



MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY



Užití principu bijekce v kombinatorice

Bakalářská práce

Nella Fedorowyczová

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.

Brno 2017

Obsah

Úvod	xv
Kapitola 1. Příklady ze skript	1
Kapitola 2. Příklady odjinud	11
Kapitola 3. Catalanova čísla	27
Závěr	47
Seznam použité literatury	49

Úvod

Princip bijekce lze zformulovat následovně: nechť M_1 a M_2 jsou dvě konečné množiny. Pak mezi těmito množinami existuje bijekce právě tehdy, když mají stejný počet prvků.

Síla principu bijekce spočívá právě v jeho jednoduchosti. I dítě, jehož matematické znalosti jsou zatím značně omezené, dokáže určit, jsou-li dvě množiny (kupříkladu jeho a kamarádova hromádka bonbonů) stejně početné. Vezme jeden svůj a jeden kamarádův bonbon, potom další svůj a opět ho spáruje s dalším kamarádovým; pokud úplně nakonec zůstane poslední jeho bonbon a k němu poslední kamarádův, oba mají sladkostí stejně... U spousty matematických úloh je „šikovné“ neurčovat počet prvků nějaké množiny přímo, ale sestavit bijekci mezi ní a nějakou jinou množinou, u které počet prvků známe. Řada takovýchto úloh je i v kombinatorice; v zahraniční literatuře se můžeme setkat přímo s pojmem „bijektivní kombinatorika“ (anglicky „bijective combinatorics“, francouzsky „combinatoire bijective“, viz třeba kniha *Bijective Combinatorics* od N. Loehra z roku 2011).

Cílem této práce je ukázat rozmanitost kombinatorických úloh, při jejichž řešení můžeme princip bijekce využít. Jelikož autorka textu by ráda v budoucnu pracovala jako středoškolská učitelka matematiky a fyziky, doufá, že s některými z úloh v této práci řešených jednou seznámí i své žáky. Ze stejného důvodu je práce určena i dalším učitelům matematiky.

Práce je rozdělena do tří kapitol. První kapitola je tvořena příklady převzatými z hlavního zdroje této práce: skript *Metody řešení matematických úloh II* od J. Hermana, R. Kučery a J. Šimši (v seznamu použité literatury jsou tato skripta uvedena na prvním místě). Největší část příkladů, o kterých se autorka domnívá, že by je v budoucnu mohla využít ve vlastní výuce, se nachází právě v této kapitole.

Druhá kapitola se zabývá dalšími kombinatorickými problémy řešenými pomocí principu bijekce. Úlohy v této kapitole byly vybírány především ze zahraničních zdrojů, jak je u každého zadání příkladu uvedeno. Najdeme zde i zřejmě nejnáročnější výklad celé práce: Surányiův důkaz identity Li-Žen-Šu.

Třetí kapitola se věnuje Catalanovým číslům. V úvodu kapitoly nejdříve definujeme samotná Catalanova čísla a následně s užitím principu bijekce ukazujeme rozmanitost kombinatorických úloh, jejichž výsledek lze těmito čísly zapsat. U každého zadání je uveden zdroj, odkud byl námět převzat, výjimku tvoří vlastní příspěvky autorky práce.

Text práce byl vysázen v $T_E X$ u, všechny obrázky byly vytvořeny programem GeoGebra.

Kapitola 1

Příklady ze skript

Příklady v této kapitole a jejich postupy řešení jsou převzaty ze skript *Metody řešení matematických úloh II* od J. Hermana, R. Kučery a J. Šimši (v seznamu literatury je tento zdroj uveden na prvním místě).

Příklad 1. Dokažte následující identitu:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad (1)$$

je-li $0 \leq k \leq n$.

Řešení. Číslo $\binom{n}{k}$ udává počet všech k -prvkových podmnožin n -prvkové množiny M . Přiřaďme každé takovéto podmnožině P množiny M její doplněk $P' = M \setminus P$. Takto jsme sestrojili zobrazení systému všech k -prvkových podmnožin množiny M na systém všech $(n-k)$ -prvkových podmnožin téže množiny a je zřejmé, že toto zobrazení je bijekcí. Proto platí (1).

Příklad 2. Dokažte následující identitu:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0, \quad (2)$$

je-li $n \geq 1$.

Řešení. Upravíme (2) do tvaru

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots \quad (3)$$

Zdůrazněme, že součty na obou stranách (3) jsou konečné. Součet na levé (resp. pravé) straně (3) udává počet všech podmnožin n -prvkové množiny M se *sudým* (resp. *lichým*) počtem prvků. Zvolme pevně jeden prvek $m \in M$ a každé podmnožině $P \subseteq M$, která má sudý počet prvků, přiřaďme množinu $g(P) \subseteq M$ s lichým počtem prvků dle předpisu

$$g(P) = \begin{cases} P \cup \{m\}, & \text{jestliže } m \notin P, \\ P \setminus \{m\}, & \text{jestliže } m \in P. \end{cases}$$

Zřejmě g je bijekcí systému všech podmnožin množiny M se sudým počtem prvků na systém všech podmnožin množiny M , jejichž počet prvků je lichý (inverzní zobrazení určuje stejný předpis). Proto platí (3), a tudíž i (2).

Příklad 3. U pokladny kina stojí $(m+k)$ osob, přičemž m z nich má desetikoruny a k osob pětikoruny. Lístek na představení stojí 5 korun a na začátku prodeje nejsou v pokladně kina žádné peníze. Kolika způsoby se mohou zájemci o koupi lístku postavit do fronty tak, aby postupovali bez zdržení, tj. aby nikdo nemusel čekat na drobné nazpět? (Rozlišujeme pouze rozestavení „desetikorun“ a „pětikorun“, nikoliv jednotlivé osoby se stejnými mincemi.)

Řešení. „Zašifrujme“ každou frontu pomocí jedniček a nul tak, že člověku, který má pětikorunu, přiřadíme nulu a člověku s desetikorunou jedničku. Pak lze zadanou úlohu zformulovat ekvivalentně takto: určit počet $(m+k)$ -členných posloupností složených z m jedniček a k nul s touto vlastností: pro každé $i = 1, 2, \dots, m+k$ je mezi prvními i členy této posloupnosti počet nul větší nebo roven počtu jedniček. Počet takovýchto posloupností označíme $f(m, k)$.

Je zřejmé, že úloha má alespoň jedno řešení právě tehdy, když $m \leq k$, jinak se fronta se stoprocentní jistotou zastaví, tzn. $f(m, k) = 0$ pro $m > k$. Pro $m \leq k$ určíme nejdříve počet všech „nepříznivých“ rozestavení fronty. Každá takováto fronta bude šifrována posloupností z m jedniček a k nul s touto vlastností: pro některé $i = 1, 2, \dots, m+k$ je mezi prvními i členy této posloupnosti počet jedniček větší než počet nul. Množinu takovýchto posloupností označíme A . Protože všech $(m+k)$ -členných posloupností z m jedniček a k nul je právě $P_0(m, k) = \binom{m+k}{m}$, pro číslo $f(m, k)$ platí

$$f(m, k) = \binom{m+k}{m} - |A|.$$

Dále ukážeme, že množina A má stejný počet prvků jako množina B tvořená všemi posloupnostmi sestavenými z $(m-1)$ jedniček a $(k+1)$ nul, a to sestrojením bijekce $A \rightarrow B$. Pro libovolnou posloupnost $a = (a_1, a_2, \dots, a_{m+k}) \in A$ nalezneme nejmenší index p takový, že mezi prvky $a_1, a_2, \dots, a_p$ je více jedniček než nul. Pak zřejmě $a_p = 1$ a mezi prvky $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$ je stejně jedniček jako nul (a v případě $p > 1$ není pro žádné $i < p$ mezi prvky $a_1, a_2, \dots, a_i$ více jedniček než nul), proto posloupnost

$$b = (1 - a_1, 1 - a_2, \dots, 1 - a_{p-1}, 0, a_{p+1}, \dots, a_{m+k})$$

je tvořena $(m-1)$ jedničkami a $(k+1)$ nulami, tj. $b \in B$. Navíc lze index p v takto sestavené posloupnosti $b = (b_1, b_2, \dots, b_{m+k})$ zpětně identifikovat: je to nejmenší index i takový, že mezi prvky $b_1, b_2, \dots, b_i$ je více nul než jedniček. Jelikož $m \leq k$, a tedy $m-1 < k+1$, takový index p existuje pro každou posloupnost $b = (b_1, b_2, \dots, b_{m+k}) \in B$, která je proto obrazem v určeném zobrazení $A \rightarrow B$ jediné posloupnosti

$$a = (1 - b_1, 1 - b_2, \dots, 1 - b_{p-1}, 1, b_{p+1}, \dots, b_{m+k})$$

z množiny A . Popsané pravidlo $a \mapsto b$ je tudíž bijekcí $A \rightarrow B$.

Protože B má $P_0(m-1, k+1) = \binom{m+k}{m-1}$ prvků, je

$$f(m, k) = \binom{m+k}{m} - |A| = \binom{m+k}{m} - |B| = \binom{m+k}{m} - \binom{m+k}{m-1} = \frac{k-m+1}{k+1} \binom{m+k}{m}.$$

Na závěr dodejme, že je-li $k = m$, tzn. je-li fronta tvořena stejným počtem lidí, kteří mají pětikoruny i desetikoruny, je počet způsobů, kterými lze frontu uspořádat tak, aby prošla bez zdržení, roven

$$f(k, k) = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}.$$

Příklad 4. Kamelot prodává Večerník (za 1 korunu) a na začátku prodeje u sebe nemá žádné peníze. Ihned po zahájení prodeje se před ním utvořila fronta 30 lidí, z nichž 20 má u sebe korunovou a 10 dvoukorunovou minci. Kolika způsoby se mohou tito lidé seřadit tak, aby měl kamelot vždy nazpět? (Rozlišujte pouze postavení „korun“ a „dvoukorun“, nikoliv jednotlivé osoby se stejnou mincí.)

Řešení. Příklad je zjevně obdobou předchozí úlohy, tentokrát s konkrétními čísly. I zde můžeme každou frontu „zašifrovat“, a to třeba tak, že osobě, která má korunu, přiřadíme jedničku a osobě s dvoukorunou dvojku. Pak už stačí s pomocí v předchozím příkladě získaného vzorce určit $f(m, k)$, kde za m dosadíme počet dvoukorun (v našem případě 10) a za k dosadíme počet korun (v našem případě 20). Všechny způsoby, kterými se lidé v dané frontě mohou seřadit tak, aby měl kamelot vždy na vrácení, je tedy

$$f(m, k) = f(10, 20) = \frac{11}{21} \binom{30}{10} = 15\,737\,865.$$

Příklad 5. Alenka dostává každý den od maminky pětikorunu. Někdy si za ni koupí nanuka, jindy si ji schová. Tatínek ji nabádá, aby si polovinu peněz šetřila na něco užitečného. Alenka se občas podívá do pokladničky, a není-li v ní aspoň polovina dosud darovaných pětikorun, zlobí se. Kolika způsoby si může Alenka během prvních 20 dnů kupovat nanuky, aby jich snědla co nejvíc a přitom se při kontrole pokladničky nemusela nikdy zlobit? Více než jeden nanuk denně jí maminka nedovolí.

Řešení. Chování Alenky lze zašifrovat třeba posloupností písmen A, P tak, že každý den, kdy si Alenka nanuk koupí (resp. nekoupí) zapíšeme A (resp. P). Vyhovují právě ty posloupnosti, ve kterých před každým písmenem A je zapsáno více písmen P než A . Počet způsobů, kterými si Alenka může během prvních 20 dnů kupovat nanuky tak, aby jich snědla co nejvíc, tedy 10, a přitom se při kontrole pokladničky nemusela zlobit, je podle řešení příkladu 3

$$f(10, 10) = \frac{1}{11} \binom{20}{10} = 16\,796.$$

Příklad 6. Dokažte vzorec

$$K_0(k, n) = P_0(k, n-1) = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}. \quad (4)$$

Řešení. Každé k -prvkové kombinaci s opakováním (M, μ) , kde $\mu : M \rightarrow \mathbb{N}_0$ je zobrazení, ve kterém hodnota $\mu(m)$ udává počet výskytů prvku m v dané kombinaci, složené z prvků množiny $M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ přiřadíme posloupnost nul a devítek takto: nejdříve zapíšeme $\mu(m_1)$ devítek, potom 1 nulu, potom $\mu(m_2)$ devítek, potom 1 nulu, atd., až nakonec $\mu(m_n)$ devítek (je-li $\mu(m_i) = 0$ pro některé i , pak v příslušném kroku žádnou devítku nenapišeme). Dostáváme uspořádanou v -tici z číslic 0 a 9, kde

$$\begin{aligned} v &= \mu(m_1) + 1 + \mu(m_2) + 1 + \dots + \mu(m_{n-1}) + 1 + \mu(m_n) = \\ &= (\mu(m_1) + \mu(m_2) + \dots + \mu(m_n)) + n - 1 = k + n - 1. \end{aligned}$$

Takto získáváme „šifru“ souboru (M, μ) , kterou je uspořádaná $(k+n-1)$ -tice složená z k devítek a $(n-1)$ nul. Z té je zjevně také možné každý soubor (M, μ) jednoznačně

„dešifrovat“. Navíc každá uspořádaná $(k + n - 1)$ -tice složená z k devítek a $(n - 1)$ nul je zřejmě „šifrou“ některé k -prvkové kombinace s opakováním z prvků množiny M . (Například kombinaci $[d, d, e, e, e]$ z prvků množiny $\{d, e, f\}$ odpovídá sedmice $(9, 9, 0, 9, 9, 9, 0)$; sedmice $(9, 0, 0, 9, 9, 9, 9)$ odpovídá kombinaci $[d, f, f, f, f]$.) Proto je hledaný počet $K_0(k, n)$ roven počtu všech zmíněných $(k + n - 1)$ -tic, tedy všech pořadí s opakováním ze souboru k devítek a $(n - 1)$ nul, kterých je $P_0(k, n - 1)$. Dostáváme tak (4) a důkaz je hotov.

Příklad 7. Kolika způsoby můžeme nechat nastoupit do dvojřadu $2v$ různě vysokých osob tak, aby v každé řadě stály seřazeny podle velikosti a dále aby každý člověk v první řadě byl vyšší než za ním stojící člověk v druhé řadě? Dvojřad je složen ze dvou stejně početných řad.

Řešení. Úlohu lze převést na již vyřešený příklad 3. Osoby postavíme do dvojřadu požadovaným způsobem a poté jim rozdáme pětikoruny nebo desetikoruny — každý člověk z první řady obdrží pětikorunu, každý člověk ze druhé řady desetikorunu. Potom osoby necháme nastoupit podle velikosti do zástupu; dostáváme frontu z v pětikorun a v desetikorun. Je snadné ukázat, že tato fronta projde bez zdržení: uvažujme osobu, která stojí na i -tém místě ve druhé řadě; $1 \leq i \leq v$. Mezi majiteli desetikorun je pouze $(i - 1)$ osob, které jsou vyšší než vybraný člověk, ale majitelů pětikorun, kteří jsou vyšší než vybraný člověk, je aspoň i — člověk, který stojí před ním, a dalších $(i - 1)$ osob vyšších než on. Dojde-li námi vybraný člověk k pokladně, bude v ní tedy aspoň jedna pětikoruna a vrácení peněz nebude problém.

Naopak, nechť je dána jistá fronta v osob s pětikorunami a v osob s desetikorunami, sestavená podle velikosti všech $2v$ osob, která projde u pokladny bez zastavení. Vybereme všechny majitele pětikorun a seřadíme je podle výšky do první řady, majitele desetikorun pak ve stejném směru růstu výšky seřadíme do druhé řady. Takto vytvořený dvojřad zjevně splňuje podmínky úlohy. Proto je dle řešení příkladu 3 počet všech „nástupů“ $\frac{1}{v+1} \binom{2v}{v}$.

Příklad 8. Předpokládejme, že pokladní kina z příkladu 3 byla předvídavá a připravila si předem j pětikorun na vrácení. V kolika případech projde bez zdržení fronta tvořená k majiteli pětikorun a m vlastníky desetikorun, když opět rozlišujeme pouze rozestavení mincí?

Řešení. Označme hledaný počet všech „příznivých“ případů $h(m, k, j)$. Pro $m \leq j$ se fronta nezastaví nikdy, protože předem připravené pětikoruny budou vždy stačit na vrácení majitelům desetikorun. Proto v tomto případě $h(m, k, j) = \binom{m+k}{m}$. Naopak pro $m > k + j$ zřejmě platí $h(m, k, j) = 0$.

Zbývá vyšetřit případ $j < m \leq k + j$. Přitom lze předpokládat, že se j připravených pětikorun v pokladně objevilo, protože se na začátek fronty postavilo j nových osob s pětikorunami. Úlohu tedy můžeme formulovat následovně: určit počet všech rozestavení fronty o $m + k + j$ mincích, složené z m desetikorun a $k + j$ pětikorun, začínající j pětikorunami, ve které pro každé $v = 1, 2, \dots, m + k + j$ je na prvních v místech nejméně tolik pětikorun jako desetikorun. S užitím postupu šifrování z řešení příkladu 3: určit počet všech $(m + k + j)$ -členných posloupností z m jedniček a $k + j$ nul, které mají na prvních j místech nuly a pro něž platí: pro každé $p = 1, 2, \dots, m + k + j$ je na prvních p místech této posloupnosti alespoň tolik nul jako jedniček.

Nejdříve spočítáme prvky množiny A všech „nepříznivých“ posloupností; stejně jako v příkladu 3 bude pro každou takovou posloupnost $a = (a_1, a_2, \dots, a_{m+k+j}) \in A$ existovat nejmenší index r takový, že se po r krocích fronta (poprvé) zastaví. Proto $a_r = 1$ a mezi

členy $a_1, a_2, \dots, a_{r-1}$ této posloupnosti je stejný počet nul i jedniček. A tak odpovídající posloupnost

$$e = (1 - a_1, 1 - a_2, \dots, 1 - a_{r-1}, 0, a_{r+1}, \dots, a_{m+k+j}) = (e_1, e_2, \dots, e_{m+k+j})$$

je tvořena $(m - 1)$ jedničkami a $(k + j + 1)$ nulami, navíc platí $e_1 = e_2 = \dots = e_j = 1$. Označme O množinu všech takových posloupností e , snadno se ověří, že zkonstruované zobrazení $a \mapsto e$ je bijekce. (Prověrka je založena na tom, že stejně jako v řešení příkladu 3 se podle stavby dané posloupnosti $e \in O$ nejprve identifikuje index r dotyčné posloupnosti $a \in A$.) Proto

$$|A| = |O| = P_0(m - 1 - j, k + j + 1) = \binom{m + k}{m - j - 1}.$$

V případě $j < m \leq k + j$ tedy vychází

$$h(m, k, j) = \binom{m + k}{m} - \binom{m + k}{m - j - 1}. \quad (5)$$

Pochopitelně pro $j = 0$ je vzorec (5) ve shodě s výsledkem příkladu 3.

Příklad 9. Alenka z příkladu 5 má sestru dvojče Hanku, která od maminky také dostává každý den pětikorunu. Hanka však není tak mlsná, a proto si za posledních 10 dnů nekoupila žádný nanuk a všechny pětikoruny uspořila. Teď si to chce vynahradiť a v následujících 30 dnech mlsat co nejvíc. Kolika způsoby to může provést, pokud se stejně jako Alenka nechce při průběžných kontrolách pokladničky zlobit? I Hanka má povolen nejvýše jeden nanuk denně. ¹

Řešení. Úloha je zjevně ilustrací příkladu 8 s konkrétními čísly. V našem případě $j = 10$, $m = k = 15$. A proto dostáváme, že všech způsobů, jak může Hanka v následujících 30 dnech mlsat co nejvíc a při kontrole pokladničky se nezlobit, je

$$h(15, 15, 10) = \binom{30}{15} - \binom{30}{11} = 100490220.$$

Příklad 10. V poledne byly všechny schránky v automatické úschovně zavazadel obsazeny. V průběhu odpoledne si jednotlivě přišlo g lidí vyzvednout a h lidí uložit svoje zavazadlo. Kolika způsoby mohli přicházet (bez ohledu na to, kdy jim jede vlak), aby nikdo nemusel čekat na uvolněnou schránku?

