1. Výroková logika

Úvodem k našemu studiu matematické logiky bude popis nejjednoduššího logického kalkulu - výrokové logiky. V jednoduché podobě se zde setkáme s myšlenkami, které budou později rozvinuty v rámci predikátové logiky.

Buď P neprázdná množina symbolů, které nazýváme *atomické výrokové formule*. Symboly *jazyka* L_P výrokové logiky (nad množinou P) jsou prvky množiny P, logické spojky $\neg$ (*negace*), $\rightarrow$ (*implikace*) a závorky (,).

Výrokové formule jazyka L_P definujeme následovně :

(1) Každá atomická výroková formule je výroková formule.
(2) Je-li A výroková formule, pak $(\neg A)$ je výroková formule.
(3) Jsou-li A, B výrokové formule, pak $(A \rightarrow B)$ je výroková formule.
(4) Konečná posloupnost symbolů jazyka L_P je výroková formule, právě když vznikne konečným počtem užití pravidel (1)-(3).

Přejděme nyní k definici pravdivosti výrokových formulí.

Pravdivostní ohodnocení atomických výrokových formulí se definuje jako zobrazení $v : P \rightarrow \{0,1\}$. Jeho rozšíření $\overline{v}$ na množinu všech výrokových formulí definujeme následovně :

(1) $\overline{v}(A) = v(A)$ pro libovolné $A \in P$
(2) $\overline{v}(\neg A) = 1$ pokud $\overline{v}(A) = 0$ a $\overline{v}(\neg A) = 0$ pokud $\overline{v}(A) = 1$
(3) $\overline{v}(A \rightarrow B) = 0$ pokud $v(A) = 1$ a $v(B) = 0$, ve všech zbývajících případech $\overline{v}(A \rightarrow B) = 1$.

Výroková formule A se nazývá *pravdivá při ohodnocení* v, jestliže $\overline{v}(A) = 1$. Výroková formule se nazývá *pravdivá*, jestliže je pravdivá při všech ohodnoceních. Píšeme $\models A$.

Pravdivé formule jsou např. $A \rightarrow A$, $\neg\neg A \rightarrow A$, $A \rightarrow \neg\neg A$. Budeme používat následující označení:

$$A \vee B \text{ pro } \neg A \rightarrow B$$

$$A \wedge B \text{ pro } \neg(A \rightarrow \neg B)$$

$$A \leftrightarrow B \text{ pro } (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A).$$

Snadno se ověří, že zavedené symboly mají očekávaný význam.

Symbol T bude označovat vždy pravdivou formuli (t.j., $\overline{v}(T) = 1$ pro libovolné ohodnocení v) a symbol F vždy nepravdivou formuli (t.j., $\overline{v}(F) = 0$ pro libovolné ohodnocení v). Formule A, B se nazývají *ekvivalentní*, pokud formule $A \leftrightarrow B$ je pravdivá. Značíme $A \sim B$.

Definice pravdivosti přímo dává algoritmus rozhodující, zda výroková formule A je pravdivá. Je totiž jasné, že pravdivost formule A při ohodnocení v závisí pouze na hodnotách $v(X)$ atomických formulí X, které se vyskytují v A. Množina P_A těchto atomických formulí je konečná, takže stačí zkontrolovat konečný počet zobrazení $P_A \rightarrow \{0,1\}$. Říkáme, že výroková logika je *rozhodnutelná*.

Přejděme nyní k axiomatizaci výrokové logiky. Tato se skládá z axiomů

(A1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
(A2) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
(A3) $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$

a z odvozovacího pravidla

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

(P1) Z $A, A \to B$ plyne B

(nazývaného *pravidlo odloučení* nebo také *modus ponens*). Přitom, výrokové formule $A, A \to B$ se nazývají předpoklady a B závěr odvozovacího pravidla.

Řekneme, že konečná posloupnost $A_1, \ldots, A_n$ výrokových formulí je *důkaz* výrokové formule A_n, jestliže pro libovolné $i \leq n$ je A_i buď axiom nebo závěr odvozovacího pravidla, jehož předpoklady jsou mezi $A_1, \ldots, A_{i-1}$. Existuje-li důkaz výrokové formule A, pak řekneme, že A je *dokazatelná*. Dokazatelné formule se rovněž nazývají (výrokové) *tautologie*. Značíme $\vdash A$.

1.1. Věta o korektnosti. *Libovolná dokazatelná výroková formule je pravdivá.*

Důkaz. Snadno se ověří, že axiomy (A1)-(A3) jsou pravdivé a že odvozovací pravidlo (P1) je korektní ve smyslu, že z pravdivosti předpokladů plyne pravdivost závěru. Odsud již ihned plyne, že každá dokazatelná formule je pravdivá. $\square$

Naším cílem je nyní ověřit, že axiomatický systém je úplný, t.j., že každá pravdivá formule je dokazatelná.

1.2. Lemma. $\vdash A \to A$

Důkaz. Následující posloupnost formulí je důkaz formule $A \to A$: $A \to ((A \to A) \to A)$, $A \to ((A \to A) \to A) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$, $(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$, $A \to (A \to A)$, $A \to A$. Označíme-li formule důkazu $A_1, \ldots, A_5$, pak A_1 je (A1) pro volbu $A, A \to A$ za A, B, A_2 je (A2) pro volbu $A, A \to A, A$ za A, B, C, A_3 je závěr (P1) (předpoklady jsou A_1, A_2), A_4 je (A1) pro volbu A, A za A, B a konečně A_5 je závěr (P1) s předpoklady A_4, A_5. $\square$

Budeme potřebovat zobecnění pojmu dokazatelnosti. Nechť T je množina výrokových formulí. Konečná posloupnost $A_1, \ldots, A_n$ výrokových formulí se nazývá *důkaz výrokové formule* A_n *z* T, jestliže pro libovolné $i \leq n$ je A_i axiom, prvek T nebo závěr odvozovacího pravidla, jehož předpoklady jsou mezi $A_1, \ldots, A_{i-1}$. Značíme $T \vdash A_n$. Samozřejmě $\vdash A$ je totéž, jako $\emptyset \vdash A$. Místo $\{A\} \vdash B$ budeme psát stručně $A \vdash B$.

