MASARYKOVA UNIVERZITA

Přírodovědecká fakulta

Ústav matematiky a statistiky

Cauchyova-Schwarzova nerovnost

Diplomová práce

Brno 2008

Tomáš Krisl

Obsah

Úvod

Cílem této práce je ukázat široké uplatnění Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti při řešení příkladů s algebraickou i geometrickou tématikou. Ač se může zdát, že toto téma spadá do oblasti elementární matematiky, řešení často klade na řešitele značné nároky. Díky tomu zdrojem těchto příkladů jsou právě sbírky úloh matematických olympiád.
Práce je rozdělena do dvou kapitol. První kapitola se zabývá historií Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti, jejím důkazům a využití. Jsou zde zmíněni tři nejvýznamnějí matematikové, kteří se zabývali touto nerovností. Nezanedbatelná část této kapitoly je věnována využití Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti ve vektorových prostorech se skalárním součinem. Na konci kapitoly jsou uvedeny některé významné nerovnosti, které plynou z Cauchyovy-Scwarzovy nerovnosti a jsou využity při řešení příkladů.
Další kapitoly práce jsou sbírkou řešených příkladů rozdělených do čtyř skupin podle toho, zda je při řešení využita přímo Cauchyova-Schwarzova nerovnost či některá z ní plynoucí nerovnost uvedená ve vstupní teoretické kapitole. Příklady jsou řazeny podle náročnosti či příbuznosti řešení.

Na tomto místě bych velmi rád poděkoval panu doc. RNDr. Jaromíru Šimšovi, CSc za jeho odbornou pomoc, poskytnutí potřebných informací a cenných podnětů k mé práci.

Kapitola 1

Historie, důkazy a využití Cauchyovy nerovnosti

Nerovnosti, kterými vyjadřujeme obvyklé uspořádání reálných čísel, nalézají široké uplatnění ve všech aplikacích matematiky, při kterých pracujeme se skalárními veličinami. V samotné matematice se využívají například při odhadech výrazů nebo důkazech nejen v analýze, ale také v geometrii. Jednou z často využívaných nerovností se budeme v celé práci monotématicky zabývat. Jak se dále zmíníme, tato nerovnost má v literatuře různé názvy. My budeme v textu práce používat stručný a historicky oprávněný název Cauchyova nerovnost. Uveďme nejprve její znění.

Cauchyova nerovnost
Nechť $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n$ jsou reálná čísla. Pak platí nerovnost

$$(u_1v_1 + \cdots + u_nv_n)^2 \leq \left(u_1^2 + \cdots + u_n^2\right)\left(v_1^2 + \cdots + v_n^2\right). \tag{1.1}$$

Rovnost nastane právě tehdy, když platí $u_i = 0$ pro všechna $i = 1, \dots, n$ nebo existuje $t \in \mathbb{R}$ takové, že $v_i = tu_i$ pro všechna $i = 1, \dots, n$.

S Cauchyovou nerovností (1.1) je ekvivalentní nerovnost, kterou získáme odmocněním obou jejích stran:

$$|u_1v_1 + \cdots + u_nv_n| \leq \sqrt{\left(u_1^2 + \cdots + u_n^2\right)\left(v_1^2 + \cdots + v_n^2\right)}.$$

S ohledem na $x \leq |x|$ odtud plyne nerovnost

$$u_1v_1 + \cdots + u_nv_n \leq \sqrt{\left(u_1^2 + \cdots + u_n^2\right)\left(v_1^2 + \cdots + v_n^2\right)}.$$

Pokud je levá strana nekladná, je poslední nerovnost triviální. V opačném případě ji můžeme umocnit na druhou a získáme zpět Cauchyovu nerovnost (1.1).

Nyní se podíváme na historii Cauchyovy nerovnosti. V některých pramenech se tato nerovnost nazývá Cauchyova-Schwarzova, Cauchyova-Lagrangeova (viz [8]), Cauchyova-Buňakovského (viz [6]) nebo dokonce Cauchyova-Schwarzova-Buňakovského.
Poprvé se nerovnost objevila roku 1821 v díle Augustin-Louise Cauchyho (1789-1857) s názvem *Cours d'Analyse Algébrique.* Cauchy zde nerovnost použil pouze v několika ilustrativních

příkladech. Poprvé byla Cauchyova nerovnost významně využita až o 8 let později, když ji samotný Cauchy použil při ověřování Newtonovy metody pro nalezení kořenů algebraických a transcendentních rovnic.

Cauchy svou nerovnost (1.1) odvodil jako důsledek Lagrangeovy identity. Pokusme se jeho důkaz zopakovat.
Nejdříve po vzoru Cauchyho dokážeme samotnou Lagrangeovu identitu:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \sum_{i=1}^{n} v_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(u_i v_j - u_j v_i)^2.$$

Převedeme ji na tvar

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(u_i v_j - u_j v_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \sum_{i=1}^{n} v_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2$$

a podíváme se na pravou stranu této rovnosti:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \sum_{i=1}^{n} v_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i^2 v_j^2 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i v_i u_j v_j.$$

Pro poslední výraz využijeme ideu symetrie, která je pro sčítací indexy i a j v druhém sčítanci zřejmá. Aby byla zřetelnější i v prvním sčítanci, rozepíšeme jej:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i^2 v_j^2 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i v_i u_j v_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(u_i^2 v_j^2 + u_j^2 v_i^2) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i v_j u_j v_i.$$

Obě dvojné sumy jsou tedy symetrické pro sčítací indexy i a j. Jejich součet proto můžeme zapsat a upravit následovně:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(u_i^2 v_j^2 + u_j^2 v_i^2) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i v_j u_j v_i &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(u_i^2 v_j^2 - 2u_i v_j u_j v_i + u_j^2 v_i^2\right) = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(u_i v_j - u_j v_i)^2.\end{aligned}$$

Tak jsme dokázali Lagrangeovu identitu. Uvážíme ji ve tvaru

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(u_i v_j - u_j v_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \sum_{i=1}^{n} v_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2,$$

kde na levé straně vystupuje součet čtverců. Ten musí být nezáporný, a tedy nezáporný musí být i výraz na pravé straně identity:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \sum_{i=1}^{n} v_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2 \geq 0 \quad \text{neboli} \quad \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2.$$

Poslední nerovnost je dokazovaná Cauchyova nerovnost (1.1). Rovnost v ní podle našeho postupu nastane jedině v případě, kdy platí:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(u_iv_j - u_jv_i)^2 = 0.$$

Protože jde o součet nezáporných čísel, musí platit

$$u_iv_j = u_jv_i \quad \text{pro všechna} \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Tento případ jistě nastane pokud $u_i = 0$ pro každé $i = 1, \ldots, n$. V opačném případě zvolíme pevné $j = 1, \ldots, n$ s vlastností $u_j \neq 0$ a z uvedených rovností usoudíme, že pro každé $i = 1, \ldots, n$ platí $v_i = tu_i$, kde $t = \frac{v_j}{u_j}$ je číslo nezávislé na indexu i. Naopak je zřejmé, že rovnost v Cauchyově nerovnosti nastane, existuje-li takové $t \in \mathbb{R}$, že $u_i = tv_i$ pro $i = 1, \ldots, n$.

Viktor Jakovlevič Buňakovskij (1804-1889) studoval v Paříži s Cauchym, takže byl obeznámen s Cauchyovou prací o nerovnostech. Ve svém díle *Mémoire* z roku 1859 Buňakovskij přechází od konečných součtů reálných čísel k součtům nekonečných řad pomocí limity. Podívejme se, jak dokazoval Cauchyovu nerovnost pro nekonečné řady.

Buňakovskij vyšel z toho, že pro libovolná čísla $u, v \in \mathbb{R}$ platí nerovnost $u^2 + v^2 \geq 2uv$, což lze po dělení číslem 2 přepsat ve tvaru $\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2 \geq uv$. Pokud provedeme součet takových nerovností pro čísla $u = u_i, v = v_i$ pro všechna možná i, dostaneme nerovnost pro nekonečné řady čísel:

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_iv_i \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} u_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} v_i^2.$$

Předpokládejme, že obě řady na pravé straně konvergují (pak díky nerovnostem $|u_iv_i| \leq \frac{1}{2}u_i^2 + \frac{1}{2}v_i^2$ konverguje absolutně i řada na levé straně) a že každá z obou řad má aspoň jeden nenulový člen. Pak místo čísel u_i a v_i zavedeme čísla

$$a_i = \frac{u_i}{\left(\sum_{j=1}^{\infty} u_j^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{a} \quad b_i = \frac{v_i}{\left(\sum_{j=1}^{\infty} v_j^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Nové hodnoty můžeme nazvat normalizované v tom smyslu, že pro řady $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2, \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2$ platí

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_i^2}{\left(\sum_{j=1}^{\infty} u_j^2\right)} = 1 \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{v_i^2}{\left(\sum_{j=1}^{\infty} v_j^2\right)} = 1.$$

Dosadíme-li do výše odvozené nerovnosti nové hodnoty, získáme nerovnost

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_ib_i \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 = 1.$$

Vrátíme-li se nyní zpět k původním číslům, dostaneme

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_i}{\left(\sum_{j=1}^{\infty} u_j^2\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{v_i}{\left(\sum_{j=1}^{\infty} v_j^2\right)^{\frac{1}{2}}} \leq 1.$$

Nerovnost vynásobíme kladnými jmenovateli $\left(\sum_{j=1}^{\infty} u_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$ a $\left(\sum_{j=1}^{\infty} v_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i v_i \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} u_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} v_j^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Zaměníme-li v celém postupu čísla u_i opačnými čísly $(-u_i)$, s ohledem na rovnosti $(-u_j)^2 = u_j^2$ dostaneme nerovnost

$$-\sum_{i=1}^{\infty} u_i v_i \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} u_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} v_j^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Z obou odvozených nerovností již plyne Cauchyova nerovnost pro nekonečné řady:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i v_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i^2\right).$$

Nevýhodou uvedeného Buňakovského postupu je, že z něho (kvůli limitnímu přechodu při sčítání nekonečné množiny nerovností) nelze vyvodit, kdy v dokázané nerovnosti nastane rovnost.

Třetím matematikem, o kterém se zmíníme v souvislosti s Cauchyovou nerovností, je Hermann Amandus Schwarz (1843-1921). Jeho využití Cauchyovy nerovnosti úzce souvisí s pojmy vektorový prostor a skalární součin, proto je zde připomeneme.
Začněme definicí vektorového prostoru, pro jednoduchost nad tělesem $\mathbb{R}$ reálných čísel.
Nechť množina V s operací $+$ je komutativní grupa $(V, +)$. Nechť pro každé číslo $t \in \mathbb{R}$ a každý prvek $u \in V$ je definován prvek $t \cdot u \in V$ tak, že platí:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad t \cdot (u + v) = t \cdot u + t \cdot v,\\
&(2) \quad (t + s) \cdot u \ = t \cdot u + s \cdot u,\\
&(3) \quad (t \cdot s) \cdot u \ = t \cdot (s \cdot u),\\
&(4) \quad 1 \cdot u \ = u
\end{aligned}$$

pro libovolná $t, s \in \mathbb{R}$ a $u, v \in V$. Pak se V nazývá vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ a prvky V nazýváme vektory.
Dále budeme potřebovat pojem skalárního součinu, proto jej nyní definujme. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ a nechť každé dvojici vektorů $u, v \in V$ je přiřazeno reálné číslo $\langle u, v\rangle$ tak, že pro libovolná $u, v, w \in V$ platí:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle,\\
&(2) \quad \langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle,\\
&(3) \quad \langle r \cdot u, v\rangle = r \cdot \langle u, v\rangle \quad \text{pro každé } r \in \mathbb{R},\\
&(4) \quad \langle u, u\rangle \geq 0 \quad \text{pro všechna} \quad u \in V,\\
&(5) \quad \langle u, u\rangle = 0 \quad \text{právě když} \quad u = o.
\end{aligned}$$

Potom reálné číslo $\langle u, v\rangle$ se nazývá skalární součin vektorů u, v.
Konečněrozměrný vektorový prostor, ve kterém je definován skalární součin, se nazývá euklidovský prostor.
Nyní můžeme zformulovat a dokázat Cauchyovu-Schwarzovu větu ve vektorovém prostoru se skalárním součinem (ať už je euklidovský či nekonečněrozměrný).

Cauchyova-Schwarzova věta
Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem. Pak pro libovolné vektory $u, v \in V$ platí

$$\langle u, v\rangle^2 \leq \langle u, u\rangle \cdot \langle v, v\rangle.$$

Rovnost nastane právě v případě, kdy vektory u, v jsou lineárně závislé.

Důkaz:
V případě, kdy $v = o$, platí $\langle u, o\rangle^2 = 0 = \langle u, u\rangle \cdot \langle o, o\rangle$ a věta platí. Uvažme dále, že $v \neq o$.
Vezměme vektor $u - t \cdot v$, kde $t \in \mathbb{R}$ je libovolné. Pak podle vlastností skalárního součinu platí:

$$0 \leq \langle u - t \cdot v, u - t \cdot v\rangle = \langle u, u\rangle + t^2\langle v, v\rangle - 2t\langle u, v\rangle.$$

Protože platí $\langle v, v\rangle \neq 0$, můžeme zvolit $t = \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}$. Po dosazení dostáváme:

$$0 \leq \langle u, u\rangle + \frac{\langle u, v\rangle^2}{\langle v, v\rangle^2}\langle v, v\rangle - 2\frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}\langle u, v\rangle = \langle u, u\rangle + \frac{\langle u, v\rangle^2}{\langle v, v\rangle} - 2\frac{\langle u, v\rangle^2}{\langle v, v\rangle} = \langle u, u\rangle - \frac{\langle u, v\rangle^2}{\langle v, v\rangle}$$

Odtud po vynásobení kladným číslem $\langle v, v\rangle$ obdržíme nerovnost

$$0 \leq \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle - \langle u, v\rangle^2, \quad \text{neboli} \quad \langle u, v\rangle^2 \leq \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle.$$

Nakonec ještě musíme vyřešit, kdy v dokázané nerovnosti nastane rovnost. Podle předpokladů na počátku důkazu se tak stane, právě když $v = o$ nebo $u - t \cdot v = o$, neboli $u = t \cdot v$. To znamená právě, že vektory u, v jsou lineárně závislé. Tím je důkaz dokončen.

Ve vektorových prostorech se skalárním součinem se obvykle definuje velikost vektoru u jako nezáporné číslo

$$||u|| = \sqrt{\langle u, u\rangle}.$$

Pak můžeme výsledek Cauchyovy-Schwarzovy věty přepsat ve tvaru:

$$|\langle u, v\rangle| \leq ||u|| \cdot ||v||.$$

Vysvětlíme nyní, jak s pomocí Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti lze ve vektorovém prostoru se skalárním součinem zavést měření vzdáleností a úhlů.
Vzdálenost $\rho(u, v)$ vektorů u, v definujeme jako číslo $||u - v||$, tedy jako velikost vektoru rovného rozdílu vektorů u, v. Taková vzdálenost splňuje všechny axiomy metrického prostoru:
Pro libovolné vektory u, v, w téhož vektorového prostoru se skalárním součinem platí:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \rho(u, v) \geq 0, \quad \rho(u, v) = o \quad \text{právě když} \quad u = v,\\
&(2) \quad \rho(u, v) = \rho(v, u),\\
&(3) \quad \rho(u, w) + \rho(w, v) \geq \rho(u, v).
\end{aligned}$$

Důkazy vlastností (1) a (2) jsou zřejmé, vlastnost (3) plyne z tzv. trojúhelníkové nerovnosti

$$||u+v|| \leq ||u|| + ||v||,$$

kterou nyní v obecném vektorovém prostoru se skalárním součinem dokážeme.
Nejprve trojúhelníkovou nerovnost umocníme na druhou:

$$||u+v||^2 \leq ||u||^2 + ||v||^2 + 2||u|| \cdot ||v||.$$

Nyní do této nerovnosti dosadíme za velikosti skalární součiny:

$$\langle u+v, u+v\rangle \leq \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle + 2\sqrt{\langle u,u\rangle\langle v,v\rangle}.$$

Podle vlastností skalárního součinu upravíme skalární součin na levé straně:

$$\langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle + 2\langle u,v\rangle \leq \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle + 2\sqrt{\langle u,u\rangle\langle v,v\rangle}.$$

Po odečtení stejných výrazů na obou stranách získáváme nerovnost

$$2\langle u,v\rangle \leq 2\sqrt{\langle u,u\rangle\langle v,v\rangle}.$$

Po vydělení kladným číslem 2 dostáváme nerovnost $\langle u,v\rangle \leq \sqrt{\langle u,u\rangle\langle v,v\rangle}$, která platí podle nerovnosti $\langle u,v\rangle^2 \leq \langle u,u\rangle\langle v,v\rangle$ z dříve dokázané Cauchyovy-Schwarzovy věty. Důkaz trojúhelníkové nerovnosti je tak hotov.
Trojúhelníková nerovnost pro euklidovské prostory bude znovu dokázána v příkladu 9, v němž místo obecné Cauchyovy-Schwarzovy věty užijeme Cauchyovu nerovnost (1.1).

Obvyklým příkladem skalárního součinu v n-rozměrném vektorovém prostoru je následující definice

$$\langle u,v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i,$$

kde $u = (u_1,\ldots,u_n), v = (v_1\ldots,v_n)$ jsou libovolné vektory zapsané svými souřadnicemi v některé bázi. Ověřit všechny vlastnosti (1)-(5) skalárního součinu je snadné a nebudeme se tím zde zabývat. Pokud takto definovaný skalární součin dosadíme do nerovnosti z obecné Cauchyovy-Schwarzovy věty, získáme Cauchyovu nerovnost v nám známém tvaru (1.1).