Řešení. Pro $h > g$ úloha zřejmě žádné řešení nemá (minimálně jeden člověk se čekání na volnou schránku nevyhne). Pro $h \leq g$ je úloha obdobou příkladu 3, avšak s jedním důležitým rozdílem. Zatímco v příkladu 3 jsme jednotlivé osoby nerozlišovaly, v této úloze je rozlišit musíme. Všichni lidé, kteří si přišli vyzvednout zavazadlo, se mohou za sebou seřadit $g!$ způsoby, všichni lidé, kteří přišli, aby si zavazadlo uložili, se mohou seřadit $h!$ způsoby. Všechny způsoby, kterými mohou osoby přicházet, aniž by někdo čekal na uvolněnou schránku, je tedy

$$g!h!f(h, g) = \frac{g - h + 1}{g + 1}(g + h)!.$$

¹Vlastní příspěvek autorky

Příklad 11. Mezi 6 dětí rozdělujeme 15 (stejných) tenisových míčků. Kolika způsoby je můžeme rozdělit? Kolika způsoby je můžeme rozdělit, uvažujeme-li pouze „spravedlivější“ rozdělení, při kterých každé dítě dostane alespoň 1 míček?

Řešení. Zdůrazněme, že všechny míčky považujeme za nerozlišitelné — za různá tedy pokládáme taková dvě rozdělení, při nichž některé dítě dostane různé počty míčků. Každé rozdělení zašifrujeme pomocí posloupnosti jedniček a nul tak, že napíšeme tolik jedniček, kolik míčků dostane 1. dítě, oddělíme nulou, zapíšeme tolik jedniček, kolik míčků dostane 2. dítě atd. Takto vytvoříme uspořádanou 20-tici složenou z 15 jedniček a 5 nul — takovýchto posloupností existuje právě $P_0(15, 5)$. Všechny možných rozdělení míčků je tedy $\binom{20}{5}$.

Pro určení počtu „spravedlivějších“ rozdělení (takových, při nichž žádné dítě nevyjde úplně naprázdno) využijeme následující obrat: nejdříve každému dítěti dáme jeden míček, zbylých 9 můžeme rozdělit libovolně. Úvahou z první části tohoto příkladu určíme, že to lze provést $P_0(9, 5)$ způsoby. Všechny možných rozdělení míčků je tedy $\binom{14}{5}$.

Příklad 12. Kolika způsoby můžeme rozdělit 12 korunových mincí do 7 očíslovaných obálek tak, aby žádná obálka nezůstala prázdná?

Řešení. Začneme tím, že do každé obálky vložíme 1 korunu, zbylých 5 můžeme rozdělit libovolně. Stejným postupem jako v příkladu 11 zjistíme, že celkový počet rozdělení mincí do obálek je $P_0(5, 6) = \binom{11}{5} = 462$.

Příklad 13. Kolika způsoby si mohou 3 lidé rozdělit 7 stejných hrušek a 5 stejných jablek, aniž by ovoce krájeli?

Řešení. Nejdříve určíme počet všech rozdělení hrušek mezi 3 lidi; stejně jako v příkladu 11 zjistíme, že je jich $P_0(7, 2) = \binom{9}{2}$. Podobně lze jablka mezi tyto lidi rozdělit $P_0(5, 2) = \binom{7}{2}$ způsoby. Dle pravidla součinu je možné rozdělení obou druhů ovoce provést $\binom{9}{2} \cdot \binom{7}{2} = 756$ způsoby.

Příklad 14. V papírnictví mají 12 různých druhů pohlednic s motivem města Brna. Kolika způsoby může turista provést nákup 8 pohlednic, které hodlá odeslat na různé adresy, takže může zakoupit i více exemplářů stejného druhu pohlednic?

Řešení. Každý vyhovující nákup pohlednic „zašifrujeme“ pomocí posloupnosti sedmiček a nul takto: napíšeme tolik sedmiček, kolik je v nákupu pohlednic 1. druhu, oddělíme nulou, napíšeme tolik sedmiček, kolik je v něm pohlednic 2. druhu, atd. Nákup tedy bude „kódován“ některou uspořádanou 19-ticí složenou z 8 sedmiček a 11 nul. Takovýchto posloupností je

$$P_0(8, 11) = \binom{19}{8} = 75582,$$

což je také počet všech možných nákupů brněnských pohlednic.

Příklad 15. Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. Určete počet všech m -tic celých a zároveň nezáporných čísel $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ splňujících rovnost $a_1 + a_2 + \dots + a_m = n$.

Řešení. Předpokládejme, že uspořádaná m -tice $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ nezáporných celých čísel splňuje danou rovnost. Zašifrujme toto řešení pomocí posloupnosti devítek a nul: nejdříve napíšeme a_1 devítek, oddělíme nulou, napíšeme a_2 devítek, atd. Takto sestavená posloupnost bude obsahovat n devítek a $(m - 1)$ nul. Zjevně každé řešení je touto posloupností určeno a naopak každá taková posloupnost odpovídá některému řešení. Všechny m -tic splňujících danou rovnost je tedy $P_0(n, m - 1) = \binom{n+m-1}{m-1}$.

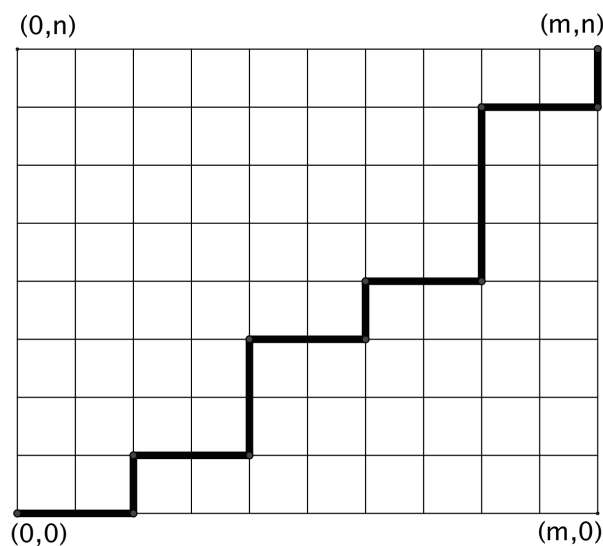
Příklad 16. Necht $m, n \in \mathbb{N}$. Určete počet všech m -tic přirozených čísel $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ splňujících rovnost $a_1 + a_2 + \dots + a_m = n$.

Řešení. Přirozená čísla $a_1, a_2, \dots, a_m$ splňují danou rovnost, právě když celá nezáporná čísla $v_i = a_i - 1$ ($i = 1, 2, \dots, m$) splňují rovnost

$$v_1 + v_2 + \dots + v_m = n - m.$$

Jde o stejný obrat jako při hledání počtu „spravedlivějších“ rozdělení míčků v příkladu 11. Tím jsme úlohu převedli na předchozí příklad: vyhovující uspořádané m -tice existují pouze v případě $n - m \geq 0$ a jejich počet je $P_0(n - m, m - 1) = \binom{n-1}{m-1}$.

Příklad 17. Určete počet všech cest z bodu $(0, 0)$ do bodu (m, n) po horizontálních a svislých úsečkách mezi body s celočíselnými souřadnicemi, jsou-li povolené přesuny doprava nebo nahoru.



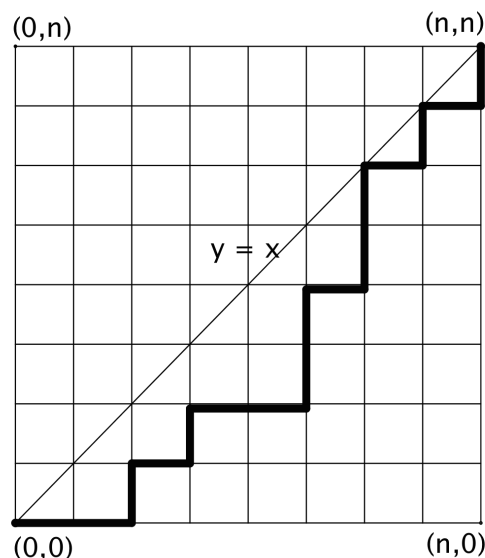
Obrázek 1.1: Cesta z bodu $(0, 0)$ do bodu (m, n)

Řešení. Každou cestu můžeme „zašifrovat“ jako posloupnost z písmen D a A , kde písmeno D koresponduje s krokem doprava a písmeno A s krokem nahoru. Cestu znázorněnou na obrázku 1.1 lze tímto způsobem zapsat jako

$DDADDAADDADDAAADDA.$

Zdůrazněme, že každá výsledná posloupnost písmen obsahuje právě m kopií písmene D a n kopií písmene A odpovídajících celkovému posunu z bodu $(0, 0)$ o m kroků doprava a n nahoru do cílového bodu (m, n) . Zjevně také každé posloupnosti složené z m kopií D a n kopií A můžeme přiřadit korespondující cestu, touto posloupností „zašifrovanou“. Tím jsme sestrojili bijekci mezi množinou všech cest z z bodu $(0, 0)$ do bodu (m, n) využívajících pouze kroky nahoru a doprava a množinou všech posloupností složených z m kopií D a n kopií A . Takových posloupností je $P_0(m, n) = \binom{m+n}{m}$, takže právě tolik je i vyhovujících cest, jejichž počet jsme měli určit.

Příklad 18. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Určete počet všech cest z bodu $(0,0)$ do bodu (n,n) popsanych v příkladu 17 a splňujících navíc podmínku, že cesta neprojde žádným bodem nad spojnici počátečního a koncového bodu.



Obrázek 1.2: Cesta pod spojnici krajních bodů

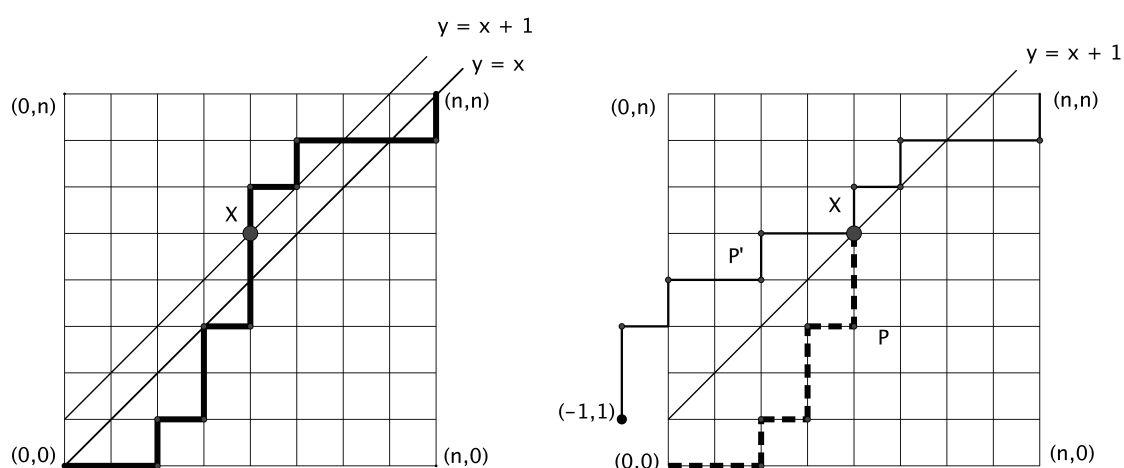
Řešení. V příkladu 17 jsme určili, že počet všech vyhovujících cest z bodu $(0,0)$ do bodu (n,n) bez přidané podmínky, že cesta neprojde žádným bodem nad spojnici počátečního a koncového bodu, je $\binom{2n}{n}$. Nyní určíme, kolik z těchto cest přidanou podmínku nesplňuje: nazvěme je „špatnými cestami“.

Předpokládejme, že P je „špatná cesta“. Spojnici počátečního a koncového bodu tvoří přímka $y = x$. Dostane-li se cesta nad tuto spojnici, dostane se do oblasti $y > x$. Což znamená, že v nějakém bodě protne přímku $y = x + 1$. Nechť X je první bod cesty P , který leží na přímce $y = x + 1$. Zobrazení část cesty P až do bodu X v osové souměrnosti podle přímky $y = x + 1$, zbylou část cesty P od bodu X do bodu (n,n) necháme nezměněnou. Takto získáváme novou cestu P' .

Tvrdíme, že jsme takto sestrojili bijekci mezi množinou „špatných cest“ a množinou cest z bodu $(-1,1)$ do bodu (n,n) vyhovujících zadání příkladu 17. K tomuto zobrazení totiž zkonstruujeme inverzní zobrazení. Pro každou cestu Q z bodu $(-1,1)$ do bodu (n,n) vyhovující zadání příkladu 17 označíme jako X první bod cesty ležící na přímce $y = x + 1$ (takový bod X musí existovat, protože tato přímka krajní body cesty Q odděluje). Nechť P vznikne zobrazením části cesty Q až do bodu X v osové souměrnosti podle přímky $y = x + 1$ a zachováním části cesty Q od bodu X dál nezměněné. Zřejmě je P špatná cesta, která podle konstrukce z první části řešení přejde právě v cestu Q . Takto jsme získali požadované inverzní zobrazení.

Počet „špatných cest“ je tedy roven počtu cest z bodu $(-1,1)$ do bodu (n,n) vyhovujících zadání příkladu 17. Takových cest je podle výsledku příkladu 17 právě $\binom{2n}{n+1}$. Hledaný počet všech „dobrých cest“ je tedy

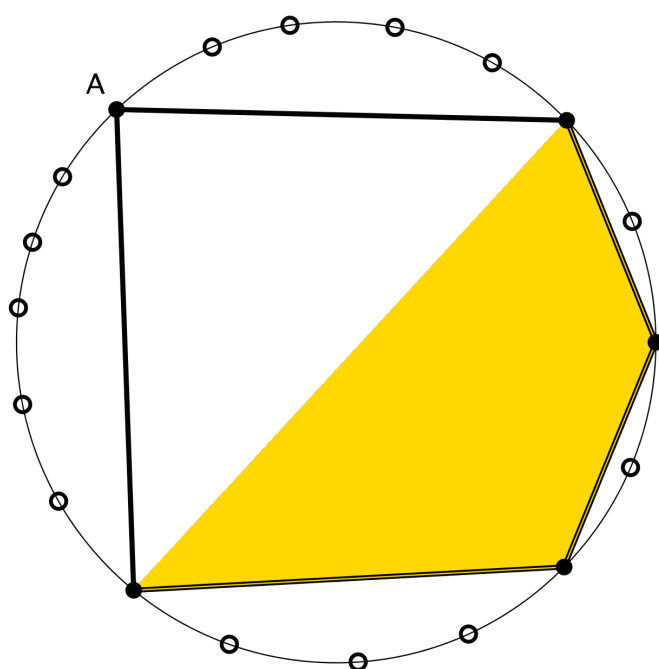
$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Obrázek 1.3: Cesty P a P' z řešení příkladu 18

Určený počet je číslo, se kterým se v kombinatorice setkáváme často. Nazývá se n -té Catalanovo číslo. Uplatněním Catalanových čísel v kombinatorice se zabývá samostatná kapitola 3 této práce.

Příklad 19. Na kružnici je dáno n různých bodů, kde $n \geq 4$, jeden z nich je označen A . Všechny konvexní mnohoúhelníky s vrcholy v daných bodech rozdělíme na ty, které bod A mezi svými vrcholy mají, respektive nemají. Kterých mnohoúhelníků je více a o kolik?

Řešení. Nejdříve sestojíme bijekci mezi množinou mnohoúhelníků bez vrcholu A a množinou těch mnohoúhelníků, které vrchol A obsahují a mají alespoň 4 vrcholy. Každému vyhovujícímu k -úhelníku ($k \geq 4$), který obsahuje vrchol A , přiřadíme $(k-1)$ -úhelník, který vrchol A neobsahuje a jehož vrcholy se shodují se zbylými vrcholy původního k -úhelníka (viz obrázek 1.4 pro $k = 5$). Jelikož $k \geq 4$, každému k -úhelníku, který vrchol A obsahuje, je takto jednoznačně přiřazen $(k-1)$ -úhelník, který vrchol A neobsahuje. Každému l -úhelníku, který vrchol A neobsahuje ($l \geq 3$ a zjevně $l < n$, protože minimálně vrchol A je „volný“), je zároveň jednoznačně přiřazen $(l+1)$ -úhelník „obohacený“ o vrchol A . Mezi oběma množinami jsme tak sestrojili bijekci. Všechny konvexní mnohoúhelníky, které vrchol A obsahují, je tedy více: o trojúhelníky s vrcholem A , kterých je zřejmě $\binom{n-1}{2}$.



Obrázek 1.4: Pětúhelník s vrcholem A a čtyřúhelník bez něj

Kapitola 2

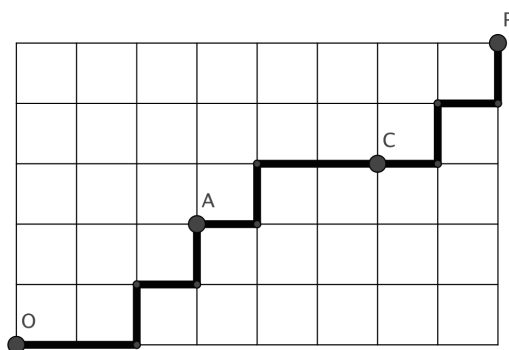
Příklady odjinud

Příklady v této kapitole jsou převzaty z nejrůznějších převážně zahraničních zdrojů, z velké části dostupných online (viz seznam použité literatury). Příklady byly uspořádány od snadnějších k obtížnějším.

Příklad 1. Nechť $M = \{1, 2, \dots, n\}$, $N = \{P \mid P \subseteq M \wedge n \notin P\}$ a $O = \{P \mid P \subseteq M \wedge n \in P\}$. Ukažte, že $|N| = |O|$.¹

Řešení. Uvažme následující zobrazení mezi množinami N a O . Každé množině $P \in N$ přiřadíme takovou množinu $R \in O$, která obsahuje právě všechny prvky množiny P a navíc prvek n . Obraz množiny P v množině O existuje vždy a je jednoznačný. Stejně tak pro každou množinu $R \in O$ existuje její jediný vzor z množiny N . Uvažované zobrazení je tedy bijekcí mezi konečnými množinami N a O , z čehož okamžitě vyplývá, že $|N| = |O|$.

Příklad 2. Určete počet cest z bodu $O(0,0)$ do bodu $P(8,5)$ po horizontálních a svislých úsečkách mezi body s celočíselnými souřadnicemi, jsou-li povolené přesuny doprava nebo nahoru a cesta musí projít body $A(3,2)$ a $C(6,3)$.²



Obrázek 2.1: Příklad cesty mezi body O a P přes body A a C

Řešení. Každou vyhovující cestu rozdělíme na 3 nezávislé úseky: z bodu O do bodu A , z bodu A do bodu C a z bodu C do bodu P . Cest z bodu O do bodu A je podle řešení příkladu 17 z kapitoly 1 $\binom{5}{2}$, cest z bodu A do bodu C je podle řešení téhož příkladu $\binom{4}{1}$ a podobně

¹Chen Chuan-Chong, Koh Khee-Meng: Principles and techniques in combinatorics, str. 55

²Chen Chuan-Chong, Koh Khee-Meng: Principles and techniques in combinatorics, str. 53

cest z bodu C do bodu P je $\binom{4}{2}$. Všechny cest z bodu $O(0,0)$ do bodu $P(8,5)$ splňujících všechny podmínky je pak podle pravidla součinu $\binom{5}{2} \binom{4}{1} \binom{4}{2} = 240$.