1.3. Věta o dedukci. *Buď T množina výrokových formulí. Pak platí $T \vdash A \to B$, právě když $T \cup \{A\} \vdash B$.*

Důkaz. Implikace $\Rightarrow$ je snadná. Předpokládáme-li totiž $T \vdash A \to B$, pak existuje důkaz $A_1, \ldots, A_{n-1}, A \to B$ formule $A \to B$ z T. Pak $A_1, \ldots, A_{n-1}, A \to B, A, B$ je důkaz B z $T \cup \{A\}$.

Naopak, předpokládejme, že platí $T \cup \{A\} \vdash B$. Označme $A_1, \ldots, A_n$ příslušný důkaz. Dokážeme indukcí, že pro libovolné $i \leq n$ platí $T \vdash A \to A_i$. Volbou $i = n$ pak dostaneme, že $T \vdash A \to B$. Předpokládejme tedy, že $T \vdash A \to A_k$ platí pro všechna $k < i$, kde $i \leq n$. Je-li A_i axiom nebo prvek T, pak

$$A_i \to (A \to A_i), A_i, A \to A_i$$

je důkaz $A \to A_i$ z T. Pokud A_i je A, $T \vdash A \to A_i$ plyne z 1.2. Nechť existují $r, s < i$ tak, že A_s je $A_r \to A_i$. Podle indukčního předpokladu platí $T \vdash A \to A_r$ a $T \vdash A \to (A_r \to A_i)$. Axiom (A2) pro volbu A, A_r, A_i za A, B, C zní

$$(A \to (A_r \to A_i)) \to ((A \to A_r) \to (A \to A_i)).$$

Použitím pravidla (P1) dostáváme $T \vdash A \to A_i$. Poněvadž jsme probrali všechny možnosti, věta je dokázána. $\square$

1.4. Lemma. *Platí*
(a) $\vdash \neg A \to (A \to B)$
(b) $\vdash \neg\neg A \to A$
(c) $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$
(d) $\vdash A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$
(e) $\vdash (\neg A \to A) \to A$

Důkaz. $\vdash \neg A \to (\neg B \to \neg A)$ plyne z (A1), $\neg A \vdash \neg B \to \neg A$ pak dostáváme z 1.3. Dále, (A3) je $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$, takže pomocí (P1) dostaneme $\neg A \vdash A \to B$. Z 1.3. plyne $\vdash \neg A \to (A \to B)$.

(b) Postupným užitím (a), 1.3., (A3), (P1), 1.3. a 1.3. dostáváme $\vdash \neg\neg A \to (\neg A \to \neg\neg\neg A)$, $\neg\neg A \vdash \neg A \to \neg\neg\neg A$, $\vdash (\neg A \to \neg\neg\neg A) \to (\neg\neg A \to A)$, $\neg\neg A \vdash \neg\neg A \to A$, $\neg\neg A \vdash A$ a $\vdash \neg\neg A \to A$.

(c) Z (b) plyne $\{A \to B, \neg\neg A\} \vdash A$. Podle (P1) platí $\{A \to B, \neg\neg A\} \vdash B$. Použitím (b) dostáváme $\vdash \neg\neg\neg B \to \neg B$, takže $\vdash B \to \neg\neg B$ podle (A3) a (P1). Tedy platí $\{A \to B, \neg\neg A\} \vdash \neg\neg B$. Z 1.3. plyne $A \to B \vdash \neg\neg A \to \neg\neg B$, takže, podle (A3) a (P1), $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$. Konečně, 1.3. dává tvrzení.

(d) Podle (P1), 1.3., (c) a 1.3. postupně máme $\{A, A \to B\} \vdash B$, $A \vdash (A \to B) \to B$, $A \vdash \neg B \to \neg(A \to B)$ a $\vdash A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$.

(e) Dvojnásobným použitím 1.3. získáme z (d) tvrzení $\neg A \vdash \neg(\neg A \to A)$, které pomocí 1.3. převedeme na $\neg A \vdash \neg(\neg A \to A)$. Z (A3) a (P1) pak plyne $\vdash (\neg A \to A) \to A$. □

1.5. Lemma o neutrální formuli. *Z* $T \cup \{A\} \vdash B$ *a* $T \cup \{\neg A\} \vdash B$ *plyne* $T \vdash B$

Důkaz. Z předpokladů postupně plyne $T \vdash \neg A \to B$, $T \vdash \neg B \to \neg\neg A$, $T \cup \{\neg B\} \vdash \neg\neg A$, $T \cup \{\neg B\} \vdash A$, $T \vdash A \to B$, $T \cup \{\neg B\} \vdash B$, $T \vdash \neg B \to B$ a $T \vdash B$. Postupně jsme přitom použili 1.3., 1.4.(c), 1.3., l.4.(b), 1.3., (P1) a předchozích dvou tvrzení, 1.3. a 1.4.(e). □

Buď v ohodnocení. Pro libovolnou výrokovou formuli B položíme B^v rovno B pokud $\bar{v}(B) = 1$ a rovno $\neg B$ pokud $\bar{v}(B) = 0$.

1.6. Lemma. *Nechť všechny atomické komponenty výrokové formule* A *jsou mezi* $P_1, \ldots, P_n$. *Pak pro libovolné ohodnocení* v *platí*

$$\{P_1^v, \ldots, P_n^v\} \vdash A^v$$

Důkaz. Důkaz povedeme indukcí vzhledem ke složitosti výrokové formule A. Je-li A atomická, není co dokazovat.

Buď A tvaru $\neg B$, přičemž pro B tvrzení platí. Pokud $\bar{v}(B) = 0$, pak B^v je rovno $\neg B$, t.j. A, takže B^v je rovno A^v. Tedy tvrzení platí pro A. Pokud $\bar{v}(B) = 1$, pak B^v je B, takže $\{P_1^v, \ldots, P_n^v\} \vdash B$. Během důkazu tvrzení 1.4.(c) jsme odvodili, že platí $\vdash B \to \neg\neg B$, takže $\{P_1^v, \ldots, P_n^v\} \vdash \neg\neg B$. Poněvadž A^v je $\neg\neg B$, tvrzení platí pro A.

