PÍSEMNÉ ZKOUŠKY Z LOGIKY

1

1. a) Nalezněte tabulku pravdivostních hodnot výrokové formule

$$\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q)\,.$$

b) Nalezněte výrokovou formuli s následující tabulkou pravdivostních hodnot

p	q	
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

2. Ověřte, zda následující výrokové formule jsou ekvivalentní:

$$\neg(p \wedge \neg q) \wedge (\neg q \wedge \neg r)\,,$$

$$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r\,.$$

3. Mějme následující formuli φ jazyka s jedním unárním relačním symbolem R a s jedním binárním relačním symbolem S

$$(\exists x)(R(x) \rightarrow (\exists y)S(x,y)) \rightarrow (\forall x)(R(x) \rightarrow (\exists y)S(x,y))\,.$$

a) Ověřte, zda φ je pravdivá na všech jednoprvkových realizacích daného jazyka.
b) Ověřte, zda φ je pravdivá na všech realizacich daného jazyka.

4. Rozhodněte, zda následující uspořádané množiny jsou elementárně ekvivalentní. Pokud nejsou, nalezněte sentenci pravdivou v jedné z nich a nepravdivou v druhé:

5. Mějme jazyk s jedním binárním relačním symbolem R. Následující vlastnosti vyjádřete pomocí predikátové logiky:
a) R je zobrazení,
b) R je prosté zobrazení,
c) R je bijekce,
d) R je relace ekvivalence,
e) R je lineární uspořádání tříprvkové množiny.

6. Rozhodněte, zda následující teorie jsou úplné:
a) teorie jedné bijekce (t.j. 6c),
b) teorie jedné relace ekvivalence (t.j. 6d),
c) teorie jedné unární relace.

7. Dokažte, na základě věty o kompaktnosti, že neexistuje teorie jazyka $\{\leq\}$, která má za modely právě konečně uspořádané množiny.

2

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

1) Popište všechny termy v jedné proměnné x jazyka
   a) s jedním unárním relačním symbolem S,
   b) s jedním unárním operačním symbolem f,
   c) s jedním binárním operačním symbolem $+$.

2) Zvolte jazyk a nalezněte v něm atomickou formuli predikátové logiky bez volných proměnných, která
   a) je predikátovou tautologií,
   b) není predikátovou tautologií.

3) Mějme následující formuli φ jazyka s jedním unárním relačním symbolem S a jedním binárním relačním symbolem R

$$(\forall x)(\exists y)(S(x) \to R(x,y))\,.$$

   Nalezněte realizaci, v níž je φ
   a) pravdivá,
   b) nepravdivá.
   Rozhodněte, zda $\{\varphi\}$ je úplná teorie.

4) Mějme jazyk s jedním binárním operačním symbolem $+$. Následující vlastnosti realizace M vyjádřete pomocí predikátové logiky:
   a) M je asociativní,
   b) M obsahuje nulový prvek,
   c) M je grupa,
   d) M je isomorfní grupě $\mathbb{Z}_2$.

5) V jazyce s jedním binárním relačním symbolem R nalezněte teorii T tak, že
   a) modely T jsou právě lineárně uspořádané množiny,
   b) libovolný model T je dobře uspořádaná množina,
   c) libovolný model T je lineárně ale ne dobře uspořádaná množina.

6) Dokažte, že teorie je úplná, právě když libovolné dva její modely jsou elementárně ekvivalentní.

7) Mějme jazyk s jedním unárním relačním symbolem S.
   a) Nalezněte teorii T, jejíž modely jsou právě nekonečné realizace M s vlastností

$$M \models S[a] \quad \text{pro libovolné} \quad a \in M\,.$$

   b) Ukažte, na základě Loś-Vaughtovy věty, že tato teorie T je úplná.

3

1. Nalezněte 4 navzájem neekvivalentní výrokové formule jazyka výrokové logiky nad množinou $\{A\}$.

2. Určete tabulku pravdivostních hodnot formule

$$(A \to B) \to C.$$

3. Nalezněte všechny atomické formule v proměnných x, y jazyka predikátové logiky s jedním binárním relačním symbolem R.

4. Udejte příklad formule predikátové logiky, v níž proměnná x je současně vázaná i volná.

5. Rozhodněte, zda následující formule (jazyka predikátové logiky s jedním binárním relačním symbolem R jsou ekvivalentní

$$(\forall x)(\exists y)R(x, y)$$

$$(\exists x)(\forall y)R(x, y).$$

Své rozhodnutí zdůvodněte.

6. Mějme následující formule $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ jazyka predikátové logiky s jedním nulárním operačním symbolem 0 a jedním unárním relačním symbolem S:

$$(\forall x)S(x), \quad S(0), \quad (\exists x)S(x).$$

Rozhodněte, které z implikací $\varphi_i \to \varphi_j, \quad i \neq j$ jsou pravdivé. Své rozhodnutí zdůvodněte.