Příklad 3. Ukažte, že počet rozkladů přirozeného čísla n na součet několika přirozených čísel (třeba i jednoho) je roven počtu rozkladů čísla $2n$ na součet n přirozených čísel. (Rozklady lišící se pouze pořadím sčítanců považujeme za stejné.)³

Řešení. Mezi oběma množinami sestrojíme bijekci. Každému vyhovujícímu rozkladu $(a_1, \dots, a_n)$ čísla $2n$, kde $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 1$, přiřadíme n -tici celých čísel $(b_1, \dots, b_n)$ předpisem $b_i = a_i - 1$, $i = 1, 2, \dots, n$. Jelikož pro každé i je $a_i \geq 1$, platí $b_i \geq 0$. Dále platí:

$$a_i \geq a_{i+1} \Rightarrow a_i - 1 \geq a_{i+1} - 1 \Rightarrow b_i \geq b_{i+1},$$

$$b_1 + \dots + b_n = a_1 + \dots + a_n - n = 2n - n = n.$$

Zdůrazněme, že každý rozklad čísla n na k přirozených čísel, kde $k < n$, můžeme snadno doplnit na n -tici tak, že za k dotyčných sčítanců zapsaných v nerostoucím pořadí přidáme $n - k$ nul. Dostaneme tak n -tici $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ nezáporných čísel právě těch vlastností, které jsme u výše sestrojené n -tice odvodili.

Nyní ověříme, že dané přiřazení je skutečně bijekce. Každému rozkladu $(b_1, \dots, b_n)$, kde $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0$, čísla n (který jsme v případě potřeby doplnili nulami) v souladu s výše uvedeným předpisem přiřadíme zpětně n -tici celých čísel $(a_1, \dots, a_n)$ předpisem $a_i = b_i + 1$, $i = 1, 2, \dots, n$. Jelikož pro každé i je $b_i \geq 0$, platí $a_i \geq 1$. Dále platí:

$$b_i \geq b_{i+1} \Rightarrow b_i + 1 \geq b_{i+1} + 1 \Rightarrow a_i \geq a_{i+1},$$

$$a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n + n = 2n.$$

Mezi oběma množinami tedy existuje bijekce, a tudíž oba zkoumané počty rozkladů se rovnají.

Příklad 4. Ukažte, že počet rozkladů přirozeného čísla n na součet k přirozených čísel je roven počtu takových rozkladů čísla n na součet několika přirozených čísel, ze kterých je největší sčítanec roven číslu k . (Rozklady, které se liší pouze pořadím sčítanců, považujeme za stejné.)⁴

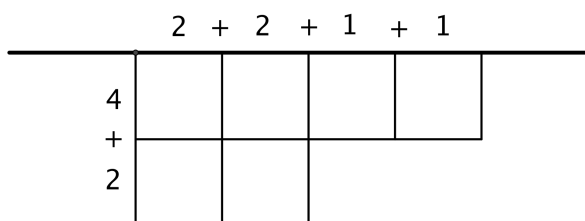
Řešení. Mezi oběma množinami rozkladů sestrojíme bijekci. Každý vyhovující rozklad $(a_1, \dots, a_k)$ čísla n , kde $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k \geq 1$, znázorníme graficky pomocí k spolu sousedících sloupců čtverečků, vynášených od dané vodorovné přímky svisle dolů. Do prvního sloupce zakreslíme a_1 čtverečků, do druhého sloupce a_2 čtverečků a tak dále, až do k -tého sloupce zakreslíme a_k čtverečků. Celkový počet zakreslených čtverečků je $a_1 + \dots + a_k = n$. Situaci pro rozklad $(2, 2, 1, 1)$ čísla 6 ilustruje obrázek 2.2.

A nyní určíme počty čtverečků v jednotlivých řádcích. V nejvyšším řádku je jistě právě k čtverečků a počet čtverečků v níže položeném řádku je zřejmě vždy menší, nejvýše roven počtu čtverečků v řádku nad ním. Tím jsme každému rozkladu čísla n délky k jednoznačně přiřadili rozklad čísla n , kde největší sčítanec je roven k , a naopak, každému rozkladu čísla n s největším sčítancem rovným k odpovídá jediný rozklad čísla n délky k .

Mezi oběma množinami tedy existuje bijekce a počet rozkladů přirozeného čísla n délky k je skutečně roven počtu těch rozkladů n , kde největší sčítanec je roven k .

³M. Olšák: Kombinatorické (ne)počítání

⁴M. Olšák: Kombinatorické (ne)počítání

Obrázek 2.2: Ilustrace příkladu 4 pro $n = 6$

Příklad 5. Dokažte, že počet rozkladů přirozeného čísla n na součet různých přirozených čísel je roven počtu rozkladů téhož čísla n na součet lichých přirozených čísel (součty lišící se pouze pořadím sčítanců považujeme za stejný rozklad).⁵

Řešení. Začneme rozkladem čísla n na součet různých přirozených čísel. Každý člen rozkladu zapišme jako $v \cdot 2^w$, kde v je liché číslo, a poté ho rozložíme na 2^w čísel, z nichž se každé rovná v . Tak získáme rozklad n na součet lichých čísel. Pro ilustraci začneme rozkladem čísla 30 na $(12, 7, 6, 4, 1)$ a postupně dostaneme

$$\begin{aligned}
 30 &= 12 + 7 + 6 + 4 + 1 = 3 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 = \\
 &= (3 + 3 + 3 + 3) + 7 + (3 + 3) + (1 + 1 + 1 + 1) + 1 = \\
 &= 7 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1.
 \end{aligned}$$

Mějme naopak rozklad čísla n na součet lichých čísel. Označme v libovolné zastoupené liché číslo a nechť j je počet jeho výskytů v uvažovaném rozkladu. Podle zápisu přirozeného čísla j ve dvojkové soustavě v rozvinutém tvaru platí $j = 2^{j_1} + 2^{j_2} + \dots + 2^{j_r}$, kde $j_1, j_2, \dots, j_r$ jsou různá celá nezáporná čísla. Zaměníme-li ve výchozím rozkladu součet j stejných čísel v součtem r čísel $2^{j_1}v, 2^{j_2}v, \dots, 2^{j_r}v$ téže hodnoty a provedeme-li tuto záměnu pro všechna původně zastoupená lichá čísla v , dostaneme rozklad čísla n na součet různých přirozených čísel, a to zřejmě právě ten, který postupem z první části řešení přejde v rozklad na součet lichých čísel, ze kterého jsme při postupu z druhé části řešení vyšli. Ilustrujme to na rozkladu $(7, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 1)$ čísla 30, který jsme získali v závěru první části:

$$\begin{aligned}
 30 &= 7 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7 \cdot 1 + 3 \cdot 6 + 1 \cdot 5 = \\
 &= 7 \cdot 2^0 + 3 \cdot (2^2 + 2^1) + 1 \cdot (2^2 + 2^0) = 7 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 = \\
 &= 7 + 12 + 6 + 4 + 1 = 12 + 7 + 6 + 4 + 1.
 \end{aligned}$$

Tak jsme skutečně dostali zpátky rozklad $(12, 7, 6, 4, 1)$. Shrněme, že jsme pomocí výše uvedených postupů mezi množinou rozkladů n na součet různých přirozených čísel a množinou rozkladů n na součet lichých přirozených čísel sestrojili bijekci. A proto počet rozkladů

⁵Yufei Zhao: Bijections

přirozeného čísla n na součet různých přirozených čísel je roven počtu rozkladů téhož čísla n na součet lichých přirozených čísel.

Příklad 6. Ukažte, že počet rozkladů přirozeného čísla n na součet k přirozených čísel je roven počtu rozkladů přirozeného čísla $n + \binom{k}{2}$ na součet k různých přirozených čísel. (Rozklady lišící se pouze pořadím sčítanců považujeme za stejné.)⁶

Řešení. Mezi oběma množinami sestrojíme bijekci. Každému vyhovujícímu rozkladu $(a_1, \dots, a_k)$, kde $a_1 > a_2 > \dots > a_k \geq 1$, čísla $n + \binom{k}{2} = n + \frac{k(k-1)}{2}$ přiřadíme k -tici celých čísel $(b_1, \dots, b_k)$ předpisem $b_i = a_i - k + i, i = 1, 2, \dots, k$. Celá čísla b_i jsou přirozená a tvoří nerostoucí posloupnost, což vyplývá z následujících vztahů:

$$b_k = a_k, \quad b_i - b_{i+1} = (a_i - k + i) - (a_{i+1} - k + i + 1) = a_i - a_{i+1} - 1 \geq 0.$$

Dále platí, že

$$b_1 + \dots + b_k = a_1 + \dots + a_k - \{(k-1) + (k-2) + \dots + 1\} = n + \frac{k(k-1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2} = n.$$

Nyní ověříme, že dané přiřazení je skutečně bijekce. Každému rozkladu $(b_1, \dots, b_k)$, kde $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_k$, čísla n v souladu s výše uvedeným předpisem přiřadíme zpětně k -tici celých čísel $(a_1, \dots, a_k)$ předpisem $a_i = b_i + k - i, i = 1, 2, \dots, k$. Takto získaná čísla a_i jsou přirozená a tvoří klesající posloupnost, což vyplývá z následujících vztahů:

$$a_k = b_k, \quad a_i - a_{i+1} = (b_i + k - i) - (b_{i+1} + k - i - 1) = b_i - b_{i+1} + 1 \geq 1.$$

Součet čísel $a_1 + \dots + a_k$ je zřejmě $n + \frac{k(k-1)}{2}$. Každému rozkladu čísla $n + \binom{k}{2}$ na součet k různých přirozených čísel je tak jednoznačně přiřazen rozklad čísla n na součet k přirozených čísel a naopak. Mezi oběma množinami tedy existuje bijekce a počet rozkladů přirozeného čísla n na součet k přirozených čísel je skutečně roven počtu rozkladů přirozeného čísla $n + \binom{k}{2}$ na součet k různých přirozených čísel.

Kupříkladu pro $n = 6, k = 3$ dostáváme rozklady $(6, 2, 1), (5, 3, 1), (4, 3, 2)$ čísla 9 na 3 různá přirozená čísla a jim odpovídající rozklady $(4, 1, 1), (3, 2, 1), (2, 2, 2)$ čísla 6.

Příklad 7. Ukažte, že počet různých trojúhelníků s celočíselnými délkami stran a daným obvodem n je roven počtu rozkladů čísla $n - 3$ na součet několika čísel rovných 2, 3 nebo 4. Například, pro obvod 9 existují 3 takové trojúhelníky, s délkami stran $(3, 3, 3), (4, 3, 2), (4, 4, 1)$. Odpovídající rozklady čísla $9 - 3 = 6$ jsou $3 + 3, 2 + 4$ a $2 + 2 + 2$. (Rozklady, které se liší pouze pořadím sčítanců, považujeme za stejné.)⁷

Řešení. Nechť $a \geq b \geq c$ jsou délky stran jednoho z uvažovaných trojúhelníků. Položme

$$k = b - c, \quad l = b + c - a - 1, \quad m = a - b.$$

Jelikož platí $a \geq b \geq c$ a zároveň $a < b + c$ (trojúhelníková nerovnost), celá čísla k, l, m jsou všechna nezáporná. Sečteme

$$2k + 3l + 4m = 2(b - c) + 3(b + c - a - 1) + 4(a - b) = a + b + c - 3.$$

⁶Richard P. Stanley: Bijective proof problems

⁷Richard P. Stanley: Bijective proof problems

Jelikož $a + b + c = n$, dostáváme, že $2k + 3l + 4m = n - 3$.

Naopak, je-li (k, l, m) uspořádaná trojice nezáporných celých čísel, výše uvedenou trojici rovností vyřešíme vzhledem k neznámým a, b, c a dostaneme, že

$$a = k + l + 2m + 1, \quad b = k + l + m + 1, \quad c = l + m + 1.$$

Jelikož k, l, m jsou celá nezáporná čísla, jsou takto určená čísla a, b, c celá a zřejmě splňují nerovnosti

$$a \geq b \geq c > 0, \quad a < b + c.$$

Čísla $a \geq b \geq c$ jsou tedy délky stran jednoho z vyhovujících trojúhelníků. Každá uvažovaná trojice (k, l, m) je popisem rozkladu čísla $n - 3$ na k dvojek, l trojek a m čtyřek, které jsme jednoznačně přiřadili trojúhelník se stranami a, b, c a obvodem n . A naopak, každému trojúhelníku se stranami a, b, c a obvodem n jsme jednoznačně přiřadili trojici (k, l, m) .

Mezi oběma množinami tedy existuje bijekce a počet různých trojúhelníků s celočíselnými délkami stran a obvodem n je skutečně roven počtu rozkladů čísla $n - 3$ na součet několika čísel rovných 2, 3 nebo 4.

Příklad 8. Označme a_n počet těch slov délky n z písmen X a Y , která neobsahují podslovo $XYXYX$ ani $YXYXY$. Podobně označme b_n počet těch slov délky n z písmen X a Y , která neobsahují podslovo $XXXXX$ ani $YYYYY$. Dokažte, že $a_n = b_n$.⁸

Řešení. Mezi oběma množinami sestrojíme bijekci. Každému slovu, které neobsahuje podslovo $XYXYX$ ani $YXYXY$, přiřadíme slovo neobsahující podslova $XXXXX$ ani $YYYYY$ následovně: písmena na lichých pozicích opíšeme, písmena na sudých pozicích nahradíme (místo X napíšeme Y a místo Y napíšeme X). Každému slovu, které neobsahuje podslova $XYXYX$ ani $YXYXY$, tak jednoznačně přiřadíme slovo neobsahující podslova $XXXXX$ ani $YYYYY$ (jediná podslova, která by se mohla zobrazit na zakázaná podslova $XXXXX$ a $YYYYY$, jsou $XYXYX$ a $YXYXY$, ta však žádné ze zobrazovaných slov neobsahuje). A naopak, každému slovu neobsahujícímu podslova $XXXXX$ a $YYYYY$ je takto jednoznačně přiřazeno slovo, které neobsahuje podslova $XYXYX$ ani $YXYXY$.

Mezi oběma množinami tedy existuje bijekce, a proto skutečně $a_n = b_n$.

Příklad 9. Eliška nakreslila čtvercovou mřížku $n \times n$ a do každého políčka napsala počet všech podtabulek (obdélníkových či čtvercových) v mřížce, které obsahují dané políčko (na obrázku 2.3 je situace pro $n = 3$). Ukažte, že součet čísel ve všech políčkách je roven $\binom{n+2}{3}^2$.⁹

Řešení. Při řešení tohoto příkladu budeme považovat podtabulku započtenou do jednoho políčka a tutéž podtabulku započtenou do jiného políčka za různé. Celkový počet takto rozlišených podtabulek je pak roven zkoumanému součtu čísel ve všech políčkách.

Každé podtabulce (se zápočtovým polem) přiřadíme 2 trojice čísel: jednu pro x -ové a druhou pro y -ové souřadnice zavedené na tabulce podle obrázku 2.4 a mající pro pole tabulky hodnoty $1, 2, \dots, n$ (tak, aby čísla ve stejné trojici byla navzájem různá). Nejmenší z čísel pro x -ové souřadnice udává x -ovou souřadnici políčka v levém dolním rohu podtabulky zmenšenou o 1; prostřední z čísel odpovídá x -ové souřadnici políčka, kterému jsme danou podtabulku započeti; největší číslo udává x -ovou souřadnici políčka v pravém

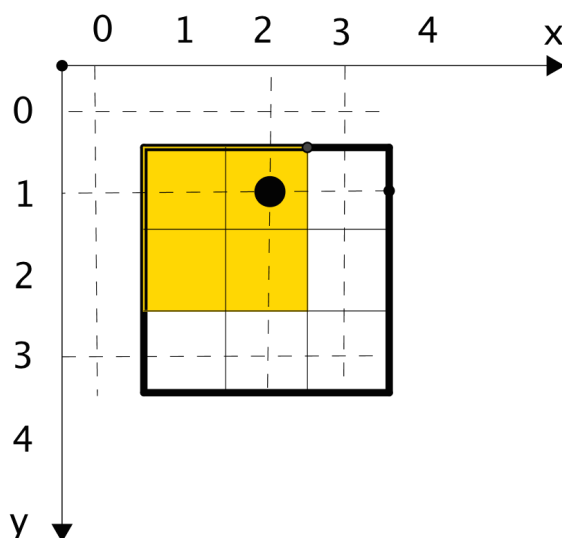
⁸M. Olšák: Kombinatorické (ne)počítání

⁹M. Olšák: Kombinatorické (ne)počítání

9	12	9
12	16	12
9	12	9

Obrázek 2.3: Počty podtabulek pro $n = 3$

dolním rohu podtabulky zvětšenou o 1. Analogický význam má trojice pro y -ovou souřadnici. Pro mřížku 3×3 a její podtabulku 2×2 umístěnou v levém horním rohu mřížky a započtenou pro pole, které je v pravém horním rohu podtabulky, jde v x -ové souřadnici o trojici $(0, 2, 3)$ a v y -ové souřadnici o $(0, 1, 3)$.



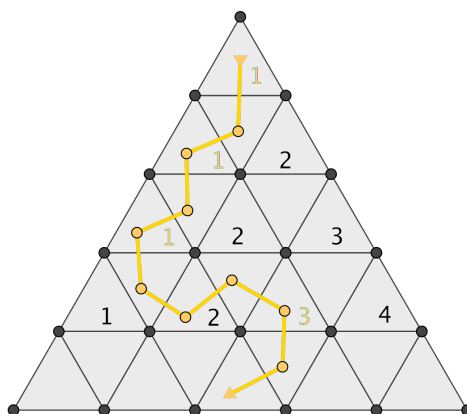
Obrázek 2.4: Trojice pro žlutý čtverec a vyznačené pole

Každé podtabulce jsou takto jednoznačně přiřazeny 2 trojice různých čísel z $(n+2)$ -prvkové množiny $\{0, 1, 2, \dots, n+1\}$. A naopak, každé dvojici takových číselných trojic je jednoznačně přiřazena podtabulka. Mezi oběma množinami tedy existuje bijekce. Trojici pro x -ové (respektive y -ové) souřadnice můžeme vybrat $\binom{n+2}{3}$ způsoby (vybíráme 3 navzájem různá čísla z $n+2$ možných). Všech uvažovaných dvojic číselných trojic je tedy podle

pravidla součinu $\binom{n+2}{3}^2$.

Hledaný součet čísel ve všech políčkách mřížky $n \times n$ je roven $\binom{n+2}{3}^2$.

Příklad 10. Uvažujte rovnostranný trojúhelník o straně délky n , složený z „jednotkových“ trojúhelníků, jak ukazuje obrázek 2.5 pro $n = 5$. Nechť $r(n)$ udává počet cest z trojúhelníku v horním vrcholu do prostředního trojúhelníku ve spodní základně takových, že po sobě jdoucí trojúhelníky v cestě sdílejí jednu společnou stranu, cesta nikdy „nestoupá“ (z nižší do vyšší řady trojúhelníků) a každým trojúhelníkem prochází nejvýše jedenkrát. Určete hodnotu $r(n)$ pro obecné přirozené n a vyčíslete pro $n = 5$.¹⁰



Obrázek 2.5: Trojúhelníková mřížka a vyhovující cesta

Řešení. Spodní základny jednotkových trojúhelníků v i -té řadě shora označíme zleva doprava čísla $1, 2, \dots, i$, a to pro každé $i = 1, 2, \dots, n-1$. Sestrojíme bijekci mezi množinou všech vyhovujících cest a množinou všech posloupností $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$, kde $1 \leq a_i \leq i$. Zobrazení sestrojíme tak, aby se číslo a_i rovnalo pořadovému číslu základny trojúhelníka, ve kterém zobrazovaná cesta opouští i -tou řadu a vstupuje do $(i+1)$ -té řady. Pro každou vyhovující cestu takováto posloupnost existuje; naopak podle každé takovéto posloupnosti můžeme zrekonstruovat celou vyhovující cestu (pohyb mezi trojúhelníky v i -té řadě je přece jednoznačně určen dvojicí čísel a_{i-1}, a_i , a to pro každé $i = 2, 3, \dots, n$). Počet takovýchto posloupností je podle pravidla součinu $(n-1)!$, tudíž $r(n) = (n-1)!$ a $r(5) = 4! = 24$.