Buď A tvaru $C \to D$, přičemž tvrzení platí pro C i D. Nastanou následující možnosti:
(i) $\bar{v}(C) = \bar{v}(D) = 1$: Poněvadž D^v je D, A^v je $C \to D$ a platí $\{P_1^v, \ldots, P_n^v\} \vdash D^v$. Z (A1) nyní plyne, že tvrzení platí pro A.

(ii) $\bar{v}(C) = 1$, $\bar{v}(D) = 0$: Platí $\bar{v}(A) = 0$, takže C^v je C, D^v je $\neg D$ a A^v je $\neg(C \to D)$.

Nyní stačí vzít v úvahu, že $\{C, \neg D\} \vdash \neg(C \to D)$ podle 1.4.(d) a 1.3.

(iii) $\bar{v}(C) = 0$: Platí $\bar{v}(A) = 1$, takže C^v je $\neg C$ a A^v je A. Tvrzení dostáváme použitím $C \vdash \neg C \to D$ (viz 1.4.(a) a 1.3.). □

1.7. Postova věta o úplnosti. *Buď A výroková formule. Pak platí $\vdash A$, právě když $\models A$.*

Důkaz. Implikace $\Rightarrow$ plyne z 1.1. Nechť $\models A$ a buďte $\{P_1^v, \dots, P_n^v\}$ atomické komponenty formule A. Pro libovolné ohodnocení v platí $\bar{v}(A) = 1$, takže $\{P_1^v, \dots, P_n^v\} \vdash A$ podle 1.6. Buď w ohodnocení, které všem atomickým formulím přiřazuje stejnou hodnotu jako v s vyjímkou formule P_n, které přiřazuje odlišnou hodnotu. Z 1.6. plyne, že $\{P_1^v, \dots, P_{n-1}^v, P_n\} \vdash A$. Z 1.5. dostáváme $\{P_1^v, \dots, P_{n-1}^v\} \vdash A$. Pokračováním v tomto postupu dojdeme k tvrzení $\vdash A$. □

2. Predikátová logika

Jazyk predikátové logiky se skládá z následujících symbolů:
$x_1, x_2 \dots, x_n, \dots$ (proměnné)
$\neg, \to$ (logické spojky)
$\forall$ (kvantifikátor)
$=$ (rovnost)
$(,)$ (závorky)
$R, \dots$ (symboly pro relace)
$f, \dots$ (symboly pro operace)

Zápis chápeme tak, že máme množinu symbolů pro relace a množinu symbolů pro operace. Každému symbolu pro relace je přiřazeno kladné celé číslo, které se nazývá *arita* (nebo také četnost) příslušného symbolu. Podobně, každému symbolu pro operace je přiřazena arita, která v tomto případě je nezáporné celé číslo. Nulární operační symboly se rovněž nazývají *konstantní* symboly.

Termy definujeme následovně:

(1) Každá proměnná je term.

(2) Jsou-li $t_1, \dots, t_n$ termy a f n-ární operační symbol, pak $f(t_1, \dots, t_n)$ je term.

(3) Každý term vznikne konečným počtem užití pravidel (1) a (2).

I v predikátové logice budeme používat $\vee, \wedge, \leftrightarrow$ zavedené v kapitole 1. Navíc zavedeme označení

$$\exists \text{ pro } \neg\forall\neg.$$

Atomické formule predikátové logiky jsou výrazy tvaru

$$t_i = t_j$$

kde t_i, t_j jsou termy nebo

$$R(t_{i_1}, \dots, t_{i_n})$$

kde R je relační symbol arity n a $t_{i_1}, \dots t_{i_n}$ jsou termy.

Formule predikátové logiky definujeme následovně:

(1) Každá atomická formule je formule.

(2) Jsou-li φ, ψ formule, pak $\neg\varphi, \varphi \to \psi$ jsou formule.
(3) Je-li x_i proměnná a φ formule, pak $(\forall x_i)\varphi$ je formule.
(4) Konečná posloupnost symbolů jazyka predikátové logiky je formule, právě když vznikne konečným počtem užití pravidel (1)-(3).

Formule φ ve formuli $(\forall x)\varphi$ se nazývá *obor* kvantifikátoru $\forall x$. Proměnná x se nemusí vyskytovat v oboru kvantifikátoru $\forall x$.

Výskyt proměnné ve formuli se nazývá *vázaný*, pokud x je proměnnou do formule vstupujícího kvantifikátoru $(\forall x)$ nebo nachází-li se x v oboru kvantifikátoru $(\forall x)$ vstupujícího do formule. V opačném případě se výskyt proměnné ve formuli nazývá *volný*. Proměnná se nazývá volnou (vázanou) proměnnou formule, existuje-li její volný (vázaný) výskyt ve formuli.

Zápis $t(x_1, \ldots, x_n)$ označuje, že všechny proměnné termu t jsou mezi $x_1, \ldots, x_n$. Podobně, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ označuje, že všechny volné proměnné formule φ jsou mezi $x_1, \ldots, x_n$.

Formule bez volných proměnných se nazývá *sentence* (nebo *uzavřená formule*).

2.1. Definice. Buď L jazyk predikátové logiky. *Realizace* $\mathcal{M}$ jazyka L je definována jako neprázdná množina M spolu s n-ární relací $R_{\mathcal{M}} \subseteq M^n$ pro každý n-ární relační symbol z L a n-ární operací $f_{\mathcal{M}} : M^n \to M$ pro každý n-ární funkční symbol z L.

Budeme definovat pojem pravdivosti formule v realizaci $\mathcal{M}$. *Ohodnocení proměnných* definujeme jako zobrazení e množiny proměnných do množiny M.

Hodnota $t[e]$ termu t při ohodnocení e se definuje následovně:
(1) $x[e] = e(x)$ pro proměnnou x
(2) $f(t_1, \ldots, t_n)[e] = f_{\mathcal{M}}(t_1[e], \ldots, t_n[e])$

Indukcí vzhledem k složitosti termu se ověří, že hodnota termu závisí pouze na ohodnocení proměnných, které se v termu vyskytují. Pro $t(x_1, \ldots, x_n)$ a $e(x_i) = a_i$ budeme příslušnou hodnotu značit $t[a_1, \ldots, a_n]$.