7. Mějme jazyk predikátové logiky s nulárním operačním symbolem 0 a binárním operačním symbolem $\{+\}$.
   (a) Jsou $0, 0 + 0$ navzájem různé termy?
   (b) Jsou $x + 0, x$ navzájem různé termy?

8. Mějme jazyk predikátové logiky s jedním binárním relačním symbolem $\leq$. Nalezněte teorii T tohoto jazyka, jejíž modely jsou právě
   (a) uspořádané množiny,
   (b) lineárně uspořádané množiny,
   (c) uspořádané množiny s nejmenším prvkem,
   (d) uspořádané množiny, v nichž libovolná dvojice prvků má supremum,
   (e) uspořádané množiny, v nichž libovolné dva různé prvky jsou nesrovnatelné,
   (f) uspořádané množiny, které mají právě jeden prvek.

9. Je teorie pro 8(a) Henkinova? Své rozhodnutí zdůvodněte.

10. Je teorie pro 8(b) úplná? Své rozhodnutí zdůvodněte.

4

1. Rozhodněte, zda následující výrokové formule jsou ekvivalentní:

$$A \to A \quad , \quad (A \to B) \vee (B \to A)$$

2. Nalezněte výrokovou formuli s následující tabulkou pravdivostních hodnot

A	B	C	
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

3. Nalezněte všechny nulární termy jazyka predikátové logiky
   a) s jedním unárním operačním symbolem f
   b) s jedním unárním operačním symbolem f a jedním nulárním operačním symbolem 0
   c) s jedním unárním relačním symbolem R a jedním nulárním operačním symbolem 0

4. Dokažte následující formule (v jazyce z 3a)
   a) $(\forall x)(f(x) = x) \to (\forall x)(f(f(x) = x)$
   b) $(\forall x, y)(x = y) \to (\forall z)(f(z) = z)$

5. Následující vlastnosti vyjádřete pomocí predikátové logiky (v jazyce z 3a)
   a) f je prosté zobrazení
   b) f je zobrazení na
   c) f je bijekce
   d) f neobsahuje cyklus (t.j. neexistuje prvek a takový, že $f^n(a) = a$ pro $n \geq 1$ přirozené)
   e) f je transpozice (t.j. výměna prvků na dvouprvkové množině)

6. Rozhodněte, zda následující unární algebry jsou elementárně ekvivalentní (v jazyce z 3a)

   a)

   b)

   c)

   $(\mathbb{N}, s)$ $\qquad\qquad s(n) = n + 1$

   $(\mathbb{Z}, s)$

   d)

$(\mathbb{N}, s)$

$(\mathbb{N}, r)$ $\qquad r(n) = n + 2$

e)

$(\mathbb{Z}, s)$

$(\mathbb{Z}, r)$

7. Rozhodněte, které z následujících teorií jsou úplné (v jazyce z 3a)
   a) teorie jedné bijekce
   b) teorie jednoho zobrazení neobsahujícího cyklus
   c) teorie jedné bijekce neobsahující cyklus

5

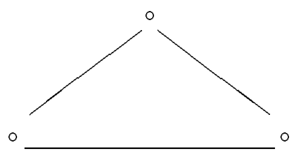
1. Nechť A a B jsou tautologie výrokové logiky. Rozhodněte, zda je také tautologie
   (a) $(\alpha \longleftrightarrow \beta)$
   (b) $(\neg\alpha \rightarrow \beta)$
   (c) $(\alpha \rightarrow \neg\beta)$
   (d) $(\alpha \wedge \neg\beta)$

2. Buď L_1 jazyk bez relačních a operačních symbolů, L_2 jazyk s jedním unárním operačním symbolem f a jedním unárním relačním symbolem P. Nalezněte
   (a) všechny atomické formule jazyka L_1
   (b) všechny atomické formule jazyka L_2
   (c) všechny otevřené formule jazyka L_1 v disjunktivním normálním tvaru

3. Dokažte následující formule jazyka L_2 (z 2.)
   a) $(\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)P(f(x))$
   b) $P(x) \rightarrow (\exists x)P(x)$

4. Mějme jazyk predikátové logiky se dvěmi unárními relačními symboly P, Q. Rozhodněte, které z následujících formulí jsou tautologie
   (a) $(\exists x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow [(\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)]$
   (b) $(\exists x)(\forall y)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall y)(\exists x)(P(x) \rightarrow Q(x))$