Pro doplnění, cestě z obrázku 2.5 odpovídá čtveřice $(1, 1, 1, 3)$.

Příklad 11. Nechť $M = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Ukažte, že počet r -prvkových kombinací z prvků množiny M , které neobsahují ani jednu dvojici po sobě jdoucích čísel, je roven

$$\binom{n-r+1}{r},$$

kde $0 \leq r \leq n-r+1$.¹¹

¹⁰Peng Shi: The Art of Counting, Bijections, Double Counting

¹¹Chen Chuan-Chong, Koh Khee-Meng: Principles and techniques in combinatorics, str. 29 - 30

Řešení. Pro ilustraci nejdříve uvažujme $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Všechny 3-prvkové kombinace z prvků M , které neobsahují ani jednu dvojici po sobě jdoucích čísel, jsou:

$$\begin{aligned} &\{1, 3, 5\}, \quad \{1, 3, 6\}, \quad \{1, 3, 7\}, \quad \{1, 4, 6\}, \quad \{1, 4, 7\}, \\ &\{1, 5, 7\}, \quad \{2, 4, 6\}, \quad \{2, 4, 7\}, \quad \{2, 5, 7\}, \quad \{3, 5, 7\}. \end{aligned}$$

Jejich počet je 10 a $\binom{7-3+1}{3} = 10$.

Nechť P je množina r -prvkových kombinací z prvků množiny M , které neobsahují ani jednu dvojici po sobě jdoucích čísel, a Q je množina r -prvkových kombinací z prvků množiny S , kde

$$S = \{1, 2, \dots, n - (r - 1)\}.$$

Mezi množinami P a Q sestrojíme bijekci.

Nechť $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_r\} \in P$. Můžeme předpokládat, že $v_1 < v_2 < v_3 < \dots < v_r$. Definujeme

$$f(V) = \{v_1, v_2 - 1, v_3 - 2, \dots, v_r - (r - 1)\}.$$

Všimněme si, že pokud v_i a v_{i+1} nejsou po sobě jdoucí čísla, pak všechna čísla zastoupená v $f(V)$ jsou navzájem různá. Tudíž $f(V) \in Q$ a f je zobrazení z P do Q . Zřejmě f je injekce.

Zbývá ukázat, že f je surjekce. Nechť $T = \{t_1, t_2, t_3, \dots, t_r\} \in Q$. Uvažujme

$$V = \{t_1, t_2 + 1, t_3 + 2, \dots, t_r + (r - 1)\}.$$

Zřejmě $V \in P$ a podle definice $f(V) = T$.

Ukázali jsme, že f je bijekcí mezi množinami P a Q . Z toho vyplývá, že

$$|P| = |Q| = \binom{n-r+1}{r}$$

a důkaz je hotov.

Příklad 12. Uvažujme všechny polynomy s koeficienty 0, 1, 2 nebo 3. Kolik z těchto polynomů splňuje rovnost $P(2) = n$, kde $n \in \mathbb{N}$ je dané číslo? ¹²

Řešení. Pro dané pevné $n \in \mathbb{N}$ má každý vyhovující polynom stupeň nejvýše k , kde k je nejmenší nezáporné celé číslo s vlastností $2^{k+1} > n$. Naším úkolem je proto ukázat, že počet vyjádření $n = a_k 2^k + a_{k-1} 2^{k-1} + \dots + a_0$, kde $a_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ pro každé i , je roven počtu vyjádření $n = 2x + y$ s celými nezápornými čísly x a y , která jsou nutně rovněž menší než 2^{k+1} , takže je užitím dvojkové číselné soustavy budeme jednoznačně zapisovat ve tvaru $x = b_k 2^k + b_{k-1} 2^{k-1} + \dots + b_0$ a $y = c_k 2^k + c_{k-1} 2^{k-1} + \dots + c_0$, kde $b_i, c_i \in \{0, 1\}$ pro každé i .

Našeho cíle dosáhneme, když sestrojíme bijekci mezi množinou všech vyhovujících $(k+1)$ -tic $(a_k, a_{k-1}, \dots, a_0)$ a množinou tvořenou všemi vyhovujícími páry $(k+1)$ -tic $(b_k, b_{k-1}, \dots, b_0)$ a $(c_k, c_{k-1}, \dots, c_0)$. Zdůrazněme, že v každé ze 3 uvažovaných $(k+1)$ -tic může být několik prvních čísel rovno nule; z nerovností $2^{k+1} > n \geq 2x$ tak plyne, že vždy platí $a_k \leq 1$ a $b_k = 0$.

¹²A.Negut: Problems for the Mathematical Olympiads

Protože

$$2x + y = 2 \sum_{i=0}^{k-1} b_i 2^i + \sum_{i=0}^k c_i 2^i = c_k 2^k + \sum_{i=0}^{k-1} (2b_i + c_i) 2^i,$$

potřebnou rovnost

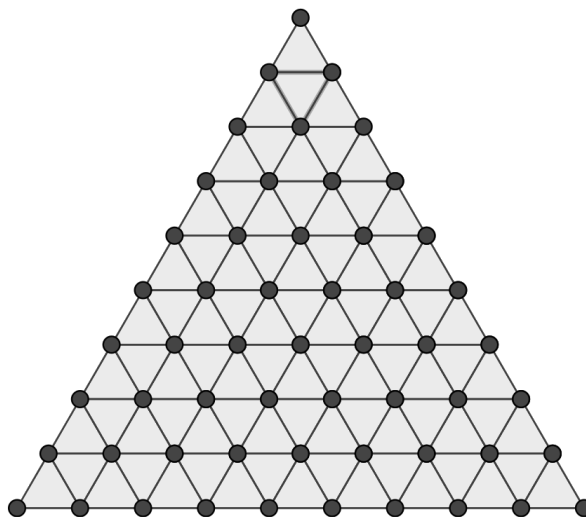
$$\sum_{i=0}^k a_i 2^i = c_k 2^k + \sum_{i=0}^{k-1} (2b_i + c_i) 2^i$$

zajistíme tak, že zvolíme $a_k = c_k$ (připomeňme, že $a_k \leq 1$) a pro každé $i = 0, 1, \dots, k-1$ položíme $a_i = 2b_i + c_i$. Všimněme si, že poslední předpis je bijekcí mezi množinou $\{0, 1, 2, 3\}$ všech přípustných hodnot a_i a množinou všech přípustných dvojic (b_i, c_i) , jež je tvořena dvojicemi $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$. Tím je i sestrojeno požadované zobrazení a zároveň prokázáno, že se jedná o bijekci.

Dokázali jsme, že počet polynomů s koeficienty 0, 1, 2 nebo 3 splňujících $P(2) = n$ je skutečně roven počtu vyjádření čísla n ve tvaru $2x + y$ (x a y jsou nezáporná celá čísla). Toto poslední číslo lze snadno spočítat. Nezáporných celých x takových, že $2x \leq n$, je $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ a pro každé takovéto x existuje jediné nezáporné celé y takové, že $n = 2x + y$.

Tudíž i vyhovujících polynomů je právě $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.

Příklad 13. Trojúhelníkovou mřížku získáme tak, že rovnostranný trojúhelník o straně délky n rozdělíme na n^2 rovnostranných trojúhelníků o straně délky 1. Určete počet rovnoběžníků vymezených úsečkami mřížky. ¹³



Obrázek 2.6: Trojúhelníková mřížka

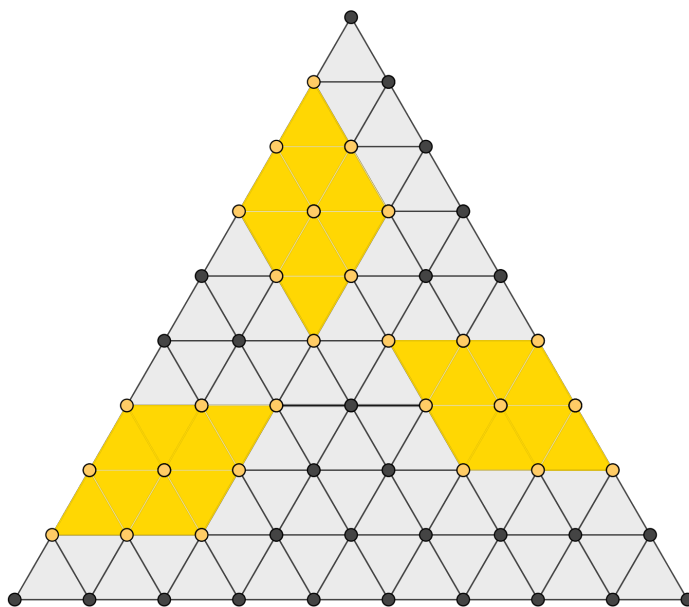
Řešení. Všimněme si, že se v mřížce vyskytují úsečky tří různých směrů, a tedy rovnoběžníky tří typů (jak ukazuje obrázek 2.7).

¹³Yufei Zhao: Bijections

Ze symetrie (dané neměnností mřížky při otočení kolem jejího středu o 120 stupňů) vyplývá, že rovnoběžníků každého typu je stejný počet. Proto se nyní zaměříme na jeden konkrétní typ rovnoběžníků (bez újmy na obecnosti zvolme rovnoběžníky, které nemají žádnou horizontální stranu).

Prodlužme trojúhelníkovou mřížku o novou nejspodnější řadu. Nyní je šikvné vyjít od některého z rovnoběžníků původní mřížky. Vhodná protažení stran takového rovnoběžníku určují čtyři různé průsečíky s novou dolní hranou mřížky, jak ukazuje obrázek 2.8.

Naopak, vyjdeme-li od libovolných čtyř různých bodů nové dolní hrany mřížky, „šedesátistupňové“ polopřímky z prvních dvou bodů a „stodvacetistupňové“ polopřímky ze zbylých dvou bodů nám vymezí rovnoběžník v původní mřížce. Takto jsme sestrojili bijekci mezi množinou všech rovnoběžníků původní mřížky (s žádnou horizontální stranou) a množinou čtveřic různých bodů z nové dolní hrany — a těch je právě $\binom{n+2}{4}$. Když započteme všechny tři typy rovnoběžníků, dostaneme, že celkový počet rovnoběžníků v původní mřížce je $3\binom{n+2}{4}$.

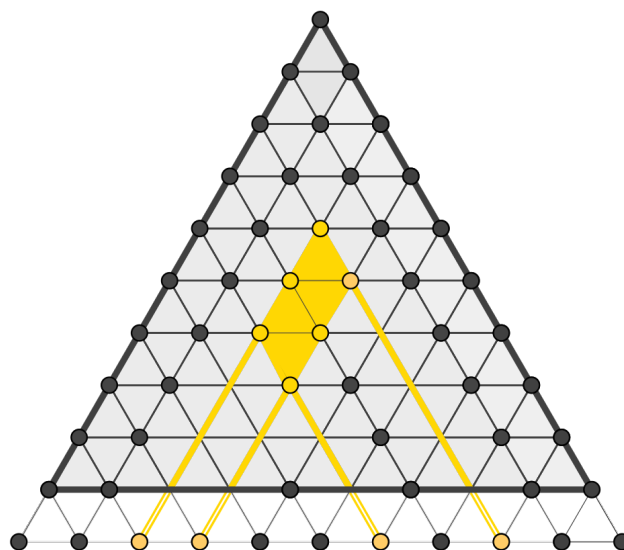


Obrázek 2.7: Různé orientace rovnoběžníků

Příklad 14. Jako *plné* budeme označovat ty n -tice přirozených čísel, které pro každé celé $p \geq 2$ mají tuto vlastnost: pokud se v n -tici vyskytuje číslo p , vyskytuje se v ní i číslo $p - 1$, přičemž první výskyt $p - 1$ nastane dříve než poslední výskyt čísla p . Kupříkladu osmice $(2, 1, 2, 1, 2, 1, 3, 3)$ je plná. Určete počet všech plných n -tic s daným číslem n . Návod: Přiřaďte každé plné n -tici jinou permutaci čísel $1, 2, \dots, n$ tak, že výše uvedené osmici přiřadíte permutaci $(6, 4, 2, 5, 3, 1, 8, 7)$.¹⁴

Řešení. Tvrdíme, že pro dané n existuje $n!$ plných n -tic. Abychom toto tvrzení dokázali,

¹⁴M. Olšák: Kombinatorické (ne)počítání



Obrázek 2.8: Protažená mřížka

sestrojíme bijekci mezi množinou těchto plných n -tic a množinou všech permutací bez opakování z prvků množiny $\{1, 2, \dots, n\}$.

Nechť $(a_1, \dots, a_n)$ je plná n -tice a nechť $r = \max(a_1, \dots, a_n)$. Každé přirozené číslo menší nebo rovno r je v této n -tici zastoupeno. Nechť $S_i = \{k \mid a_k = i\}$ pro $1 \leq i \leq r$. Všechny množiny S_i jsou neprázdné a tvoří rozklad na množině $\{1, 2, \dots, n\}$. Podmínka, že n -tice je plná, znamená, že $\min S_{k-1} < \max S_k$ pro $2 \leq k \leq r$. Nyní podle množin S_i sestavíme permutaci $(b_1, \dots, b_n)$ z prvků množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ následovně: nejdříve zapíšeme v sestupném pořadí prvky S_1 , potom zapíšeme v sestupném pořadí prvky S_2 a tak dále. Tím získáme zobrazení, které každé plné n -tici jednoznačně přiřadí permutaci bez opakování z prvků množiny $\{1, 2, \dots, n\}$.

Ukažme, že při tomto zobrazení je každá permutace obrazem jediné plné n -tice. Pro danou permutaci $(b_1, \dots, b_n)$, nechť $S_1 = \{b_1, \dots, b_{k_1}\}$, kde $b_1 > \dots > b_{k_1} < b_{k_1+1}$, $S_2 = \{b_{k_1+1}, \dots, b_{k_2}\}$, kde $b_{k_1+1} > \dots > b_{k_2} < b_{k_2+1}$, a tak dále. Položme $a_j = i$, kdykoliv $j \in S_i$. Pak $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ je zřejmě plná n -tice.

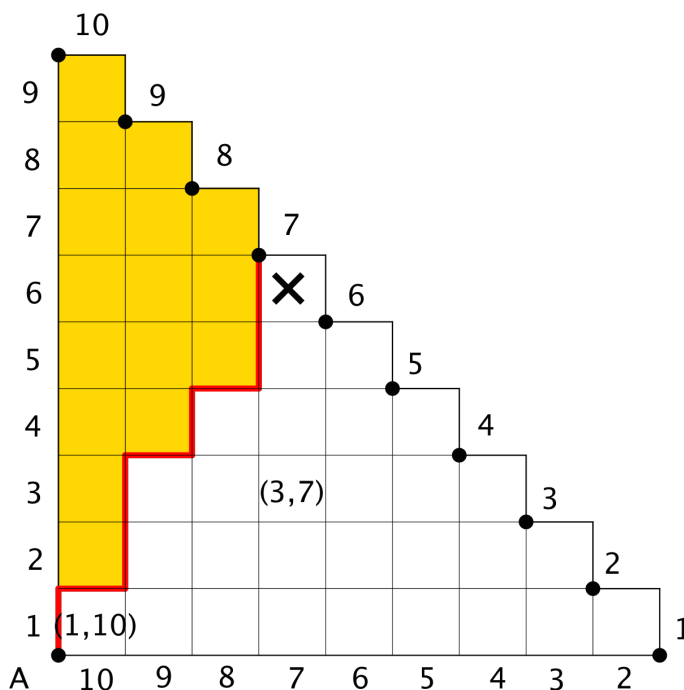
Pro dané n tedy mezi množinou plných n -tic a množinou všech permutací bez opakování z prvků množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ existuje bijekce. Všechny plných n -tic s daným číslem n je tudíž skutečně $n!$, což jsme chtěli dokázat.

Příklad 15. Letecká společnost provozuje (obousměrné) spoje mezi některými (neuspořádanými) dvojicemi z n měst (možné je i neprovozovat žádný spoj či všechny). Města přitom mají různé priority. Pokud navíc existuje spoj mezi městy A , B a město C má vyšší prioritu než B , tak musí existovat i spoj mezi městy A , C . Ukažte, že počet možností, jaké spoje provozovat, je 2^{n-1} .¹⁵

Řešení. Pro větší názornost řešme úlohu nejdříve pro konkrétní $n = 10$. Daná města označíme čísky $1, 2, \dots, 10$ podle jejich rostoucí priority. Spoj mezi městy x a y , kde $x < y$,

¹⁵M. Olšák: Kombinatorické (ne)počítání

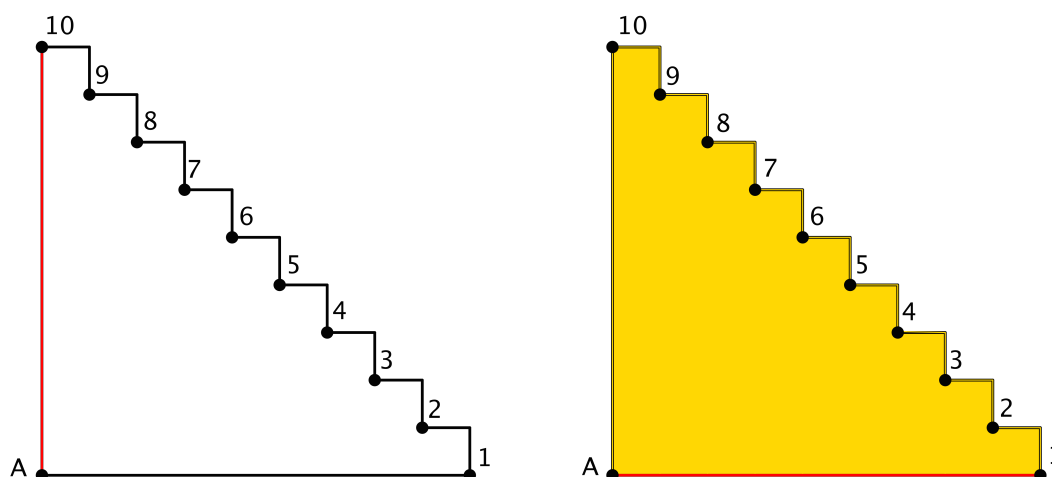
zapišeme dvojici (x, y) a všechny existující spoje vyznačíme žlutými čtverečky ve „scho-
dišti“, jak znázorňuje obrázek 2.9. Tam je příklad vyhovujícího výběru spojení, kdy žádný
spoj $(1, y)$ neexistuje, spoj $(2, y)$ existuje pouze pro $y = 10$ (takže existují i všechny spoje
 $(x, 10)$, kde $2 \leq x \leq 9$, vyznačené v prvním svislém sloupci nalevo). Dále spoj $(3, y)$ exis-
tuje pouze pro $y = 10$, spoj $(4, y)$ existuje s nejmenším $y = 9$ (takže existují spoje $(x, 9)$, kde
 $4 \leq x \leq 8$, vyznačené ve druhém svislém sloupci). Spoj $(5, y)$ má nejmenší $y = 8$ (spoje
 $(5, 8)$, $(6, 8)$ a $(7, 8)$ tvoří třetí sloupec). Zbývá dodat, že spoj $(6, 7)$ neexistuje (toto pole je
na obrázku 2.9 vyznačeno křížkem) a informace o vybraných spojích je tím úplná.



