, (sB)_n, (lA)_n$ a $(lB)_n$ po řadě počty prvků skupin $S_n, L_n, (SA)_n, (SB)_n, (LA)_n$ a $(LB)_n$. Pro každé přirozené číslo n pak podle našeho rozdělení platí

$$s_n = (sA)_n + (sB)_n,$$

$$l_n = (lA)_n + (lB)_n.$$

Každé slovo ze skupiny $(SA)_{n+1}$ vznikne tak, že připíšeme písmeno A buď na konec slova ze skupiny $(SA)_n$, nebo na konec slova ze skupiny $(LB)_n$. Proto platí

$$(sA)_{n+1} = (sA)_n + (lB)_n.$$

Analogicky platí rovněž vztahy

$$(sB)_{n+1} = (sA)_n + (sB)_n,$$

$$(lA)_{n+1} = (sB)_n + (lA)_n,$$

$$(lB)_{n+1} = (lA)_n + (lB)_n.$$

Pro $n = 1$ mají skupiny následující tvar

$$\{SA\}_1 = \{A\}, \{SB\}_1 = \{B\}, \{LA\}_1 = \emptyset, \{LB\}_1 = \emptyset,$$

a tedy $(sA)_1 = (sB)_1 = 1$ a $(lA)_1 = (lB)_1 = 0$.

Předpokládejme, že pro určité přirozené číslo k obsahují skupiny $(SA)_k$ a $(SB)_k$ stejný počet prvků, který označíme p, a zároveň skupiny $(LA)_k$ a $(LB)_k$ mají stejný počet prvků, který označíme q. Předpokládejme navíc, že platí $p \neq q$, jak je tomu v případě $k = 1$,

[26] [9], ročník 53, kategorie A, domácí kolo, úloha 3

kdy $p = 1, q = 0$. Do následující tabulky zapišme počty prvků ve skupinách pro čísla $n = k, k+1, k+2, k+3, k+4$. Pro výpočty hodnot využijeme výše uvedené vztahy.

n	k	$k+1$	$k+2$	$k+3$	$k+4$
$(sA)_n$	p	$p+q$	$p+3q$	$2p+6q$	$6p+10q$
$(sB)_n$	p	$2p$	$3p+q$	$4p+4q$	$6p+10q$
$(lA)_n$	q	$p+q$	$3p+q$	$6p+2q$	$10p+6q$
$(lB)_n$	q	$2q$	$p+3q$	$4p+4q$	$10p+6q$
s_n	$2p$	$3p+q$	$4p+4q$	$6p+10q$	$12p+20q$
l_n	$2q$	$p+3q$	$4p+4q$	$10p+6q$	$20p+12q$

Z tabulky můžeme vyčíst několik poznatků. Protože $p \neq q$, platí také $2p \neq 2q$, $3p+q \neq p+3q$, $6p+10q \neq 10p+6q$. Dále $s_k \neq l_k$, $s_{k+1} \neq l_{k+1}$, $s_{k+2} = l_{k+2}$, $s_{k+3} \neq l_{k+3}$ a vidíme, že skupiny $(SA)_{k+4}$ a $(SB)_{k+4}$ obsahují opět stejný počet prvků. Stejně tak skupiny $(LA)_{k+4}$ a $(LB)_{k+4}$ obsahují opět stejný počet prvků. Přitom $(sA)_{k+4} \neq (lA)_{k+4}$.

Užitím matematické indukce usoudíme, že uvedená tabulka má všechny zmíněné vlastnosti pro každé $k = 4m+1$, kde m je celé nezáporné číslo, tudíž rovnost $s_n = l_n$ platí, právě když $n = k+2 = 4m+3$.

Skupiny S_n a L_n tedy mají stejný počet prvků, právě když $n = 4m+3$, kde m je celé nezáporné číslo.

Příklad 27. Pro libovolné přirozené číslo n sestavme z písmen A, B všechna možná „slova“ délky n a označme p_n počet těch z nich, která neobsahují ani trojici AAA po sobě jdoucích písmen A, ani dvojici BB po sobě jdoucích písmen B. Určete, pro která přirozená čísla n platí, že obě čísla p_n a p_{n+1} jsou sudá.[27]

Řešení. Existují právě dvě vyhovující slova délky jedna (slova A a B), právě tři vyhovující slova délky dva (slova AA, AB, BA) a právě čtyři vyhovující slova délky tři (slova AAB, ABA, BAA, BAB). Proto platí $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 4$.