5. Mějme jazyk predikátové logiky s jedním binárním relačním symbolem R. Nalezněte teorii tohoto jazyka, jejíž modely jsou právě
   a) neorientované grafy bez smyček (dále jen grafy)
   b) grafy bez kružnic
   c) nesouvislé grafy
   d) grafy isomorfní úplnému grafu o třech vrcholech, t.j. grafu



e) grafy, jejichž každý vrchol má stupeň 2

6. V jazyce L_1 z 2. rozhodněte, zda následující modely jsou elementárně ekvivalentní

a) 

b) $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$

7. Udejte příklad úplné teorie jazyka L_1 z 2., která má nekonečný model.

8. Dokažte nebo vyvraťte

(a) existuje úplná teorie, která má modely právě dvou různých mohutností

(a) existuje sporná teorie, která má modely právě dvou různých mohutností

(a) existuje bezesporná teorie, která má modely právě dvou různých mohutností

6

1. Rozhodněte, které z formulí výrokové logiky A, B a $A \vee B$ jsou dokazatelné, je-li dokazatelná

(a) $(A \longleftrightarrow B)$

(b) $(\neg A \to B)$

(c) $(A \to \neg B)$

(d) $(A \wedge \neg B)$

2. V jazyce L s jedním binárním relačním symbolem R:

(a) Uveďte příklad dvou navzájem ekvivalentních avšak různých atomických formulí

(b) Nalezněte všechny navzájem neekvivalentní atomické formule

3. V jazyce L_1 a jedním konstantním symbolem 0 a jedním binárním operačním symbolem +:

(a) Nalezněte všechny nulární termy

(b) Nalezněte všechny nulární termy t_i takové, že neplatí

$$T \models t_i = t_j$$

pro $i \neq j$, kde

$$T = (\forall x, y, z)(x + y) + z = x + (y + z)$$

(c) Totéž pro $T = 0 + 0 = 0$

4. Dokažte následující formule jazyka L_1

a) $(\forall x)(x + x = x) \to 0 + 0 = 0$

b) $0 + 0 = 0 \to 0 + (0 + 0) = (0 + 0) + 0$

5. Nalezněte realizaci jazyka L_1 takovou, že $0 + 0 \neq 0$ ale $0 + (0 + 0) = (0 + 0) + 0$.

6. Nalezněte sentence $\varphi_1, \ldots, \varphi_5$ jazyka L_1 takové, že

$$\mathbb{R} \models \varphi_i \neq \varphi_j$$

pro $i \neq j$.

7. Buď T bezesporná teorie predikátové logiky s axiomy α, β. Dokažte nebo vyvraťte
(a) Teorie téhož jazyka s axiomy $\neg\alpha, \beta$ je bezesporná
(b) Teorie téhož jazyka s axiomy $\neg\alpha, \neg\beta$ je bezesporná
(c) Teorie téhož jazyka s axiomy $\neg\alpha, \beta$ je sporná
(a) Teorie téhož jazyka s axiomy $\neg\alpha, \neg\beta$ je sporná

8. Rozhodněte, zda následující modely jazyka L_1 jsou elementárně ekvivalentní
(a) $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}$
(b) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$
(c) $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$

9. Komutativní grupa G se nazývá divizibilní, pokud pro libovolné přirozené číslo n a libovolný prvek $a \in G$ existuje prvek $b \in G$ takový, že $nb = a$. Nazývá se grupou bez torse, pokud pro libovolné přirozené číslo $n > 1$ a libovolný prvek $a \in G$ platí $na \neq a$. Je známo, že komutativní divizibilní grupy bez torze jsou právě součiny $\prod_{i \in I}$.
(a) Rozhodněte, zda teorie komutativních grup bez torze je úplná (v jazyce L_1)
(b) Rozhodněte, zda teorie komutativních divizibilních grup bez torze je úplná (v jazyce L_1).

7

1. Výrokové formule A, B se nazývají ekvivalentní, pokud je dokazatelná výroková formule $A \leftrightarrow B$. Rozhodněte, zda následující výrokové formule jsou ekvivalentní:

$$A \to A \quad , \quad (A \to (A \vee B)$$

2. Nalezněte výrokovou formuli s následující tabulkou pravdivostních hodnot

A	B	C	
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

3. Nalezněte všechny termy obsahující právě jednu proměnnou x jazyka predikátové logiky
a) s jedním binárním operačním symbolem $+$

b) s jedním binárním operačním symbolem + a jedním nulárním operačním symbolem 0
c) s jedním binárním relačním symbolem R a jedním nulárním operačním symbolem 0

4. Následující vlastnosti realizace A zadaného jazyka L vyjádřete pomocí predikátové logiky
a) A je komutativní grupa (v jazyce L z 3.b)
b) A je izomorfní grupě S_2 permutací dvouprvkové množiny (v jazyce L z 3.a)
c) A je izomorfní grupě S_2 (v jazyce L z 3.b)
d) A je uspořádaná množina, v níž 0 je nejmenší prvek (v jazyce L z 3.c)
e) A je graf (t.j., množina s binární relací), v němž prvek 0 neleží na kružnici (v jazyce L z 3.c). (Kružnice v grafu (A, R_A) je množina vrcholů $a_1, \cdot a_n$, kde $n > 2$ a $(a_1, a_2), \cdot (a_{n-1}, a_n), (a_n, a_1) \in R_A$.