Obrázek 2.9: Příklad výběru spojů, s vyznačenými čtverečky $(1, 10)$ a $(3, 7)$

Obecně vzato, vyhovující výběr spojení je jednoznačně určen posloupností několika
sousedních sloupců, vybarvených ve „scho-
dišti“ odshora a od levého okraje doprava tak,
že jejich délky zleva doprava tvoří nerostoucí posloupnost, neboť pro každé vybarvené pole
musí být obarvena nejen všechna pole nad ním, ale i nalevo od něj. Celý vybarvený útvar je
pak určen „dolní hranicí“, která je na obrázku 2.9 vybarvena červeně. Jde o cestu tvořenou
kroky „nahoru“ a „doprava“, která spojuje roh označený písmenem A s některým z bodů
označených čísly $1, 2, \dots, 10$. Na obrázku 2.10 jsou znázorněny „extrémní“ případy, kdy
není vybrán žádný spoj, resp. jsou vybrány všechny spoje. Je zřejmé, že naopak každá
popsaná cesta je popisem jediného vyhovujícího výběru spojení. Sestrojili jsme tak bijekci
mezi množinou vyhovujících způsobů provozování spojení a množinou cest z bodu A do
libovolného z bodů $1, 2, \dots, 10$ kroky „nahoru“ a „doprava“, které dále označíme N a D .

Zbývá určit, kolik popsanych cest, které lze zachytit posloupností písmen N a D (pro
cestu z obrázku 2.9 se jedná o posloupnost $NDNNDNDNN$), dohromady existuje. Zřejmě
pro počty n, d písmen N a D v každé sestavené posloupnosti platí $n + d = 9$ a naopak každá
9-členná posloupnost z písmen N, D určuje jedinou vyhovující cestu. Proto je hledaný



Obrázek 2.10: „Extrémní“ případy: není vybrán žádný spoj (vlevo), jsou vybrány všechny spoje (vpravo)

počet všech cest (a tedy i možností, jaké spoje lze provozovat mezi 10 městy) roven 2^9 .

Pro obecné n je pak počet možností, jaké spoje provozovat, roven 2^{n-1} , což jsme chtěli dokázat.

Příklad 16. Pro libovolná přirozená čísla $k \leq n$ dokažte identitu Li-Žen-Šu¹⁶

$$\sum_{j=0}^k \binom{k}{j}^2 \binom{n+2k-j}{2k} = \binom{n+k}{k}^2. \quad (1)$$

Řešení (Surányiův důkaz). Daná identita je zvláštní případ (pro $k = l$) vztahu

$$\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \binom{l}{i} \binom{n+k+l-i}{k+l} = \binom{n+k}{k} \binom{n+l}{l}, \quad (2)$$

ve kterém budeme předpokládat, že k, l a n jsou přirozená čísla a $k = \min(k, l, n)$.

Nechť $r_1, r_2, \dots, r_u$ jsou celá čísla. Definujme:

$$P(r_1, r_2, \dots, r_u) = \begin{cases} \frac{(r_1+r_2+\dots+r_u)!}{r_1!r_2!\dots r_u!}, & \text{je-li } r_v \geq 0 \text{ pro } v = 1, 2, \dots, u, \\ 0, & \text{je-li některé z čísel } r_v \text{ záporné.} \end{cases}$$

Vynásobíme-li rovnost (2) výrazem

$$P(k, l) = \frac{(k+l)!}{k!l!},$$

dostaneme rovnost

$$\sum_{i=0}^k \frac{(n+k+l-i)!}{(k-i)!(l-i)!(n-i)!i!i!} = \frac{(n+k)!(n+l)!(k+l)!}{n!n!k!l!}$$

¹⁶Josef Kaucký: Kombinatorické identity, str. 176 - 179

neboli

$$\sum_{i=0}^k P(k-i, l-i, n-i, i, i) = P(k, l)P(l, n)P(n, k), \quad (3)$$

kterou se budeme dále zabývat. Vzhledem k předpokladu $k = \min(k, l, n)$ je $k-i \geq 0$, $l-i \geq 0$, $n-i \geq 0$ pro každý index i z levé strany (3).

Předpokládejme, že máme k písmen d , l písmen e , n písmen f a utvořme:

- (i) všechny permutace ze všech prvků d, e ;
- (ii) všechny permutace ze všech prvků e, f ;
- (iii) všechny permutace ze všech prvků f, d .

Pak na pravé straně rovnice (3) je počet všech trojic permutací, z nichž první je typu (i), druhá typu (ii) a třetí typu (iii).

Uveďme konkrétní příklad, zvolme $k = 2, l = 3, n = 4$. Všechny trojice permutací je

$$\binom{5}{2} \binom{7}{3} \binom{6}{2} = 5250$$

a kupříkladu

$$(i) edeed, \quad (ii) eeeffff, \quad (iii) ffdfff \quad (4)$$

je jedna z nich.

Všimněme si, že všechny permutace v trojici nemohou začínat stejným prvkem: týmž prvkem mohou začínat dvě permutace, na začátku všech permutací v trojici mohou být také různé prvky. Zde jsou možné dva případy. Buď (i) začíná písmenem e , potom (ii) musí začínat písmenem f a (iii) písmenem d . Nebo (i) začíná písmenem d , potom (iii) musí začínat písmenem f a (ii) písmenem e . Tato uspořádání prvních prvků označme:

$$g = (efd), \quad h = (def).$$

Každé ze zmíněných trojic permutací nyní přiřadíme jednu novou permutaci z prvků d, e, f, g, h . Začínají-li dvě permutace stejným písmenem, pak v nich toto písmeno škrtneme, ale napíšeme je zato jako první prvek v nové permutaci. Začínají-li všechny permutace různými prvky, pak je všechny vynecháme a na začátek nové permutace dáme písmeno g nebo h podle toho, kterou z těchto skupin tvoří začáteční prvky permutací. Se zbytky permutací, které po této operaci zůstanou, nakládáme úplně stejně až do vyčerpání všech prvků všech permutací.

U trojice permutací (4) tak postupně dostaneme (zkracované permutace píšeme v jednotlivých krocích do sloupců)

$$\begin{array}{cccccc} edeed & deed & eed & ed & ed & d \\ eeeffff & eeffff & effff & ffff & fff & ff & ff & f \\ ffdfff & ffdfff & fddff & fddff & ddff & dff & ff & f \end{array}$$

a nová přiřazená permutace je

$$ehfegdff. \quad (5)$$

Tak jsme trojici permutací (4) přiřadili permutaci (5) z písmen d, e, f, g, h .

Ukažme, že naopak permutaci (5) patří jen jedna trojice permutací (i), (ii), (iii): trojice (4). První prvek e v permutaci (5) může být pouze v permutacích (i) a (ii); napišme v nich tedy na začátek e . Druhý prvek v této permutaci je h , což je skupina prvků (def) . Napišme tedy v (i) na druhé místo d , ve (ii) na druhé místo e a ve (iii) na začátek f . To provedeme se všemi prvky (5) a dostaneme postupně po sloupcích trojice

e	ed	ede	ede	$edee$	$edeed$	$edeed$	$edeed$
e	ee	eee	$eeef$	$eeeff$	$eeeff$	$eeeff$	$eeeff$
–	f	f	ff	ffd	ffd	ffd	ffd

Přejdeme nyní od konkrétní situace k obecné a předpokládejme, že nová permutace má i_1 prvků d , i_2 prvků e , i_3 prvků f , i_4 prvků g a i_5 prvků h . Pokusme se této permutaci přiřadit nazpět trojici permutací (i), (ii) a (iii) a ptejme se nejdříve, kolik písmen d a kolik e přijde do (i), kolik písmen e a kolik f přijde do (ii) a kolik písmen f a kolik d přijde do (iii).

Uvážíme-li, že g značí skupinu efd a h skupinu def , přijde do

(i) $i_1 + i_5$ písmen d , $i_2 + i_4$ písmen e ,

(ii) $i_2 + i_5$ písmen e , $i_3 + i_4$ písmen f ,

(iii) $i_3 + i_5$ písmen f , $i_1 + i_4$ písmen d .

Ale v permutaci (i) je k písmen d a l písmen e , v permutaci (ii) je l písmen e a n písmen f a v permutaci (iii) je n písmen f a k písmen d . Dostáváme tedy rovnice

$$k = i_1 + i_5 = i_1 + i_4,$$

$$l = i_2 + i_5 = i_2 + i_4,$$

$$n = i_3 + i_5 = i_3 + i_4.$$

Z toho předně plyne $i_4 = i_5$, což znamená, že v nové permutaci je stejný počet g a h . Označme proto dále $i_4 = i_5 = i$.

Nová permutace tedy má po řadě

$$i_1 = k - i, i_2 = l - i, i_3 = n - i, i_4 = i, i_5 = i \tag{6}$$

prvků d, e, f, g, h . Zřejmě $i = 0, 1, 2, \dots, \min(k, l, n) = k$.

Kupříkladu pro $k = 2, l = 3, n = 4$ jsou

$$eeedd, ffffee, ddffff$$

$$eeedd, eeffff, ddffff$$

dvě trojice permutací; u první je $i = \min(k, l, n) = 2$, u druhé je $i = 0$.

Závěrem tedy můžeme říci, že jsme každé trojici permutací typů (i), (ii), (iii) jednoznačně přiřadili jednu permutaci z prvků d, e, f, g, h . Toto přiřazení je prosté zobrazení, jehož obor hodnot je tvořen všemi permutacemi z prvků d, e, f, g, h , v nichž tyto prvky mají počty výskytů po řadě i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 z rovnosti (6) pro některé $i = 0, 1, \dots, k$. Trojic permutací je

$$P(k, l)P(l, n)P(n, k),$$

počet druhých permutací je

$$\sum_{i=0}^k P(k-i, l-i, n-i, i, i)$$

a srovnáním podle pravidla bijekce vychází

$$\sum_{i=0}^k P(k-i, l-i, n-i, i, i) = P(k, l)P(l, n)P(n, k),$$

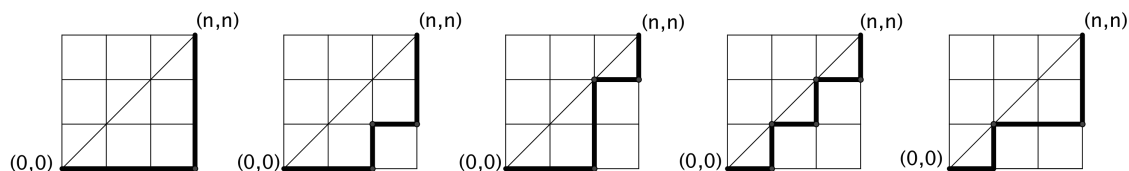
což je rovnost (3), kterou jsme měli za úkol dokázat.

Kapitola 3

Catalanova čísla

V příkladu 18 kapitoly 1 jsme určili počet všech cest z bodu $(0,0)$ do bodu (n,n) po horizontálních a svislých úsečkách mezi body s celočíselnými souřadnicemi, s povolenými přesuny doprava nebo nahoru a splňujících navíc podmínku, že cesta neprojde žádným bodem nad spojnici počátečního a koncového bodu. Na obrázku 3.1 jsou vyhovující cesty pro $n = 3$. Počet těchto cest je pro obecné n roven $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

Posloupnost těchto čísel má v kombinatorice širší význam (což potvrzuje i tato kapitola). Čísla byla pojmenována po belgicko-francouzském matematikovi *Eugènu Charlesi Catalanovi* (1814 - 1894). Kromě kombinatoriky, kde se zabýval například počtem možných triangulací konvexního mnohoúhelníka (viz příklad 3.14), se tento matematik věnoval také teorii čísel (Catalanova věta) a za zmínku rovněž stojí jeho dlouholetá korespondence s ruským matematikem Čebyševem.



Obrázek 3.1: Vyhovující cesty pro $n = 3$

Definice. Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ definujme n -té Catalanovo číslo C_n předpisem

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Pro doplnění uvádíme několik prvních hodnot, kterých Catalanova čísla nabývají.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796

Tato kapitola je složena z kombinatorických úloh, jejichž výsledek je roven právě Catalanovu číslu. Příklady byly převzaty z nejružnějších zahraničních i českých zdrojů (některé jsou vlastní příspěvek autorky) a opět byly uspořádány od snadnějších k obtížnějším.

Příklad 1. Ukažte, že n -té Catalanovo číslo udává počet „správných“ pořadí n levých a n pravých závorek, které vytvoří n párů závorek.¹

Řešení. Pro ilustraci uveďme všechna vyhovující „závorková“ pořadí pro $n = 3$:

$$((())), \quad (()()), \quad ((())()), \quad ()()(), \quad ()(())$$

Sestrojíme bijekci mezi množinou všech vyhovujících „závorkových“ pořadí pro dané n a množinou všech vyhovujících cest z příkladu 18 z kapitoly 1. Požadovanou bijekci zřejmě získáme, přiřadíme-li každé levé závorce jeden krok doprava a každé pravé závorce jeden krok nahoru. Podmínka, že závorky jsou v pořadí umístěny správně, přesně koresponduje s podmínkou, že cesta neprojde žádným bodem nad spojnicí počátečního a koncového bodu. (V daném pořadí n levých a n pravých závorek poznáme, které závorky tvoří páry, tak, že procházíme pořadí zleva doprava a k první dosud nespárované pravé závorce přiřadíme nejbližší zleva stojící dosud nespárovanou levou závorku. Proto stejně jako v nevyhovujícím cestě nastává po určitém počtu kroků situace, že počet dosud učiněných kroků nahoru převyšuje počet dosud učiněných kroků doprava, tak v nevyhovujícím pořadí závorek po vytvoření určitého počtu párů závorek převyší počet dosud spárovaných pravých závorek počet dosud spárovaných levých závorek.)

Tím jsme dokázali, že „správných“ pořadí n levých a n pravých závorek je stejně jako vyhovujících cest z příkladu 18 z kapitoly 1, tedy

$$\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = C_n.$$

Poznámka. Tímto příkladem jsme v podstatě vyřešili úlohu o správném uzávorkování součinu $n+1$ činitelů $x_1 x_2 \cdots x_{n+1}$, ke které se ještě vrátíme při řešení příkladu 14. Proto uveďme všechna vyhovující uzávorkování součinu 4 činitelů pro $n = 3$:

$$(((x_1 x_2) x_3) x_4), ((x_1 (x_2 x_3)) x_4), ((x_1 x_2) (x_3 x_4)), (x_1 ((x_2 x_3) x_4)), (x_1 (x_2 (x_3 x_4))).$$

Příklad 2. Ukažte, že počet posloupností složených z n jedniček a n mínus jedniček (které budeme v zápisu značit zkráceně $+$, resp. $-$) takových, že každý dílčí součet prvních i ($i \leq 2n$) členů posloupnosti je nezáporný, je roven n -tému Catalanovu číslu.²

Řešení. Pro ilustraci uveďme všechny vyhovující posloupnosti pro $n = 3$:

$$+++--- \quad ++-+- \quad ++--+- \quad +-+-+- \quad -+++-$$

Sestrojíme bijekci mezi množinou všech vyhovujících posloupností z n jedniček a n mínus jedniček a vyhovujících pořadí n levých a n pravých závorek z příkladu 1. Požadovanou bijekci zřejmě získáme následovně: každé jedničce přiřadíme levou závorku a každé mínus jedničce pravou závorku. Podmínka, že závorky jsou v pořadí umístěny správně, přesně koresponduje s podmínkou, že žádný dílčí součet prvních i členů posloupnosti není záporný. (Stejně jako v nevyhovujícím pořadí závorek po vytvoření určitého počtu párů závorek převyší počet dosud spárovaných pravých závorek počet dosud spárovaných levých závorek,

¹Yufei Zhao: Bijections

²Richard P. Stanley: Bijective proof problems

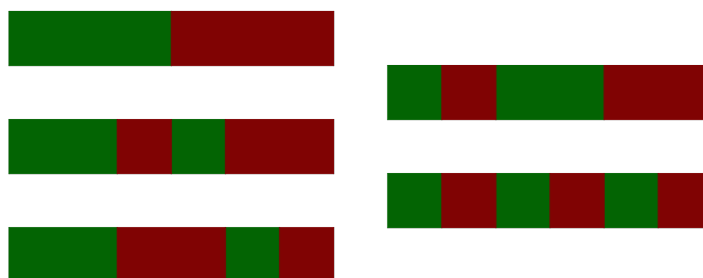
tak v nevyhovujících posloupnostech po umístění určitého počtu čísel převyšuje počet mínus jedniček počet jedniček, a proto příslušný dílčí součet bude záporný.)

Tím jsme dokázali, že správných posloupností z n jedniček a n mínus jedniček je stejně jako vyhovujících „závorkových“ výrazů z příkladu 1, tedy C_n .

Příklad 3. Eva se rozhodla, že si uplete šálu tvořenou n zelenými a n červenými stejně širokými proužky. Protože má opravdu ráda zelenou barvu, šálu bude plést tak, aby počet zelených proužků (hotových i rozpletených) po celou dobu pletení převyšoval, případně se aspoň rovnal počtu červených proužků (hotových i rozpletených). Ukažte, že počet šál, které takto může pro dané n uplést, je roven n -tému Catalanovu číslu.³

Řešení. Sestrojme bijekci mezi množinou všech vyhovujících posloupností z jedniček a mínus jedniček z příkladu 2 a množinou všech vyhovujících šál: každé jedničce přiřadíme zelený proužek a každé mínus jedničce proužek červený. Podmínka, že žádný dílčí součet prvních i členů posloupnosti jedniček a mínus jedniček není záporný, přesně koresponduje s podmínkou, že počet červených proužků během pletení nikdy nepřevyší počet proužků zelených (podmínku stačí kontrolovat jen po dopletení každého proužku). Mezi oběma množinami tedy zřejmě existuje bijekce a počet vyhovujících šál je tedy roven n -tému Catalanovu číslu.

Na obrázku 3.2 jsou všechny vyhovující šály pro $n = 3$. Eva šálu plete zleva doprava.



Obrázek 3.2: Vyhovující šály pro $n = 3$

Příklad 4. Michal má za úkol přečíst n francouzských a n španělských knih. Protože je mu bližší francouzština, rozhodl se, že začne knihou v náročnější španělštině a v četbě bude pokračovat tak, aby počet španělských knih (přečtených i rozečtených) stále převyšoval, nebo byl aspoň roven počtu knih francouzských (přečtených i rozečtených). Ukažte, že počet způsobů, jak může četbu těchto $2n$ knih provést, je roven n -tému Catalanovu číslu. Pořadí, v jakém bude číst n francouzských (respektive n španělských) knih, je dané, protože na sebe jednotlivé knihy ve stejném jazyce navazují.⁴

Řešení. Sestrojíme bijekci mezi množinou vyhovujících šál z příkladu 3 a množinou vyhovujících pořadí knih: každé španělské knize přiřadíme zelený proužek a každé francouzské knize proužek červený. Podmínka, že počet francouzských knih během čtení nikdy nepřevyší počet knih španělských, přesně koresponduje s podmínkou, že počet červených

³Vlastní příspěvek autorky

⁴Vlastní příspěvek autorky

proužků během pletení nikdy nepřevyšší počet proužků zelených (podmínku stačí kontrolovat pouze po dočtení každé knihy). Mezi oběma množinami tedy zřejmě existuje bijekce a počet vyhovujících pořadí knih je tedy roven n -tému Catalanovu číslu.

Příklad 5. Ve třídě 1.A je 32 žáků. Třída si má zvolit svého předsedu. Na tuto funkci jsou 2 kandidáti, kteří sami volit nemohou (voleb se tedy zúčastní právě 30 voličů). Kolika způsoby mohlo probíhat sčítání hlasů, jestliže na konec dostali oba kandidáti stejný počet hlasů, ale při průběžných výsledcích (po každém sečteném hlasu) první kandidát vždy vedl, případně měl stejně hlasů jako jeho soupeř? Dva postupy sčítání hlasů považujeme za různé, jen když se po sečtení některého počtu hlasů výsledky obou postupů liší. Nerozlišujeme tedy, kteří žáci dali průběžně sečtené hlasy.⁵

Řešení. Sestrojíme bijekci mezi množinou správných závorkových pořadí z příkladu 1 pro $n = 15$ a množinou vyhovujících průběhů sčítání hlasů. Každému hlasu pro prvního kandidáta přiřadíme levou závorku, každému hlasu pro druhého kandidáta pravou závorku. Podmínka, že počet hlasů pro druhého kandidáta během sčítání nikdy nepřevyšší počet hlasů pro prvního kandidáta, přesně koresponduje s podmínkou, že jsou závorky správně uspořádány. Mezi oběma množinami tedy zřejmě existuje bijekce a počet vyhovujících průběhů sčítání hlasů je tedy $C_{15} = 9694845$.