Po stručném výkladu o vzdálenosti vektorů nyní popíšeme, jak se definují odchylky.
Nechť u, v jsou nenulové vektory vektorového prostoru se skalárním součinem. Odchylkou vektorů u, v nazýváme reálné číslo ϕ z uzavřeného intervalu $\langle 0,\pi\rangle$, pro které platí

$$\cos\phi = \frac{\langle u,v\rangle}{||u|| \cdot ||v||}.$$

Právě díky Cauchyově-Schwarzově větě je odchylka definována jednoznačně, neboť zlomek na pravé straně je reálné číslo z intervalu $\langle -1,1\rangle$. Geometrický význam odchylky dvou vektorů je dán kosinovou větou

$$||u-v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 - 2||u|| \cdot ||v|| \cos\phi,$$

jejíž důkaz je zřejmý:

$$||u-v||^2 = \langle u-v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle - 2\langle u,v\rangle = ||u||^2 + ||v||^2 - 2||u||\cdot||v||\frac{\langle u,v\rangle}{||u||\cdot||v||}.$$

Poté, co jsme nadefinovali odchylku vektorů, podíváme se nyní na geometrický význam Lagrangeovy identity, pro jednoduchost v případě $n = 2$. Uvažme dva nenulové vektory dvourozměrného vektorového prostoru $u = (u_1, u_2)$ a $v = (v_1, v_2)$, které svírají úhel ϕ. Pak platí

$$\cos^2\phi = \frac{\langle u,v\rangle^2}{||u||^2\cdot||v||^2} = \frac{(u_1v_1+u_2v_2)^2}{(u_1^2+u_2^2)(v_1^2+v_2^2)} \quad \text{a}$$
$$\sin^2\phi = 1-\cos^2\phi = 1 - \frac{(u_1v_1+u_2v_2)^2}{(u_1^2+u_2^2)(v_1^2+v_2^2)} = \frac{(u_1v_2-u_2v_1)^2}{(u_1^2+u_2^2)(v_1^2+v_2^2)}.$$

Lagrangeova identitu pro $n = 2$ je ve tvaru

$$(u_1v_1+u_2v_2)^2 - (u_1^2+u_2^2)(v_1^2+v_2^2) = \frac{1}{2}\left[(u_1v_2-u_2v_1)^2 + (u_2v_1-u_1v_2)^2\right] = (u_1v_2-u_2v_1)^2.$$

Pokud ji převedeme do tvaru

$$(u_1v_1+u_2v_2)^2 + (u_1v_2-u_2v_1)^2 = (u_1^2+u_2^2)(v_1^2+v_2^2)$$

a vydělíme pravou stranou, dostaneme rovnost

$$\frac{(u_1v_1+u_2v_2)^2}{(u_1^2+u_2^2)(v_1^2+v_2^2)} + \frac{(u_1v_2-u_2v_1)^2}{(u_1^2+u_2^2)(v_1^2+v_2^2)} = 1.$$

Když dosadíme za výrazy na levé straně $\cos^2\phi$ a $\sin^2\phi$, získáme známou identitu

$$\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1.$$

Analogicky i pro $n > 2$ lze z Lagrangeovy identity odvodit vyjádření hodnoty $\sin^2\phi$ pomocí souřadnic obou vektorů z n-rozměrného prostoru, které spolu svírají úhel ϕ.

Nyní se ještě podíváme na jeden nepříliš obvyklý důkaz Cauchyovy nerovnosti ve tvaru

$$|u_1v_1 + \cdots + u_nv_n| \le \sqrt{(u_1^2+\cdots+u_n^2)}\sqrt{(v_1^2+\cdots+v_n^2)},$$

a to metodou matematické indukce vzhledem k číslu n.
V prvním kroku musíme ukázat, že Cauchyova nerovnost platí pro nejmenší n, v našem případě pro $n = 1$, kdy je tvaru $|u_1v_1| \le \sqrt{u_1^2v_1^2} = |u_1v_1|$. V tomto případě nastává tedy zřejmě rovnost.
Dále ještě budeme potřebovat Cauchyovu nerovnost pro $n = 2$:

$$|u_1v_1+u_2v_2| \le \sqrt{(u_1^2+u_2^2)}\sqrt{(v_1^2+v_2^2)},$$

proto ji teď dokážeme. Celou nerovnost můžeme umocnit:

$$(u_1v_1+u_2v_2)^2 \le (u_1^2+u_2^2)(v_1^2+v_2^2).$$

Po roznásobení dostáváme nerovnost

$$u_1^2v_1^2 + 2u_1v_1u_2v_2 + u_2^2v_2^2 \le u_1^2v_1^2 + u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2 + u_2^2v_2^2$$

Po převedení členů na pravou stranu obdržíme nerovnost

$$0 \le u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2 - 2u_1v_2u_2v_1, \quad \text{neboli} \quad 0 \le (u_1v_2 - u_2v_1)^2.$$

Poslední nerovnost je zřejmá. Tak jsme dokázali Cauchyovu nerovnost pro $n = 2$ algebraickým postupem, který odpovídá dřívějšímu odvození obecnější Lagrangeovy identity.
V druhém kroku matematické indukce předpokládejme, že Cauchyova nerovnost platí pro všechna $k = 1, \dots, n$, a dokažme ji pro $k = n + 1$.
Mějme součet $|u_1v_1 + \dots + u_nv_n + u_{n+1}v_{n+1}|$. Pro prvních n sčítanců uvnitř absolutní hodnoty použijeme indukční předpoklad. Podle něho a podle známé nerovnosti $|x + y| \le |x| + |y|$ platí

$$\begin{aligned}|u_1v_1 + \dots + u_nv_n + u_{n+1}v_{n+1}| &\le |u_1v_1 + \dots + u_nv_n| + |u_{n+1}v_{n+1}| \le \\ &\le \sqrt{(u_1^2 + \dots + u_n^2)}\sqrt{(v_1^2 + \dots + v_n^2)} + |u_{n+1}| \cdot |v_{n+1}|.\end{aligned}$$

Dále užijeme již dokázanou část Cauchyovu nerovnosti pro $n = 2$ s čísly $U_1 = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}$, $U_2 = |u_{n+1}|, V_1 = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}, V_2 = |v_{n+1}|$:

$$\begin{aligned}&\sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}\sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} + |u_{n+1}| \cdot |v_{n+1}| \le \\ &\qquad \le \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2 + u_{n+1}^2}\sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2 + v_{n+1}^2}.\end{aligned}$$

Složením dvou odvozených nerovností dostaneme potřebnou nerovnost pro $k = n + 1$. Tím je důkaz Cauchyovy nerovnosti metodou matematické indukce hotov.

Nakonec se zmíníme o třech zvláštních, avšak významných případech Cauchyovy nerovnosti, které budeme v dalším textu často využívat.
Pokud pro daná kladná reálná čísla $a_1, \dots, a_n$ položíme za u_i číslo $\sqrt{a_i}$ a za v_i číslo $\sqrt{\frac{1}{a_i}}$ pro všechna $i = 1, \dots, n$, pak Cauchyova nerovnost (1.1) přejde do tvaru

$$(a_1 + \dots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) \ge n^2, \tag{1.2}$$

kde rovnost platí jen v případě, když $a_1 = \dots = a_n$.

Druhý důležitý zvláštní případ dostaneme, položíme-li v (1.1) $v_1 = v_2 = \dots = v_n = 1$. Dojdeme k závěru, že pro libovolná reálná čísla $u_1, \dots, u_n$ platí nerovnost

$$(u_1 + u_2 + \dots + u_n)^2 \le n(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2), \tag{1.3}$$

přičemž rovnost nastane, právě když $u_1 = u_2 = \dots = u_n$. Zdůrazněme, že zatímco nerovnost (1.2) smíme použít pouze pro kladná čísla a_i, v nerovnosti (1.3) mohou mít čísla u_i libovolná znaménka.

V některých situacích budeme odhadovat součet $u_1 + \dots + u_n$ reálných čísel u_i obecnějším postupem, než který nás přivedl k nerovnosti (1.3). Bude založen na tom, že součet upravíme do tvaru

$$u_1 + \cdots + u_n = \sqrt{a_1} \cdot \frac{u_1}{\sqrt{a_1}} + \cdots + \sqrt{a_n} \cdot \frac{u_n}{\sqrt{a_n}}$$

s vhodnými kladnými čísly a_i a teprve nyní uplatíme Cauchyovu nerovnost (1.1). Dostaneme

$$(u_1 + \cdots + u_n)^2 \leq \left(\frac{u_1^2}{a_1} + \cdots + \frac{u_n^2}{a_n} \right) (a_1 + \cdots + a_n), \tag{1.4}$$

kde rovnost nastane právě tehdy, když platí $\frac{u_i}{\sqrt{a_i}} = t\sqrt{a_i}$ neboli $u_i = ta_i$ pro vhodné $t \in \mathbb{R}$ a všechna $i = 1, \ldots, n$. Dodejme, že v případě $a_1 = \cdots = a_n = 1$ přejde nová nerovnost (1.4) v dřívější nerovnost (1.3), zatímco v případě $u_1 = \cdots = u_n = 1$ přejde (1.4) v (1.2).

Při řešení některých úloh budeme kromě Cauchyovy nerovnosti potřebovat ještě dvě další klasické nerovnosti, které nyní uvedeme bez důkazu. Ty lze nalézt např. v [5].

AG-nerovnost

Pro libovolná čísla $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_0^+$ platí nerovnost

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n},$$

přitom rovnost nastane, jen když platí $a_1 = \cdots = a_n$.

Bernoulliova nerovnost

Je-li $x \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^+, x > -1$ a $p \neq 1$, pak platí

$$(1+x)^p \geq 1 + px \quad \text{pro} \quad p > 1, \quad \text{respektive} \quad (1+x)^p \leq 1 + px \quad \text{pro} \quad 0 < p < 1.$$

Rovnost v nerovnostech nastane, jen když $x = 0$.

Kapitola 2

První skupina příkladů

Tato kapitola je věnována aplikacím obecné Cauchyovy nerovnosti (1.1) z úvodní části práce.

1. [5] Dokažte: je-li $2x + 4y = 1$ pro některá $x, y \in \mathbb{R}$, pak $x^2 + y^2 \geq 0{,}05$.
Řešení:
Uvažme Cauchyovu nerovnost (1.1) pro $n = 2$:

$$(ux + vy)^2 \ \leq \ (u^2 + v^2)(x^2 + y^2).$$

Výraz $x^2 + y^2$ je levá strana dokazované nerovnosti, zbývá najít vhodné u, v. Použijeme-li předpoklad $2x + 4y = 1$ a dosadíme za $u = 2$ a $v = 4$, získáme nerovnost

$$(2x + 4y)^2 \ \leq \ (2^2 + 4^2)(x^2 + y^2).$$

Tedy po úpravě:

$$1 \leq 20(x^2 + y^2), \quad \text{tj.} \quad 0{,}05 \leq x^2 + y^2.$$

Tím jsme zadanou nerovnost dokázali.
Vidíme navíc, že nerovnost platí nejen pro ta $x, y \in \mathbb{R}$, pro něž $2x + 4y = 1$, ale rovněž pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, která splňují nerovnost $|2x + 4y| \geq 1$.

2. [5] Dokažte, že pro libovolná čísla $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí nerovnost

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6}\right)^2 \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{6}.$$

Zjistěte rovněž, kdy nastane rovnost.
Řešení:
Uvažme nyní Cauchyovu nerovnost (1.1) pro $n = 3$:

$$(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 \leq \left(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2\right)\left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right).$$

Pravou stranu zadané nerovnosti dostaneme jako jeden z činitelů na pravé straně, když položíme $v_1 = \frac{x}{\sqrt{2}}, v_2 = \frac{y}{\sqrt{3}}, v_3 = \frac{z}{\sqrt{6}}$.

Aby se pak rovnaly levé strany obou nerovností, zvolíme $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}$.
Dostaneme nerovnost:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{z}{\sqrt{6}}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{6}\right),$$

kterou jsme měli dokázat.
Protože $v_1 = xu_1, v_2 = yu_2, v_3 = zu_3$ a $u_k \neq 0$ pro $k = 1, 2, 3$, rovnost v dokázané nerovnosti nastane, právě když $x = y = z$.

3. [4] Dokažte, že pro libovolná čísla $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí nerovnost

$$30(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + 2y + 5z)^2.$$

Řešení:
Uvažme Cauchyovu nerovnost (1.1) pro $n = 3$ s čísly $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 5, v_1 = x, v_2 = = y, v_3 = z$. Pak dostaneme

$$(x + 2y + 5z)^2 \leq (1^2 + 2^2 + 5^2)(x^2 + y^2 + z^2) = 30(x^2 + y^2 + z^2),$$

což je dokazovaná nerovnost.

4. Pro libovolná čísla $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz.$$

Ukažte, že tato užitečná nerovnost je důsledkem Cauchyovy nerovnosti (1.1) pro $n = 3$.[1]
Řešení:
Zvolíme-li v Cauchyově nerovnosti (1.1) pro $n = 3$ čísla $u_1 = x, u_2 = y, u_3 = z, v_1 = y, v_2 = = z, v_3 = x$, dostaneme

$$(xy + yz + xz)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2)(y^2 + z^2 + x^2) = (x^2 + y^2 + z^2)^2.$$

Odtud po odmocnění s ohledem na $t \leq |t|$ obdržíme

$$xy + yz + xz \leq |xy + yz + xz| \leq x^2 + y^2 + z^2.$$

Tím je důkaz hotov. Dodejme, že obvyklý postup při důkazu zkoumané nerovnosti je založen na její úpravě do tvaru

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0,$$

zatímco Lagrangeova identita pro zvolené trojice čísel vypadá takto:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - (xy + yz + xz)^2 = (x^2 - yz)^2 + (y^2 - xz)^2 + (z^2 - xy)^2.$$

Na závěr uvedeme, že dokazovaná nerovnost $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$ je ekvivalentní s nerovností

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + xz),$$

[1] Jediný příklad celé sbírky bez odkazu na zdroj byl zařazen na návrh vedoucího diplomové práce.

kterou rovněž při řešení některých příkladů budeme potřebovat.

5. [5] Dokažte: je-li $a, b, c, d \in \mathbb{R}_0^+$, pak $\sqrt{(a+b)(c+d)} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$.
Řešení:
Pokud v Cauchyově nerovnosti (1.1) zvolíme $n = 2, u_1 = \sqrt{a}, u_2 = \sqrt{b}, v_1 = \sqrt{c}, v_2 = \sqrt{d}$, dostaneme nerovnost

$$(\sqrt{ac} + \sqrt{bd})^2 \leq (a+b)(c+d).$$

Po odmocnění získáme zadanou nerovnost.

6. [5] Dokažte, že pro libovolná čísla $a_1, a_2 \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^+$ platí

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)\left(\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_n}{a_n}\right) \geq (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)^2.$$

Řešení:
Položíme-li v Cauchyově nerovnosti (1.1) $u_k = \sqrt{a_kb_k}$ a $v_k = \sqrt{\frac{b_k}{a_k}}$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$, získáme:

$$\left(\sqrt{a_1b_1}\sqrt{\frac{b_1}{a_1}} + \cdots + \sqrt{a_nb_n}\sqrt{\frac{b_n}{a_n}}\right)^2 \leq (a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)\left(\frac{b_1}{a_1} + \cdots + \frac{b_n}{a_n}\right).$$

To je dokazovaná nerovnost.

7. [5] Dokažte, že pro libovolná $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ a $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ platí

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)^2 \leq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2).$$

Řešení:
Položíme-li v Cachyově nerovnosti (1.1) $u_k = \sqrt{a_k}$ a $v_k = x_k\sqrt{a_k}$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$, dostaneme hledanou nerovnost, neboť $u_kv_k = a_kx_k, u_k^2 = a_k$ a $v_k^2 = a_kx_k^2$ pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$.

8. [5] Je-li $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$, pak nutnou a postačující podmínkou pro to, aby pro libovolná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ platilo

$$(a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2)^2 \leq a_1x_1^4 + a_2x_2^4 + \cdots + a_nx_n^4,$$

je nerovnost $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq 1$. Dokažte.
Řešení:
Vezmeme-li Cauchyovu nerovnost (1.1) s $u_k = \sqrt{a_k}, v_k = \sqrt{a_k} \cdot x_k^2$, dostaneme

$$\left(\sum_{k=1}^n a_kx_k^2\right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k \sum_{k=1}^n a_kx_k^4.$$

Pokud předpokládáme, že $\sum_{k=1}^n a_k \leq 1$, pak platí:

$$\sum_{k=1}^n a_k \sum_{k=1}^n a_kx_k^4 \leq \sum_{k=1}^n a_kx_k^4,$$

takže dohromady dostáváme nerovnost ze zadání. Dokázali jsme, že podmínka $\sum_{k=1}^{n} a_k \leq 1$ je postačující.
Nyní dokážeme, že podmínka je také nutná. Pokud v nerovnosti

$$\left(a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2\right)^2 \leq a_1 x_1^4 + \cdots + a_n x_n^4$$

položíme např. $x_1 = \cdots = x_n = 1$, dostaneme

$$\left(a_1 + \cdots + a_n\right)^2 \leq a_1 + \cdots + a_n.$$

Po dělení této nerovnosti kladným číslem $a_1 + \cdots + a_n$ získáme nerovnost $\sum_{k=1}^{n} a_k \leq 1$, což je právě uvažovaná podmínka.

9. [5] Dokažte tzv. trojúhelníkovou nerovnost

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (u_k + v_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} u_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} v_k^2}$$

pro dvě libovolné n-tice reálných čísel $u_1, \ldots, u_n$ a $v_1, \ldots, v_n$.
Řešení:
Umocníme-li trojúhelníkovou nerovnost, která má obě strany nezáporné, na druhou, získáme ekvivalentní nerovnost

$$\sum_{k=1}^{n} u_k^2 + \sum_{k=1}^{n} v_k^2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} u_k . v_k \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} u_k^2 + \sum_{k=1}^{n} v_k^2 + 2 \cdot \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2},$$

tedy po úpravě

$$u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \cdots + u_n \cdot v_n \leq \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Tato nerovnost je zřejmá, je-li její levá strana záporná. V opačném případě můžeme nerovnost znovu ekvivalentně umocnit. Získáme Cauchyovu nerovnost (1.1) a důkaz trojúhelníkové nerovnosti je tak hotov.
Poznámka:
Jak jsme uvedli v teoretické části, tento důkaz trojúhelníkové nerovnosti platí pro n-rozměrné vektorové prostory se skalárním součinem. Pro vektory $u = (u_1, \ldots, u_n)$ a $v = (v_1, \ldots, v_n)$ lze tuto nerovnost přepsat ve tvaru

$$||u + v|| \leq ||u|| + ||v||.$$

Geometrická konstrukce součtu vektorů $u + v$ vysvětluje název trojúhelníková nerovnost.

10. [9] Pro libovolná čísla $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ dokažte nerovnost

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \cdots + \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \geq \sqrt{(x_1 + \cdots + x_n)^2 + (y_1 + \cdots + y_n)^2}.$$

Řešení:
Tato nerovnost je pro vektory $w_1 = (x_1, y_1), \ldots, w_n = (x_n, y_n)$ tvrzením

$$||w_1|| + \cdots + ||w_n|| \geq ||w_1 + \cdots + w_n||.$$

Toto tvrzení dokážeme matematickou indukcí nezávisle na výsledku, uvedeném v poznámce k předchozímu příkladu. Pro $n = 1$ nerovnost zřejmě platí.
Dále budeme potřebovat mít dokázánu zadanou nerovnost pro $n = 2$:

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \geq \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}.$$

Tuto nerovnost můžeme ekvivalentně umocnit:

$$x_1^2 + y_1^2 + 2\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} + x_2^2 + y_2^2 \geq x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2.$$

Po úpravě a opakovaném umocnění získáváme

$$(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \geq (x_1x_2 + y_1y_2)^2,$$

což je ale Cauchyova nerovnost (1.1) pro $n = 2$ s čísly $u_1 = x_1, u_2 = y_1, v_1 = x_2, v_2 = y_2$. Tak je dokázána zadaná nerovnost pro $n = 2$.
Nyní předpokládejme, že zadaná nerovnost platí pro $k = 1, \ldots, n$ a dokážeme ji pro $n + 1$.
Využijeme indukční krok:

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \cdots + \sqrt{x_n^2 + y_n^2} + \sqrt{x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2} \geq$$
$$\geq \sqrt{(x_1 + \cdots + x_n)^2 + (y_1 + \cdots + y_n)^2} + \sqrt{x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2}.$$

Dále užijeme platnost nerovnosti pro $n = 2$ s čísly $U_1 = x_1 + \cdots + x_n, U_2 = x_{n+1}, V_1 = y_1 + \cdots + y_n, V_2 = y_{n+1}$:

$$\sqrt{(x_1 + \cdots + x_n)^2 + (y_1 + \cdots + y_n)^2} + \sqrt{x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2} \geq$$
$$\geq \sqrt{(x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1})^2 + (y_1 + \cdots + y_n + y_{n+1})^2}.$$

Tak jsme dokázali zadanou nerovnost pro libovolné přirozené n.