5. Rozhodněte, zda následující realizace A, B jazyka L složeného z jednoho nulárního operačního symbolu 0 jsou elementárně ekvivalentní. Unární operační symbol budeme vždy interpretovat jako prvek 0 realizace.

a) $A = \{0\}, \quad B = \{0, 1\}$

b) $A = \mathbb{Z}, \quad B = \mathbb{Q}$

c) $A = \mathbb{Z}, \quad B = \mathbb{R}$

6. Dokažte, že T je úplná teorie jazyka L z 5.

7. Rozhodněte, zda následující třídy E realizací zadaného jazyka L jsou elementární. V kladném případě udejte příslušnou teorii, v opačném případě dokažte její neexistenci.

a) E složená ze všech konečných realizací jazyka L z 5.

b) E složená ze všech souvislých neorientovaných grafů v jazyce L obsahujícím právě jeden binární relační symbol R. (Graf je neorientovaný, pokud příslušná binární relace je symetrická a souvislý, pokud libovolné dva jeho vrcholy lze spojit cestou.)

c) E složená ze všech neorientovaných grafů bez kružnic v jazyce L z b).

8. a) Definujte pojem (predikátové logiky): formule ϕ je dokazatelná z teorie T (značíme $T \vdash \phi$).

b) Dokažte, že pokud $T \vdash \phi$, pak existuje konečná podmnožina $S \subseteq T$ tak, že $S \vdash \phi$.

c) Dokažte, že sjednocení řetězce bezesporných teorií je bezesporná teorie.

8

1. Nalezněte výrokové formule A, B takové, že
a) Neplatí ani $A \to B$ ani $B \to A$,
b) Platí $A \to B$ i $B \to A$,
c) Platí $A \to B$ a neplatí $B \to A$.

2. Nalezněte všechny atomické formule obsahující právě jednu proměnnou x jazyka predikátové logiky:
a) bez relačních a operačních symbolů,

b) s jedním unárním operačním symbolem f,

c) s jedním binárním relačním symbolem R a jedním unárním operačním symbolem f.

3. Následující vlastnosti realizace A zadaného jazyka L vyjádřete pomocí predikátové logiky:

a) A má nejvýše tři prvky (v jazyce L z 2.a),

b) A je množina spolu s prostým zobrazením (v jazyce L z 2.b),

c) A je množina spolu se zobrazením na (v jazyce L z 2.b),

d) A je uspořádaná množina, v níž f přiřazuje prvku a maximální prvek $\geq a$ (v jazyce L z 2.c).

4. Rozhodněte, zda následující realizace A, B jazyka L z 2.b jsou elementárně ekvivalentní. Unární operační symbol budeme vždy interpretovat jako zobrazení $a \mapsto a+1$.

a) $A = \mathbb{Z}_2, \quad B = \mathbb{Z}_3$

b) $A = \mathbb{N}, \quad B = \mathbb{Z}$

c) $A = \mathbb{Z}, \quad B = \mathbb{R}$.

5. Dokažte, že teorie $T(\mathbb{Z})$ struktury $\mathbb{Z}$ z 4.b je konečně axiomatizovatelná (t.j., že existují sentence $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ tak, že $T(\mathbb{Z})$ je ekvivalentní $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$. Návod: nalezněte příslušné axiomy.

6. Rozhodněte, zda následující třídy E realizací zadaného jazyka L jsou elementární. V kladném případě udejte příslušnou teorii, v opačném případě dokažte její neexistenci.

a) E složená ze všech konečných realizací majících sudý počet prvků (v jazyce L z 2.b),

b) E složená ze všech souvislých realizací jazyka L z 2.b (realizace (A, f_A) je souvislá, pokud pro libovolná $a, b \in A$ existuje n tak, že $f_A^n(a) = b$ nebo $f_A^n(b) = a$).

c) E složená ze všech Booleových algeber v jazyce L z 2.c (kde R se interpretuje jako uspořádání a f jako operace komplementu). Připomeňme, že Booleova algebra je distributivní komplementární svaz.

7. a) Formulujte větu o kompaktnosti.

b) Dokažte ji z Godelovy věty o úplnosti.

c) Na základě věty o kompaktnosti dokažte, že pokud teorie má libovolně velké konečné modely, pak má i nekonečný model.

9

1. Buď L jazyk predikátové logiky s jedním unárním relačním symbolem P. Udejte příklad formule jazyka L, v níž proměnná x je současně vázaná i volná.