Pravdivost formule φ v realizaci $\mathcal{M}$ při ohodnocení proměnných e se definuje indukcí vzhledem ke složitosti formule. Budeme ji označovat $\mathcal{M} \models \varphi[e]$.

(1) Je-li φ atomická formule $t_1 = t_2$, pak

$$\mathcal{M} \models \varphi[e] \Leftrightarrow t_1[e] = t_2[e]$$

(2) Je-li φ atomická formule $R(t_1, \ldots, t_n)$, pak

$$\mathcal{M} \models \varphi[e] \Leftrightarrow (t_1[e], \ldots, t_n[e]) \in R_{\mathcal{M}}$$

(3) Je-li φ tvaru $\neg\psi$, pak

$$\mathcal{M} \models \varphi[e] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi[e] \text{ neplatí}$$

(4) Je-li φ tvaru $\alpha \to \beta$, pak

$$\mathcal{M} \models \varphi[e] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \alpha[e] \text{ implikuje } \mathcal{M} \models \beta[e]$$

(5) Je-li φ tvaru $(\forall x)\psi$, pak

$$\mathcal{M} \models \varphi[e] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi[v]$$

pro libovolné ohodnocení v, které splývá s e ve všech proměnných různých od x.

Řekneme, že formule φ je *pravdivá* v $\mathcal{M}$, je-li pravdivá pro všechna ohodnocení proměnných v $\mathcal{M}$. Píšeme $\mathcal{M} \models \varphi$.

Indukcí vzhledem ke složitosti formule lze snadno ukázat, že pravdivost formule závisí pouze na ohodnocení jejích volných proměnných. Pro $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ a $e(x_i) = a_i$ budeme používat označení $\varphi[a_1, \dots, a_n]$. Při určení pravdivosti formule tedy vystačíme pouze s ohodnocením konečně mnoha proměnných. Pravdivost sentence je na ohodnocení nezávislá.

2.2. Lemma. *Buď $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ formule a $t_1(y_1, \dots, y_m), \dots t_n(y_1, \dots, y_m)$ termy takové, že žádná z proměnných $y_1, \dots, y_m$ není vázaná v φ. Buď $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ formule vzniklá dosazením termů t_i za proměnné x_i pro $i = 1, \dots, n$. Pak pro libovolná $a_1, \dots, a_m \in M$ platí*

$$\mathcal{M} \models \varphi(t_1, \dots, t_n)[a_1, \dots, a_n]] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi[t_1[a_1, \dots, a_m], \dots, t_n[a_1, \dots, a_m]]$$

Důkaz. Indukcí vzhledem ke složitosti formule.

Buď φ formule, $x_1, \dots, x_n$ proměnné a $t_1, \dots, t_n$ termy. Pak $\varphi_{x_1,\dots,x_n}(t_1, \dots, t_n)$ bude označovat formuli vzniklou dosazením termů $t_1, \dots, t_n$ za každý volný výskyt proměnných $x_1, \dots, x_n$ v φ za předpokladu, že dosazení je *volné*. To znamená, že žádná proměnná z $t_1, \dots, t_n$ není vázaná na místě, kde je dosazena. Formule $\varphi_{x_1,\dots,x_n}(t_1, \dots, t_n)$ se nazývá *instance* formule φ.

Množina sentencí jazyka L se nazývá *teorie*. Realizace jazyka L se nazývá *model* teorie T, jestliže $\mathcal{M} \models \varphi$ pro všechna $\varphi \in T$. Píšeme $\mathcal{M} \models T$. Formule φ se nazývá *důsledek* teorie T, jestliže $\mathcal{M} \models \varphi$ pro každý model $\mathcal{M}$ teorie T. Značíme $T \models \varphi$. Teorie S, T se nazývají *ekvivalentní*, jestliže mají stejné důsledky. Píšeme $S \sim T$. Zřejmě $S \sim T$, právě když S a T mají stejné modely. Symbol $\models \varphi$ znamená, že φ je důsledkem prázdné teorie, t.j., že je pravdivá ve všech modelech. Takové formule φ se nazývají *(predikátové) tautologie.*

Teorie T se nazývá *sporná*, pokud nemá model. V opačném případě se nazývá *bezesporná.* Teorie T je sporná, právě když $T \models \varphi$ pro každou formuli φ.

Buďte $L_1 \subseteq L_2$ jazyky predikátové logiky (inkluze znamená, že libovolný relační (operační) symbol jazyka L_1 je relačním (operačním) symbolem jazyka L_2 stejné arity). Realizace $\mathcal{M}$ jazyka L_2 pak určuje realizaci $\mathcal{M}'$ jazyka L_1 tím, že zapomeneme na interpretaci relačních (operačních) symbolů z L_2, které nepatří do L_1. Realizace $\mathcal{M}'$ se nazývá *redukt* realizace $\mathcal{M}$.

2.3. Příklad. Jako příklad teorie uvedeme *Peanovu aritmetiku.* Její jazyk se skládá z binárních operačních symbolů $+, \cdot$, unárního operačního symbolu S a nulárního operačního symbolu 0. Teorie se skládá z následujících sentencí:

$$(\forall x)\neg(0 = S(x))$$

$$(\forall x)(\forall y)(S(x) = S(y) \to x = y)$$

$$(\forall x)(x + 0 = x)$$

$$(\forall x)(\forall y)(x + S(y) = S(x + y))$$

$$(\forall x)(x \cdot 0 = 0)$$

$$(\forall x)(\forall y)(x \cdot S(y) = x \cdot y + x)$$

$$(\forall x_1) \dots (\forall x_n)[\varphi(0, x_1, \dots, x_n) \wedge (\forall x_0)(\varphi(x_0, x_1, \dots, x_n) \to \varphi(S(x_0), x_1, \dots, x_n)) \to (\forall x_0)\varphi(x_0, x_1, \dots, x_n)]$$

kde $\varphi(x_0, \dots, x_n)$ je libovolná formule daného jazyka, v níž x_0 není vázaná proměnná.