11. [5] Najděte nejmenší hodnotu součtu $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$, splňují-li čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ podmínku $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, kde $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ jsou daná reálná čísla; přitom $a_k \neq 0$ pro některé $k = 1, 2, \ldots, n$.
Řešení:
Položíme-li v Cauchyově nerovnosti (1.1) $u_k = a_k, v_k = x_k$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$, pak dostaneme nerovnost

$$b^2 = (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2),$$

odkud po dělení číslem $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$ dostaneme

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq \frac{b^2}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}.$$

Hledáme nejmenší hodnotu výrazu $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$, což bude pravá strana poslední nerovnosti, pokud je v ní možná rovnost. Ta nastane, pokud existuje $t \in \mathbb{R}$ takové, že $x_k = ta_k$ pro všechna $k = 1, 2, \ldots, n$. Vynásobíme-li jednotlivé rovnosti číslem a_k, sečteme pro všechna $k = 1, 2, \ldots, n$ a použijeme předpoklad ze zadání, dostaneme $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = t(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)$, tedy pro $t = \frac{b}{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$ se skutečně odvozená nerovnost promění v rovnost.
Nejmenší hodnota zadaného součtu je $\frac{b^2}{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$.

12. [5] Dokažte: je-li $p, q, r, s \in \mathbb{R}$, pak platí nerovnost

$$(1 + p^4)(1 + q^4)(1 + r^4)(1 + s^4) \geq (1 + pqrs)^4. \tag{2.1}$$

Řešení:
Použijeme vícekrát Cauchyovu nerovnost (1.1). Položíme-li pro $n = 2$ jednou $u_1 = 1, u_2 = p^2, v_1 = 1, v_2 = q^2$ a podruhé $u_1 = 1, u_2 = r^2, v_1 = 1, v_2 = s^2$, získáme nerovnosti $(1 + p^4)(1 + q^4) \geq (1 + p^2q^2)^2$ a $(1 + r^4)(1 + s^4) \geq (1 + r^2s^2)^2$. Vynásobíme-li nyní tyto nerovnosti a použijeme ještě jednou Cauchyovu nerovnost (1.1) pro $n = 2$, tentokrát s čísly $u_1 = 1, u_2 = pq, v_1 = 1, v_2 = rs$, dostaneme:

$$(1 + p^4)(1 + q^4)(1 + r^4)(1 + s^4) \geq (1 + p^2q^2)^2(1 + r^2s^2)^2 \geq (1 + pqrs)^4,$$

čímž jsme dokázali danou nerovnost.

13. [5] Dokažte: je-li $a, b, c \in \mathbb{R}_0^+$, pak platí

$$(1 + a^3)(1 + b^3)(1 + c^3) \geq (1 + abc)^3.$$

Řešení:
Položíme-li v nerovnosti (2.1) $p = a^{\frac{3}{4}}, q = b^{\frac{3}{4}}, r = c^{\frac{3}{4}}, s = (abc)^{\frac{1}{4}}$, dostaneme nerovnost

$$(1 + a^3)(1 + b^3)(1 + c^3)(1 + abc) \geq (1 + abc)^4.$$

Po vydělení kladným číslem $1 + abc$ získáme dokazovanou nerovnost.

14. [5] Dokažte: je-li $p_k, q_k, r_k, s_k \in \mathbb{R}$, pro $k = 1, 2, \ldots, n$, pak platí

$$\left(\sum_{k=1}^{n} p_kq_kr_ks_k\right) \leq \left(\sum_{k=1}^{n} p_k^4\right)\left(\sum_{k=1}^{n} q_k^4\right)\left(\sum_{k=1}^{n} r_k^4\right)\left(\sum_{k=1}^{n} s_k^4\right).$$

Řešení:
Pokud zvolíme v Cauchyově nerovnosti (1.1) za $u_k = p_kq_k$ a $v_k = r_ks_k$ pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$, dostaneme nerovnost

$$\left(\sum_{k=1}^{n} p_kq_kr_ks_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} p_k^2q_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} r_k^2s_k^2\right).$$

Použijeme dále dvakráte Cauchyovu nerovnost (1.1) pro $u_k = p_k^2, v_k = q_k^2$ a $u_k = r_k^2, v_k = s_k^2$ pro každé $k = 1, 2, \dots, n$. Dostaneme tak nerovnosti:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} p_k^2 q_k^2\right) \le \left(\sum_{k=1}^{n} p_k^4\right)\left(\sum_{k=1}^{n} q_k^4\right)$$

a

$$\left(\sum_{k=1}^{n} r_k^2 s_k^2\right) \le \left(\sum_{k=1}^{n} r_k^4\right)\left(\sum_{k=1}^{n} s_k^4\right).$$

Vynásobením těchto nerovností získáme zadanou nerovnost:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} p_k q_k r_k s_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} p_k^2 q_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} r_k^2 s_k^2\right) \le \left(\sum_{k=1}^{n} p_k^4\right)\left(\sum_{k=1}^{n} q_k^4\right)\left(\sum_{k=1}^{n} r_k^4\right)\left(\sum_{k=1}^{n} s_k^4\right).$$

15. [1] Je-li $a, b, c \in (0, 1)$, dokažte nerovnost

$$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1.$$

Řešení:
Protože $a \in (0, 1)$, platí:

$$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < \sqrt{bc} + \sqrt{(1-b)(1-c)}.$$

Nyní využijeme Cauchyovu nerovnost (1.1) pro $n = 2$ s čísly $u_1 = \sqrt{b}, u_2 = \sqrt{1-b}, v_1 = \sqrt{c}, v_2 = \sqrt{1-c}$. Dostaneme nerovnost

$$\left(\sqrt{bc} + \sqrt{(1-b)(1-c)}\right)^2 \le (b + 1 - b)(c + 1 - c) = 1.$$

Po odmocnění získáme nerovnost

$$\sqrt{bc} + \sqrt{(1-b)(1-c)} \le 1.$$

Složením získaných dvou nerovností dostáváme

$$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < \sqrt{bc} + \sqrt{(1-b)(1-c)} \le 1.$$

Dokázali jsme tedy zadanou nerovnost.

16. [7] Dokažte, že pro libovolná čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ soustava rovnic s neznámými x, y, z

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + 3(x^2 + y^2 + z^2) &= 6 \\ ax + by + cz &= 2 \end{aligned}$$

nemá v oboru $\mathbb{R}$ žádné řešení.

Řešení:
Tvrzení příkladu je zřejmé v případě $a = b = c = 0$, dále proto předpoládejme, že je splněna podmínka $a^2 + b^2 + c^2 > 0$. Uvažme Cauchyovu nerovnost (1.1) pro $n = 3$ s čísly $u_1 = a, u_2 = = b, u_3 = c, v_1 = x, v_2 = y, v_3 = z$ a využijme druhou rovnici:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2 = 4,$$

odkud po dělení kladným číslem $a^2 + b^2 + c^2$ dostaneme

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{4}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Pak platí

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3(x^2 + y^2 + z^2) \geq a^2 + b^2 + c^2 + \frac{12}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Užijeme AG-nerovnost pro $n = 2$ s čísly $a^2 + b^2 + c^2$ a $\frac{12}{a^2+b^2+c^2}$:

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{12}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 2\sqrt{12} > 6.$$

Je tedy zřejmé, že zadaná soustava rovnic nemá žádné řešení i v případě $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

17. [3] Dokažte, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{(x + y)(1 - xy)}{(1 + x^2)(1 + y^2)} \leq \frac{1}{2}.$$

Řešení:
Dosadíme-li do Cauchyovy nerovnosti (1.1) pro $n = 2$ čísla $u_1 = \frac{2x}{1+x^2}, u_2 = \frac{1-x^2}{1+x^2}, v_1 = \frac{1-y^2}{1+y^2}$, $v_2 = \frac{2y}{1+y^2}$, dostaneme:

$$\left(\frac{2x}{1 + x^2} \cdot \frac{1 - y^2}{1 + y^2} + \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \cdot \frac{2y}{1 + y^2}\right)^2 \leq$$
$$\leq \left(\frac{4x^2}{(1 + x^2)^2} + \frac{(1 - x^2)^2}{(1 + x^2)^2}\right)\left(\frac{(1 - y^2)^2}{(1 + y^2)^2} + \frac{4y^2}{(1 + y^2)^2}\right) = 1 \cdot 1.$$

Upravíme levou stranu:

$$\left(\frac{2x}{1 + x^2}\frac{1 - y^2}{1 + y^2} + \frac{1 - x^2}{1 + x^2}\frac{2y}{1 + y^2}\right)^2 = \left(2\frac{x - xy^2 + y - x^2y}{(1 + x^2)(1 + y^2)}\right)^2 =$$
$$= \left(2\frac{x(1 - xy) + y(1 - yx)}{(1 + x^2)(1 + y^2)}\right)^2 = \left(2\frac{(x + y)(1 - xy)}{(1 + x^2)(1 + y^2)}\right)^2.$$

Máme tedy platnou nerovnost:

$$\left(2\frac{(x + y)(1 - xy)}{(1 + x^2)(1 + y^2)}\right)^2 \leq 1,$$

po odmocnění dostaneme

$$\left|2\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| \le 1,$$

odkud po odstranění absolutní hodnoty a vydělení číslem 2 obdržíme dokazované nerovnosti.

18. [5] Dokažte, že pro libovolná $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ platí nerovnost

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{2(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)} \le \frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \cdots + \frac{a_n}{a_1+a_2}.$$

Řešení:
Použijeme Cauchyovu nerovnost (1.1) s $u_k = \sqrt{\frac{a_k}{a_{k+1}+a_{k+2}}}, v_k = \sqrt{a_k(a_{k+1}+a_{k+2})}$, pro $k = 1, 2, \ldots, n$, kde jsme označili $a_{n+1} = a_1, a_{n+2} = a_2$:

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2 \le \left(\frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \cdots + \frac{a_n}{a_1+a_2}\right) \cdot$$
$$\cdot (a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 + a_2a_4 + \cdots + a_na_1 + a_na_2).$$

Ze zřejmé nerovnosti $(a_i - a_j)^2 \ge 0$ plyne $a_ia_j \le \dfrac{a_i^2 + a_j^2}{2}$. Toho využijeme k hornímu odhadu pravé strany:

$$\left(\frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \cdots + \frac{a_n}{a_1+a_2}\right) \cdot (a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 + a_2a_4 + \cdots + a_na_1 + a_na_2) \le$$
$$\le \left(\frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \cdots + \frac{a_n}{a_1+a_2}\right) \cdot \left(\frac{a_1^2+a_2^2}{2} + \frac{a_1^2+a_3^2}{2} + \cdots + \frac{a_n^2+a_1^2}{2} + \frac{a_n^2+a_2^2}{2}\right) =$$
$$= 2(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\left(\frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \cdots + \frac{a_n}{a_1+a_2}\right)$$

Po vydělení kladným výrazem $2(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$ získáme dokazovanou nerovnost.

19. [1] Nechť pro čísla $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}^+$ platí $x+y+z = 1$. Dokažte nerovnost

$$ax + by + cz + 2\sqrt{(xy+yz+xz)(ab+bc+ca)} \le a+b+c.$$

Řešení:
Uvažme Cauchyovu nerovnost (1.1) pro $n = 3$ s čísly $u_1 = a, u_2 = b, u_3 = c, v_1 = x, v_2 = y, v_3 = z$. Dostaneme nerovnost

$$(ax+by+cz)^2 \le (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+c^2).$$

Po odmocnění získáme nerovnost

$$ax+by+cz \le \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}.$$

Platí tedy nerovnost

$$ax+by+cz+2\sqrt{(xy+yz+xz)(ab+bc+ca)} \leq$$
$$\leq \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}+2\sqrt{(xy+yz+xz)(ab+bc+ca)}.$$

Na pravou stranu použijeme Cauchyovu nerovnost (1.1) pro $n=2$ s čísly $u_1=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, $u_2= =\sqrt{2(ab+bc+ca)}$, $v_1=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $v_2=\sqrt{2(xy+yz+xz)}$. Dostaneme

$$\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}+2\sqrt{(xy+yz+xz)(ab+bc+ca)} \leq$$
$$\leq \sqrt{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}\sqrt{x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz)} =$$
$$= \sqrt{(a+b+c)^2}\sqrt{(x+y+z)^2} = |a+b+c|\,\sqrt{1^2} = a+b+c.$$

Když složíme získané dvě nerovnosti, dostaneme

$$ax+by+cz+2\sqrt{(xy+yz+xz)(ab+bc+ca)} \leq$$
$$\leq \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}+2\sqrt{(xy+yz+xz)(ab+bc+ca)} \leq$$
$$\leq a+b+c.$$

Tím jsme dokázali zadanou nerovnost.

20. [1] Nechť $a,b,c \in \mathbb{R}_0^+$. Dokažte nerovnost

$$a\sqrt{2a^2+bc}+b\sqrt{2b^2+ca}+c\sqrt{2c^2+ab} \leq$$
$$\leq \sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}+\sqrt{b^4+b^2c^2+c^4}+\sqrt{c^4+c^2a^2+a^4}.$$

Řešení:
Víme, že platí $\left(a^2-b^2\right)^2 \geq 0$, tedy $a^4+b^4 \geq 2a^2b^2$. Toho využijeme:

$$4a^4+4a^2b^2+4b^4 \geq 3a^4+6a^2b^2+3b^4 = 3(a^4+2a^2b^2+b^4) = 3(a^2+b^2)^2.$$

Nerovnost vydělíme číslem 4, a pak odmocníme (což můžeme, neboť obě strany jsou nezáporné). Dostaneme nerovnost

$$\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2).$$

Nyní tento odhad použijeme třikrát na pravou stranu zadané nerovnosti:

$$\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}+\sqrt{b^4+b^2c^2+c^4}+\sqrt{c^4+c^2a^2+a^4} \geq$$
$$\geq \frac{\sqrt{3}}{2}\left(a^2+b^2+b^2+c^2+a^2+c^2\right) = \sqrt{3}(a^2+b^2+c^2).$$

Stačí tedy dokázat, že platí:

$$a\sqrt{2a^2+bc}+b\sqrt{2b^2+ca}+c\sqrt{2c^2+ab} \leq \sqrt{3}(a^2+b^2+c^2).$$

Užijeme Cauchyovu nerovnost (1.1) pro $n = 3$ s čísly $u_1 = a, u_2 = b, u_3 = c, v_1 = \sqrt{2a^2 + bc}, v_2 = = \sqrt{2b^2 + ca}, v_3 = \sqrt{2c^2 + ab}$:

$$\left(a\sqrt{2a^2 + bc} + b\sqrt{2b^2 + ca} + c\sqrt{2c^2 + ab}\right)^2 \leq$$
$$\leq \left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(2a^2 + bc + 2b^2 + ac + 2c^2 + ab\right).$$

S ohledem na nerovnost $ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2$, kterou jsme dokázali v příkladu 4, platí $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + ab + bc + ac \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$.
Dohromady dostáváme

$$\left(a\sqrt{2a^2 + bc} + b\sqrt{2b^2 + ca} + c\sqrt{2c^2 + ab}\right)^2 \leq$$
$$\leq \left(a^2 + b^2 + c^2\right) 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2.$$

Tuto nerovnost odmocníme a tak získáme nerovnost, kterou jsme chtěli dokázat.

21. [9] Nechť $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$. Dokažte nerovnost

$$\frac{a_1}{a_2^2 + \cdots + a_n^2} + \frac{a_2}{a_1^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2} + \cdots + \frac{a_n}{a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2} \geq \frac{4}{a_1 + \cdots + a_n}.$$

Řešení:
Uvažme Cauchyovu nerovnost (1.1) s čísly $u_i = \sqrt{a_i}, v_i = \sqrt{\frac{a_i}{a_1^2+\cdots+a_{i-1}^2+a_{i+1}^2+\cdots+a_n^2}}$ pro každé $i = 1, \ldots, n$. Dostaneme nerovnost

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{a_i^2}{a_1^2 + \cdots + a_{i-1}^2 + a_{i+1}^2 + \cdots + a_n^2}}\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_1^2 + \cdots + a_{i-1}^2 + a_{i+1}^2 + \cdots + a_n^2}.$$

Nyní stačí tedy dokázat, že platí

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{a_i^2}{a_1^2 + \cdots + a_{i-1}^2 + a_{i+1}^2 + \cdots + a_n^2}} \geq 2.$$

Uvažme AG-nerovnost s dvěma čísly 1 a $\frac{a_1^2+\cdots+a_{i-1}^2+a_{i+1}^2+\cdots+a_n^2}{a_i^2}$:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_{i-1}^2 + a_{i+1}^2 + \cdots + a_n^2}{a_i^2}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2 + \cdots + a_{i-1}^2 + a_{i+1}^2 + \cdots + a_n^2}{a_i^2} + 1\right) =$$
$$= \frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{2a_i^2}.$$

Pro převrácená čísla proto platí nerovnost

$$\sqrt{\frac{a_i^2}{a_1^2 + \cdots + a_{i-1}^2 + a_{i+1}^2 + \cdots + a_n^2}} \geq \frac{2a_i^2}{a_1^2 + \cdots + a_n^2}.$$

Sečtením posledních nerovností pro $i = 1, \ldots, n$ získáme nerovnost

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{a_i^2}{a_1^2 + \cdots + a_{i-1}^2 + a_{i+1}^2 + \cdots + a_n^2}} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{2a_i^2}{a_1^2 + \cdots + a_n^2} = 2.$$

Tím je dokázána nerovnost, kterou jsme k dokončení důkazu potřebovali.