2. Nalezněte všechny atomické formule jazyka L z 1. obsahující jedinou proměnnou x.

3. Nalezněte všechny realizace jazyka L z 1. na množině $\{a, b\}$ a zjistěte, které z nich jsou navzájem isomorfní.

4. Nalezněte množinu $\mathcal{R}$ realizací jazyka L z 1. na množině $\mathbb{N}$ takovou, že žádné dvě různé realizace z $\mathcal{R}$ nejsou isomorfní a libovolná realizace jazyka L na množině $\mathbb{N}$ je isomorfní s nějakou realizací z $\mathcal{R}$.

5. Definujte následující pojmy:
   a) realizace A, B jazyka L jsou isomorfní
   b) realizace A, B jazyka L jsou elementárně ekvivalentní
   c) teorie T jazyka L je Henkinova
   d) teorie T jazyka L je úplná.

6. Dokažte, že dvě isomorfní realizace jsou elementárně ekvivalentní.

7. Rozhodněte, které z realizací
   a) z 3.
   b) z 4.
jsou elementárně ekvivalentní. Své rozhodnutí zdůvodněte.

8. Buď E třída všech realizací A jazyka L z 1. takových, že množiny $P_A, A - P_A$ jsou nekonečné.
   a) Dokažte, že existuje teorie T tak, že E se skládá právě z modelů teorie T.
   b) Dokažte, že teorie T je úplná.

10

1. Udejte příklad jazyka predikátové logiky, pro který existují právě dva termy neobsahující žádnou proměnnou.

2. Mějme jazyk predikátové logiky skládající se z jednoho unárního relačního symbolu S. Nalezněte všechny atomické formule tohoto jazyka v proměnných x_1, x_2.

3. Buď L jazyk predikátové logiky skládající se z jednoho binárního relačního symbolu R. Realizace tohoto jazyka jsou právě dvojice $\mathcal{M} = (M, R_{\mathcal{M}})$, kde M je neprázdná množina a $R_{\mathcal{M}}$ binární relace na množině M.
a) Nalezněte teorii jazyka L, jejíž modely jsou právě realizace $\mathcal{M}$ takové, že $R_{\mathcal{M}}$ je relace ekvivalence na množině M.
b) Nalezněte teorii jazyka L, jejíž modely jsou právě realizace $\mathcal{M}$ takové, že $R_{\mathcal{M}}$ je relace ekvivalence na množině M taková, že příslušný rozklad má právě dva prvky.

4. Nalezněte teorii jazyka L z 3., jejíž modely jsou právě uspořádané množiny $\mathcal{M}$.

5. Nalezněte teorii jazyka L z 3., jejíž modely jsou právě uspořádané množiny $\mathcal{M}$ takové, že libovolné dva prvky mají supremum.

6. Nalezněte teorii jazyka L z 3., jejíž modely jsou právě tříprvkové řetězce.

7. Definujte, kdy se dvě realizace nazývají elementárně ekvivalentní.

8. Rozhodněte, zda následující uspořádané množiny jsou elementárně ekvivalentní (jako realizace jazyka L z 3.)
a) dvouprvkový a tříprvkový řetězec
b) přirozená a racionální čísla (s obvyklým uspořádáním)
c) racionální a iracionální čísla (s obvyklým uspořádáním).

9. Definujte pojem úplné teorie.

10. Rozhodněte, zda teorie jazyka L z 3., jejíž modely jsou právě protiřetězce, je úplná.

11. Rozhodněte, zda teorie jazyka L z 3., jejíž modely jsou právě nekonečné protiřetězce, je úplná.

12. Zformulujte větu o kompaktnosti.

13. Pomocí věty o kompaktnosti dokažte, že neexistuje teorie jazyka L z 3., jejíž modely jsou právě konečné protiřetězce.

11

1. a) Udejte příklad jazyka predikátové logiky, pro který existuje právě jedna atomická formule neobsahující žádnou proměnnou.
b) Existuje takový jazyk L_0, který navíc obsahuje binární relační symbol?
c) Jaký je nejmenší počet atomických formulí bez volných proměnných jazyka L_0 z b)?

2. Buď L_1 jazyk predikátové logiky skládající se z jednoho binárního relačního symbolu $\leq$.
a) Udejte příklad realizace tohoto jazyka, která není uspořádaná množina.
b) Nalezněte teorii jazyka L_1, jejíž modely jsou právě uspořádané množiny A takové, že k libovolnému prvku $a \in A$ existuje maximální prvek $b \in A$ takový, že $a \leq b$.
c) Nalezněte teorii jazyka L_1, jejíž modely jsou právě uspořádané množiny neobsahující žádný minimální prvek.