Příklad 6. Na kružnici je dáno $2n$ bodů. Ukažte, že počet n -tic tětiv, které je spojují tak, že se navzájem neprotínají, je roven n -tému Catalanovu číslu.⁶

Řešení. Na obrázku 3.3 jsou pro ilustraci vyhovující n -tice tětiv pro $n = 3$. Sestrojíme bijekci mezi „závorkovými“ výrazy z příkladu 1 a těmito skupinami neprotínajících se tětiv. Každé n -tici tětiv přiřadíme n párů závorek následovně: pevně zvolíme jeden z daných $2n$ bodů. Jelikož v tomto bodě začíná první tětiva, přiřadíme mu levou závorku. Potom postupujeme třeba po směru chodu hodinových ručiček. Bodu, ve kterém začíná nová tětiva, přiřadíme levou závorku. Bodu, ve kterém končí tětiva, jejímž začátkem jsme už prošli dříve, přiřadíme pravou závorku. Každé n -tici tětiv je tak jednoznačně přiřazeno jedno uspořádání n párů závorek a naopak. Mezi oběma množinami tedy existuje bijekce a počet n -tic navzájem se neprotínajících tětiv, které spojují $2n$ daných bodů ležících na kružnici, je skutečně roven n -tému Catalanovu číslu C_n .

Pro doplnění, tětivám z obrázku 3.3 (vyjdeme-li z bodu úplně vlevo dole, levé závorky opět značí písmeno L , pravé P) přísluší následující závorková pořadí: $LLPLPP$, $LLPPLP$ (horní řada zleva doprava); $LLLPPP$, $LPLPLP$, $LPLLPP$ (dolní řada zleva doprava).

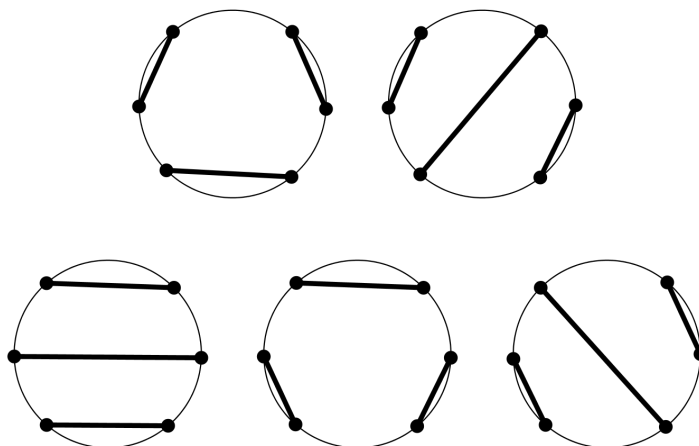
Příklad 7. Ukažte, že počet neprotínajících se spojení $2n$ bodů do n dvojic (viz obrázek 3.4) je roven n -tému Catalanovu číslu.⁷

Řešení. Sestrojíme bijekci mezi „závorkovými“ výrazy z příkladu 1 a uvažovanými neprotínajícími se spojeními $2n$ bodů. Každému spojení $2n$ bodů přiřadíme „správné“ pořadí n levých a n pravých závorek následovně: vyjdeme od bodu úplně vlevo. Jelikož v tomto bodě začíná první spojení bodů, přiřadíme mu levou závorku. Potom postupujeme doprava. Bodu, ve kterém začíná nové spojení, přiřadíme levou závorku. Bodu, ve kterém některé spojení končí, přiřadíme pravou závorku. Každému spojení $2n$ bodů je tak jednoznačně přiřazeno jedno správné pořadí n levých a n pravých závorek a zřejmě i naopak. Mezi

⁵Vlastní příspěvek autorky

⁶Richard P. Stanley: Bijective proof problems

⁷Richard P. Stanley: Bijective proof problems

Obrázek 3.3: Vyhovující skupiny tětiv pro $n = 3$

oběma množinami tedy existuje bijekce a počet navzájem se neprotínajících spojení $2n$ bodů je skutečně roven n -tému Catalanovu číslu.

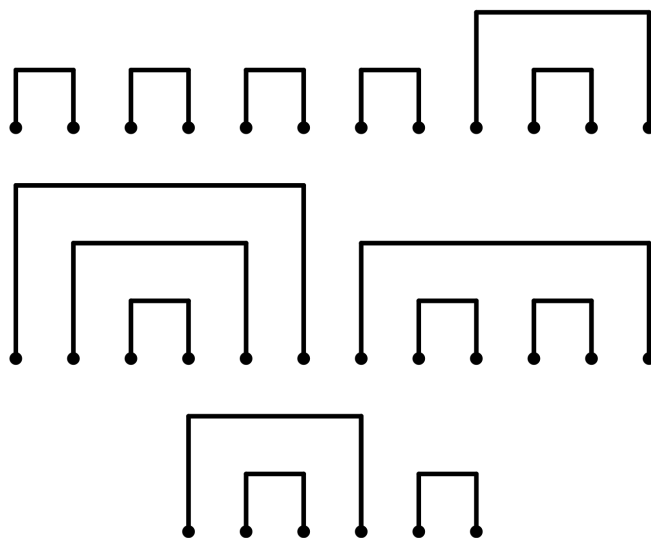
Pro doplnění, spojením bodů z obrázku 3.4 odpovídají následující pořadí závorek (levou závorku značí písmeno L , pravou P): $LPLPLP$, $LPLLPP$ (horní řada zleva doprava); $LLLPPP$, $LLPLPP$ (prostřední řada zleva doprava); $LLPLPP$ (nejspodnější řada).

Příklad 8. Ukažte, že n -té Catalanovo číslo udává počet všech těch posloupností $a_1, a_2, \dots, a_n$ složených z celých čísel a_i , kde $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, a přitom $a_i \leq i$ pro každé $i = 1, 2, \dots, n$. Například pro $n = 3$ jsou vyhovující posloupnosti 111, 112, 113, 122, 123.⁸

Řešení. Sestrojíme bijekci mezi množinou všech vyhovujících posloupností dané délky n a množinou všech vyhovujících cest z příkladu 18 z kapitoly 1. Každé cestě přiřadíme posloupnost $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ následovně: $a_i = 1 +$ (počet jednotkových čtverců mezi přímkami $x = i - 1$ a $x = i$, zdola ohraničený přímkou $y = 0$ a shora ohraničený danou cestou). Pokud by pro některé $i = 1, 2, \dots, n - 1$ platilo $a_i > a_{i+1}$, cesta by musela obsahovat krok o jedno místo dolů, což u uvažovaných cest není možné. Proto $a_i \leq a_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Jelikož cesta nikdy neprochází nad přímkou $x = y$, počet jednotkových čtverců v oblasti mezi přímkami $x = i - 1$ a $x = i$ je nejvýše $i - 1$ pro každé $i = 1, 2, \dots, n$. Proto platí $a_i \leq i$, $a_1 = 1$ a sestavená posloupnost $(a_1, \dots, a_n)$ má všechny potřebné vlastnosti.

Nyní ověříme, že dané přiřazení je bijekce. Každá posloupnost $(a_1, \dots, a_n)$, jež splňuje podmínky $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ a $a_i \leq i$ pro každé i , je obrazem jediné vyhovující cesty, kterou lze jednoznačně zrekonstruovat následovně. Číslo a_i určuje i -tý krok doprava, který jde z bodu $(i - 1, a_i - 1)$ do bodu $(i, a_i - 1)$. Zbylé kroky nahoru už ze znalosti všech kroků doprava jednoznačně doplníme – budou ležet na právě těch přímkách $x = i$, pro něž $a_{i+1} > a_i$, a půjde o $a_{i+1} - a_i$ kroků nahoru (přitom klademe $a_{n+1} = n + 1$). Takto určená cesta má všechny požadované vlastnosti.

⁸Richard P. Stanley: Bijective proof problems

Obrázek 3.4: Vyhovující spojení bodů pro $n = 3$

Mezi oběma množinami tedy existuje bijekce a počet daných n -členných posloupností je skutečně roven n -tému Catalanovu číslu C_n .

Příklad 9. Ukažte, že n -té Catalanovo číslo udává počet posloupností $b_1, b_2, \dots, b_n$ složených z celých čísel b_i , kde $b_1 = 0$ a $0 \leq b_{i+1} \leq b_i + 1$ pro každé $i = 1, 2, \dots, n-1$. Například pro $n = 3$ jsou vyhovující posloupnosti 000, 001, 010, 011, 012.⁹

Řešení. Sestrojíme bijekci mezi vyhovujícími posloupnostmi z příkladu 8 a vyhovujícími posloupnostmi z tohoto příkladu. Každé vyhovující posloupnosti $(a_1, \dots, a_n)$ z příkladu 8, kde $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, a přitom $a_i \leq i$ pro každé $i = 1, 2, \dots, n$, přiřadíme posloupnost celých čísel $(b_1, \dots, b_n)$ předpisem $b_i = i - a_i$, $i = 1, \dots, n$. Jelikož $a_1 = 1$, platí $b_1 = 0$. Jelikož $a_{i+1} \leq i + 1$, platí $b_{i+1} \geq 0$ pro každé $i = 1, 2, \dots, n-1$. Dále pro každé takové i platí, že

$$b_i - b_{i+1} = (i - a_i) - (i + 1 - a_{i+1}) = (a_{i+1} - a_i) - 1 \geq -1,$$

neboť $a_{i+1} \geq a_i$. Z $b_i - b_{i+1} \geq -1$ už máme $b_{i+1} \leq b_i + 1$, a tak sestavená posloupnost $(b_1, \dots, b_n)$ má všechny potřebné vlastnosti.

Nyní ověříme, že dané přiřazení je bijekce. Každé vyhovující posloupnosti $(b_1, \dots, b_n)$, kde $b_1 = 0$ a $0 \leq b_{i+1} \leq b_i + 1$ pro každé $i = 1, 2, \dots, n-1$, v souladu s výše uvedeným předpisem přiřadíme zpětně posloupnost celých čísel $(a_1, \dots, a_n)$ předpisem $a_i = i - b_i$, $i = 1, \dots, n$. Jelikož $b_i \geq 0$, platí $a_i \leq i$ pro každé $i = 1, 2, \dots, n-1$. Jelikož $b_1 = 0$, máme $a_1 = 1 \geq 1$. Dále pro každé takové i platí, že

$$a_{i+1} - a_i = (i + 1 - b_{i+1}) - (i - b_i) = 1 + b_i - b_{i+1} \geq 0,$$

neboť $b_{i+1} \leq b_i + 1$, a tak sestavená posloupnost $(a_1, \dots, a_n)$ má všechny potřebné vlastnosti.

Mezi oběma množinami tedy existuje bijekce, a proto počet posloupností $(b_1, \dots, b_n)$ je podle výsledku příkladu 8 skutečně roven n -tému Catalanovu číslu.

⁹Richard P. Stanley: Bijective proof problems

Příklad 10. Ukažte, že n -té Catalanovo číslo udává počet $(n-1)$ -členných posloupností složených z celých čísel nepřevyšujících číslo 1, u kterých je každý součet prvních k členů ($1 \leq k \leq n-1$) nezáporný.¹⁰

Řešení. Například pro $n = 3$ vyhovuje pět dvojčlenných posloupností:

$$0,0 \quad 0,1 \quad 1,0 \quad 1,1 \quad 1,-1$$

Sestrojíme bijekci mezi vyhovujícími posloupnostmi z příkladu 9 a vyhovujícími posloupnostmi z tohoto příkladu. Každé vyhovující posloupnosti $(b_1, \dots, b_n)$ z příkladu 9, kde $b_1 = 0$ a $0 \leq b_{i+1} \leq b_i + 1$ pro každé $i = 1, 2, \dots, n-1$, přiřadíme posloupnost celých čísel $(c_1, \dots, c_{n-1})$ předpisem $c_i = b_{i+1} - b_i$, $i = 1, \dots, n-1$. Jelikož $b_{i+1} \leq b_i + 1$, pro každé i platí $c_i \leq 1$. Pro součet prvních k členů posloupnosti $(c_1, \dots, c_{n-1})$ máme

$$c_1 + \dots + c_k = b_2 - b_1 + b_3 - b_2 + \dots + b_k - b_{k-1} + b_{k+1} - b_k = b_{k+1} - b_1 \leq 0,$$

neboť $b_1 = 0$ a $b_{k+1} \geq 0$ pro každé $k = 1, 2, \dots, n-1$. Posloupnost $(c_1, \dots, c_{n-1})$ tak má všechny potřebné vlastnosti ze zadání.

Nyní ověříme, že dané přiřazení je skutečně bijekce. Každé vyhovující posloupnosti $(c_1, \dots, c_{n-1})$ v souladu s výše uvedeným předpisem přiřadíme zpětně posloupnost celých čísel $(b_1, \dots, b_n)$ předpisem $b_1 = 0$, $b_{i+1} = b_i + c_i$, $i = 1, \dots, n-1$. Díky předpokladu $c_i \leq 1$ máme $b_{i+1} \leq b_i + 1$ pro každé $i = 1, \dots, n-1$. Jelikož každý dílčí součet $c_1 + \dots + c_k$ je dle podmínky nezáporný, platí

$$b_{k+1} = b_1 + c_1 + \dots + c_k \geq b_1 \geq 0.$$

Mezi oběma množinami tedy existuje bijekce, a proto počet daných posloupností je skutečně roven n -tému Catalanovu číslu.

Příklad 11. Ukažte, že n -té Catalanovo číslo udává počet n -členných posloupností složených z celých čísel větších než -2 , u kterých je každý součet prvních k členů ($1 \leq k \leq n$) nezáporný a navíc součet všech n členů je roven nule.¹¹

Řešení. Například pro $n = 3$ jsou vyhovující následující posloupnosti:

$$0,0,0 \quad 0,1,-1 \quad 1,0,-1 \quad 1,-1,0 \quad 2,-1,-1$$

Sestrojíme bijekci mezi posloupnostmi plus a mínus jedniček z příkladu 2 a vyhovujícími posloupnostmi z tohoto příkladu. Každé vyhovující posloupnosti $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ z tohoto příkladu, pro kterou tedy platí $a_k \leq -1$ a $a_1 + a_2 + \dots + a_k \leq 0$ pro každé $k = 1, \dots, n$, navíc $a_1 + \dots + a_n = 0$, přiřadíme posloupnost sestavenou z čísel $+1$ a -1 takto:

$$\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{a_1+1}, -1, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{a_2+1}, -1, \dots, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{a_n+1}, -1$$

Vytvořená posloupnost zřejmě obsahuje právě n čísel -1 ; počet čísel $+1$ určíme sečtením:

$$(a_1 + 1) + (a_2 + 1) + \dots + (a_n + 1) = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + n = 0 + n = n,$$

¹⁰Richard P. Stanley: Bijective proof problems

¹¹Richard P. Stanley: Bijective proof problems

takže posloupnost rovněž obsahuje právě n čísel $+1$. Jelikož pro každé k je $a_k \geq -1$, je $a_k + 1 \geq 0$ (v případě, kdy $a_k + 1 = 0$, následuje po předchozím čísle -1 další číslo -1). Protože žádný součet několika prvních členů v původní posloupnosti není záporný, je $a_1 \geq 0$, takže $a_1 + 1 > 0$ a zobrazovaná posloupnost začíná minimálně jedním číslem $+1$. Zbývá ověřit, že žádný součet několika prvních členů v nové posloupnosti není záporný (tedy že počet plus jedniček je vždy větší nebo roven počtu mínus jedniček). To zřejmě bude platit, když to ověříme pro součty končící číslem (-1) : uvažme situaci po umístění k čísel -1 . Pro každé $k = 1, \dots, n$ máme:

$$(a_1 + 1) - 1 + \dots + (a_k + 1) - 1 = (a_1 + \dots + a_k) + k - k = a_1 + \dots + a_k \geq 0.$$

Každé posloupnosti jsme tedy jednoznačně přiřadili správnou posloupnost n plus jedniček a n mínus jedniček z příkladu 2.

Nyní ověříme, že dané přiřazení je skutečně bijekce. Každé vyhovující posloupnosti složené z n plus jedniček a n mínus jedniček v souladu s výše uvedenou konstrukcí zpětně přiřadíme n -tici čísel $(a_1, \dots, a_n)$ takto: určíme počet plus jedniček před první mínus jedničkou a zmenšíme ho o jedna — tak získáme číslo a_1 (každá vyhovující posloupnost začíná minimálně jednou plus jedničkou, takže $a_1 \geq 0$). Potom určíme počet plus jedniček mezi první a druhou mínus jedničkou a zmenšíme ho o jedna — tak získáme číslo a_2 . Takto postupujeme dále, až nakonec určíme počet plus jedniček mezi předposlední a poslední mínus jedničkou a zmenšíme ho o jedna — tak získáme číslo a_n . Jelikož počet plus jedniček mezi dvěma mínus jedničkami je vždy nezáporný, platí $a_i \geq -1, i = 2, 3, \dots, n$. Výchozí posloupnost obsahovala právě n plus jedniček; od tohoto počtu jsme odečetli v každém z čísel $a_1, \dots, a_n$ jednu jedničku, proto zřejmě platí $a_1 + \dots + a_n = 0$. Zbývá ověřit, že každý součet několika prvních členů je nezáporný. Jelikož počet plus jedniček v každém začátku výchozí posloupnosti vždy převyšuje, nebo je roven počtu mínus jedniček, před k -tou mínus jedničkou je umístěno minimálně k plus jedniček. A proto pro každé $k = 1, 2, \dots, n$ platí:

$$a_1 + \dots + a_k \geq k - k = 0.$$

Posloupnost $(a_1, \dots, a_n)$ tak má všechny potřebné vlastnosti ze zadání.

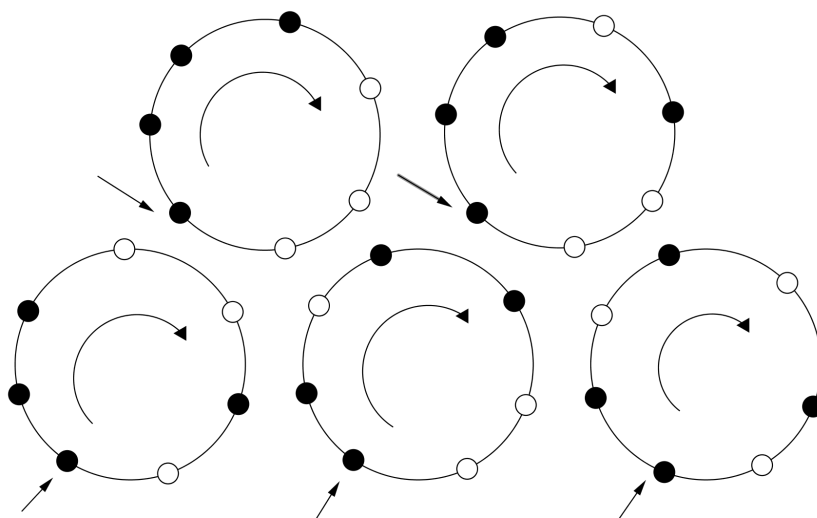
Mezi oběma množinami tedy existuje bijekce, a proto počet daných posloupností je skutečně roven n -tému Catalanovu číslu.

Příklad 12. Ukažte, že n -té Catalanovo číslo je rovno počtu náhrdelníků s n bílými a $n + 1$ černými korálky, přičemž náhrdelníky lišící se pouze otočením (nikoli překlopením) považujeme za nerozlišitelné.¹²

Řešení. Na obrázku 3.5 jsou vyhovující náhrdelníky pro $n = 3$. Na každém náhrdelníku je přitom šipkou určen jistý černý korálek, který pro naše řešení bude mít rozhodující význam a jehož vlastnost nyní popíšeme.