22. [7] Pro libovolná $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ dokažte nerovnost

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geq \frac{2}{3}.$$

Řešení:
Označme L daný součet zlomků. Uvažíme-li Cauchyovu nerovnost (1.1) pro $n = 4$ s čísly $u_1 = \sqrt{\frac{a}{b+2c+3d}}, u_2 = \sqrt{\frac{b}{c+2d+3a}}, u_3 = \sqrt{\frac{c}{d+2a+3b}}, u_4 = \sqrt{\frac{d}{a+2b+3c}}, v_1 = \sqrt{a(b+2c+3d)}, v_2 = \sqrt{b(c+2d+3a)}, v_3 = \sqrt{c(d+2a+3b)}, v_4 = \sqrt{d(a+2b+3c)}$, dostaneme nerovnost:

$$(a+b+c+d)^2 \leq L \cdot (a(b+2c+3d) + b(c+2d+3a) + c(d+2a+3b) + d(a+2b+3c)) =$$
$$= 4\left(\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c}\right)(ab+ac+ad+bc+bd+cd).$$

Stačí tedy dokázat nerovnost

$$\frac{(a+b+c+d)^2}{4(ab+ac+ad+bc+bd+cd)} \geq \frac{2}{3}$$

neboli

$$3(a+b+c+d)^2 \geq 8(ab+ac+ad+bc+bd+cd).$$

Pravou stranu poslední nerovnosti upravíme:

$$8(ab+ac+ad+bc+bd+cd) = 3(a+b+c+d)^2 - 3(a^2+b^2+c^2+d^2) + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) =$$
$$= 3(a+b+c+d)^2 - \left[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2\right].$$

Po dosazení do dokazované nerovnosti získáme

$$3(a+b+c+d)^2 \geq 3(a+b+c+d)^2 -$$
$$- \left[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2\right]$$

neboli

$$(a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2 \geq 0,$$

což je platná nerovnost a tím je důkaz hotov.

23. [1] Nechť pro čísla $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Dokažte nerovnost

$$x + y + z \leq xyz + 2.$$

Řešení:
Po odečtení čísla xyz od obou stran nerovnosti a úpravě přejde nerovnost do tvaru

$$x + y + z - xyz = x(1 - yz) + y + z \leq 2.$$

Uvažme Cauchyovu nerovnost (1.1) pro $n = 2$ s čísly $u_1 = x, u_2 = y + z, v_1 = 1 - yz, v_2 = 1$:

$$[x(1 - yz) + (y + z)]^2 \leq \left[x^2 + (y + z)^2\right] \left[(1 - yz)^2 + 1^2\right].$$

Po odmocnění celé nerovnosti a úpravě výrazu na pravé straně dostaneme nerovnost

$$|x(1 - yz) + y + z| \leq \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 + 2yz)\,(2 + (yz)^2 - 2yz)}.$$

Protože výraz uvnitř absolutní hodnoty je roven $x + y + z - xyz$, stačí dokázat, že platí

$$\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 + 2yz)\,(2 + (yz)^2 - 2yz)} \leq 2.$$

Využijeme rovnosti ze zadání $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ a celou nerovnost umocníme (což můžeme, neboť obě strany jsou nezáporné). Dostaneme nerovnost

$$(2 + 2yz)(2 - 2yz + (yz)^2) \leq 4.$$

Po roznásobení a následné úpravě přejde nerovnost do tvaru

$$2(yz)^3 \leq 2(yz)^2 \quad \text{neboli} \quad (yz)^2(2 - 2yz) \geq 0.$$

Protože $(yz)^2 \geq 0$, stačí dokázat, že $2yz \leq 2$. Zřejmě platí:

$$2yz \leq y^2 + z^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 = 2.$$

Tím je důkaz hotov.

24. [9] Pro libovolná čísla $x, y, z \in \mathbb{R}$ označme

$$a = \sqrt{y^2 - yz + z^2}, b = \sqrt{z^2 - zx + x^2}, c = \sqrt{x^2 - xy + y^2}.$$

Dokažte nerovnost

$$ab + bc + ac \geq x^2 + y^2 + z^2.$$

Řešení:
Upravme vyjádření a a b:

$$a = \sqrt{y^2 - 2\frac{yz}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{3z^2}{4}} = \sqrt{\left(y - \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{3z^2}{4}}$$
$$b = \sqrt{x^2 - 2\frac{zx}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{3z^2}{4}} = \sqrt{\left(x - \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{3z^2}{4}}.$$

Dále užijeme Cauchyovu nerovnost (1.1) pro $n = 2$ s čísly $u_1 = \sqrt{\frac{3}{4}}z, u_2 = y - \frac{z}{2}, v_1 =$ $= \sqrt{\frac{3}{4}}z, v_2 = x - \frac{z}{2}$:

$$\left(\frac{3}{4}z^2 + \left(y - \frac{z}{2}\right)\left(x - \frac{z}{2}\right)\right)^2 \leq \left(\left(y - \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{3z^2}{4}\right)\left(\left(x - \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{3z^2}{4}\right).$$

Po odmocnění dostaneme s ohledem na $t \leq |t|$ nerovnost

$$\frac{3}{4}z^2 + \left(y - \frac{z}{2}\right)\left(x - \frac{z}{2}\right) \leq ab.$$

Podobně odvodíme i nerovnosti

$$\frac{3}{4}x^2 + \left(z - \frac{x}{2}\right)\left(y - \frac{x}{2}\right) \leq bc \quad \text{a} \quad \frac{3}{4}y^2 + \left(x - \frac{y}{2}\right)\left(z - \frac{y}{2}\right) \leq ac.$$

Sečtením těchto tří nerovností získáme nerovnost

$$ab + bc + ac \geq \frac{3}{4}(x^2 + y^2 + z^2) + \left(y - \frac{z}{2}\right)\left(x - \frac{z}{2}\right) + \left(z - \frac{x}{2}\right)\left(y - \frac{x}{2}\right) + \left(x - \frac{y}{2}\right)\left(z - \frac{y}{2}\right) =$$
$$= x^2 + y^2 + z^2.$$

Tím je důkaz hotov.

25. [1] Nechť pro čísla $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Dokažte nerovnost

$$2(x + y + z) - xyz \leq 10.$$

Řešení:
Zřejmě platí $|x|, |y|, |z| \leq 3$. Uvažme AG-nerovnost pro tři čísla x^2, y^2, z^2:

$$\sqrt[3]{(xyz)^2} \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}, \quad \text{odkud} \quad |xyz| \leq 3\sqrt{3}.$$

Rozebereme nejprve případ, kdy některé z čísel x, y, z je nulové. Je-li např. $x = 0$, máme dokázat nerovnost $y + z \leq 5$. Uvažme nerovnost (1.3) pro $n = 2$ s čísly $u_1 = y, u_2 = z$, podle které $(y + z)^2 \leq 2(y^2 + z^2) = 2 \cdot 9 = 18 < 25$. Odmocněním je nerovnost dokázána.
Pro nenulová čísla x, y, z budeme s ohledem na symetrii předpokládat $x \leq y \leq z$ a rozlišíme čtyři případy.
1. Pokud $z < 0$, pak

$$2(x + y + z) - xyz < -xyz \leq 3\sqrt{3} < 10.$$

2. Jestliže platí $x \leq y < 0 < z$, pak $xyz > 0$. Dostáváme

$$2(x + y + z) < 2z \leq 6 < 10 + xyz.$$

3. Pokud $x < 0 < y \leq z$, užijeme Cauchyovu nerovnost (1.1) pro $n = 3$ s čísly $u_1 = 2, u_2 = 2$, $u_3 = -1, v_1 = y, v_2 = z, v_3 = x$. Dostaneme nerovnost

$$(2y + 2z - x)^2 \leq (4 + 4 + 1)(y^2 + z^2 + x^2) = 9 \cdot 9 = 81.$$

Protože výraz v závorce je kladný, získáme po odmocnění nerovnost $2y + 2z - x \leq 9$, odkud $2(x + y + z) = 2y + 2z - x + 3x \leq 9 + 3x$. Stačí proto ukázat, že platí $9 + 3x \leq 10 + xyz$, neboli $3x - 1 \leq xyz$.
Z rovnosti $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, vyplývá $9 - x^2 = y^2 + z^2 \geq 2yz$, odkud po násobení záporným číslem $\frac{x}{2}$ dostáváme

$$xyz \geq \frac{9x - x^3}{2}.$$

Stačí tedy dokázat $\frac{9x-x^3}{2} \geq 3x - 1$. Tuto nerovnost ekvivalentně upravíme:

$$\begin{aligned} 9x - x^3 &\geq 2(3x - 1) \\ x^3 - 3x - 2 &\leq 0 \\ (x - 2)(x + 1)^2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Poslední nerovnost je platná, protože $x < 0$. (Rozklad polynomu jsme získali podle uhodnutých celočíselných kořenů $x = -1, x = 2$.)
4. Zbývá vyřešit případ, kdy $0 < x \leq y \leq z$. Uvážíme Cauchyovu nerovnost (1.1) pro $n = 3$ s čísly $u_1 = 2, u_2 = 2, u_3 = 1, v_1 = y, v_2 = z, v_3 = x$. Dostaneme nerovnost

$$(2y + 2z + x)^2 \leq (4 + 4 + 1)(y^2 + z^2 + x^2) = 9 \cdot 9 = 81.$$

Protože výraz v první závorce je kladný, získáme po odmocnění nerovnost

$$2y + 2z + x \leq 9,$$

odkud $2(x + y + z) \leq 9 + x$. Stačí dokázat nerovnost $9 + x \leq 10 + xyz$, neboli $x \leq 1 + xyz$. Ale ta je zřejmá pro $x \leq 1$ a pokud $x > 1$, je i $y, z > 1$ a nerovnost je také zřejmá.
Rozborem čtyř případů je celý důkaz kompletní.

26. [9] Pro čísla $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$ platí $u_1^2 + \cdots + u_n^2 = v_1^2 + \cdots + v_n^2 = 1$, přitom $n \geq 2$. Dokažte nerovnost

$$2\,|u_1v_1 + \cdots + u_nv_n - 1| \geq (u_1v_2 - u_2v_1)^2.$$

Řešení:
Využijeme Lagrangeovu identitu, kterou jsme dokázali v úvodní kapitole. Podle ní platí:

$$\sum_{i=1}^n u_i^2 \sum_{i=1}^n v_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n u_iv_i\right)^2 = \sum_{1\leq i<j\leq n} (u_iv_j - u_jv_i)^2 \geq (u_1v_2 - u_2v_1)^2.$$

Díky předpokladu ze zadání můžeme tuto nerovnost zapsat také jako:

$$\sum_{i=1}^n u_i^2 \sum_{i=1}^n v_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n u_iv_i\right)^2 = 1 - \left(\sum_{i=1}^n u_iv_i\right)^2 = \left(1 - \sum_{i=1}^n u_iv_i\right)\left(1 + \sum_{i=1}^n u_iv_i\right) \geq$$
$$\geq (u_1v_2 - u_2v_1)^2.$$

Stačí tedy dokázat nerovnost

$$2\left|\sum_{i=1}^{n} u_i v_i - 1\right| \geq \left(1 - \sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)\left(1 + \sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right).$$

Uvažme Cachyovu nerovnost (1.1) s čísly u_i, v_i pro $i = 1, \ldots, n$. Pak díky předpokladu v zadání platí

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = 1.$$

Po odmocnění získáváme nerovnosti

$$-1 \leq \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \leq 1.$$

Toho využijeme pro odstranění absolutní hodnoty v nerovnosti, kterou nyní dokazujeme. Je vidět, že uvnitř absolutní hodnoty je nekladný výraz, můžeme tedy psát

$$\left|\sum_{i=1}^{n} u_i v_i - 1\right| = -\left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i - 1\right) = 1 - \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$

Dokazovanou nerovnost nyní máme ve tvaru

$$2(1-s) \geq (1-s)\,(1+s)\,, \quad \text{kde} \quad s = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$

Po roznásobení, převedení na jednu stranu nerovnosti a úpravě získáme $(1-s)^2 \geq 0$, což je platná nerovnost a důkaz je tím ukončen.

27. [6] Nechť pro čísla $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^+$ platí nerovnosti

$$a_1 \geq \ldots \geq a_n, \quad a_1 \leq b_1, \quad a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2, \quad \ldots, \quad a_1 + \cdots + a_n \leq b_1 + \cdots + b_n.$$

Dokažte nerovnost $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} b_i^2$.
Řešení:
Nejdříve dokážeme identitu

$$\sum_{i=1}^{k-1}(u_i - u_{i+1})(v_1 + \cdots + v_i) + u_k \sum_{i=1}^{k} v_i = \sum_{i=1}^{k} u_i v_i,$$

pro libovolná čísla $u_i, v_i \in \mathbb{R}$, kterou budeme potřebovat k dalšímu řešení. Její platnost ukážeme matematickou indukcí vzhledem k číslu $k \geq 1$.
V prvním kroku identitu ověříme pro $k = 1$. Pro první sumu na levé straně identity pro $k = 1$ platí $\sum_{i=1}^{0}(u_i - u_{i+1})(v_1 + \cdots + v_i) = 0$, pak je identita ve tvaru $0 + u_1 v_1 = u_1 v_1$ a tedy platí.

Dále předpokládejme, že identita platí pro některé $k = n$ a dokážeme ji pro $k = n+1$. Levou stranu identity pro $k = n+1$ nejprve upravíme

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}(u_i - u_{i+1})(v_1 + \cdots + v_i) + u_{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} v_i = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}(u_i - u_{i+1})(v_1 + \cdots + v_i) + (u_n - u_{n+1})(v_1 + \cdots + v_n) + u_{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} v_i = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}(u_i - u_{i+1})(v_1 + \cdots + v_i) + u_n\sum_{i=1}^{n} v_i + u_{n+1}v_{n+1}
\end{aligned}$$

Dosadíme-li sem z identity pro $k = n$ (jejíž platnost předpokládáme), dostaneme

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}(u_i - u_{i+1})(v_1 + \cdots + v_i) + u_{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} v_i = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}(u_i - u_{i+1})(v_1 + \cdots + v_i) + u_n\sum_{i=1}^{n} v_i + u_{n+1}v_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i + u_{n+1}v_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} u_i v_i.
\end{aligned}$$

Tím je identita dokázána a můžeme přejít k řešení vlastní úlohy.
Nerovnost $a_1 \le b_1$ vynásobme nezáporným číslem $a_1 - a_2$, nerovnost $a_1 + a_2 \le b_1 + b_2$ nezáporným číslem $a_2 - a_3$. Podobně vynásobme i další nerovnosti, až poslední nerovnost $a_1 + \cdots + a_n \le b_1 + \cdots + b_n$ nezáporným číslem a_n. Všechny nové nerovnosti sečteme a získáme tak nerovnost

$$\sum_{i=1}^{n-1}(a_i - a_{i+1})(a_1 + \cdots + a_i) + a_n(a_1 + \cdots + a_n) \le \sum_{i=1}^{n-1}(a_i - a_{i+1})(b_1 + \cdots + b_i) + a_n(b_1 + \cdots + b_n).$$

Využijeme dokázanou identitu a poslední nerovnost přepíšeme:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i a_i - a_n(a_1 + \cdots + a_n) + a_n(a_1 + \cdots + a_n) \le \sum_{i=1}^{n} a_i b_i - a_n(b_1 + \cdots + b_n) + a_n(b_1 + \cdots + b_n),$$

tedy

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \le \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Tuto nerovnost umocníme na druhou a pravou stranu odhadneme pomocí Cauchyovy nerovnosti:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

Po vydělení nerovnosti kladným číslem $\sum_{i=1}^{n} a_i^2$ získáme dokazovanou nerovnost.

28. [1] Nechť pro čísla $\alpha, a, b, c \in \mathbb{R}^+$ platí $abc = 1$ a $\alpha \geq 1$. Dokažte nerovnost

$$\frac{a^\alpha}{b+c} + \frac{b^\alpha}{a+c} + \frac{c^\alpha}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Řešení:
Uvažme Cauchyovu nerovnost (1.1) pro $n = 3$ s čísly $u_1 = \sqrt{a(b+c)}, u_2 = \sqrt{b(a+c)}, u_3 = \sqrt{c(a+b)}, v_1 = \sqrt{\frac{a^\alpha}{b+c}}, v_2 = \sqrt{\frac{b^\alpha}{a+c}}, v_3 = \sqrt{\frac{c^\alpha}{a+b}}$. Získáme nerovnost

$$\left(a^{\frac{1+\alpha}{2}} + b^{\frac{1+\alpha}{2}} + c^{\frac{1+\alpha}{2}}\right)^2 \leq [a(b+c) + b(a+c) + c(a+b)]\left(\frac{a^\alpha}{b+c} + \frac{b^\alpha}{a+c} + \frac{c^\alpha}{a+b}\right)$$

neboli

$$\frac{a^\alpha}{b+c} + \frac{b^\alpha}{a+c} + \frac{c^\alpha}{a+b} \geq \frac{\left(a^{\frac{1+\alpha}{2}} + b^{\frac{1+\alpha}{2}} + c^{\frac{1+\alpha}{2}}\right)^2}{2(ab+bc+ac)}.$$

K dokázání zadané nerovnosti proto stačí ukázat, že za daných podmínek platí

$$\left(a^{\frac{1+\alpha}{2}} + b^{\frac{1+\alpha}{2}} + c^{\frac{1+\alpha}{2}}\right)^2 \geq 3(ab+bc+ac).$$

Využijeme nerovnosti $(a+b+c)^2 \geq 3(ac+ab+bc)$ ze závěru řešení příkladu 4. Tedy k dokončení důkazu stačí dokázat nerovnost $a^{\frac{1+\alpha}{2}} + b^{\frac{1+\alpha}{2}} + c^{\frac{1+\alpha}{2}} \geq a + b + c$.
Z Bernoulliovy nerovnosti $(1+t)^\beta \geq 1 + \beta t$ pro $t = a - 1 > -1$ a $\beta = \frac{1+\alpha}{2} \geq 1$ dostaneme

$$a^{\frac{1+\alpha}{2}} = (1 + (a-1))^{\frac{1+\alpha}{2}} \geq 1 + \frac{1+\alpha}{2}(a-1) = \frac{1-\alpha}{2} + \frac{1+\alpha}{2}a.$$

Toho využijeme při dokazování kýžené nerovnosti

$$a^{\frac{1+\alpha}{2}} + b^{\frac{1+\alpha}{2}} + c^{\frac{1+\alpha}{2}} - (a+b+c) \geq 0.$$

Její levou stranu odhadněme podle uvedeného důsledku Bernoulliovy nerovnosti:

$$a^{\frac{1+\alpha}{2}} + b^{\frac{1+\alpha}{2}} + c^{\frac{1+\alpha}{2}} - (a+b+c) \geq 3\frac{1-\alpha}{2} + \frac{1+\alpha}{2}(a+b+c) - (a+b+c) = \frac{\alpha-1}{2}(a+b+c-3).$$

S ohledem na $\alpha \geq 1$ tak stačí dokázat nerovnost $a+b+c \geq 3$. K tomu užijeme AG-nerovnost pro trojici čísel a, b, c:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Podle předpokladu v zadání platí $abc = 1$, tedy skutečně $a+b+c \geq 3$. Tím je nerovnost, kterou jsme k dokončení celého důkazu potřebovali, dokázána.