Peanova aritmetika je axiomatizace teorie čísel v predikátové logice. Operace $+, \cdot, 0$ mají obvyklý význam, S je operace vzetí následníka. Axiomy 1,2,3 a 5 jsou jasné, 4 a 6 jsou rekurentní definice sčítání a násobení. Poslední axiom je schema axiomů indukce. Modelem Peanovy aritmetiky je množina $\mathbb{Z}^+$ nezáporných celých čísel. Tento model se nazývá *standardní*.

3. Axiomy predikátové logiky

Axiomy:
(A1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
(A2) $(\varphi \to (\psi \to \eta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \eta)$
(A3) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$
(A4) $(\forall x)(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\forall x)\psi)$
pokud x není volná v φ
(A5) $(\forall x)\varphi \to \varphi_x(t)$
(A6) $x = x$

$$x = y \to t(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) = t(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

$$x = y \to (\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) \to \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n))$$

kde t je term a φ formule.

Odvozovací pravidla:
(P1) Z φ a $\varphi \to \psi$ plyne ψ
(P2) Z φ plyne $(\forall x)\varphi$.

Axiomy (A1)-(A3) jsou axiomy výrokové logiky, (A4) je *axiom kvantifikátoru*, (A5) *axiom substituce* a (A6) jsou *axiomy rovnosti*. Dále (P1) je *pravidlo odloučení* (nebo také *modus ponens*) a (P2) je *pravidlo zobecnění*.

Pojem důkazu a dokazatelné formule se zavádí podobně jako ve výrokové logice. Podobně definujeme $T \vdash \varphi$. Je-li φ tautologie výrokové logiky nad množinou atomických formulí jazyka predikátové logiky, pak φ je dokazatelná v predikátové logice.

3.1. Věta o korektnosti. *Buď T teorie a φ formule. Pak z $T \vdash \varphi$ plyne $T \models \varphi$.*

Důkaz. Je zřejmý.

3.2. Lemma. *(Pravidlo zavedení $\forall$): Nechť $\vdash \varphi \to \psi$, přičemž proměnná x není volná v φ. Pak $\vdash \varphi \to (\forall x)\psi$.*

Důkaz. Z předpokladu a (P2) plyne, že $(\forall x)(\varphi \to \psi)$. Z (A4) a (P1) dostáváme tvrzení. $\square$

3.3. Lemma. *(Pravidlo zavedení $\exists$): Nechť $\vdash \varphi \to \psi$, přičemž proměnná x není volná v ψ. Pak $\vdash (\exists x)\varphi \to \psi$.*

Důkaz. Z předpokladu, výrokové logiky a (P1) plyne $\vdash \neg\psi \to \neg\varphi$. Podle 3.2 platí $\vdash \psi \to (\forall x)\neg\varphi$. Opět podle výrokové logiky $\neg(\forall x)\neg\varphi \to \psi$, což je tvrzení. □

3.4. Lemma. *Pro libovolnou formuli φ a term t platí*

$$\varphi_x(t) \to (\exists x)\varphi.$$

Důkaz. Podle (A5) je dokazatelná formule $(\forall x)\neg\varphi \to \neg\varphi_x(t)$. Výrokovou logikou je z ní dokazatelná fromule $\neg\neg\varphi_x(t) \to \neg(\forall x)\neg\varphi$, což je tvrzení. □

3.5. Lemma. *Instance dokazatelné formule je dokazatelná.*

Důkaz. Buď φ dokazatelná formule a $\psi = \varphi_{x_1,\dots,x_n}(t_1,\dots,t_n)$ její instance.

(I) Pokud $n = 1$, pak jsou postupně dokazatelné formule $(\forall x_1)\varphi$ a $\varphi_{x_1}(t)$.

(II) V obecném případě nejprve nahradíme proměnné $x_1,\dots,x_n$ proměnnými $z_1,\dots,z_n$, které se nevyskytují ani v φ ani v $t_1,\dots,t_n$. Nahrazení se provede stejně jak v (I). Postupným dosazováním termů $t_1,\dots,t_n$ za proměnné $z_1,\dots,z_n$ podle (I) dostaneme tvrzení. □

Z (A5) a (P2) plyne, že pro libovolnou permutaci $i_1,\dots,i_n$ platí

$$\vdash (\forall x_1)\dots(\forall x_n)\varphi \leftrightarrow (\forall x_{i_1})\dots(\forall x_{i_n})\varphi$$

Duálně

$$\vdash (\exists x_1)\dots(\exists x_n)\varphi \leftrightarrow (\exists x_{i_1})\dots(\exists x_{i_n})\varphi$$

Uzávěr $\overline{\varphi}$ formule $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ se definuje jako $(\forall x_1)\dots(\forall x_n)\varphi$. Platí

$$\vdash \varphi \leftrightarrow \overline{\varphi} \tag{1}$$

.

3.6. Lemma. *Je-li formule $\varphi \to \psi$ dokazatelná, pak jsou dokazatelné i formule $(\forall x)\varphi \to (\forall x)\psi$ a $(\exists x)\varphi \to (\exists x)\psi$.*

Důkaz. První tvrzení získáme pomocí (A5) a 3.2: $(\forall x)\varphi \to \varphi$, $\varphi \to \psi$, $(\forall x)\varphi \to \psi$, $(\forall x)\varphi \to (\forall x)\psi$. Duálně (t.j., pomocí 3.4 a 3.3) získáme druhé tvrzení. □

3.7. Věta o ekvivalenci. *Nechť formule φ' vznikne z formule φ nahrazením některých podformulí ψ formulemi ψ' takovými, že formule $\psi \leftrightarrow \psi'$ jsou dokazatelné. Pak formule $\varphi \leftrightarrow \psi$ je dokazatelná.*

Důkaz. Provede se indukcí vzhledem ke složitosti formule.