Na libovolném popsaném náhrdelníku označme jeden bílý korálek k_0 a všechny další od k_0 ve směru chodu hodinových ručiček označme $k_1, \dots, k_{2n}$. Ukážeme, že existuje jediné $j \in \{1, \dots, 2n\}$ s následující vlastností: korálek k_j je černý a posloupnost korálků $k_{j+1}, k_{j+2}, \dots, k_{2n}, k_0, \dots, k_{j-1}$ (z nichž je n černých a n bílých) má v každém úseku několika svých prvních členů aspoň tolik černých korálků jako bílých. Takový korálek k_j vyjde pro libovolnou volbu bílého korálku k_0 na daném náhrdelníku zřejmě jeden a týž (při zvoleném

¹²M. Olšák: Kombinatorické (ne)počítání

Obrázek 3.5: Klíčový korálek k_j u náhrdelníků pro $n = 3$

směru procházení korálků). To spolu s výsledkem příkladu 2 bude znamenat, že pro dané n je počet různých náhrdelníků skutečně roven n -tému Catalanovu číslu C_n .

Abychom dokázali existenci a jedinečnost korálku k_j , zavedme čísla

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{je-li } k_i \text{ černý korálek,} \\ -1, & \text{je-li } k_i \text{ bílý korálek} \end{cases}$$

pro $i = 0, 1, 2, \dots, 2n$. Dále uvažujme součty

$$s_0 = x_0 = -1, \quad s_1 = x_0 + x_1, \quad \dots, \quad s_{2n} = x_0 + \dots + x_{2n} = 1.$$

S pomocí těchto součtů vyjádříme zkoumanou vlastnost posloupnosti $k_{j+1}, k_{j+2}, \dots, k_{2n}, k_0, \dots, k_{j-1}$ (s hledaným indexem $j \in \{1, \dots, 2n\}$). Rozlišíme dva typy úseků jejích prvních několika členů. Prvním typem bude úsek

$$k_{j+1}, k_{j+2}, \dots, k_r$$

pro libovolné $r \in \{j+1, j+2, \dots, 2n\}$. Rozdíl mezi počty černých a bílých koráleků (odečítaných v tomto pořadí) v takovém úseku je zřejmě roven $s_r - s_j$, což má být nezáporné číslo. Dostáváme tak pro úseky prvního typu celkově podmínku

$$s_j \leq \min\{s_r : j+1 \leq r \leq 2n\}$$

(v případě, kdy $j = 2n$, žádný úsek prvního typu neexistuje). Pro (delší) úseky druhého typu, které mají tvar

$$k_{j+1}, k_{j+2}, \dots, k_{2n}, k_0, k_1, \dots, k_r$$

pro libovolné $r \in \{0, 1, \dots, j-1\}$, má analogický rozdíl mezi počty černých a bílých koráleků hodnotu

$$(s_{2n} - s_j) + s_r = 1 - s_j + s_r = s_r - s_{j-1},$$

přitom jsme využili toho, že $s_{2n} = 1$ a že korálek k_j má být černý, a tak $j \geq 1$ a $s_j = s_{j-1} + 1$. Proto celkovou podmínku pro úseky druhého typu vyjádříme nerovností

$$s_{j-1} \leq \min\{s_r : 0 \leq r \leq j-1\}.$$

Rovnost $s_j = s_{j-1} + 1$ navíc umožňuje přepsat podmínku pro úseky prvního typu do ekvivalentní podoby

$$s_{j-1} < \min\{s_r : j+1 \leq r \leq 2n\}.$$

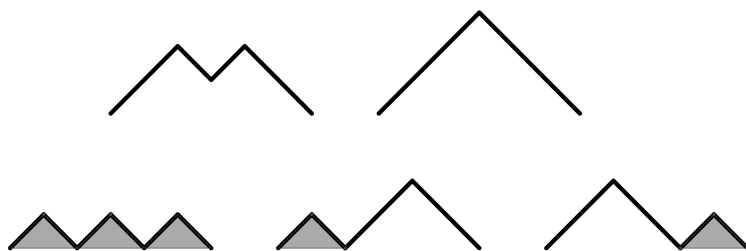
Vidíme tak, že vyhovující index $j-1$ z množiny $\{0, 1, \dots, 2n-1\}$ je jednoznačně určen takto: podtrhneme-li v posloupnosti

$$s_0 = -1, \quad s_1, \quad s_2, \quad \dots, \quad s_{2n-1}, \quad s_{2n} = 1$$

všechny její minimální členy, bude $j-1$ největším z indexů podtržených členů (v důsledku čehož bude $x_j = 1$, tj. korálek k_j bude černý).

Existence a jednoznačnost korálku k_j je tak dokázána a počet různých náhrdelníků je pro dané n opravdu roven n -tému Catalanovu číslu C_n .

Příklad 13. Dyckovou n -cestou rozumíme cestu o $2n$ krocích zprava doleva, která začíná ve výšce 0, v každé etapě zvýší výšku o 1 krokem šikmo nahoru, nebo sníží výšku o 1 krokem šikmo dolů, končí ve výšce 0 a nikdy nejde do záporné výšky. Vrcholy Dyckovy cesty nazveme krajní body všech kroků, které ji tvoří. Kopečkem v Dyckově n -cestě rozumíme vrchol ve výšce 1, jehož oba sousední vrcholy leží ve výšce 0. Vysvětlete, že počet všech Dyckových n -cest je stejně jako počet všech kopečků v nich obsažených roven n -tému Catalanovu číslu.¹³



Obrázek 3.6: Dyckovy n -cesty a kopečky pro $n = 3$

Řešení. Nejdříve sestojíme bijekci mezi množinou Dyckových n -cest (každá taková cesta zřejmě obsahuje právě n kroků šikmo nahoru a právě n kroků šikmo dolů, jinak by nemohla skončit ve výšce 0, ve které také začíná) a množinou posloupností jedniček a mínus jedniček z příkladu 2. Požadovanou bijekci zřejmě získáme následovně: každé jedničce přiřadíme krok šikmo nahoru a každé mínus jedničce krok šikmo dolů. Podmínka, že žádný dílčí součet prvních i členů posloupnosti není záporný, přesně koresponduje s podmínkou,

¹³M. Olšák: Kombinatorické (ne)počítání

že Dyckova cesta nikdy nejde do záporné výšky. (Stejně jako v nevyhovujících posloupnostech po umístění určitého počtu čísel převyšuje počet mínus jedniček počet jedniček, tak v nevyhovujících cestách po určitém počtu kroků počet kroků šikmo dolů převyší počet kroků šikmo nahoru, a proto se cesta dostane do záporné výšky.) Mezi oběma množinami tedy existuje bijekce a počet Dyckových n -cest je skutečně roven n -tému Catalanovu číslu.

Nyní sestrojíme bijekci mezi množinou všech kopečků v Dyckových n -cestách s daným n a mezi množinou všech vyhovujících posloupností z jedniček a mínus jedniček z příkladu 2. Už víme, že každou Dyckovu n -cestu můžeme reprezentovat posloupností $(e_1, e_2, \dots, e_{2n})$ z příkladu 2. Libovolný kopeček v takové cestě je pak dvojice $(e_k, e_{k+1}) = (1, -1)$ s vhodným indexem $k \in \{1, 2, \dots, 2n-1\}$, pro kterou v případě $k > 1$ navíc platí

$$e_1 + e_2 + \dots + e_{k-1} = 0.$$

Tomuto kopečku pak přiřadíme posloupnost $(f_1, f_2, \dots, f_{2n})$ určenou předpisem

$$(f_1, f_2, \dots, f_{2n}) = (e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+2}, \dots, e_{2n}, e_{k+1}),$$

která se liší od reprezentanta $(e_1, e_2, \dots, e_{2n})$ dotyčné Dyckovy cesty tím, že člen $e_{k+1} = -1$ přesuneme na poslední místo (není-li ovšem $k = 2n-1$, kdy obě posloupnosti budou stejné). Díky tomu bude i nová posloupnost $(f_1, f_2, \dots, f_{2n})$ splňovat podmínky příkladu 2.

Nyní naopak zvolíme libovolnou posloupnost $(f_1, f_2, \dots, f_{2n})$ vyhovující podmínkám příkladu 2 a ukážeme, že je v naší konstrukci obrazem právě jednoho kopečku jediné Dyckovy n -cesty. Zapišme libovolnou takovou cestu jako dříve $2n$ -ticí $(e_1, e_2, \dots, e_{2n})$ a hledaný kopeček (e_k, e_{k+1}) . Podle naší konstrukce má platit (zdůrazněme, že vždy je $f_{2n} = -1$)

$$(e_1, e_2, \dots, e_{2n}) = (f_1, f_2, \dots, f_k, f_{2n}, f_{k+1}, \dots, f_{2n-1}),$$

přitom v případě $k > 1$ musí být navíc splněna (podle definice kopečku) rovnost

$$f_1 + f_2 + \dots + f_{k-1} = 0.$$

Jedinečnost takové cesty i kopečku tak bude dokázána, když zdůvodníme, že k libovolné posloupnosti $(f_1, f_2, \dots, f_{2n})$ z příkladu 2 existuje jediný index k , $1 \leq k \leq 2n-1$, pro nějž posloupnost $(f_1, f_2, \dots, f_k, f_{2n}, f_{k+1}, \dots, f_{2n-1})$ rovněž vyhovuje podmínkám příkladu 2 a přitom součet jejích prvních $k-1$ členů je roven nule (je-li $k > 1$). To je ekvivalentní s tím, že jednak pro každé $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ platí nerovnost

$$f_1 + f_2 + \dots + f_i \geq 0,$$

která v případě $k > 1$ přechází pro $i = k-1$ v rovnost, jednak pro každé $i \in \{k, k+1, \dots, 2n-1\}$ díky rovnosti $f_{2n} = -1$ platí nerovnost

$$f_1 + f_2 + \dots + f_i \geq 1.$$

Odtud pro index k plyne, že je přesně o 1 větší než maximální i ($i < 2n$), pro které platí $f_1 + f_2 + \dots + f_i = 0$; pokud takové i neexistuje, je nutně $k = 1$. Poslední větou určený index k je jediný a má zřejmě všechny vlastnosti z předposlední věty. Tím je existence a jedinečnost cesty a příslušného v ní obsaženého kopečku dokázána.

Mezi oběma množinami tedy existuje bijekce a počet kopečků obsažených v Dyckových n -cestách je skutečně roven n -tému Catalanovu číslu.

Příklad 14. Ukažte, že počet rozdělení daného konvexního $(n + 2)$ -úhelníku na n trojúhelníků pomocí $n - 1$ jeho neprotínajících se úhlopříček je roven n -tému Catalanovu číslu (viz obrázek 3.7 pro $n = 3$).¹⁴

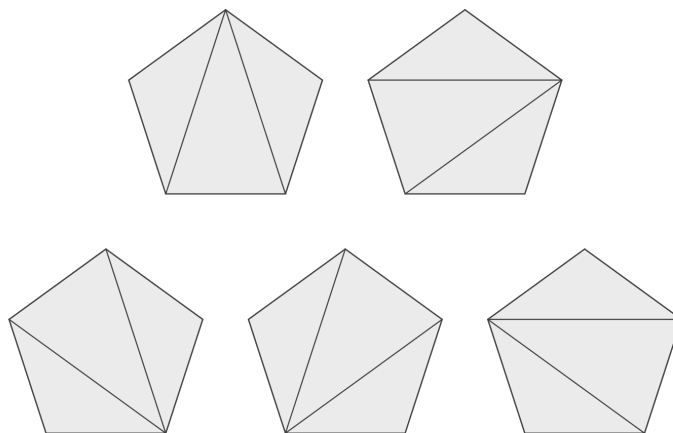
Řešení. Sestrojíme bijekci mezi množinou uzávorkovaných součinů $x_1 x_2 \cdots x_{n+1}$ z poznámky za řešením příkladu 1 a množinou popsaných rozdělení. Každému rozdělení $(n + 2)$ -úhelníku na n trojúhelníků přiřadíme uzávorkovaný součin následovně: ze všeho nejdříve vybereme jednu stranu mnohoúhelníku, kterou necháme neoznačenou, zbylých $n + 1$ stran označíme od vybrané strany v jednom směru po hranici jako $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$. V tuto chvíli máme n triangulačních trojúhelníků a $n + 1$ označených stran. Z Dirichletova principu plyne, že dvě z těchto stran musí patřit stejnému triangulačnímu trojúhelníku. Tyto dvě strany spolu zřejmě sousedí. Tuto dvojici sousedních stran doplňuje na triangulační trojúhelník jedna z úhlopříček, kterou označíme právě podle toho, které dvě strany doplňuje. Kupříkladu úhlopříčku, která doplňuje na trojúhelník strany x_1 a x_2 , označíme $(x_1 x_2)$. Tím jsme do součinu $n + 1$ činitelů doplnili první pár závorek. V dalším kroku máme $n - 1$ triangulačních trojúhelníků a n označených stran ($n - 1$ stran, se kterými jsme v předchozím kroku nepracovali, a jednu nově označenou úhlopříčku). Z Dirichletova principu opět plyne, že dvě z těchto stran musí patřit stejnému triangulačnímu trojúhelníku. Tyto dvě strany spolu sousedí a na triangulační trojúhelník je doplňuje dosud neoznačená úhlopříčka, kterou označíme stejným způsobem jako úhlopříčku z předchozího kroku. Tím jsme do součinu doplnili další pár závorek. V dalším kroku máme $n - 2$ triangulačních trojúhelníků a $n - 1$ označených stran. Postupujeme stejně jako v předchozích krocích a do součinu doplníme třetí pár závorek. Pokračujeme dále, až nám v posledním kroku zůstanou dvě označené strany a poslední triangulační trojúhelník, jehož třetí stranou je ta strana, kterou jsme na začátku nechali neoznačenou. To nám umožňuje do součinu doplnit n -tý pár závorek a dané triangulaci tak přiřadíme vyhovující uzávorkovaný součin.

Nyní naopak uzávorkovanému součinu $x_1 x_2 \cdots x_{n+1}$ přiřadíme vyhovující triangulaci. Začneme u páru závorek, do kterého už žádný další pár vložený není. Je-li v součinu takovýchto „jednoduchých“ párů závorek více, zvolíme jeden z nich libovolně, řekněme $(x_i x_{i+1})$. Pak sousední strany x_i, x_{i+1} nám určí první triangulační trojúhelník, jehož třetí stranu značenou $(x_i x_{i+1})$ v daném uzávorkovaném součinu nahradíme novým znakem u_i . Dostaneme tak uzávorkovaný součin n činitelů $x_1 \cdots x_{i-1} u_i x_{i+2} \cdots x_{n+1}$, kterému máme přiřadit rozdělení zbylého $(n + 1)$ -úhelníka na $n - 1$ trojúhelníků. Podobně jako v první etapě nyní určíme druhý triangulační trojúhelník, atd., až nakonec určíme n -tý triangulační trojúhelník s třetí stranou, kterou jsme na začátku řešení vybrali a neoznačili. Daný uzávorkovaný součin $x_1 x_2 \cdots x_{n+1}$ je tak obrazem právě jedné vyhovující triangulace v zobrazení, které jsme v první části řešení sestrojili.

Mezi oběma množinami tedy existuje bijekce a počet rozdělení konvexního $(n + 2)$ -úhelníku na n trojúhelníků pomocí $n - 1$ úhlopříček, které se neprotínají, je tedy skutečně roven n -tému Catalanovu číslu. Pro doplnění, triangulacím z obrázku 3.7 (necháme-li neoznačenou nejspodnější stranu pětiúhelníku a zbylé 4 označíme po směru chodu hodinových ručiček) odpovídají následující uzávorkované součiny: $((x_1 x_2)(x_3 x_4)), ((x_1(x_2 x_3))x_4)$

¹⁴Yufei Zhao: Bijections

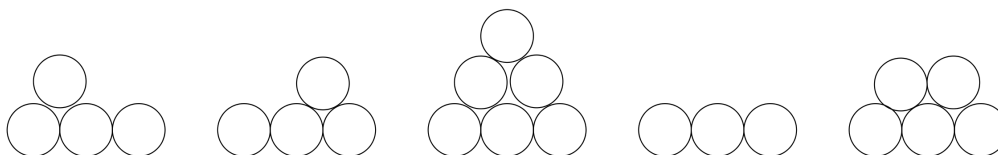
(horní řada zleva doprava); $(x_1(x_2(x_3x_4)))$, $((x_1x_2)x_3)x_4$, $(x_1((x_2x_3)x_4))$ (dolní řada zleva doprava).



Obrázek 3.7: Všechna rozdělení pětiúhelníku na tři trojúhelníky

Příklad 15. Ukažte, že počet způsobů, jak můžeme v rovině poskládat jakékoliv možné množství shodných mincí do jednoho obrazce tak, aby nejdelší spodní řada sestávala z daného počtu n spolu sousedících mincí (a aby výše položené mince „nepadaly“ dolů), je roven n -tému Catalanovu číslu. ¹⁵

Řešení. Na obrázku 3.8 je pro ilustraci všech pět vyhovujících obrazců pro $n = 3$.



Obrázek 3.8: Vyhovující „mincové“ obrazce pro $n = 3$

Sestrojíme bijekci mezi množinou pořadí levých a pravých závorek z příkladu 1 a „mincovými“ obrazci. Začneme tím, jak vypadají obrazce a jim přiřazená pořadí závorek pro $n = 1$ a $n = 2$ (viz obrázek 3.9). Ve shodě s tím bude i obrazec tvořený jedinou řadou složenou z n mincí zapsán pořadím

$$()()() \cdots (),$$

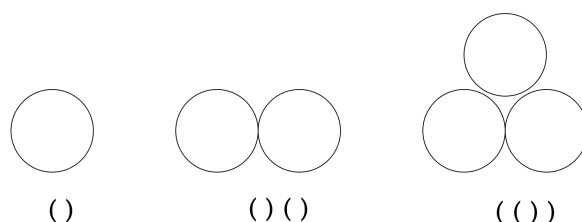
ve kterém je mezi krajními závorkami napsáno $n - 1$ dvojic $()$, kterými, jak se ukáže, budeme vyznačovat neobsazená místa nad dotyčnou řadou (v případě řady o n mincích je nad ní právě $n - 1$ míst). V obecném případě, kdy umístěné mince nad dotyčnou řadou

¹⁵Yufei Zhao: Bijections

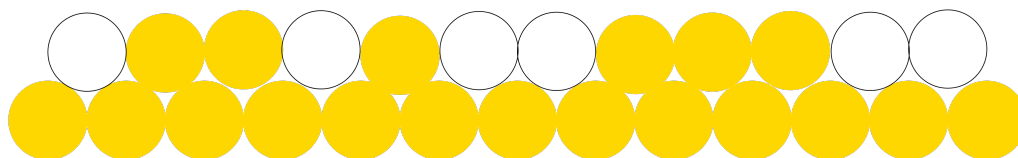
tvoří řekněme s souvislých úseků, které označíme zleva doprava $M_1, M_2, \dots, M_s$ jako na obrázku 3.10 pro $s = 3$, zavedeme $s + 1$ celých čísel

$$k_1 \geq 0, \quad k_2 > 0, \quad \dots, \quad k_s > 0, \quad k_{s+1} \geq 0,$$

která budou udávat zleva doprava počty neobsazených míst (která jsou na obrázku 3.10 vyznačena nevybarvenými kroužky, takže $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, $k_3 = 2$ a $k_4 = 2$). Délky d_i jednotlivých úseků M_i (a tedy i jejich poloha) budou určeny (viz níže) počty závorek, kterými popíšeme „mincové“ obrazce se spodními řadami M_i (na obrázku 3.10 je $d_1 = 2$, $d_2 = 1$ a $d_3 = 3$).