29. [3] Nechť pro čísla $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ platí $abc = 1$. Dokažte, že

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Řešení:
Označme $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$. Pak $xyz = 1$. Po dosazení a úpravě dostáváme

$$\frac{x^3yz}{y+z} + \frac{xy^3z}{x+z} + \frac{xyz^3}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Protože $xyz = 1$, poslední nerovnost přejde do tvaru:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Tuto nerovnost jsme však již dokázali v příkladu 28 pro hodnotu $\alpha = 2$.

30. [1] Pro libovolná čísla $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ dokažte

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

Řešení:
Zadanou nerovnost vynásobíme kladným výrazem $a + b + c$:

$$(a+b+c)\left(\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2}\right) \geq \frac{9}{4}.$$

Použijeme Cauchyovu nerovnost (1.1) pro $n = 3$ s čísly $u_1 = \sqrt{a}, u_2 = \sqrt{b}, u_3 = \sqrt{c}, v_1 = \frac{\sqrt{a}}{b+c}$, $v_2 = \frac{\sqrt{b}}{a+c}, v_3 = \frac{\sqrt{c}}{a+b}$:

$$\left(\sqrt{a}\frac{\sqrt{a}}{b+c} + \sqrt{b}\frac{\sqrt{b}}{a+c} + \sqrt{c}\frac{\sqrt{c}}{a+b}\right)^2 \leq (a+b+c)\left(\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2}\right).$$

Nyní stačí dokázat, že platí nerovnost

$$\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right)^2 \geq \frac{9}{4},$$

neboli po odmocnění

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Tuto nerovnost jsme již dokázali v příkladu 28 pro hodnotu $\alpha = 1$, tím je tedy důkaz hotov.

31. [3] Dokažte: dva trojúhelníky se stranami a, b, c a a_1, b_1, c_1 jsou podobné, právě když platí

$$\sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1} = \sqrt{(a+b+c)(a_1+b_1+c_1)}.$$

Řešení:
Použijeme Cauchyovu nerovnost (1.1) pro $n = 3$ s čísly $u_1 = \sqrt{a}, u_2 = \sqrt{b}, u_3 = \sqrt{c}, v_1 = \sqrt{a_1}$, $v_2 = \sqrt{b_1}, v_3 = \sqrt{c_1}$ a odmocníme ji:

$$\left|\sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1}\right| \leq \sqrt{(a+b+c)(a_1+b_1+c_1)}.$$

Znaménko absolutní hodnoty nemusíme psát, protože výraz uvnitř je kladný.
Dokázali jsme, že pro libovolné dva trojúhelníky se stranami a, b, c a a_1, b_1, c_1 platí

$$\sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1} \leq \sqrt{(a+b+c)(a_1+b_1+c_1)}.$$

Rovnost v této Cauchyově nerovnosti nastane, právě když existuje $t \in \mathbb{R}$ takové, že $\sqrt{a} = t\sqrt{a_1}, \sqrt{b} = t\sqrt{b_1}, \sqrt{c} = t\sqrt{c_1}$ neboli $a = t^2 a_1, b = t^2 b_1, c = t^2 c_1$, tedy právě když trojúhelníky se stranami a, b, c a a_1, b_1, c_1 jsou podobné.

32. [2] Dokažte nerovnost

$$\sqrt{\sin\alpha} + \sqrt{\sin\beta} + \sqrt{\sin\gamma} \leq 3\sqrt[4]{\frac{3}{4}},$$

kde α, β, γ jsou úhly obecného trojúhelníka.
Řešení:
Uvažme Cauchyovu nerovnost (1.1) pro $n = 3$ s čísly $u_1 = \sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}}, u_2 = \sqrt{\sin\frac{\beta}{2}}$, $u_3 = \sqrt{\sin\frac{\gamma}{2}}, v_1 = \sqrt{\cos\frac{\alpha}{2}}, v_2 = \sqrt{\cos\frac{\beta}{2}}, v_3 = \sqrt{\cos\frac{\gamma}{2}}$:

$$\left(\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} + \sqrt{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}} + \sqrt{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}\right)^2 \leq$$
$$\leq \left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2}\right).$$

Podle článku [10] platí nerovnosti

$$0 < \sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2} \quad \text{a} \quad 0 < \cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

jejichž vynásobením dostaneme

$$\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2}\right) \leq \frac{9\sqrt{3}}{4}.$$

Proto z výše uvedené Cauchyovy nerovnosti plyne

$$\left(\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} + \sqrt{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}} + \sqrt{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}\right)^2 \leq \frac{9\sqrt{3}}{4}.$$

Protože obě strany jsou kladné, můžeme tuto nerovnost odmocnit:

$$\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}+\sqrt{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}+\sqrt{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}\leq\frac{3\sqrt[4]{3}}{2}.$$

Výrazy pod odmocninami upravíme podle vzorce pro dvojnásobný argument funkce sinus:

$$\sqrt{\frac{\sin\alpha}{2}}+\sqrt{\frac{\sin\beta}{2}}+\sqrt{\frac{\sin\gamma}{2}}\leq\frac{3\sqrt[4]{3}}{2}.$$

Po vynásobení kladným číslem $\sqrt{2}$ dostáváme nerovnost

$$\sqrt{\sin\alpha}+\sqrt{\sin\beta}+\sqrt{\sin\gamma}\leq\frac{3\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}=3\sqrt[4]{\frac{3}{4}}.$$

Tím je důkaz ukončen.

33. [1] Dokažte, že pokud rovnice $x^4+ax^3+2x^2+bx+1=0$ s reálnými koeficienty a,b má alespoň jeden reálný kořen, pak platí $a^2+b^2\geq 8$.
Řešení:
Nechť x je reálný kořen dané rovnice. Uvážíme-li Cauchyovu nerovnost (1.1) pro $n=2$ s čísly $u_1=a, u_2=b, v_1=x^3, v_2=x$, pak dostaneme nerovnost

$$\left(ax^3+bx\right)^2\leq(a^2+b^2)(x^6+x^2).$$

Protože x je reálný kořen dané rovnice, platí $ax^3+bx=-(x^4+2x^2+1)$ a zřejmě také $x\neq 0$, takže $x^6+x^2>0$. Proto z vypsané Cauchyovy nerovnosti vyplývá:

$$a^2+b^2\geq\frac{(ax^3+bx)^2}{x^6+x^2}=\frac{(x^4+2x^2+1)^2}{x^6+x^2}.$$

Nyní stačí dokázat, že pro každé reálné číslo $x\neq 0$ platí:

$$\frac{(x^4+2x^2+1)^2}{x^6+x^2}\geq 8.$$

Upravme rozdíl levé a pravé strany:

$$\begin{aligned}\frac{(x^4+2x^2+1)^2}{x^6+x^2}-8&=\frac{(x^4+2x^2+1)^2-8x^6-8x^2}{x^6+x^2}=\\&=\frac{(x^4)^2+\left(2x^2\right)^2+(1)^2-4x^6-4x^2+2x^4}{x^6+x^2}=\frac{\left(x^4-2x^2+1\right)^2}{x^6+x^2}.\end{aligned}$$

Čitatel konečného zlomku je nezáporný a jmenovatel kladný, tedy i celý zlomek je nezáporný. Tím je celý důkaz hotov.

34. [2] Nechť A je čtvercová matice reálných čísel taková, že součet čísel na hlavní diagonále je menší než součet čísel na vedlejší diagonále. Zjistěte, zda existuje čtvercová matice reálných čísel X, pro kterou platí $X \cdot X^T = A$, kde X^T je matice transponovaná k matici X.
Řešení:
Předpokládejme, že pro matici X platí $A = X \cdot X^T$. Označme $X = (x_{ij})$ a $A = (a_{ij})$ pro $i, j = 1, \ldots, n$, pak $a_{ij} = \sum_{k=1}^n x_{ik} x_{jk}$. Součet hlavní diagonály je $\sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i,j=1}^n x_{ij}^2$ a součet vedlejší diagonály $\sum_{i=1}^n a_{i,n-i+1} = \sum_{i,j=1}^n x_{ij} x_{n-i+1,j}$.
Uvažme Cauchyovu nerovnost (1.1) pro $2n^2$ čísel x_{ij} a $x_{n-i+1,j}$ pro $i, j = 1, \ldots, n$:

$$\left(\sum_{i,j=1}^n x_{ij} x_{n-i+1,j} \right)^2 \leq \left(\sum_{i,j=1}^n x_{ij}^2 \right) \left(\sum_{i,j=1}^n x_{n-i+1,j}^2 \right)$$

Protože platí $\sum_{i,j=1}^n x_{n-i+1,j}^2 = \sum_{i,j=1}^n x_{ij}^2$, nerovnost přejde do tvaru

$$\left(\sum_{i,j=1}^n x_{ij} x_{n-i+1,j} \right)^2 \leq \left(\sum_{i,j=1}^n x_{ij}^2 \right)^2 .$$

Tuto nerovnost můžeme odmocnit a získáme odhad

$$\sum_{i=1}^n a_{i,n-i+1} = \sum_{i,j=1}^n x_{ij} x_{n-i+1,j} \leq \left| \sum_{i,j=1}^n x_{ij} x_{n-i+1,j} \right| \leq \sum_{i,j=1}^n x_{ij}^2 = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Součet vedlejší diagonály matice A je tedy menší či roven součtu hlavní diagonály. To je ale ve sporu s předpokladem. Neexistuje proto žádná matice X, pro kterou by platilo $X \cdot X^T = A$.

35. [1] Nechť pro čísla $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ platí $abc = 2$. Dokažte nerovnost:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b}.$$

Řešení:
Uvažme Cauchyovu nerovnost (1.1) pro $n = 3$ s čísly $u_1 = a^{\frac{1}{2}}, u_2 = b^{\frac{1}{2}}, u_3 = c^{\frac{1}{2}}, v_1 = a^{\frac{3}{2}}$, $v_2 = b^{\frac{3}{2}}, v_3 = c^{\frac{3}{2}}$:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \leq (a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3).$$

Odtud po dělení kladným číslem $a + b + c$ vychází

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a + b + c}.$$

Dále uvažme nerovnost (1.3) pro $n = 3$ s čísly $u_1 = a, u_2 = b, u_3 = c$

$$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2),$$

z níž po vhodném vydělení obdržíme

$$\frac{1}{a + b + c} \geq \frac{a + b + c}{3(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Složíme-li získané dvě nerovnosti, dostaneme:

$$a^3+b^3+c^3 \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a+b+c} \geq \frac{a+b+c}{3(a^2+b^2+c^2)}(a^2+b^2+c^2)^2 =$$
$$= \frac{1}{3}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) = \frac{1}{6}\left[(a+b)+(a+c)+(b+c)\right](a^2+b^2+c^2).$$

Použijme opět Cauchyovu nerovnost (1.1) pro $n=3$ s čísly $u_1=a, u_2=b, u_3=c, v_1=$ $=\sqrt{b+c}$,
$v_2=\sqrt{c+a}, v_3=\sqrt{a+b}$:

$$(a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b})^2 \leq \left[(a+b)+(a+c)+(b+c)\right](a^2+b^2+c^2).$$

Opětovným složením s předchozí nerovností obdržíme

$$a^3+b^3+c^3 \geq \frac{1}{6}(a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b})^2.$$

Porovnáme-li poslední odvozenou nerovnost s nerovností ze zadání, zjistíme, že stačí dokázat

$$a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b} \geq 6.$$

K tomu využijeme AG-nerovnost pro čísla $a\sqrt{b+c}$, $b\sqrt{a+c}, c\sqrt{a+b}$. Podle ní

$$a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b} \geq 3\sqrt[3]{abc\sqrt{(a+b)(a+c)(b+c)}}.$$

Použijeme znovu AG-nerovnost, tentokrát pro každou dvojici z čísel $a,b,c: a+b \geq 2\sqrt{ab}, c+$ $+b \geq 2\sqrt{cb}, a+c \geq 2\sqrt{ac}$. Kromě toho využijeme, že platí $abc=2$:

$$a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b} \geq 3\sqrt[3]{abc\sqrt{(a+b)(a+c)(b+c)}} \geq$$
$$\geq 3\sqrt[3]{abc\sqrt{8abc}} = 3\sqrt[3]{2\cdot 4} = 6$$

Dokázali jsme tak nerovnost, kterou jsme k završení celého důkazu potřebovali.

Kapitola 3

Druhá skupina příkladů

Do této části práce jsme zařadili skupinu úloh na využití nerovnosti (1.2) z úvodní části práce.

36. [5] Dokažte, že pro libovolná čísla $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ platí

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq \frac{9}{3+a+b+c}.$$

Řešení:
Uvažme nyní nerovnost (1.2) pro $n = 3$. Položíme-li $a_1 = 1 + a, a_2 = 1 + b, a_3 = 1 + c$, dostaneme nerovnost

$$3^2 \leq ((1+a) + (1+b) + (1+c)) \left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \right).$$

Odtud po dělení kladným výrazem $3 + a + b + c$ dostaneme zadanou nerovnost.

37. [5] Dokažte, že pro libovolná čísla $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$, platí nerovnost

$$\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{b+c+d} \geq \frac{16}{3(a+b+c+d)}.$$

Řešení:
Užijeme-li v nerovnosti (1.2) $n = 4, a_1 = a+b+c, a_2 = a+b+d, a_3 = a+c+d, a_4 = b+c+d$, dostaneme s ohledem na to, že $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3(a + b + c + d)$, nerovnost

$$3(a+b+c+d) \left(\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{b+c+d} \right) \geq 16.$$

Odtud po vydělení kladným číslem $3(a + b + c + d)$ získáme zadanou nerovnost.

38. [3] Pro čísla $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, kde $n \geq 2$, platí $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ a $x_k < 2$ pro každé $k = 1, \ldots, n$. Dokažte nerovnost

$$\frac{x_1}{1 + x_2 + \cdots + x_n} + \frac{x_2}{1 + x_1 + x_3 + \cdots + x_n} + \cdots + \frac{x_n}{1 + x_1 + \cdots + x_{n-1}} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

Řešení:
Označme S daný součet zlomků. Ve jmenovateli k-tého zlomku máme vlastně kladné číslo $2 - x_k$, upravíme tedy vyjádření součtu S následujícím způsobem:

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{2 - x_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k + 2 - 2}{2 - x_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2 - x_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2 - x_k}{2 - x_k} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2 - x_k} - n.$$

Nyní použijeme nerovnost (1.2) s $a_k = \sqrt{2 - x_k}$ pro $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2 - x_k}}\sqrt{2 - x_k}\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2 - x_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} (2 - x_k)\right) =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2 - x_k}\right)\left(2n - \sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2 - x_k}\right)(2n - 1).$$

Dostali jsme tedy nerovnost $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2 - x_k} \geq \frac{n^2}{2n-1}$. Nyní této nerovnosti využijeme k dříve provedenému vyjádření součtu S:

$$S = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2 - x_k} - n \geq \frac{2n^2}{2n - 1} - n = \frac{n}{2n - 1}.$$

Tak jsme dokázali zadanou nerovnost.

39. [7] Označme S součet $n \geq 2$ daných čísel $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$. Dokažte, že platí

$$\frac{S}{S - a_1} + \dots + \frac{S}{S - a_n} \geq \frac{n^2}{n - 1}.$$

Řešení:
Uvažme nerovnost (1.2) s čísly $a_i = \frac{S - a_i}{S}$ pro $i = 1, \dots, n$:

$$\left(\frac{S}{S - a_1} + \dots + \frac{S}{S - a_n}\right)\left(\frac{S - a_1}{S} + \dots + \frac{S - a_n}{S}\right) \geq n^2.$$

Upravme druhý činitel z levé strany:

$$\frac{S - a_1}{S} + \dots + \frac{S - a_n}{S} = \frac{nS - (a_1 + \dots + a_n)}{S} = \frac{nS - S}{S} = n - 1.$$

Po dosazení do původní nerovnosti proto dostaneme

$$\left(\frac{S}{S - a_1} + \dots + \frac{S}{S - a_n}\right)(n - 1) \geq n^2,$$

čímž je zadaná nerovnost dokázána.

40. [5] Dokažte, že pro libovolné n-tice čísel $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^+$ a $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}^+$ platí nerovnost

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k + c_k)^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k c_k} \geq 4n^2.$$

Zjistěte rovněž, kdy nastane rovnost.
Řešení:
Protože $(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \geq 0$, platí $b_k + c_k \geq 2\sqrt{b_k c_k}$, tj. $(b_k + c_k)^2 \geq 4b_k c_k$. Rovnost nastane pouze, pokud $b_k = c_k$. Odtud plyne odhad

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k + c_k)^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k c_k} \geq 4 \sum_{k=1}^{n} b_k c_k \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k c_k},$$

kde rovnost platí jen v případě, že $b_k = c_k$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$. Na pravou stranu použijeme nerovnost (1.2):

$$4 \sum_{k=1}^{n} b_k c_k \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k c_k} \geq 4n^2.$$

Složením těchto dvou nerovností dostáváme zadanou nerovnost. Rovnost nastane pouze v případě, když $b_k = c_k$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$ a zároveň $b_1 c_1 = b_2 c_2 = \cdots = b_n c_n$, tj. právě když $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = c_1 = c_2 = \cdots = c_n$.