Nyní odvodíme rekurentní rovnici pro čísla p_n. Pro každé $n \geq 4$ platí, že každé vyhovující slovo délky n má právě jednu z koncovek $ABAA, ABA, BAB, BAAB$. Koncovky ABA a BAB má právě p_{n-2} slov, neboť ta s koncovkou ABA, resp. BAB, vzniknou právě tak, že k vyhovujícím slovům délky $n-2$, která končí na A, resp. B, připíšeme nakonec BA, resp. AB. Koncovky $ABAA$ a $BAAB$ má právě p_{n-3} slov, neboť ta s koncovkou $ABAA$, resp. $BAAB$, vzniknou právě tak, že k vyhovujícím slovu délky $n-3$, která končí na A, resp. B, připíšeme nakonec BAA, resp. AAB. Pro každé $n \geq 4$ tak dostáváme rekurentní rovnici

$$p_n = p_{n-2} + p_{n-3}.$$

Protože nás zajímá pouze parita přirozeného čísla p_n a výrazů, pomocí kterých ho počítáme, můžeme sestavit tabulku ze symbolů S a L, kterým odpovídají sudá, resp. lichá čísla. Paritu čísel $p(n)$ pro $n \geq 4$ určíme pomocí rekurentní rovnice pro $p(n)$. Pro $n \leq 17$ dostaneme:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
p_n	S	L	S	L	L	L	S	S	L	S	L	L	L	S	S	L	S

[27] [9], ročník 53, kategorie A, krajské kolo, úloha 2

Tato tabulka je nutně periodická, protože každé písmeno S nebo L pro hodnotu p_n je určeno trojicí předchozích písmen a existuje pouze osm různých uspořádaných trojic písmen S a L. Z tabulky vidíme, že její perioda je 7, neboť první trojice (S,L,S) pod trojicí $(1,2,3)$ se poprvé znovu objevuje pod trojicí $(8,9,10)$. A protože v první vypsané periodě pod sedmicí $(1,2,\dots,7)$ je dvojice (p_7,p_8) sousedních sudých čísel jediná, jsou obě čísla p_n a p_{n+1} sudá, právě když je číslo n dělitelné sedmi.

Závěr

Vytvořená práce se věnuje rozmanitým metodám, které lze využít při řešení kombinatorických problémů. Text je určen pro všechny zájemce o tuto problematiku, autorka se domnívá, že by mohl být zajímavý především pro učitele matematiky. Řadu úloh zejména ze třetí kapitoly autorka považuje za vhodné ke zpestření středoškolské výuky. Práce tvoří ucelený soubor řešených úloh z kombinatoriky převzatých z nejrůznějších zahraničních i českých zdrojů.

Při tvorbě práce se autorka dále zdokonalila v práci s $T_EX$em, se kterým se setkala už na střední škole a při psaní bakalářské práce, pokračovala v práci s programem GeoGebra, ve kterém pořídila všechny potřebné obrázky. Opravdu velmi hodnotnou zkušeností je pro autorku práce s anglicky psanými matematickými texty. Řešení řady příkladů bylo třeba doplnit a sepsat podrobněji.

V neposlední řadě si autorka dále rozšířila znalosti z kombinatoriky jako matematické disciplíny a měla možnost poznat, jak se může kombinatorika prolínat s dalšími matematickými disciplínami. Jelikož si je dobře vědoma krásy i rozsáhlosti této oblasti matematiky, doufá, že zájem o kombinatoriku v budoucnu probudí i alespoň u části svých studentů.

Seznam použité literatury

[1] ANDREESCU, Titu, FENG, Zuming. *A Path to Combinatorics for Undergraduates. Counting Strategies.* [cit. 19.4.2020].

Dostupné z: https://mathematicalolympiads.files.wordpress.com/2012/08/a_path_to_combinatorics_for_undergraduates.pdf.

[2] DJUKIĆ, Dušan, JANKOVIĆ, Vladimir, MATIĆ, Ivan, PETROVIĆ, Nikola. *The IMO Compendium.* [cit. 19.4.2020].

Dostupné z: https://nagyzoli.web.elte.hu/compendium.pdf.

[3] CHEN, Chuan-Chong, KOH, Khee-Meng. *Principles and Techniques in Combinatorics.* Pbk. ed. Singapore: World Scientific, 1992, 298 p. ISBN 9810211392.

[4] CHU, Wenchang. *Elementary Proofs for Convolution Identities of Abel and Hagen–Rothe.* [cit. 8.5.2020].

Dostupné z:
https://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v17i1n24/pdf.

[5] KAUCKÝ, Josef. *Kombinatorické identity: úvod do studia metod kombinatorické analýzy.* 1. vyd. Bratislava: Veda, 1975, 475 s.

[6] LEUNG, T. W. *Sets and Subsets*. [cit. 19.4.2020].

Dostupné z: https://www.math.ust.hk/excalibur/Eng_v8_n5.pdf.

[7] *Mathematical Excalibur*. Volume 13, Number 4, 11-12/2008. [cit. 19.4.2020].

Dostupné z: https://www.math.ust.hk/excalibur/v13_n4.pdf.

[8] NOVOTNÝ, Tomáš. *Počítání dvěma způsoby.* [cit. 19.4.2020].

Dostupné z:
https://prase.cz/library/PocitanidvemazpusobyTN/PocitanidvemazpusobyTN.pdf.

[9] Příklady převzaté z webu www.matematickaolympiada.cz. [cit. 19.4.2020].

[10] ZHANG, Yao. *Combinatorial Problems in Mathematical Competitions.* [cit. 19.4.2020].

Dostupné z: https://www.academia.edu/7636656/Math.

[11] Zápisky z předmětu M8502, absolvovaného v semestru podzim 2018.