3. Buď L_2 jazyk predikátové logiky skládající se ze dvou unárních relačních symbolů P, Q. Realizace jazyka L_2 jsou trojice (A, P_A, Q_A), kde $A \neq \emptyset$ je množina a $P_A, Q_A \subseteq A$ jsou podmnožiny množiny A.
a) Nalezněte teorii jazyka L_2, jejíž modely jsou trojice (A, P_A, Q_A) takové, že $P_A \subseteq Q_A$.
b) Nalezněte teorii jazyka L_2, jejíž modely jsou trojice (A, P_A, Q_A), že $P_A \cap Q_A = \emptyset$
c) Nalezněte teorii jazyka L_2, jejíž modely jsou trojice (A, P_A, Q_A), že $P_A \cup Q_A = A$.

4. Uveďte: a) axiom substituce pro predikátovou logiku
b) odvozovací pravidla pro predikátovou logiku
c) definici dokazatelné formule v predikátové logice.

5. a) Zformulujte větu o dedukci pro predikátovou logiku.
b) Odvoďte z ní následující tvrzení: Buď T teorie a φ sentence. Pak teorie $T \cup \{\varphi\}$ je sporná, právě když $T \vdash \varphi$.

6. Dokažte, že teorie T je bezesporná, právě když každá její konečná podmnožina je bezesporná.

7. a) Nalezněte teorii jazyka L_2, jejíž všechny modely jsou izomorfní.
b) Existuje teorie z a) mající nekonečný model?

8. a) Rozhodněte, zda teorie T jazyka L_2 daná axiomem

$$(\forall x)(P(x) \leftrightarrow Q(x))$$

je úplná.
b) Rozhodněte, zda libovolné dva nekonečné modely teorie T jsou elementárně ekvivalentní.

12

1. Buď L jazyk predikátové logiky skládající se ze dvou unárních relačních symbolů P, Q a jednoho binárního relačního symbolu R.
a) Nalezněte všechny termy jazyka L.
b) Nalezněte všechny atomické formule jazyka L.

2. a) Udejte příklad realizace jazyka L z 1., v níž následující formule je pravdivá

$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x) \to R(x,x))$$

b) Udejte příklad realizace jazyka L z 1., v níž následující formule není pravdivá

$$(\forall x)(\forall y)(R(x,y) \to P(x) \wedge Q(y))$$

3. Buď L jazyk predikátové logiky z 1. Realizace jazyka L jsou čtveřice (A, P_A, Q_A, R_A), kde $A \neq \emptyset$ je množina, $P_A, Q_A \subseteq A$ a $R_A \subseteq A \times A$.
a) Nalezněte teorii jazyka L, jejíž modely jsou právě čtveřice (A, P_A, Q_A, R_A) takové, že $P_A \times Q_A \subseteq R_A$.
b) Nalezněte teorii jazyka L, jejíž modely jsou právě čtveřice (A, P_A, Q_A, R_A), takové, že $(P_A \times Q_A) \cup R_A = A \times A$
c) Nalezněte teorii jazyka L, jejíž modely jsou právě čtveřice (A, P_A, Q_A, R_A), takové, že (A, R_A) je uspořádaná množina, P_A se skládá právě z minimálních prvků této uspořádané množiny a Q_A právě z jejích maximálních prvků.

4. Uveďte: a) axiom kvantifikátoru pro predikátovou logiku,
b) definici zápisu $T \vdash \varphi$,
c) definici, kdy dvě realizace jsou izomorfní.

5. Dokažte, že sjednocení řetězce bezesporných teorií je bezesporná teorie.

6. Buďte S, T teorie jazyka L. Rozhodněte, které z následujících tvrzení je pravdivé
a) T bezesporná, $S \subseteq T \Rightarrow S$ bezesporná,

b) S bezesporná, $S \subseteq T \Rightarrow$ T bezesporná,
c) S, T bezesporné $\Rightarrow S \cup T$ bezesporná.

7. Dokažte, že teorie je úplná, právě když libovolné dva její modely jsou elementárně ekvivalentní.

8. a) Uveďte příklad bezesporné teorie jazyka L z 1., která není úplná.
b) Uveďte příklad úplné teorie jazyka L z 1.

13

1. (10 bodů) Rozhodněte, který z následujících výrazů je formule predikátové logiky v jazyce složeném z jediného binárního relačního symbolu R:
   a) $(\forall x_1)R(x_2, x_2)$
   b) $x_1 \to x_1$
   c) $x_1 \leq x_1$
   d) $R(x_1, x_2) \wedge R(x_2, x_3) \wedge \cdots \wedge R(x_i, x_{i+1} \wedge \cdots$
   e) $\neg R(x_1, x_2)$

Svá tvrzení zdůvodněte.