41. [1] Pro libovolná čísla $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ dokažte nerovnost

$$\frac{ab}{a + b + 2c} + \frac{bc}{b + c + 2a} + \frac{ca}{c + a + 2b} \leq \frac{1}{4}(a + b + c).$$

Řešení:
Protože nerovnost je homogenní, můžeme bez ztráty na obecnosti předpokládat, že platí rovnost $a + b + c = 1$. Pak je zadaná nerovnost ekvivalentní s nerovností

$$\frac{ab}{c + 1} + \frac{bc}{a + 1} + \frac{ac}{b + 1} \leq \frac{1}{4},$$

která po vydělení kladným číslem abc přejde do tvaru

$$\frac{1}{a(a + 1)} + \frac{1}{b(b + 1)} + \frac{1}{c(c + 1)} \leq \frac{1}{4abc}.$$

Uvážíme-li rozklad na parciální zlomky $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$, můžeme poslední nerovnost přepsat do tvaru

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{a + 1} + \frac{1}{b + 1} + \frac{1}{c + 1} + \frac{1}{4abc}.$$

Dokážeme, že platí nerovnosti

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{9}{4} + \frac{1}{4abc} \leq \frac{1}{a + 1} + \frac{1}{b + 1} + \frac{1}{c + 1} + \frac{1}{4abc}.$$

Uvažme nerovnost (1.2) pro $n = 3$ s čísly $u_1 = a + 1, u_2 = b + 1, u_3 = c + 1$:

$$\left(\frac{1}{a + 1} + \frac{1}{b + 1} + \frac{1}{c + 1}\right)(a + 1 + b + 1 + c + 1) \geq 3^2.$$

Protože $a+b+c=1$, získáme po vydělení číslem 4 nerovnost

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\geq\frac{9}{4}.$$

Zdůvodnili jsme tak platnost nerovnosti

$$\frac{9}{4}+\frac{1}{4abc}\leq\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{4abc},$$

zbývá ještě dokázat nerovnost

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{9}{4}+\frac{1}{4abc}.$$

Upravíme tuto nerovnost do tvaru

$$9abc+1-4(ab+bc+ac)\geq 0.$$

Využijeme, že platí $a+b+c=1$. Do nerovnosti dosadíme $c=1-a-b$ a upravíme:

$$9ab(1-a-b)+1-4[ab+(a+b)(1-a-b)]=-9ab(a+b)+4(a^2+b^2)+13ab-4(a+b)+1\geq 0.$$

Máme tedy polynom s proměnnými a a b. Označme jej $f(a,b)$ a uspořádejme podle mocnin proměnné a:

$$f(a,b)=a^2(4-9b)+a(13b-9b^2-4)+4b^2-4b+1.$$

Výraz u a lze upravit následovně: $13b-9b^2-4=9b-9b^2-4+4b=(1-b)(9b-4)$. Nyní můžeme polynom $f(a,b)$ doplnit na čtverec a upravit:

$$f(a,b)=a^2(4-9b)+a(1-b)(9b-4)+4b^2-4b+1=(4-9b)\left(a-\frac{1-b}{2}\right)^2-$$
$$-(4-9b)\frac{(1-b)^2}{4}+4b^2-4b+1=(4-9b)\left(a-\frac{1-b}{2}\right)^2+\frac{b(3b-1)^2}{4}.$$

Z tohoto vyjádření můžeme vidět, že pokud platí $4\geq 9b$, je $f(a,b)\geq 0$. V opačném případě využijeme nerovnosti $1>a+b$ neboli $1-b>a>0$. Z ní plyne nerovnost $\frac{1-b}{2}>\left|a-\frac{1-b}{2}\right|$, pak tedy platí:

$$f(a,b)>(4-9b)\left(\frac{1-b}{2}\right)^2+\frac{b(3b-1)^2}{4}=\frac{16b^2-16b+4}{4}=(2b-1)^2\geq 0.$$

Tak jsme ukázali, že $f(a,b)\geq 0$ i v případě $4\leq 9b$. Tím je důkaz hotov.

Kapitola 4

Třetí skupina příkladů

Do této části práce jsme zařadili skupinu úloh na využití nerovnosti (1.3) z úvodní části práce.

42. [5] Dokažte, že nerovnost $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{50-3x} \leq 12$ platí pro všechny hodnoty $x \in \mathbb{R}$, kdy má smysl její levá strana.
Řešení:
Dosadíme-li do (1.3) $n=3, u_1=\sqrt{x+1}, u_2=\sqrt{2x-3}, u_3=\sqrt{50-3x}$, obdržíme

$$(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{50-3x})^2 \leq 3(x+1+2x-3+50-3x)=144,$$

odkud po odmocnění dostaneme dokazovanou rovnost.

43. [3] Součet daných čísel $x, y, z \in \mathbb{R}$ je roven 1. Dokažte nerovnost

$$\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}+\sqrt{4z+1} \leq \sqrt{21},$$

za předpokladu, že odmocniny na levé straně existují (může být třeba $x=-\frac{1}{4}$).
Řešení:
V nerovnosti (1.3) zvolme $u_1=\sqrt{4x+1}, u_2=\sqrt{4y+1}, u_3=\sqrt{4z+1}$, dostaneme

$$(\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}+\sqrt{4z+1})^2 \leq 3(4x+1+4y+1+4z+1)=3(4(x+y+z)+3).$$

Použijeme-li předpoklad $x+y+z=1$, pak dostaneme nerovnost

$$(\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}+\sqrt{4z+1})^2 \leq 4(4\cdot 1+3)=21$$

a po odmocnění zadanou nerovnost.

44. [5] Dokažte, že pro libovolná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ platí nerovnost

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^4 \leq n^3(x_1^4+x_2^4+\cdots+x_n^4).$$

Řešení:
Dosadíme-li do (1.3) $u_k=x_k$ pro $k=1,2,\ldots,n$, dostaneme

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2 \leq n(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2).$$

Tuto nerovnost umocníme na druhou a znovu použijeme (1.3) s $u_k = x_k^2$ pro $k = 1, 2, \dots, n$:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^4 \le n^2(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^2 \le n^3(x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_n^4).$$

Tak jsme dokázali platnost dokazované nerovnosti.

45. [5] Pro daná čísla $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ platí nerovnost

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \ge \sqrt{(n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)}.$$

Dokažte, že $x_k \ge 0$ pro každé $k = 1, 2, \dots, n$.
Řešení:
Tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme, že například $x_n < 0$.
Pak $x_1 + x_2 + \cdots + x_n < x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}$. Použitím (1.3) dostaneme

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &< x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \le \\ &\le |x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}| \le \sqrt{(n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2)} \le \\ &\le \sqrt{(n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + x_n^2)}. \end{aligned}$$

Tak jsme ovšem dostali spor s předpokladem v zadání. Tedy musí být $x_n \ge 0$. Stejnou úvahou dojdeme k tomu, že platí $x_k \ge 0$ pro každé $k = 1, 2, \dots, n$.

46. [2] Pro daná čísla $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí $x + y + z \ge 3$. Dokažte nerovnost

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz \ge 6.$$

Řešení:
Uvažme nerovnost (1.3) pro $n = 3$ s čísly $u_1 = x, u_2 = y, u_3 = z$:

$$(x + y + z)^2 \le 3(x^2 + y^2 + z^2).$$

Protože $x + y + z \ge 3$, platí

$$x^2 + y^2 + z^2 \ge \frac{(x + y + z)^2}{3} \ge \frac{3^2}{3} = 3,$$

odkud

$$\begin{aligned} (x + y + z)^2 + x^2 + y^2 + z^2 &\ge 3^2 + 3 = 12, \\ 2(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + xz) &\ge 12. \end{aligned}$$

Po vydělení poslední nerovnosti kladným číslem 2 dostáváme dokazovanou nerovnost.

47. [5] Nechť $n > 1$ a nechť pro čísla $x, y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ platí

$$(n-1)(x + y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) < (y_1 + y_2 + \dots + y_n)^2.$$

Dokažte: je-li $1 \le i < j \le n$, pak $x < 2y_i y_j$.
Řešení:
Uvažme nejmenší součin $y_i y_j$. Pak stačí dokázat pouze nerovnost $x < 2y_i y_j$. Podle nerovnosti (1.3) pro $(n-1)$ čísel $y_1, \dots, y_{i-1}, y_i + y_j, y_{i+1}, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n$ platí

$$\begin{aligned}(y_1 + \dots + y_n)^2 &\le \\ &\le (n-1)[(y_1)^2 + \dots + y_{i-1})^2 + (y_i + y_j)^2 + y_{i+1}^2 + \dots + y_{j-1}^2 + y_{j+1}^2 + \dots + y_n^2] = \\ &= 2(n-1)y_i y_j + (n-1)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2).\end{aligned}$$

Uvážíme-li předpoklad ze zadání, dostaneme z poslední nerovnosti tento důsledek:

$$(n-1)(x + y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) < 2(n-1)y_i y_j + (n-1)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2).$$

Po odečtení od obou stran výrazu $(n-1)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)$ máme:

$$(n-1)x < 2(n-1)y_i y_j.$$

Po vydělení kladným výrazem $(n-1)$ dostaneme požadovanou nerovnost $x < 2y_i y_j$.

48. [1] Pro čísla $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, kde $n \ge 2$, platí

$$x_1 + \dots + x_n = a \quad \text{a} \quad x_1^2 + \dots + x_n^2 \le \frac{a^2}{n-1},$$

kde $a > 0$ je dané číslo. Dokažte, že $x_i \in \left[0, \frac{2a}{n}\right]$ pro všechna $i = 1, \dots, n$.
Řešení:
Uvažme nerovnost (1.3) pro $n-1$ čísel $x_2, x_3, \dots, x_n$:

$$(x_2 + \dots + x_n)^2 \le (n-1)(x_2^2 + \dots + x_n^2).$$

Podle předpokladu v zadání platí: $x_2 + \dots + x_n = a - x_1$ a $x_2^2 + \dots + x_n^2 \le \frac{a^2}{n-1} - x_1^2$. V důsledku dostáváme nerovnost

$$(a - x_1)^2 \le (n-1)\left(\frac{a^2}{n-1} - x_1^2\right).$$

Upravme ji:

$$\begin{aligned} a^2 - 2ax_1 + x_1^2 &\le a^2 - (n-1)x_1^2 \\ -2ax_1 &\le -nx_1^2 \\ x_1\left(x_1 - \frac{2a}{n}\right) &\le 0 \end{aligned}$$

Tedy musí platit buď $x_1 \le 0 \wedge x_1 \ge \frac{2a}{n}$, nebo $x_1 \ge 0 \wedge x_1 \le \frac{2a}{n}$. Protože však $a > 0$, první varianta je vyloučena, tudíž platí druhá varianta, jež znamená, že $x_i \in \left[0, \frac{2a}{n}\right]$ platí pro $i = 1$. Pro ostatní $i = 2, 3, \dots, n$ je důkaz zcela analogický.

49. [7] Pro daná čísla $a, b \in \mathbb{R}^+$ platí $a + b = 1$. Dokažte nerovnost

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

Řešení:
Uvažme nerovnost (1.3) pro $n = 2$ s čísly $u_1 = a + \frac{1}{a}, u_2 = b + \frac{1}{b}$. Dostaneme nerovnost

$$2\left[\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2\right] \geq \left(a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{ab}\right)^2,$$

přitom při úpravě pravé strany jsme využili toho, že $a + b = 1$, a tudíž rovněž $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$. Nyní stačí dokázat ještě nerovnost

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{ab}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

Na obou stranách této nerovnosti máme kladná čísla, můžeme ji po vynásobení dvěma odmocnit a upravit do tvaru

$$ab \leq \frac{1}{4}.$$

Tuto nerovnost dokážeme pomocí AG-nerovnosti pro čísla a, b:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}.$$

Umocněním získáme nerovnost, kterou jsme k dokončení důkazu potřebovali.

50. [1] Nechť pro čísla $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ platí $a + b + c = abc$. Dokažte nerovnost

$$ab + bc + ac \geq 3 + \sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1} + \sqrt{c^2+1}.$$

Řešení:
Uvažme nerovnost (1.3) pro $n = 3$ s čísly $u_1 = \sqrt{a^2+1}, u_2 = \sqrt{b^2+1}, u_3 = \sqrt{c^2+1}$:

$$(\sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1} + \sqrt{c^2+1})^2 \leq 3(a^2 + 1 + b^2 + 1 + c^2 + 1) = 3(a^2 + b^2 + c^2) + 9.$$

Pokud tuto nerovnost odmocníme, stačí k dokázání zadané nerovnosti ukázat, že platí:

$$3 + \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2) + 9} \leq ab + bc + ac.$$

K tomu účelu nejprve použijeme nerovnost z příkladu 4. pro čísla $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}.$$

Upravíme pravou stranu:

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} = \frac{a+b+c}{abc} = \frac{abc}{abc} = 1.$$

Máme tedy nerovnost
$$1 \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$
neboli
$$b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2 \geq a^2b^2c^2.$$
Využijeme této nerovnosti a předpokladu ze zadání:
$$\begin{aligned}(ab + bc + ac)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 + 2abc(a + b + c) \geq \\ \geq a^2b^2c^2 + 2(a + b + c)^2 = 3(a + b + c)^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ab + bc + ac - 3)^2 = (ab + bc + ac)^2 - 6(ab + bc + ac) + 9 \geq \\ \geq 3(a + b + c)^2 - 6(ab + bc + ac) + 9 = 3(a^2 + b^2 + c^2) + 9\end{aligned}$$

Protože $a + b + c = abc$, platí $ab = 1 + \frac{a+b}{c} > 1$. Podobně platí $ac > 1$ a $bc > 1$, celkem dostaneme $ab + bc + ac > 3$.
Výše odvozenou nerovnost lze tedy odmocnit do tvaru
$$ab + bc + ac - 3 \geq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2) + 9}$$
Odtud již zřejmou úpravou dostaneme nerovnost, kterou jsme potřebovali dokázat.

51. [5] Dokažte: jsou-li všechny kořeny mnohočlenu
$$F(x) = x^n - c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}c_{n-1}x + (-1)^nc_n$$
reálná čísla, pak pro jeho koeficienty c_1 a c_2 platí nerovnosti

a) $(n-1)c_1^2 \geq 2nc_2$, b) $(n-1)c_{n-1}^2 \geq 2nc_{n-2}c_n$.

Řešení:
ad a) Je-li $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ n-tice kořenů daného mnohočlenu, pak podle Viètových vzorců platí:
$$\begin{aligned}c_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \\ c_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n.\end{aligned}$$
Odtud $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = c_1^2 - 2c_2$; podle (1.3) pro $u_k = x_k$ tak platí $c_1^2 \leq n(c_1^2 - 2c_2)$, což po úpravě dává $(n-1)c_1^2 \geq 2nc_2$.
ad b) Viètovy vzorce pro c_n, c_{n-1} a c_{n-2} jsou:
$$\begin{aligned}c_n &= x_1x_2 \ldots x_n, \\ c_{n-1} &= x_2x_3 \ldots x_n + x_1x_3 \ldots x_n + \cdots + x_1x_2 \ldots x_{n-1}, \\ c_{n-2} &= x_3x_4 \ldots x_n + x_1x_4 \ldots x_n + \cdots + x_1x_2 \ldots x_{n-2}.\end{aligned}$$

Zvolíme-li v (1.3) $u_1 = x_2x_3\dots x_n, u_2 = x_1x_3\dots x_n, \dots, u_n = x_1x_2\dots x_{n-1}$, dostaneme

$$\begin{aligned}
c_{n-1}^2 = (x_2x_3\dots x_n + x_1x_3\dots x_n + \dots + x_1x_2\dots x_{n-1})^2 \leq \\
\leq n[(x_2x_3\dots x_n)^2 + (x_1x_3\dots x_n)^2 + \dots + (x_1x_2\dots x_{n-1})^2] = \\
= n[c_{n-1}^2 - 2(x_1x_2x_3^2\dots x_n^2 + x_1^2x_2x_3x_4^2\dots x_n^2 + \dots + x_1^2x_2^2\dots x_{n-2}^2x_{n-1}x_n)] = \\
= n(c_{n-1}^2 - 2c_nc_{n-2}).
\end{aligned}$$

Odtud po úpravě získáme nerovnost $(n-1)c_{n-1}^2 \geq 2nc_nc_{n-2}$.

52. [5] Součet n daných čísel $a_1, a_2 \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ je roven 1. Dokažte nerovnost

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right)^2 + \dots + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 \geq \frac{(n^2+1)^2}{n}.$$

Řešení:
Podle (1.3) odhadneme zdola levou stranu:

$$\begin{aligned}
\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \dots + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 \geq \frac{1}{n}\left(a_1 + \frac{1}{a_1} + \dots + a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 = \\
= \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)^2.
\end{aligned}$$

Podle (1.2) platí $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$.
Dosadíme-li $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$, dostáváme $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq n^2$, a tedy
$\left(1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)^2 \geq \left(n^2+1\right)^2$.
Složením odvozených nerovností dostaneme dokazovanou nerovnost.

Kapitola 5

Čtvrtá skupina příkladů

Do této části práce jsme zařadili skupinu úloh na využití nerovnosti (1.4) z úvodní části práce.

53. [5] Dokažte, že pro libovolná čísla $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ platí nerovnost

$$abc(a+b+c) \leq a^3b + b^3c + c^3a.$$

Řešení:
Použijeme nerovnost (1.4) pro $n = 3$ s $u_1 = a$, $u_2 = b$, $u_3 = c$, $a_1 = c$, $a_2 = a$, $a_3 = b$. Dostaneme

$$(a+b+c)^2 \leq \left(\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b}\right)(c+a+b).$$

Vydělíme-li tuto nerovnost kladným číslem $(a+b+c)$ a vynásobíme kladným číslem abc, získáme dokazovanou rovnost.

54. [9] Pro reálná čísla $a, b, c > 1$ platí $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$. Dokažte nerovnost

$$\sqrt{a+b+c} \geq \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1}.$$

Řešení:
Uvažme nerovnost (1.4) pro $n = 3$ s čísly $u_1 = \sqrt{a-1}, u_2 = \sqrt{b-1}, u_3 = \sqrt{c-1}, a_1 = a, a_2 = {}$ $= b, a_3 = c$:

$$(\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1})^2 \leq \left(\frac{a-1}{a} + \frac{b-1}{b} + \frac{c-1}{c}\right)(a+b+c).$$

Po odmocnění dostaneme nerovnost

$$\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} \leq \sqrt{a+b+c} \cdot \sqrt{\frac{a-1}{a} + \frac{b-1}{b} + \frac{c-1}{c}}.$$

Protože platí

$$\frac{a-1}{a} + \frac{b-1}{b} + \frac{c-1}{c} = 3 - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 3 - 2 = 1,$$

je důkaz dokončen.

55. [9] Pro čísla $a, b, c \in \mathbb{R}_0^+$ platí $a \leq b \leq c$ a $a + b + c = 3$. Dokažte nerovnost

$$\sqrt{3a^2+1} + \sqrt{5a^2+3b^2+1} + \sqrt{7a^2+5b^2+3c^2+1} \leq 9.$$

Řešení:
Pokud uvažíme nerovnost (1.4) pro $n = 3$ s čísly $u_1 = \sqrt{(3a^2+1)}, u_2 = \sqrt{(5a^2+3b^2+1)}, u_3 = \sqrt{(7a^2+5b^2+3c^2+1)}, a_1 = \frac{1}{6}, a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = \frac{1}{3}$, dostaneme

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{(3a^2+1)} + \sqrt{(5a^2+3b^2+1)} + \sqrt{(7a^2+5b^2+3c^2+1)}\right)^2 \leq \\
&\leq \left[6(3a^2+1) + 4(5a^2+3b^2+1) + 3(7a^2+5b^2+3c^2+1)\right]\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right) = \\
&= \frac{3}{4}(59a^2+27b^2+9c^2+13).
\end{aligned}$$

Stačí tedy dokázat nerovnost

$$\frac{3}{4}(59a^2+27b^2+9c^2+13) \leq 81, \quad \text{neboli} \quad 59a^2+27b^2+9c^2 \leq 95.$$

Protože $a \leq b \leq c$, platí $ab + bc + ac \geq 2ab + b^2 \geq 2a^2 + b^2$, a proto rovněž

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac) \geq a^2+b^2+c^2+2(2a^2+b^2) = 5a^2+3b^2+c^2.$$

Protože platí $a + b + c = 3$, dostaneme z posledního odhadu nerovnost

$$9 = (a+b+c)^2 \geq 5a^2+3b^2+c^2,$$

kterou ještě vynásobíme číslem 9:

$$81 \geq 45a^2+27b^2+9c^2.$$

Kromě toho zřejmě platí $a \leq 1$, tedy i $a^2 \leq 1$ a $14a^2 \leq 14$.
Dohromady dostáváme:

$$81 + 14 \geq 45a^2+27b^2+9c^2+14a^2, \quad \text{neboli} \quad 95 \geq 59a^2+27b^2+9c^2.$$

Tím je důkaz hotov.