3.8. Věta o konstantách. *Buď T teorie jazyka L a $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ formule jazyka L. Nechť jazyk L' vznikne přidáním k L nových konstantních symbolů $c_1,\dots,c_n$. Pak platí*

$$T \vdash \varphi(c_1,\dots,c_n) \Leftrightarrow T \vdash \varphi.$$

Důkaz. Z $T \vdash \varphi$ plyne $T \vdash \varphi(c_1,\dots,c_n)$ podle 3.5. Naopak, nechť $T \vdash \varphi(c_1,\dots,c_n)$. Buďte $y_1,\dots,y_n$ proměnné, které se nevyskytují v příslušném důkazu. Nahradíme-li v tomto důkazu c_i vždy y_i, dostaneme tvrzení. □

Znamená to, že nově přidané konstanty se chovají jako proměnné.

3.9. Věta o dedukci. *Buď T teorie, φ sentence a ψ formule. Pak platí*

$$T, \varphi \vdash \psi \Leftrightarrow T \vdash \varphi \to \psi$$

.

Důkaz. Je stejný jako pro výrokovou logiku. Je třeba pouze navíc uvážit případ, že v důkazu $\varphi_1, \dots \varphi_n$, formule ψ z T, φ se vyskytne pravidlo zobecnění. V tomto případě je φ_i tvaru $(\forall x)(\varphi_j)$ pro nějaké $j < i \leq n$. Z indukčního předpokladu víme, že $T \vdash \varphi \to \varphi_j$, takže $T \vdash (\forall x)(\varphi \to \varphi_j)$ podle (P2). Poněvadž φ je sentence, z (A4) plyne, že $T \vdash \varphi \to (\forall x)\varphi_j$, t.j., $T \vdash \varphi \to \varphi_i$, což jsme chtěli dokázat. □

Teorie T se nazývá *sporná*, pokud existuje sentence φ taková, že $T \vdash \varphi$ i $T \vdash \neg\varphi$. V opačném případě se T nazývá *bezesporná*. Je zřejmé, že pro spornou teorii T platí $T \vdash \psi$ pro libovolnou formuli ψ. Stačí uvážit, že z výrokové logiky plyne, že formule $(\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi$.

3.10. Důsledek. *Buď T teorie a φ sentence. Pak teorie $T \cup \{\varphi\}$ je sporná, právě když platí $T \vdash \neg\varphi$.*

Důkaz. Je-li teorie $T \cup \{\varphi\}$ sporná, pak platí $T, \varphi \vdash \neg\varphi$, takže $T \vdash \varphi \to \neg\varphi$ podle věty o dedukci. Tedy $T \vdash \neg\varphi$ podle 1.4.(e). Opačná implikace je zřejmá. □

3.11. Věta o redukci. *Buď T teorie a φ formule. Pak $T \vdash \varphi$, právě když existují sentence $\varphi_1, \dots \varphi_n \in T$ tak, že formule $\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \dots (\varphi_n \to \varphi) \dots)$ je dokazatelná.*

Důkaz. Dostatečnost je zřejmá. Nechť $T \vdash \varphi$ a buďte $\varphi_1, \dots \varphi_n$ všechny formule z T, které se vyskytují v důkazu φ z T. Pak platí $\varphi_1, \dots \varphi_n \vdash \varphi$, takže tvrzení plyne z 3.9. □

Tento výsledek redukuje dokazatelnost vzhledem k T na dokazatelnost v predikátové logice. Nedává však návod, jak nalézt formule $\varphi_1, \dots \varphi_n$. Všechny dosud uvedené výsledky platí i pro predikátovou logiku bez rovnosti. Závěrem dokážeme, že rovnost je i symetrická a tranzitivní

3.12. Lemma. *Platí*

$$\vdash x = y \to y = x$$

$$\vdash x = y \wedge y = z \to x = z.$$

Důkaz. Dosazením do formule $x_1 = x$ podle třetího axiomu rovnosti dostáváme $\vdash x = y \to (x = x \to y = x)$. Z prvního axiomu rovnosti a výrokové logiky plyne symetrie rovnosti.

Dosazením do formule $x_1 = z$ podle třetího axiomu rovnosti dostáváme

$$\vdash y = x \to (y = z \to x = z).$$

Ze symetrie rovnosti a výrokové logiky plyne tranzitivita rovnosti. □

4. Věta o úplnosti

Teorie T jazyka L se nazývá *Henkinova*, jestliže pro libovolnou sentenci $(\exists x)\varphi$ jazyka L platí

$$T \vdash (\exists x)\varphi \to \varphi_x(c)$$

pro nějakou konstantu c.

Libovolná Henkinova teorie obsahuje aspoň jednu konstantu c (danou sentencí $(\exists x)(x = x)$).

Teorie T se nazývá *úplná*, je-li bezesporná a pro libovolnou sentenci φ jazyka L platí buď $T \vdash \varphi$ nebo $T \vdash \neg\varphi$.

4.1. Lemma. *Libovolná úplná Henkinova teorie má model.*

Důkaz. Buď C množina všech termů bez volných proměnných jazyka L. Položme

$$t_1 \sim t_2 \Leftrightarrow T \vdash t_1 = t_2$$

Z (A6), 3.12 a (A5) plyne, že $\sim$ je relace ekvivalence. Buď $M = C\backslash \sim$. Značíme $\overline{t} = \{s \in C\backslash s \sim t\}$. Pro n-ární relační symbol R položíme

$$(\overline{t}_1, \ldots, \overline{t}_n) \in R_{\mathcal{M}} \Leftrightarrow T \vdash R(t_1, \ldots, t_n)$$

Podobně, pro n-ární operační symbol f položíme

$$f_{\mathcal{M}}(\overline{t}_1, \ldots, \overline{t}_n) = \overline{f(t_1, \ldots, t_n)}$$

Z (A6) a (A5) plyne, že definice nezáleží na volbě reprezentantů. Pro libovolný term $t \in C$ zřejmě platí

$$t_{\mathcal{M}} = \overline{t}.$$

Ukážeme, že pro vzniklou realizaci $\mathcal{M}$ platí

(1)
$$\mathcal{M} \models \varphi \Leftrightarrow T \vdash \varphi$$

pro libovolnou sentenci φ. Odsud plyne, že $\mathcal{M}$ je model teorie T.