2. (10 bodů) Popište všechny termy v jedné proměnné x jazyka
   a) bez relačních a operačních symbolů,
   b) s jedním unárním operačním symbolem f,
   c) se dvěma unárními operačními symboly f, g.

3. (20 bodů) Mějme následující formule $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ jazyka predikátové logiky s jedním konstantním symbolem c a jedním unárním relačním symbolem P:

$$(\forall x)P(x), \quad P(c), \quad (\exists x)P(x).$$

Rozhodněte, které z implikací $\varphi_i \to \varphi_j$, $i \neq j$ jsou predikátové tautologie. Je-li $\varphi_i \to \varphi_j$ predikátová tautologie, nalezněte její důkaz z axiomů predikátové logiky. Není-li $\varphi_i \to \varphi_j$ predikátová tautologie, nalezněte realizaci, ve které $\varphi_i \to \varphi_j$ není pravdivá.

4. (15 bodů) Mějme jazyk Peanovy aritmetiky a její standardní model $\mathbb{Z}^+$ složený z nezáporných celých čísel. Pomocí predikátové logiky vyjádřete, že
   a) $x, y \in \mathbb{Z}^+$ jsou kongruentní modulo 3 (t.j., mají stejný zbytek po dělení třemi),
   b) $x \in \mathbb{Z}^+$ je prvočíslo.

5. (15 bodů) Mějme jazyk predikátové logiky (s rovností) s jedním binárním relačním symbolem $\leq$. Nalezněte teorii T tohoto jazyka, jejíž modely jsou právě
   (a) uspořádané množiny,
   (b) lineárně uspořádané množiny,
   (c) hustě lineárně uspořádané množiny,
   (d) nekonečné uspořádané množiny,
   (e) dvouprvkové lineárně uspořádané množiny.

6. (15 bodů) V situaci příkladu 5. ukažte, že neexistuje

a) teorie T, jejíž modely jsou právě konečné uspořádané množiny,
b) konečná teorie T, jejíž modely jsou právě nekonečné uspořádané množiny.

7. (15 bodů) Mějme jazyk J predikátové logiky (s rovností) se dvěma konstantními symboly $0, 1$.
a) Rozhodněte, zda teorie nekonečných modelů jazyka J je úplná.
b) Rozhodněte, zda realizace $\mathbb{Z}, \mathbb{R}$ (s obvyklou interpretací konstantních symbolů) jsou elementárně ekvivalentní.

14

1. (10 bodů) Rozhodněte, který z následujících výrazů je term v jazyce složeném z jediného binárního operačního symbolu $+$:
a) x_1
b) $x_1 + x_1$
c) $x_1 = x_2$
d) $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$
e) $\neg x_1$
Svá tvrzení zdůvodněte.

2. (10 bodů) Popište všechny atomické formule v jedné proměnné x jazyka (s rovností)
a) bez relačních a operačních symbolů,
b) s jedním unárním relačním symbolem P,
c) s jedním unárním relačním symbolem P a jedním unárním operačním symbolem f.

3. (20 bodů) Mějme následující formule $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ jazyka predikátové logiky se dvěma konstantními symboly c, d a jedním binárním relačním symbolem R:

$$(\forall x)(\forall y)R(x, y), \quad R(c, d), \quad (\exists x)R(x, x).$$

Rozhodněte, které z implikací $\varphi_i \to \varphi_j$, $i \neq j$ jsou predikátové tautologie. Je-li $\varphi_i \to \varphi_j$ predikátová tautologie, nalezněte její důkaz z axiomů predikátové logiky. Není-li $\varphi_i \to \varphi_j$ predikátová tautologie, nalezněte realizaci, ve které $\varphi_i \to \varphi_j$ není pravdivá.

4. (15 bodů) Mějme jazyk Peanovy aritmetiky a její standardní model $\mathbb{Z}^+$ složený z nezáporných celých čísel. Formulí predikátové logiky vyjádřete, že
a) čísla $x, y \in \mathbb{Z}^+$ jsou nesoudělná (t.j., nemají žádného společného dělitele kromě 1),
b) čísla $x, y \in \mathbb{Z}^+$ splňují nerovnost $|x - y| \geq 3$.

5. (15 bodů) Mějme jazyk J predikátové logiky (s rovností) s jedním binárním relačním symbolem R. Nalezněte teorii T tohoto jazyka, jejíž modely jsou právě
(a) dvojice (M, R_M), kde R_M je relace ekvivalence na (neprázdné) množině M,
(b) dvojice (M, R_M), kde R_M je zobrazení $M \to M$,
(c) dvojice (M, R_M), kde R_M je bijektivní zobrazení $M \to M$,
(d) dvojice (M, R_M) z (c), kde množina M má dva prvky.