56. [1] Pro čísla $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ platí $a + b + c \geq ab + bc + ac$. Dokažte nerovnost

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c.$$

Řešení:
Uvažme nerovnost (1.4) pro $n = 3$ s čísly $u_1 = a, u_2 = b, u_3 = c, a_1 = ab, a_2 = bc, a_3 = ac$:

$$(a+b+c)^2 \leq \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)(ab+bc+ac),$$

neboli

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ac} \le \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

Spolu s předpokladem $a+b+c \ge ab+bc+ac > 0$ tak dohromady dostáváme

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \ge \frac{(a+b+c)^2}{bc+ac+ab} \ge \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c} = a+b+c.$$

Tím jsme zadanou nerovnost dokázali.

57. [9] Nechť $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}^+$. Dokažte nerovnost

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+f} + \frac{e}{f+a} + \frac{f}{a+b} \ge 3.$$

Řešení:
Rozšiřme nejprve zlomky v dané nerovnosti:

$$\frac{a^2}{ab+ac} + \frac{b^2}{bc+bd} + \frac{c^2}{cd+ce} + \frac{d^2}{de+df} + \frac{e^2}{ef+ae} + \frac{f^2}{af+bf} \ge 3.$$

Součet zlomků v poslední nerovnosti označme S.
Nyní užijeme nerovnost (1.4) pro $n = 6$ s čísly $u_1 = a, u_2 = b, u_3 = c, u_4 = d, u_5 = e, u_6 = f, a_1 = ab+ac, a_2 = bc+bd, a_3 = cd+ce, a_4 = de+df, a_5 = ef+ae, a_6 = af+bf$:

$$(a+b+c+d+e+f)^2 \le S \cdot (ab+ac+bc+bd+cd+ce+de+df+ef+ae+af+bf).$$

Podívejme se na kladnou závorku na pravé straně poslední nerovnosti. Využijeme-li toho, že platí:

$$\begin{aligned} &2(ab+ac+bc+bd+cd+ce+de+df+ef+ae+af+bf) = \\ &\qquad = (a+b+c+d+e+f)^2 - (a+d)^2 - (b+e)^2 - (c+f)^2, \end{aligned}$$

stačí dokázat nerovnost

$$\frac{2(a+b+c+d+e+f)^2}{(a+b+c+d+e+f)^2 - (a+d)^2 - (b+e)^2 - (c+f)^2} \ge 3,$$

neboli

$$3\left[(a+d)^2 + (b+e)^2 + (c+f)^2\right] \ge (a+b+c+d+e+f)^2.$$

Ovšem tato nerovnost je nerovnost (1.3) pro $n = 3$ s čísly $u_1 = a+d, u_2 = b+e, u_3 = c+f$.
Tím je důkaz hotov.

58. [5] Dokažte, že platí-li pro čísla $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ rovnost $abc = 1$, pak

$$\frac{1}{2}(ab+bc+ac) \le \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)}.$$

Řešení:
Položíme-li $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$, pak s ohledem na $abc = 1$ můžeme dokazovanou nerovnost přepsat do tvaru

$$\frac{1}{2}(x + y + z) \leq \frac{x^2}{y + z} + \frac{y^2}{x + z} + \frac{z^2}{x + y}.$$

Označme $L = \frac{1}{2}(x + y + z)$ a $P = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{z+y}$. Podle nerovnosti (1.4) pro $n = 3$ s čísly $u_1 = x, u_2 = y, u_3 = z, a_1 = y + z, a_2 = x + z, a_3 = x + y$ platí

$$(x + y + z)^2 \leq 2(x + y + z) \cdot P,$$

což po dělení kladným výrazem $2(x + y + z)$ vede k závěru $L \leq P$.

59. [5] Dokažte, že pro libovolná čísla $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^+$ platí

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n \leq \frac{b_1^2}{b_2} + \frac{b_2^2}{b_3} + \cdots + \frac{b_{n-1}^2}{b_n} + \frac{b_n^2}{b_1}.$$

Zjistěte rovněž, kdy nastane rovnost.

Řešení:
Vyjdeme z nerovnosti (1.4). Položme $u_k = b_k, a_k = b_{k+1}$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$, kde $b_{n+1} = b_1$. Po dosazení obdržíme

$$(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)^2 \leq \left(\frac{b_1^2}{b_2} + \frac{b_2^2}{b_3} + \cdots + \frac{b_{n-1}^2}{b_n} + \frac{b_n^2}{b_1}\right)(b_2 + \cdots + b_n + b_1),$$

odkud po dělení $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ dostaneme zadanou nerovnost. Rovnost nastane pouze tehdy, když existuje $t \in \mathbb{R}$ takové, že $b_k = t \cdot b_{k+1}$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$. Máme tedy n rovností $b_1 = t \cdot b_2, b_2 = t \cdot b_3, \ldots, b_n = t \cdot b_1$. Postupným dosazováním do první rovnosti z ostatních dostáváme $b_1 = t^n \cdot b_1$, z čehož s ohledem na $b_1 > 0$ plyne, že $t = 1$, a tedy $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$.

60. [3] Dokažte, že pro trojúhelník se stranami a, b, c platí

$$a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a) \geq 0.$$

Řešení:
Provedeme transformaci $a = y + z, b = z + x, c = x + y$. Pak $x = \frac{-a+b+c}{2} > 0, y = \frac{a-b+c}{2} > 0$ a $z = \frac{a+b-c}{2}$. Nerovnost přejde po dosazení a následné úpravě do tvaru

$$2x^3z + 2y^3x + 2z^3y - 2x^2yz - 2xy^2z - 2xyz^2 \geq 0.$$

K dokázání dané nerovnosti tedy stačí ověřit, zda platí nerovnost

$$x^3z + y^3x + z^3y \geq x^2yz + xy^2z + xyz^2.$$

Tuto nerovnost vydělíme číslem xyz (což můžeme, neboť $x, y, z > 0$). Dostaneme

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq x + y + z.$$

Tuto nerovnost jsme dokázali v příkladu 59 pro $n = 3$ s čísly $a_1 = x, a_2 = y, a_3 = z$. Tím je důkaz hotov.

61. [1] Pro libovolná čísla $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ dokažte nerovnost

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}.$$

Řešení:
Uvažme nerovnost (1.4) pro $n = 3$ s čísly $u_1 = \frac{a^2}{b}, u_2 = \frac{b^2}{c}, u_3 = \frac{c^2}{a}, a_1 = a, a_2 = b, a_3 = c$:

$$\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right)^2 \leq (a + b + c)\left(\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2}\right).$$

Po dělení kladným výrazem $a + b + c$ dostáváme

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq \frac{\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right)^2}{a + b + c}.$$

Stačí tedy dokázat, že platí

$$\frac{\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right)^2}{a + b + c} \geq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}$$

neboli

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c.$$

Tuto nerovnost jsme již dokázali v příkladu 59. Stačí zvolit $n = 3, a_1 = a, a_2 = b, a_3 = c$. Tedy důkaz je dokončen.

62. [1] Pro libovolná reálná čísla $x, y, z > -1$ dokažte nerovnost:

$$\frac{1 + x^2}{1 + y + z^2} + \frac{1 + y^2}{1 + z + x^2} + \frac{1 + z^2}{1 + x + y^2} \geq 2.$$

Řešení:
Je zřejmé, že $1 + y + z^2 > 0$, a protože $(y - 1)^2 \geq 0$, platí $\frac{1+y^2}{2} \geq y$. Proto

$$\frac{1 + x^2}{1 + y + z^2} \geq \frac{1 + x^2}{1 + z^2 + \frac{1+y^2}{2}}.$$

Položme $a = 1 + x^2, b = 1 + y^2, c = 1 + z^2$, pak $a, b, c \geq 1$ a stačí dokázat nerovnost

$$\frac{a}{c + \frac{b}{2}} + \frac{b}{a + \frac{c}{2}} + \frac{c}{b + \frac{a}{2}} \geq 2,$$

po úpravě

$$1 \leq \frac{a}{2c + b} + \frac{b}{2a + c} + \frac{c}{2b + a}.$$

Nejdříve rozšíříme zlomky v pravé straně nerovnosti:

$$\frac{a}{2c+b}+\frac{b}{2a+c}+\frac{c}{2b+a}=\frac{a^2}{2ac+ab}+\frac{b^2}{2ab+bc}+\frac{c^2}{2bc+ac}.$$

Dále užijeme nerovnost (1.4) pro $n=3$ s čísly $u_1=a, u_2=b, u_3=c, a_1=2ac+ab, a_2=$ $=2ab+bc, a_3=2bc+ac$:

$$(a+b+c)^2 \le \left(\frac{a^2}{2ac+ab}+\frac{b^2}{2ab+bc}+\frac{c^2}{2bc+ac}\right)(2ac+ab+2ab+bc+2bc+ac)=$$
$$=\left(\frac{a^2}{2ac+ab}+\frac{b^2}{2ab+bc}+\frac{c^2}{2bc+ac}\right)\cdot 3(ac+ab+bc).$$

Odtud po vydělení dostáváme

$$\frac{a^2}{2ac+ab}+\frac{b^2}{2ab+bc}+\frac{c^2}{2bc+ac}\ge\frac{(a+b+c)^2}{3(ac+ab+bc)}.$$

Stačí tedy dokázat nerovnost

$$\frac{(a+b+c)^2}{3(ac+ab+bc)}\ge 1.$$

Po vynásobení kladným výrazem $3(ac+ab+bc)$ dostaneme $(a+b+c)^2\ge 3(ac+ab+bc)$, což je nerovnost ze závěru řešení příkladu 4. Tím jsme dokázali nerovnost, kterou jsme k završení celého důkazu potřebovali.

63. [1] Nechť pro čísla $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ platí $a+b+c=1$. Dokažte nerovnost

$$\frac{b\sqrt{c}}{a(\sqrt{3c}+\sqrt{ab})}+\frac{c\sqrt{a}}{b(\sqrt{3a}+\sqrt{bc})}+\frac{a\sqrt{b}}{c(\sqrt{3b}+\sqrt{ac})}\ge\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Řešení:
Přepíšeme nerovnost do tvaru

$$\frac{\sqrt{\frac{bc}{a}}}{\sqrt{\frac{3ca}{b}}+a}+\frac{\sqrt{\frac{ca}{b}}}{\sqrt{\frac{3ab}{c}}+b}+\frac{\sqrt{\frac{ab}{c}}}{\sqrt{\frac{3bc}{a}}+c}\ge\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

a provedeme substituci $x=\sqrt{\frac{bc}{a}}, y=\sqrt{\frac{ca}{b}}, z=\sqrt{\frac{ab}{c}}$. Pak $a=yz, b=xz, c=xy$ a podle zadání platí $xy+yz+xz=1$. V nových kladných proměnných x,y,z musíme dokázat nerovnost

$$\frac{x}{\sqrt{3}y+yz}+\frac{y}{\sqrt{3}z+xz}+\frac{z}{\sqrt{3}x+xy}\ge\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Tato nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$\frac{x^2}{\sqrt{3}xy+xyz}+\frac{y^2}{\sqrt{3}yz+xyz}+\frac{z^2}{\sqrt{3}xz+xyz}\ge\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Uvažme nerovnost (1.4) pro $n = 3$ s čísly $u_1 = x, u_2 = y, u_3 = z, a_1 = \sqrt{3}xy + xyz, a_2 = \sqrt{3}yz + xyz, a_3 = \sqrt{3}xz + xyz$. Dostaneme nerovnost

$$(x+y+z)^2 \leq \left(\frac{x^2}{\sqrt{3}xy + xyz} + \frac{y^2}{\sqrt{3}yz + xyz} + \frac{z^2}{\sqrt{3}xz + xyz}\right)(\sqrt{3}(xy+yz+xz) + 3xyz).$$

Protože platí $xy + yz + xz = 1$, můžeme tuto nerovnost přepsat do tvaru:

$$\frac{x^2}{\sqrt{3}xy + xyz} + \frac{y^2}{\sqrt{3}yz + xyz} + \frac{z^2}{\sqrt{3}xz + xyz} \geq \frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{3} + 3xyz}.$$

Jak jsme ukázali v příkladu 28, platí nerovnost $(x+y+z)^2 \geq 3(xz+yz+xz)$.
Kromě toho uvažme AG-nerovnost pro tři čísla xy, yz, xz:

$$\sqrt[3]{(xyz)^2} \leq \frac{xy + yz + xz}{3} = \frac{1}{3}.$$

Umocníme-li tuto nerovnost na $\frac{3}{2}$, dostaneme

$$xyz \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Dohromady obdržíme

$$\frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{3} + 3xyz} \geq \frac{3(xz+yz+zx)}{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Tím je důkaz dokončen.

64. [1] Pro libovolná čísla $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ dokažte nerovnost

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+a+c)^2}{2b^2+(a+c)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8.$$

Řešení:
Upravme levou stranu zadané nerovnosti:

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} \cdot \frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{a^2}} + \frac{(2b+a+c)^2}{2b^2+(a+c)^2} \cdot \frac{\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{b^2}} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \cdot \frac{\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{c^2}} =$$
$$= \frac{\left(2 + \frac{b+c}{a}\right)^2}{2 + (\frac{b+c}{a})^2} + \frac{\left(2 + \frac{a+c}{b}\right)^2}{2 + (\frac{a+c}{b})^2} + \frac{\left(2 + \frac{a+b}{c}\right)^2}{2 + (\frac{a+b}{c})^2}.$$

Provedeme substituci $x = \frac{b+c}{a}, y = \frac{a+c}{b}, z = \frac{a+b}{c}$, po které dokazujeme nerovnost

$$\frac{(x+2)^2}{x^2+2} + \frac{(y+2)^2}{y^2+2} + \frac{(z+2)^2}{z^2+2} \leq 8.$$

Umocníme-li dvojčleny v čitatelích zlomků, po úpravě dostaneme

$$\frac{2x+1}{x^2+2} + \frac{2y+1}{y^2+2} + \frac{2z+1}{z^2+2} \leq \frac{5}{2}.$$

Od obou stran nerovnosti odečteme číslo $3 = \frac{x^2+2}{x^2+2} + \frac{y^2+2}{y^2+2} + \frac{z^2+2}{z^2+2}$ a ekvivalentně upravíme:

$$\frac{(x-1)^2}{x^2+2} + \frac{(y-1)^2}{y^2+2} + \frac{(z-1)^2}{z^2+2} \geq \frac{1}{2}.$$

Tuto nerovnost nyní budeme dokazovat.
Uvažme nerovnost (1.4) pro $n = 3$ s čísly $u_1 = x-1, u_2 = y-1, u_3 = z-1, a_1 = x^2+2, a_2 = y^2+2, a_3 = z^2+2$:

$$(x-1+y-1+z-1)^2 \leq \left(\frac{(x-1)^2}{x^2+2} + \frac{(y-1)^2}{y^2+2} + \frac{(z-1)^2}{z^2+2}\right)(x^2+2+y^2+2+z^2+2),$$

neboli

$$\frac{(x-1)^2}{x^2+2} + \frac{(y-1)^2}{y^2+2} + \frac{(z-1)^2}{z^2+2} \geq \frac{(x+y+z-3)^2}{x^2+y^2+z^2+6}.$$

Stačí tedy dokázat nerovnost

$$\frac{(x+y+z-3)^2}{x^2+y^2+z^2+6} \geq \frac{1}{2},$$

která je ekvivalentní s nerovností

$$2(x+y+z-3)^2 - x^2 - y^2 - z^2 - 6 \geq 0.$$

Upravíme její levou stranu:

$$2(x+y+z-3)^2 - x^2 - y^2 - z^2 - 6 = x^2 + y^2 + z^2 + 12 + 4(xy+yz+xz) - 12(x+y+z).$$

Uvažme AG-nerovnost pro tři kladná čísla xy, yz, xz:

$$xy + yz + xz \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2}.$$

Podívejme se na výraz xyz. Podle substituce a AG-nerovností pro dvojice z čísel a, b, c platí

$$xyz = \frac{b+c}{a} \cdot \frac{a+c}{b} \cdot \frac{a+b}{c} \geq \frac{2\sqrt{bc}}{a} \cdot \frac{2\sqrt{ac}}{b} \cdot \frac{2\sqrt{ab}}{c} = 8,$$

tedy $xy + yz + xz \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2} \geq 3\sqrt[3]{8^2} = 12$.
Pro upravovanou levou stranu proto platí

$$x^2+y^2+z^2+12+4(xy+yz+xz)-12(x+y+z) \geq x^2+y^2+z^2+36+2(xy+yz+xz)-12(x+y+z) = \\ = (x+y+z)^2 + 36 - 12(x+y+z) = (x+y+z-6)^2 \geq 0.$$

Tím je důkaz hotov.

65. [9] Pro libovolná čísla $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ dokažte nerovnost

$$\frac{a^2-bc}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{b^2-ca}{2b^2+c^2+a^2} + \frac{c^2-ab}{2c^2+a^2+b^2} \geq 0.$$

Řešení:
Celou nerovnost vynásobíme číslem 2 a první ze zlomků upravíme

$$\frac{2a^2-2bc}{2a^2+b^2+c^2}=\frac{2a^2-2bc+(b+c)^2-(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}=1-\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}.$$

Obdobně upravíme i ostatní zlomky a zadanou nerovnost tak přepíšeme do tvaru

$$3\geq\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{(a+c)^2}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{(a+b)^2}{2c^2+a^2+b^2}.$$

Tuto nerovnost nyní dokážeme.
Uvažme třikrát nerovnost (1.4) pro $n=2$. Poprvé pro čísla $u_1=b, u_2=c, a_1=b^2+a^2, a_2=$ $=c^2+a^2$:

$$(b+c)^2\leq\left(\frac{b^2}{b^2+a^2}+\frac{c^2}{c^2+a^2}\right)(2a^2+b^2+c^2),$$

neboli

$$\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}\leq\frac{b^2}{b^2+a^2}+\frac{c^2}{c^2+a^2}.$$

Podruhé pro čísla $u_1=a, u_2=c, a_1=a^2+b^2, a_2=c^2+b^2$ získáme nerovnost

$$\frac{(a+c)^2}{2b^2+c^2+a^2}\leq\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{c^2+b^2}.$$

Konečně pro čísla $u_1=a, u_2=b, a_1=a^2+c^2, a_2=b^2+c^2$ získáme nerovnost

$$\frac{(a+b)^2}{2c^2+a^2+b^2}\leq\frac{a^2}{a^2+c^2}+\frac{b^2}{b^2+c^2}.$$

Tyto tři nerovnosti sečteme:

$$\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{(a+c)^2}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{(a+b)^2}{2c^2+a^2+b^2}\leq$$
$$\leq\frac{b^2}{b^2+a^2}+\frac{c^2}{c^2+a^2}+\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{c^2+b^2}+\frac{a^2}{a^2+c^2}+\frac{b^2}{b^2+c^2}=3.$$

Tím je důkaz dokončen.