Obrázek 3.9: „Mincové“ obrazce a jim přiřazená pořadí závorek pro $n = 1$ a $n = 2$



Obrázek 3.10: „Mincové“ úseky a neobsazená místa pro $s = 3$

Má-li dotyčná spodní řada n mincí, přiřadíme celému obrazci správné pořadí n levých a n pravých závorek, které podle druhé spodní řady bude vypadat takto:

$$\underbrace{()()(\dots)}_{k_1 \text{ dvojic}} \underbrace{((\dots))}_{M_1} \underbrace{()()(\dots)}_{k_2 \text{ dvojic}} \underbrace{((\dots))}_{M_2} \dots \underbrace{((\dots))}_{M_s} \underbrace{()()(\dots)}_{k_{s+1} \text{ dvojic}}$$

V zápise jsme vyznačili počty párů $()()$ odpovídající neobsazeným místům a místa $(\dots)$ pro zápisy obrazců nad úseky M_i . Tyto zápisy začneme sestavovat v další etapě stejně jako v etapě první, atd. Po konečném počtu etap dostaneme úplný zápis celého obrazce.

Všimněme si, že pokud do výše uvedeného zápisu doplníme zápis obrazce nad úsekem M_i délky d_i správným pořadím d_i levých a d_i pravých závorek, bude výše uvedený zápis správným pořadím takového počtu levých a pravých závorek, který je roven součtu

$$1 + k_1 + d_1 + k_2 + d_2 + \cdots + d_s + k_{s+1},$$

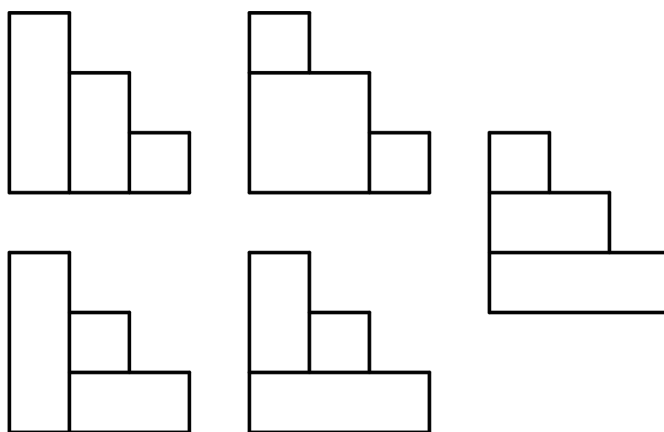
tedy právě počtu n mincí v dolní řadě celého obrazce.

Naopak je zřejmé, že každé správné pořadí n levých a n pravých závorek je ve tvaru výše uvedeného zápisu pro vhodné $s \geq 0$ a vhodná čísla $k_1 \geq 0, k_2 > 0, \dots, k_s > 0, k_{s+1} \geq 0$, podle kterých spolu s počty d_i dvojic závorek ve vytvořených úsecích můžeme jednoznačně rekonstruovat umístění mincí ve druhé spodní řadě, atd.

Uvedenou konstrukcí jsme tak sestrojili bijekci mezi množinou všech „mincových“ obrazců s dolní řadou o n mincích a množinou všech správných pořadí n levých a n pravých závorek. To znamená, že počet všech takových obrazců s daným n je skutečně roven n -tému Catalanovu číslu C_n .

Příklad 16. Ukažte, že počet vyhovujících vykachličkování klasického schodiště dané výšky n použitím n obdélníkových dlaždic (viz obrázek 3.11) je roven n -tému Catalanovu číslu.¹⁶

Řešení. Sestrojíme bijekci mezi množinou pořadí n levých a n pravých závorek z příkladu 1 a možnými vykachličkováními, přitom každá dvojice k sobě patřících závorek bude odpovídat umístění jedné z n dlaždic. Body označené čísly $1, 2, \dots, n$ na obrázku 3.12 patří každý jiné dlaždici, jsou tedy pravými horními rohy všech dlaždic, které bude možné čísla těchto rohů identifikovat.

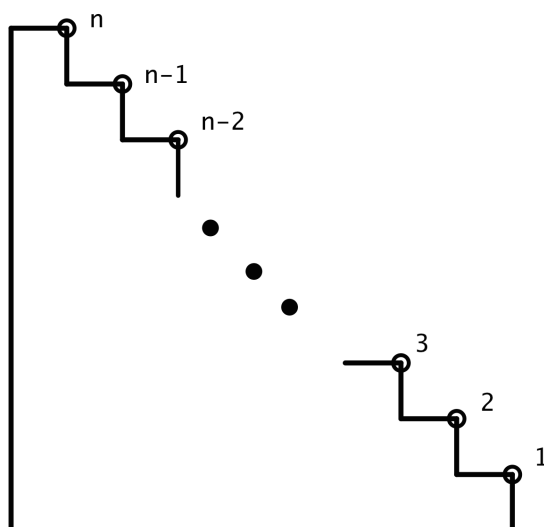


Obrázek 3.11: Možná vykachličkování pro $n = 3$

Nechť k levému svislému okraji schodiště přiléhá s dlaždic $D_1, D_2, \dots, D_s$, jejichž pravé horní rohy mají výše zavedená čísla (viz obrázek 3.13)

$$1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_s = n.$$

¹⁶Yufei Zhao: Bijections



Obrázek 3.12: Pravé horní rohy dlaždic

Souborem čísel $(k_1, k_2, \dots, k_s)$ je šířka i výška každé z těchto s dlaždic D_i zřejmě jednoznačně určena. Dlaždice různé od $D_1, D_2, \dots, D_s$ přitom vydlažďují zbylou část schodiště, která se „rozpadá“ na menší schodiště $E_1, E_2, \dots, E_s$, jak je vyznačeno na obrázku 3.13. Schodiště E_i přiléhá k D_i a jeho výška je o 1 menší než výška D_i (je-li výška D_i rovna 1, E_i bude „prázdné schodiště“ s nulovou výškou).

Podle souboru čísel $(k_1, k_2, \dots, k_s)$ přiřadíme danému vykachličkování zápis

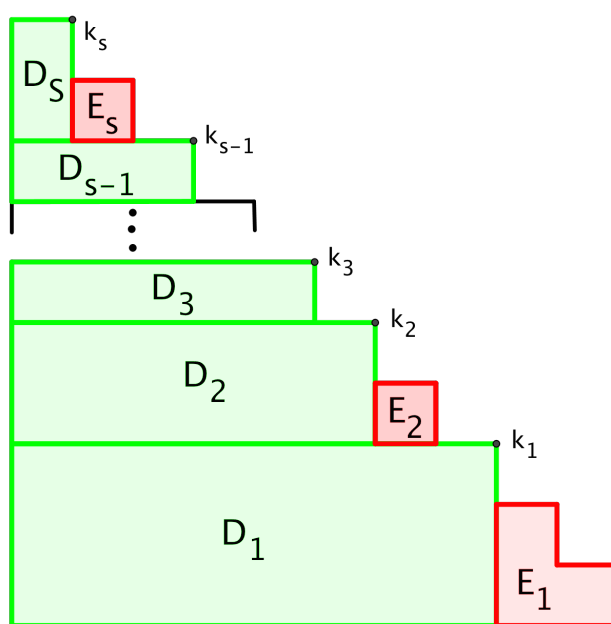
$$\underbrace{(\dots)}_{k_1 \text{ dvojic } (k_2 - k_1) \text{ dvojic}} \dots \underbrace{(\dots)}_{(k_s - k_{s-1}) \text{ dvojic}},$$

kde skutečně vypsané páry závorek odpovídají kachličkám $D_1, D_2, \dots, D_s$ a kam naznačené počty párů závorek dopíšeme, až budeme v dalších etapách přesně stejným postupem popisovat vykachličkování neprázdných schodišť z $E_1, E_2, \dots, E_s$ mezi patřičné závorky

$$(E_1)(E_2) \dots (E_s).$$

Je jasné, že po konečném počtu etap dostaneme úplný popis původního vykachličkování ve tvaru správného pořadí n levých a n pravých závorek, ze kterého lze dané vykachličkování jednoznačně zrekonstruovat. Navíc je patrné, že naopak každé správné pořadí n levých a n pravých závorek je složeno z určitého počtu, řekneme s bloků, kde $1 \leq s \leq n$, jak je naznačeno výše uvedeným zápisem, ze kterého lze podle počtu párů závorek v jednotlivých blocích vyčíst soubor čísel $(k_1, k_2, \dots, k_s)$, podle kterého začneme budovat odpovídající vykachličkování, až jej po konečném počtu kroků úplně dokončíme. Každé správné pořadí n levých a n pravých závorek je tedy obrazem některého vykachličkování v naší sestrojeném zobrazení.

Mezi oběma množinami jsme tak sestrojili bijekci a počet vyhovujících vykachličkování klasického schodiště dané výšky n užitím n obdélníkových dlaždic je skutečně roven n -tému Catalanovu číslu C_n .



Obrázek 3.13: Dlaždice přiléhající k levému svislému okraji schodiště

Pro doplnění, vykachličkováním z obrázku 3.11 (levé závorky značí písmeno L , pravé P) přísluší následující závorková pořadí: $LLLPPP$, $LLPPLP$, $LPLPLP$ (horní řada zleva doprava); $LLPLPP$, $LPLLPP$ (dolní řada zleva doprava).

Příklad 17. Obrazcem délky n rozumíme neuspořádanou dvojici cest délky n v mřížce tvořené jednotkovými čtverci, cest, které vedou pouze doprava a nahoru a které mají společné pouze oba krajní body. Pro každé $n \geq 1$ ukažte, že počet obrazců délky $n + 1$ je roven n -tému Catalanovu číslu. Na obrázku 3.14 jsou dva obrazce délky 9.¹⁷

Řešení. U levého obrazce na obrázku 3.14 je spodní cesta určena devíticí

$$(D, D, N, D, N, D, D, N, N),$$

kde D značí krok doprava a N krok nahoru, horní cestě pak odpovídá devítice

$$(N, D, N, N, D, N, D, D, D).$$

Všimněme si, že jak počty písmen D , tak počty písmen N jsou v obou devíticích stejné. Tyto dva počty totiž udávají celkovou délku dané cesty ve směrech doprava, resp. nahoru.

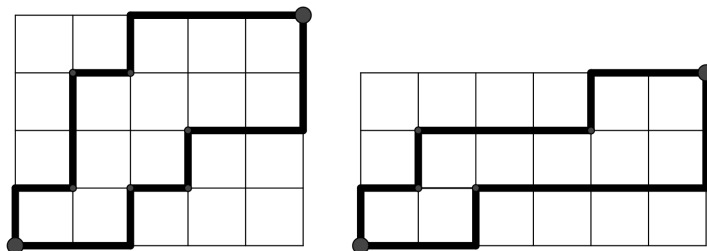
Zkoumejme nyní, jaké $(n + 1)$ -členné posloupnosti písmen D , N , které zapíšeme jako $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ a $(y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$, popisují dolní, resp. horní cestu, které společně vymezují libovolný obrazec délky $n + 1$. Pro dolní cestu jistě musí platit $x_1 = D$ a $x_{n+1} = N$, pro horní cestu naopak $y_1 = N$ a $y_{n+1} = D$. Jak jsme vysvětlili úvodem, počty písmen D jsou v popisech obou cest stejné, což zapíšeme symbolicky takto:

$$|D|(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = |D|(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}). \quad (1)$$

Stejně tak platí

$$|N|(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = |N|(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}).$$

¹⁷M. Olšák: Kombinatorické (ne)počítání



Obrázek 3.14: Dva obrazce délky 9

Podmínku, že obě cesty mají společné pouze krajní body, lze vyjádřit tak, že pro každé $k = 1, 2, \dots, n$ platí nerovnost

$$|D|(x_1, x_2, \dots, x_k) \neq |D|(y_1, y_2, \dots, y_k). \quad (2)$$

Skutečně, kdyby pro některé takové k přešla nerovnost (2) v rovnost, díky vztahům

$$|N|(x_1, x_2, \dots, x_k) = k - |D|(x_1, x_2, \dots, x_k) \quad \text{a} \quad |N|(y_1, y_2, \dots, y_k) = k - |D|(y_1, y_2, \dots, y_k)$$

by platila rovněž rovnost $|N|(x_1, x_2, \dots, x_k) = |N|(y_1, y_2, \dots, y_k)$, a tudíž zkoumané cesty by měly třetí společný bod. Vzhledem k tomu, že $x_1 = D$ a $y_1 = N$, můžeme n -tici nerovností (2) upřesnit takto: pro každé $k = 1, 2, \dots, n$ platí

$$|D|(x_1, x_2, \dots, x_k) > |D|(y_1, y_2, \dots, y_k). \quad (3)$$

Zavedme nyní označení $D^* = N$ a $N^* = D$ pro operaci výměny písmen D a N . Každému obrazci délky $n + 1$ určenému dolní cestou $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ a horní cestou $(y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$ přiřadíme $2n$ člennou posloupnost

$$(z_1, z_2, \dots, z_{2n}) = (D, x_2, y_2^*, x_3, y_3^*, \dots, x_n, y_n^*, N). \quad (4)$$

Ukažme, že sestavená posloupnost (4) je složena z n písmen D (a tedy i z n písmen N) a že pro každé $k = 1, 2, \dots, 2n$ platí

$$|D|(z_1, z_2, \dots, z_k) \geq |N|(z_1, z_2, \dots, z_k). \quad (5)$$

Tvrzení o počtu písmen D v celé posloupnosti $(z_1, z_2, \dots, z_{2n})$ dokážeme s využitím rovností $x_1 = D$, $x_{n+1} = N$, $y_1 = N$, $y_{n+1} = D$ takto:

$$|D|(z_1, z_2, \dots, z_{2n}) = 1 + |D|(x_2, x_3, \dots, x_n) + |N|(y_2, y_3, \dots, y_n) =$$

$$\begin{aligned}
&= |D|(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) + |N|(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) - 1 = \\
&= |D|(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) + [(n+1) - |D|(y_1, \dots, y_{n+1})] - 1 = n,
\end{aligned}$$

kde jsme v posledním kroku uplatnili rovnost (1).

Nyní přejdeme k důkazu nerovností (5). Všimněme si nejdříve, že stačí dokázat ostrou nerovnost

$$|D|(z_1, z_2, \dots, z_{2k-1}) > |N|(z_1, z_2, \dots, z_{2k-1}) \quad (6)$$

pro každé $k = 1, 2, \dots, n$, neboť přidáním členu z_{2k} do obou stran nerovnosti (6) se jedna strana zvětší o 1 a druhá zůstane nezměněna. V případě $k = 1$ je nerovnost (6) triviální, neboť $z_1 = D$. Pro ostatní $k = 2, \dots, n$ odhadneme pravou stranu (6) takto:

$$\begin{aligned}
|N|(z_1, z_2, \dots, z_{2k-1}) &= |N|(D, x_2, y_2^*, \dots, x_k, y_k^*) = \\
&= |N|(x_2, \dots, x_k) + |D|(y_2, \dots, y_k) = |N|(x_1, \dots, x_k) + |D|(y_1, \dots, y_k) = \\
&= [k - |D|(x_1, \dots, x_k)] + |D|(y_1, \dots, y_k) \leq k - 1,
\end{aligned}$$

kde jsme v posledním kroku využili nerovnost (3). Pravá strana (6) tak nepřevyšuje číslo $k - 1$. Protože součet obou stran (6) je však roven $2k - 1$, je levá strana větší nebo rovna k , čímž je ostrá nerovnost (6) dokázána.

V další části řešení ukážeme, že naopak každá $2n$ -členná posloupnost $(z_1, z_2, \dots, z_{2n})$ sestavená z n písmen D a n písmen N , která splňuje nerovnosti (5) pro každé $k = 1, 2, \dots, 2n$, je v dříve popsané konstrukci (4) obrazem jediné dvojice cest $(x_1, \dots, x_{n+1})$ a $(y_1, \dots, y_{n+1})$, které vymezují obrazec délky $n + 1$. Protože nutně platí $z_1 = D$ a $z_{2n} = N$, musí mít zmíněné cesty díky konstrukci (4) tvar

$$(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (D, z_2, z_4, \dots, z_{2n-2}, N)$$

a

$$(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) = (N, z_3^*, z_5^*, \dots, z_{2n-1}^*, D).$$

Jediným úkolem tak je dokázat, že těmito dvěma předpisy jsou skutečně určeny dvě cesty, které vymezují obrazec délky $n + 1$. Prověrky potřebných vztahů (1) a (3) jsou snadné a podobné těm z první části řešení, proto je zde z rozsahových důvodů neuvádíme.

Nyní shrneme výsledek celého dosavadního výkladu: sestrojili jsme bijekci mezi množinou obrazců délky $n + 1$ a $2n$ -ticemi složenými z n písmen D a n písmen N , kde každý dílčí počet písmen D je větší, případně roven dílčímu počtu písmen N . S odvoláním na výsledek příkladu 2 (místo $+1$ píšeme D a místo -1 píšeme N) je tedy počet obrazců délky $n + 1$ skutečně roven n -tému Catalanovu číslu.

Závěr

Vytvořená práce se zabývá principem bijekce, přesněji jeho využitím při řešení kombinatorických problémů. Text je určen pro všechny zájemce o tuto problematiku, autorka se domnívá, že by mohl být zajímavý především pro učitele matematiky. Zvláště některé úlohy z první kapitoly autorka považuje za vhodné ke zpestření středoškolské výuky. Práce tvoří ucelený soubor řešených úloh z „bijektivní kombinatoriky“ převzatých z nejrůznějších českých i zahraničních zdrojů, který je v rámci česky psané literatury patrně unikátní. Přibližně 70 procent příkladů ze druhé a třetí kapitoly bylo v původních zdrojích uvedeno bez řešení či jen se stručnými návody, a tak autorka musela řešení těchto příkladů vymyslet sama, případně využít laskavé pomoci vedoucího této práce.

Při tvorbě práce autorka nabyla řady cenných zkušeností. Zdokonalila se v práci s $T_{E}X$ em, se kterým se setkala už na střední škole, a jako samouk se naučila pracovat s programem GeoGebra, ve kterém pořídila všechny potřebné obrázky. Opravdu velmi hodnotnou novou zkušeností je také práce s anglicky psanými matematickými texty.

V poslední řadě si autorka rozšířila znalosti z kombinatoriky jako matematické disciplíny. Jelikož si je dobře vědoma krásy i rozsáhlosti této oblasti matematiky, ráda by se kombinatorice věnovala i ve své diplomové práci.

Seznam použité literatury

- [1] HERMAN, Jiří, Radan KUČERA a Jaromír Šimša. *Metody řešení matematických úloh II*. 3. přepr. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2004, 356 s. ISBN 8021035285.
- [2] CHEN, Chuan-Chong, Khee-Meng KOH. *Principles and techniques in combinatorics*. Pbk. ed. Singapore: World Scientific, 1992, 298 p. ISBN 9810211392.
- [3] KAUCKÝ, Josef. *Kombinatorické identity: úvod do studia metod kombinatorické analýzy*. 1. vyd. Bratislava: Veda, 1975, 475 s.
- [4] NEGUT, A. *Problems for the Mathematical Olympiads*. Published by Levant Books, Kolkata (2014). ISBN 10: 9380663951.
- [5] OLŠÁK, Miroslav. *Kombinatorické (ne)počítání*. Součást sborníku příspěvků z Hostětína 2013. [cit. 30.4.2017].
Dostupné z: <http://iksko.org/files/sbornik2.pdf>
- [6] SHI, Peng. *The Art of Counting, Bijections, Double Counting*. [cit. 30.4.2017].
Dostupné z: <http://www.mit.edu/~pengshi/math149/counting.pdf>
- [7] STANLEY, Richard P. *Bijjective proof problems*. [cit. 30.4.2017].
Dostupné z: <http://www-math.mit.edu/~rstan/bij.pdf>
- [8] ZHAO, Yufei. *Bijections*. [cit. 30.4.2017].
Dostupné z: <http://yufeizhao.com/olympiad/bijections.pdf>