6. (15 bodů) V situaci příkladu 5.

a) rozhodněte, zda teorie popisující (d) je úplná,

b) udejte příklad úplné teorie jazyka J mající konečné modely,

c) udejte příklad úplné teorie jazyka J, která má nekonečný model.

Svá tvrzení dokažte.

7. (15 bodů) Mějme jazyk J predikátové logiky (s rovností) s jedním unárním relačním symbolem P.

a) Nalezněte teorii T, jejíž modely jsou právě nekonečné realizace jazyka J.

b) Rozhodněte, zda teorie T z a) je úplná.

c) Rozhodněte, zda lze nalézt alespoň 3 navzájem neekvivalentní úplné teorie s jazykem J obsahující teorii T z a).

Svá tvrzení zdůvodněte.

15

1. (10 bodů) Definujte pojem termu v jazyce složeném z jediného binárního operačního symbolu $+$ a jednoho unárního operačního symbolu f. Vypište všechny takové termy v jedné proměnné x, které obsahují nejvýše dva výskyty operačních symbolů.

2. (10 bodů) Definujte pojem formule v jazyce (s rovností) složeném z jediného unárního relačního symbolu P. Vypište všechny uzavřené formule (tj. sentence), které, kromě závorek, obsahují pouze symboly $x, \exists, \neg, P, =$.

3. (20 bodů)

(a) Zformulujte axiom substituce a v predikátové logice s rovností.

(b) Rozhodněte (a zdůvodněte), zda formule

$$(\forall x)(\forall y)(x = y) \to (\forall y)(y = y)$$

je (i) speciálním případem axiomu substituce (pro nějakou volbu formule φ), (ii) predikátovou tautologií.

(c) Zformulujte axiom kvantifikátoru pro predikátovou logiku.

(d) Rozhodněte (a zdůvodněte), zda formule

$$(\forall x)(P(x) \to (x = 0)) \to (P(x) \to (\forall x)(x = 0))$$

je (i) speciálním případem axiomu kvantifikátoru (pro nějakou volbu formulí φ, ψ), (ii) predikátovou tautologií. Jedná se přitom o formule v jazyce s rovností složeném z relačního symbolu P a konstantního symbolu 0.

4. (15 bodů) Mějme jazyk predikátové logiky (s rovností) obsahující dva unární relační symboly P, Q. Definujte pojem realizace $\mathcal{M} = (M, P_\mathcal{M}, Q_\mathcal{M})$ tohoto jazyka. Napište formulí predikátové logiky říkající, že v dané realizaci $\mathcal{M}$ platí

(a) $P_\mathcal{M} \subseteq Q_\mathcal{M}$

(b) $P_\mathcal{M} \subseteq Q_\mathcal{M}$ a rozdíl $Q_\mathcal{M} - P_\mathcal{M}$ se skládá z právě jednoho prvku,

(c) $P_\mathcal{M}, Q_\mathcal{M}$ tvoří rozklad množiny M.

5. (15 bodů) Mějme jazyk predikátové logiky (s rovností) se dvěma binárními operačními symboly $\cup, \cap$ a jedním konstantním symbolem $\emptyset$. Je-li A množina, pak $\mathcal{P}(A)$ bude

označovat realizaci tohoto jazyka, jejíž prvky jsou právě podmnožiny množiny A a operační symboly se interpretují jako sjednocení, průnik a prázdná množina. Nalezněte formuli $\varphi(x)$ s jednou volnou proměnnou x takovou, že pro libovolnou realizaci $\mathcal{P}(A)$ platí

(a) $\mathcal{P}(A) \models \varphi[B] \Leftrightarrow B = A$

(b) $\mathcal{P}(A) \models \varphi[B] \Leftrightarrow B$ je jednoprvková množina. (Zde $\varphi[B]$ značí ohodnocení volné proměnné x ve formuli φ podmnožinou $B \in \mathcal{P}(A)$.)

6. (15 bodů)

(a) Definujte pojem úplné teorie.

(b) rozhodněte (a zdůvodněte), zda teorie v jazyce s rovností složeném z binárního operačního symbolu $\cdot$ a konstantního symbolu 1 daná axiomy $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ a $x \cdot y = y \cdot x$ je úplná.

(c) Definujte pojem Henkinovy teorie.

(d) Rozhodněte (a zdůvodněte), zda teorie z (b) je Henkinova.

7. (15 bodů)

(a) Definujte pojem elementární ekvivalence.

(b) Rozhodněte (a zdůvodněte), zda, v jazyce s rovností složeném z jediného binárního relačního symbolu $\leq$ existuje realizace elementárně ekvivalentní, ale ne izomorfní s dvouprvkovým řetězcem.

(c) Rozhodněte (a zdůvodněte), zda v jazyce z (b) existuje realizace elementárně ekvivalentní, ale ne izomorfní s řetězcem $\mathbb{Q}$ racionálních čísel.