Důkaz povedeme indukcí vzhledem k délce sentence φ. Poněvadž T obsahuje aspoň jednu konstantu, nejkratší sentence jsou atomické sentence. Je-li φ atomická formule tvaru $t_1 = t_2$, pak $\mathcal{M} \models t_1 = t_2$ platí, právě když $\overline{t}_1 = \overline{t}_2$, což nastane, právě když $T \vdash t_1 = t_2$. Je-li φ atomická sentence tvaru $R(t_1, \ldots, t_n)$, pak $\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$, právě když $(\overline{t}_1, \ldots, \overline{t}_n) \in R_{\mathcal{M}}$, což nastane, právě když $T \vdash R(t_1, \ldots, t_n)$.

Předpokládejme, že (1) platí pro všechny sentence kratší než φ. Ukážeme, že pak (1) platí pro φ, čímž bude důkaz ukončen. Mohou nastat následující možnosti:

a) φ je tvaru $\neg\psi$: Pak platí $\mathcal{M} \models \varphi$, právě když neplatí $\mathcal{M} \models \psi$, což podle indukčního předpokladu nastane, právě když neplatí $T \vdash \psi$. Z úplnosti teorie T plyne, že to nastane, právě když platí $T \vdash \neg\psi$, což je totéž jako $T \vdash \varphi$.

b) φ je tvaru $\psi \wedge \eta$: Pak platí $\mathcal{M} \models \varphi$, právě když platí $\mathcal{M} \models \psi, \eta$. Podle indukčního předpokladu to nastane, právě když $T \vdash \psi, \eta$, t.j., právě když $T \vdash \varphi$.

c) φ je tvaru $(\exists x)\psi$: Pak platí $\mathcal{M} \models \varphi$, právě když $\mathcal{M} \models \psi[\overline{t}]$ pro nějaké t. Poněvadž term t se v $\mathcal{M}$ interpretuje jako $\overline{t}$, platí $\mathcal{M} \models \psi(t)$. Poněvadž formule

$\psi(t)$ je kratší než $(\exists x)\psi$, z indukčního předpokladu plyne, že $T \vdash \psi(t)$. Z lemmatu 3.4 plyne, že $T \vdash (\exists x)\psi$. Tedy $T \vdash \varphi$. Naopak, nechť platí $T \vdash \varphi$. Poněvadž teorie T je Henkinova, existuje konstanta c taková, že $T \vdash \psi(c)$. Poněvadž formule $\psi(c)$ je kratší než $(\exists x)\psi$, z indukčního předpokladu plyne, že platí $\mathcal{M} \models \psi(c)$. Tedy $\mathcal{M} \models \psi[c]$, takže $\mathcal{M} \models \varphi$. □

4.2. Lemma. *Teorie T je bezesporná, právě když každá její konečná podmnožina je bezesporná.*

Důkaz. Nutnost je zřejmá a dostatečnost ihned plyne z toho, že důkaz je konečná posloupnost formulí. □

4.3. Lindenbaumova věta. *Pro libovolnou bezespornou teorii T existuje úplná teorie $S \supseteq T$ se stejným jazykem.*

Důkaz. Z lemmatu 4.2 plyne, že sjednocení řetězce bezesporných teorií je bezesporná teorie. Podle Zornova lemmatu (aplikovaného na množinu bezesporných teorií daného jazyka uspořádanou množinovou inkluzí) existuje maximální bezesporná teorie $S \supseteq T$. Ukážeme, že S je hledaná úplná teorie. Buď φ sentence taková, že neplatí $S \vdash \varphi$. Pak $\varphi \notin S$, takže $S \cup \{\varphi\}$ je sporná teorie. Z důsledku věty o dedukci plyne, že $S \vdash \neg\varphi$. Tím jsme ukázali, že S je úplná teorie. □

4.4. Gödelova věta. *Teorie je bezesporná, právě když má model.*

Důkaz. Má-li teorie T model, pak je zřejmě bezesporná. Buď T bezesporná teorie jazyka L. Nejprve rozšíříme T na Henkinovu teorii. Položme $L_0 = L$ a $T_0 = T$. Předpokládejme, máme jazyk L_n a teorii T_n, kde $0 \leq n$. Pro libovolnou sentenci ψ tvaru $(\exists x)\varphi$ jazyka L_n přidáme k L_n nový konstantní symbol c_ψ a k T_n novou semtenci $(\exists x)\varphi \to \varphi_x(c_\psi)$. Tím vznikne nový jazyk L_{n+1} a nová teorie T_{n+1}. Položme $L_\infty = \bigcup\limits_{0 \leq n} L_n$ a $T_\infty = \bigcup\limits_{0 \leq n} T_n$. Zřejmě T_∞ je Henkinova teorie jazyka L_∞.

Dokážeme, že T_∞ je bezesporná teorie. Poněvadž sjednocení řetězce bezesporných teorií je bezesporná teorie, stačí ukázat, že přidáním nové konstanty c jazyku J a sentence $(\exists x)\varphi \to \varphi_x(c)$ (kde φ je formule jazyka J) k bezesporné teorii S jazyka J vznikne opět bezesporná teorie. Předpokládejme, že tomu tak není. Pak podle 3.10 platí $S \vdash \neg((\exists x)\varphi \to \varphi(c))$. Tedy $S \vdash \neg(\neg(\exists x)\varphi \vee \varphi(c))$, t.j. $S \vdash (\exists x)\varphi \wedge \neg\varphi(c)$. Z 3.8 plyne, že $S \vdash (\exists x)\varphi \wedge \neg\varphi(x)$. Tedy $S \vdash (\exists x)\varphi, \neg\varphi(x)$, takže $S \vdash (\exists x)\varphi, (\forall)\neg\varphi$, což znamená $S \vdash (\exists x)\varphi, \neg(\exists x)\varphi$. Dostáváme spor.

Sestrojili jsme bezespornou Henkinovu teorii $T_\infty \supseteq T$ jazyka $L_\infty \supseteq L$. Z 4.3 plyne existence úplné teorie T_* jazyka L_∞ takové, že $T_\infty \subseteq T_*$. Zřejmě T_* je Henkinova teorie. Podle lemmatu 4.1 má tato teorie model $\mathcal{M}$. Jeho redukt v L je modelem teorie T. □

4.5. Poznámka. Dokonce jsme dokázali, že bezesporná teorie jazyka L má model mohutnosti $\leq \max\{|L|, \aleph_0\}$ neboť

$$|M| \leq \text{počet termů jazyka } L_\infty \leq \text{počet formulí jazyka } L.$$

Zejména bezesporná teorie konečného jazyka má spočetný model.