66. [9] Pro daná čísla $x,y,z\in\mathbb{R}$ platí $xyz=1$. Dokažte nerovnost

$$\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{y^2+y+1}+\frac{1}{z^2+z+1}\geq 1.$$

Řešení:
Zlomky v levé straně mají smysl, protože $u^2+u+1>0$ pro každé $u\in\mathbb{R}$. Podle daných čísel $x,y,z\neq 0$ sestavme čísla $a=\sqrt[3]{yz}, b=\sqrt[3]{xz}, c=\sqrt[3]{xy}$. Pak rovněž čísla $a,b,c\in\mathbb{R}$ jsou nenulová a díky podmínce $xyz=1$ platí rovnosti $x=\frac{bc}{a^2}, y=\frac{ac}{b^2}, z=\frac{ab}{c^2}$, neboť například

$$\frac{bc}{a^2}=\sqrt[3]{\frac{xz\cdot xy}{y^2z^2}}=\sqrt[3]{\frac{x^2}{yz}}=\sqrt[3]{x^3}=x.$$

Po uvedené substituci nerovnost přejde do tvaru

$$\frac{a^4}{b^2c^2 + a^2bc + a^4} + \frac{b^4}{a^2c^2 + b^2ac + b^4} + \frac{c^4}{a^2b^2 + c^2ab + c^4} \geq 1.$$

Součet zlomků, jejichž jmenovalé jsou kladná čísla, označme S.
Užijeme nerovnost (1.4) pro $n = 3$ s čísly $u_1 = a^2, u_2 = b^2, u_3 = c^2, a_1 = b^2c^2 + a^2bc + a^4, a_2 = a^2c^2 + b^2ac + b^4, a_3 = a^2b^2 + c^2ab + c^4$. Získáme nerovnost mezi kladnými výrazy tvaru:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \leq S \cdot (b^2c^2 + a^2bc + a^4 + a^2c^2 + b^2ac + b^4 + a^2b^2 + c^2ab + c^4).$$

K dokončení důkazu je tedy třeba ověřit nerovnost

$$\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) + a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2} \geq 1$$

neboli

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) + a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2.$$

Upravme nyní dále tuto nerovnost roznásobením levé strany:

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) \geq a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) + a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2,$$
$$a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \geq abc(a + b + c).$$

Poslední nerovnost je nerovnost $u^2 + v^2 + w^2 \geq uv + vw + uw$ (kterou jsme dokázali v příkladu 4) pro čísla $u = ab, v = bc, w = ac$. Celý důkaz je tak dokončen.

Přehled zadání všech příkladů

1. Dokažte: je-li $2x + 4y = 1$ pro některá $x, y \in \mathbb{R}$, pak $x^2 + y^2 \geq 0{,}05$.

2. Dokažte, že pro libovolná čísla $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí nerovnost

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6}\right)^2 \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{6}.$$

Zjistěte rovněž, kdy nastane rovnost.

3. Dokažte, že pro libovolná čísla $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí nerovnost

$$30(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + 2y + 5z)^2.$$

4. Pro libovolná čísla $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz.$$

Ukažte, že tato užitečná nerovnost je důsledkem Cauchyovy nerovnosti (1.1) pro $n = 3$.

5. Dokažte: je-li $a, b, c, d \in \mathbb{R}_0^+$, pak $\sqrt{(a + b)(c + d)} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$.

6. Dokažte, že pro libovolná čísla $a_1, a_2 \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^+$ platí

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)\left(\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_n}{a_n}\right) \geq (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)^2.$$

7. Dokažte, že pro libovolná $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ a $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ platí

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)^2 \leq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2).$$

8. Je-li $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$, pak nutnou a postačující podmínkou pro to, aby pro libovolná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ platilo

$$(a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2)^2 \leq a_1x_1^4 + a_2x_2^4 + \cdots + a_nx_n^4,$$

je nerovnost $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq 1$. Dokažte.

9. Dokažte tzv. trojúhelníkovou nerovnost

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(u_k+v_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} u_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} v_k^2}$$

pro dvě libovolné n-tice reálných čísel $u_1, \dots, u_n$ a $v_1, \dots, v_n$.

10. Pro libovolná čísla $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ dokažte nerovnost

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2} + \cdots + \sqrt{x_n^2+y_n^2} \ge \sqrt{(x_1+\cdots+x_n)^2+(y_1+\cdots+y_n)^2}.$$

11. Najděte nejmenší hodnotu součtu $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$, splňují-li čísla $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ podmínku $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$, kde $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ jsou daná reálná čísla; přitom $a_k \ne 0$ pro některé $k=1,2,\dots,n$.

12. Dokažte: je-li $p, q, r, s \in \mathbb{R}$, pak platí nerovnost

$$(1+p^4)(1+q^4)(1+r^4)(1+s^4) \ge (1+pqrs)^4.$$

13. Dokažte: je-li $a, b, c \in \mathbb{R}_0^+$, pak platí

$$(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3) \ge (1+abc)^3.$$

14. Dokažte: je-li $p_k, q_k, r_k, s_k \in \mathbb{R}$, pro $k=1,2,\dots,n$, pak platí

$$\left(\sum_{k=1}^{n} p_kq_kr_ks_k\right) \le \left(\sum_{k=1}^{n} p_k^4\right)\left(\sum_{k=1}^{n} q_k^4\right)\left(\sum_{k=1}^{n} r_k^4\right)\left(\sum_{k=1}^{n} s_k^4\right).$$

15. Je-li $a, b, c \in (0,1)$, dokažte nerovnost

$$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1.$$

16. Dokažte, že pro libovolná čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ soustava rovnic s neznámými x, y, z

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2+3(x^2+y^2+z^2) &= 6 \\ ax+by+cz &= 2 \end{aligned}$$

nemá v oboru $\mathbb{R}$ žádné řešení.

17. Dokažte, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

$$-\frac{1}{2} \le \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \le \frac{1}{2}.$$

18. Dokažte, že pro libovolná $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ platí nerovnost

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{2(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)} \le \frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \cdots + \frac{a_n}{a_1+a_2}.$$

19. Nechť pro čísla $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}^+$ platí $x + y + z = 1$. Dokažte nerovnost

$$ax + by + cz + 2\sqrt{(xy + yz + xz)(ab + bc + ca)} \leq a + b + c.$$

20. Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}_0^+$. Dokažte nerovnost

$$a\sqrt{2a^2 + bc} + b\sqrt{2b^2 + ca} + c\sqrt{2c^2 + ab} \leq$$
$$\leq \sqrt{a^4 + a^2b^2 + b^4} + \sqrt{b^4 + b^2c^2 + c^4} + \sqrt{c^4 + c^2a^2 + a^4}.$$

21. Nechť $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$. Dokažte nerovnost

$$\frac{a_1}{a_2^2 + \cdots + a_n^2} + \frac{a_2}{a_1^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2} + \cdots + \frac{a_n}{a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2} \geq \frac{4}{a_1 + \cdots + a_n}.$$

22. Pro libovolná $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ dokažte nerovnost

$$\frac{a}{b + 2c + 3d} + \frac{b}{c + 2d + 3a} + \frac{c}{d + 2a + 3b} + \frac{d}{a + 2b + 3c} \geq \frac{2}{3}.$$

23. Nechť pro čísla $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Dokažte nerovnost

$$x + y + z \leq xyz + 2.$$

24. Pro libovolná čísla $x, y, z \in \mathbb{R}$ označme

$$a = \sqrt{y^2 - yz + z^2}, b = \sqrt{z^2 - zx + x^2}, c = \sqrt{x^2 - xy + y^2}.$$

Dokažte nerovnost

$$ab + bc + ac \geq x^2 + y^2 + z^2.$$

25. Nechť pro čísla $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Dokažte nerovnost

$$2(x + y + z) - xyz \leq 10.$$

26. Pro čísla $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$ platí $u_1^2 + \cdots + u_n^2 = v_1^2 + \cdots + v_n^2 = 1$, přitom $n \geq 2$. Dokažte nerovnost

$$2\,|u_1v_1 + \cdots + u_nv_n - 1| \geq (u_1v_2 - u_2v_1)^2.$$

27. Nechť pro čísla $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+$ platí nerovnosti

$$a_1 \geq \ldots \geq a_n, a_1 \leq b_1, a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2, \dots, a_1 + \cdots + a_n \leq b_1 + \cdots + b_n.$$

Dokažte nerovnost $\sum_{i=1}^n a_i^2 \leq \sum_{i=1}^n b_i^2$.

28. Nechť pro čísla $\alpha, a, b, c \in \mathbb{R}^+$ platí $abc = 1$ a $\alpha \geq 1$. Dokažte nerovnost

$$\frac{a^\alpha}{b + c} + \frac{b^\alpha}{a + c} + \frac{c^\alpha}{a + b} \geq \frac{3}{2}.$$

29. Nechť pro čísla $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ platí $abc = 1$. Dokažte, že

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

30. Pro libovolná čísla $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ dokažte

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

31. Dokažte: dva trojúhelníky se stranami a, b, c a a_1, b_1, c_1 jsou podobné, právě když platí

$$\sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1} = \sqrt{(a+b+c)(a_1+b_1+c_1)}.$$

32. Dokažte nerovnost

$$\sqrt{\sin\alpha} + \sqrt{\sin\beta} + \sqrt{\sin\gamma} \leq 3\sqrt[4]{\frac{3}{4}},$$

kde α, β, γ jsou úhly obecného trojúhelníka.

33. Dokažte, že pokud rovnice $x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx + 1 = 0$ s reálnými koeficienty a, b má alespoň jeden reálný kořen, pak platí $a^2 + b^2 \geq 8$.

34. Nechť A je čtvercová matice reálných čísel taková, že součet čísel na hlavní diagonále je menší než součet čísel na vedlejší diagonále. Zjistěte, zda existuje čtvercová matice X, pro kterou platí $X \cdot X^T = A$, kde X^T je matice transponovaná k matici X.

35. Nechť pro čísla $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ platí $abc = 2$. Dokažte nerovnost:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b}.$$

36. Dokažte, že pro libovolná čísla $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ platí

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq \frac{9}{3+a+b+c}.$$

37. Dokažte, že pro libovolná čísla $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$, platí nerovnost

$$\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{b+c+d} \geq \frac{16}{3(a+b+c+d)}.$$

38. Pro čísla $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, kde $n \geq 2$, platí $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ a $x_k < 2$ pro každé $k = 1, \ldots, n$. Dokažte nerovnost

$$\frac{x_1}{1 + x_2 + \cdots + x_n} + \frac{x_2}{1 + x_1 + x_3 + \cdots + x_n} + \cdots + \frac{x_n}{1 + x_1 + \cdots + x_{n-1}} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

39. Označme S součet $n \geq 2$ daných čísel $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$. Dokažte, že platí

$$\frac{S}{S-a_1} + \cdots + \frac{S}{S-a_n} \geq \frac{n^2}{n-1}.$$

40. Dokažte, že pro libovolné n-tice čísel $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^+$ a $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}^+$ platí nerovnost

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k + c_k)^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k c_k} \geq 4n^2.$$

Zjistěte rovněž, kdy nastane rovnost.

41. Pro libovolná čísla $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ dokažte nerovnost

$$\frac{ab}{a+b+2c} + \frac{bc}{b+c+2a} + \frac{ca}{c+a+2b} \leq \frac{1}{4}(a+b+c).$$

42. Dokažte, že nerovnost $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{50-3x} \leq 12$ platí pro všechny hodnoty $x \in \mathbb{R}$, kdy má smysl její levá strana.

43. Součet daných čísel $x, y, z \in \mathbb{R}$ je roven 1. Dokažte nerovnost

$$\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1} \leq \sqrt{21},$$

za předpokladu, že odmocniny na levé straně existují (může být třeba $x = -\frac{1}{4}$).

44. Dokažte, že pro libovolná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ platí nerovnost

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^4 \leq n^3(x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_n^4).$$

45. Pro daná čísla $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ platí nerovnost

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq \sqrt{(n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)}.$$

46. Pro daná čísla $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí $x + y + z \geq 3$. Dokažte nerovnost

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz \geq 6.$$

47. Nechť $n > 1$ a nechť pro čísla $x, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ platí

$$(n-1)(x + y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) < (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)^2.$$

Dokažte: je-li $1 \leq i < j \leq n$, pak $x < 2y_i y_j$.

48. Pro čísla $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, kde $n \geq 2$, platí

$$x_1 + \cdots + x_n = a \quad \text{a} \quad x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq \frac{a^2}{n-1},$$

kde $a > 0$ je dané číslo. Dokažte, že $x_i \in \left[0, \frac{2a}{n}\right]$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$.

49. Pro daná čísla $a, b \in \mathbb{R}^+$ platí $a + b = 1$. Dokažte nerovnost

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

50. Nechť pro čísla $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ platí $a + b + c = abc$. Dokažte nerovnost

$$ab + bc + ac \geq 3 + \sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{c^2 + 1}.$$

51. Dokažte: jsou-li všechny kořeny mnohočlenu

$$F(x) = x^n - c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1} c_{n-1} x + (-1)^n c_n$$

reálná čísla, pak pro jeho koeficienty c_1 a c_2 platí nerovnosti

a) $(n-1)c_1^2 \leq 2nc_2$, b) $(n-1)c_{n-1}^2 \geq 2nc_{n-2}c_n$.

52. Součet n daných čísel $a_1, a_2 \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ je roven 1. Dokažte nerovnost

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right)^2 + \cdots + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 \geq \frac{(n^2+1)^2}{n}.$$

53. Dokažte, že pro libovolná čísla $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ platí nerovnost

$$abc(a + b + c) \leq a^3 b + b^3 c + c^3 a.$$

54. Pro reálná čísla $a, b, c > 1$ platí $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$. Dokažte nerovnost

$$\sqrt{a + b + c} \geq \sqrt{a - 1} + \sqrt{b - 1} + \sqrt{c - 1}.$$

55. Pro čísla $a, b, c \in \mathbb{R}_0^+$ platí $a \leq b \leq c$ a $a + b + c = 3$. Dokažte nerovnost

$$\sqrt{3a^2 + 1} + \sqrt{5a^2 + 3b^2 + 1} + \sqrt{7a^2 + 5b^2 + 3c^2 + 1} \leq 9.$$

56. Pro čísla $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ platí $a + b + c \geq ab + bc + ac$. Dokažte nerovnost

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c.$$

57. Nechť $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}^+$. Dokažte nerovnost

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+f} + \frac{e}{f+a} + \frac{f}{a+b} \geq 3.$$

58. Dokažte, že platí-li pro čísla $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ rovnost $abc = 1$, pak

$$\frac{1}{2}(ab + bc + ac) \leq \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)}.$$

59. Dokažte, že pro libovolná čísla $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^+$ platí

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n \leq \frac{b_1^2}{b_2} + \frac{b_2^2}{b_3} + \cdots + \frac{b_{n-1}^2}{b_n} + \frac{b_n^2}{b_1}.$$

Zjistěte rovněž, kdy nastane rovnost.

60. Dokažte, že pro trojúhelník se stranami a, b, c platí

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0.$$

61. Pro libovolná čísla $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ dokažte nerovnost

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\geq \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}.$$

62. Pro libovolná reálná čísla $x, y, z > -1$ dokažte nerovnost:

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2}+\frac{1+y^2}{1+z+x^2}+\frac{1+z^2}{1+x+y^2}\geq 2.$$

63. Nechť pro čísla $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ platí $a+b+c=1$. Dokažte nerovnost

$$\frac{b\sqrt{c}}{a(\sqrt{3c}+\sqrt{ab})}+\frac{c\sqrt{a}}{b(\sqrt{3a}+\sqrt{bc})}+\frac{a\sqrt{b}}{c(\sqrt{3b}+\sqrt{ac})}\geq \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

64. Pro libovolná čísla $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ dokažte nerovnost

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+a+c)^2}{2b^2+(a+c)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leq 8.$$

65. Pro libovolná čísla $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ dokažte nerovnost

$$\frac{a^2-bc}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2-ca}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{c^2-ab}{2c^2+a^2+b^2}\geq 0.$$

66. Pro daná čísla $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí $xyz = 1$. Dokažte nerovnost

$$\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{y^2+y+1}+\frac{1}{z^2+z+1}\geq 1.$$

Závěr

V této práci jsme se zabývali především využitím Cauchyovy nerovnosti při dokazování konkrétních algebraických nerovností. Jak jsme mohli vidět, většinou šlo o složitější příklady, vyžadující zběhlost v úpravách nerovností a volbě vhodných substitucí. V některých příkladech bylo využití Cauchyovy nerovnosti značným ulehčením celého postupu, v jiných by se dokonce jiné řešení těžko hledalo. Přestože nejvíce příkladů v této práci využívajících Cauchyovu nerovnost se zabývalo dokazováním algebraických nerovností různých typů, u některých příkladů byla možná geometrická interpretace, využití při řešení rovnic či hledání matice určitého typu.
Využití Cauchyovy nerovnosti v této oblasti je tedy dosti široké, ač někdy je třeba značného důvtipu a úsilí při hledání způsobu, jakým je vhodné Cauchyovu nerovnost konkrétně uplatnit. Každý, kdo se zabývá dokazováním nerovností, by měl míti Cauchyovu nerovnost v repertoáru základních metodických prostředků. Věřím, že vytvořená práce může být užitečnou pomůckou pro učitele matematiky středních škol i ty jejich žáky, kteří se budou chtít zdokonalit v dovednosti dokazovat algebraické i geometrické nerovnosti.

Literatura

[1] Andreescu T., Dospinescu G., Cirtoaje V. Lascu M. *Old and new inequalities.* GIL Publishing Co, 2004

[2] Berinde V., Păltănea E. *Gazeta matematică - a bridge over three centuries.* Romanian mathematical society, 2004

[3] Engel A. *Problem-Solving Strategies.* Springer, 1998

[4] Hecht T., Sklenáriková Z. *Metódy riešenia matematických úloh.* Slovenské pedagogické nakladatelstvo, Bratislava, 1992

[5] Herman J., Kučera R., Šimša J. *Metody řešení matematických úloh I.*. Masarykova univerzita, Brno, 2001

[6] Kufner A. *Nerovnosti a odhady.* Mladá Fronta, edice Škola mladých matematiků sv. 39, Praha, 1989

[7] Lozansky E., Rousseau C. *Winning solutions.* Springer, 1996

[8] Morávek J. *O dynamickém programování.* Mladá Fronta, edice Škola mladých matematiků sv. 33, Praha, 1973

[9] Pham Kim Hung. *Secrets in inequalities.* Zalău: GIL, 2007

[10] Smýkalová Radka. *Čtyři trigonometrické nerovnosti.* rukopis článku pro *Rozhledy matematicko-fyzikální*, 2008

[11] Steele J. Michael. *The Cauchy-Schwarz Master Class - An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities.* Cambridge University Press, New York, 2004