4.6. Gödelova věta o úplnosti. *Pro libovolnou formuli φ platí $\vdash \varphi$, právě když $\models \varphi$.*

Důkaz. Nutnost plyne z věty 3.1. Ze vztahu (1) předešlé kapitoly plyne, že dostatečnost stačí dokázat pro sentence. Buď tedy φ sentence taková, že platí $\models \varphi$. Předpokládejme, že $\vdash \varphi$ neplatí. Z 3.10 plyne, že $\{\neg\varphi\}$ je bezesporná teorie, takže má model. Tedy neplatí $\models \varphi$. □

Zcela analogicky se dokáže, že pro libovolnou teorii T a libovolnou formuli φ platí

$$T \vdash \varphi \quad \Leftrightarrow \quad T \models \varphi.$$

(Plyne to ostatně z právě dokázané věty a věty 3.11.)

5. Věta o kompaktnosti

5.1. Věta o kompaktnosti. *Teorie má model, právě když každá její konečná podmnožina má model.*

Důkaz. Plyne z 4.4 a 4.2.

5.2. Důsledek. *Buď T teorie taková, že pro libovolné přirozené číslo n existuje model teorie T mající aspoň n prvků. Pak T má nekonečný model.*

Důkaz. Buď L jazyk teorie T. Nechť jazyk L_1 vznikne přidáním nových konstantních symbolů $c_1, \ldots, c_n, \ldots$. Buď T_1 teorie jazyka L_1 vzniklá přidáním sentencí $c_i \neq c_j$, $i < j$ k T. Stačí ukázat, že teorie T_1 má model. Jeho redukt v L je totiž hledaným nekonečným modelem teorie T.

Buď $S \subseteq T_1$ konečná podmnožina. Existuje n takové, že všechny nově přidané konstanty obsažené v sentencích z S jsou mezi $c_1, \ldots, c_n$. Podle předpokladu existuje model $\mathcal{M}$ teorie T mající aspoň n prvků. Tedy existují navzájem různé prvky $a_1, \ldots, a_n \in M$. Položíme-li $(c_i)_{\mathcal{M}} = a_i$, dostaneme model teorie S (chápané v jazyce $L \cup \{c_1, \ldots, c_n\}$). Z věty o kompaktnosti plyne, že teorie T_1 má model. □

5.3. Löwenheim-Skolemova věta. *Má-li teorie jazyka L nekonečný model, pak má model libovolné mohutnosti $\geq \max\{|L|, \aleph_0\}$.*

Důkaz. Buď T teorie jazyka L s nekonečným modelem $\mathcal{M}$. Buď $n \geq \max\{|L|, \aleph_0\}$ kardinální číslo. Nechť jazyk L_1 vznikne přidáním nových konstantních symbolů c_i, $i \in I$, kde I je množina mohutnosti n. Nechť T_1 vznikne přidáním sentencí $c_i \neq c_j$, $i \neq j$, $i, j \in I$ k T. Je-li $S \subseteq T_1$ konečná podmnožina, pak $\mathcal{M}$ je model S pokud konstantní symboly c_i vyskytující se v S interpretujeme jako navzájem různé prvky v M (to lze neboť takových c_i je konečně mnoho). Z věty 5.1 plyne, že teorie T_1 má model. Z poznámky 4.5 plyne, že T_1 má model mohutnosti $\leq n$. Poněvadž libovolný model teorie T_1 má $\geq n$ prvků, platí $|M| = n$. Redukt $\mathcal{M}$ v L je tedy hledaný model teorie T o n prvcích. □

Realizace $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ jazyka L se nazývají *izomorfní*, jestliže existuje bijekce $h : M_1 \to M_2$ taková, že

$$(a_1, \ldots, a_n) \in R_{\mathcal{M}_1} \Leftrightarrow (h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in R_{\mathcal{M}_2}$$
$$h(f_{\mathcal{M}_1}(a_1, \ldots, a_n)) = f_{\mathcal{M}_2}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

pro libovolný relační symbol R a libovolný operační symbol f jazyka L. Značíme $\mathcal{M}_1 \cong \mathcal{M}_2$. Zobrazení h se nazývá *izomorfismus.*

5.4. Poznámka. Existuje bezesporná teorie, jejíž všechny modely jsou izomorfní. Stačí uvažovat jazyk bez relačních a operačních symbolů a sentenci

$$(\exists x_1, \ldots, x_n)[(\forall x)(\bigvee_{i=1}^{n} x_i = x) \wedge \bigwedge_{i \neq j} \neg(x_i = x_j))]$$

kde n je přirozené číslo. Tato sentence má, až na izomorfismus, jediný model a sice množinu o n prvcích.

Z 5.3 plyne, že neexistuje teorie, která by měla, až na izomorfismus, jediný nekonečný model. Zejména Peanova aritmetika nutně má nestandardní modely, t.j., modely, které nejsou izomorfní $\mathbb{Z}^+$.

6. Úplné teorie

Buď $\mathcal{M}$ realizace jazyka L. Symbolem $T(\mathcal{M})$ budeme značit množinu všech sentencí jazyka L takových, že $\mathcal{M} \models \varphi$. Realizace $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ se nazývají *elementárně ekvivalentní*, jestliže $T(\mathcal{M}_1) = T(\mathcal{M}_2)$. Značíme $\mathcal{M}_1 \equiv \mathcal{M}_2$.

6.1. Věta. *Teorie T je úplná, právě když je bezesporná a libovolné dva její modely jsou elementárně ekvivalentní.*

Důkaz. Buď T úplná teorie a $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ její modely. Buď φ sentence taková, že platí $\mathcal{M}_1 \models \varphi$. Tedy nemůže platit $T \vdash \neg\varphi$. Poněvadž T je úplná teorie, platí $T \vdash \varphi$, takže $\mathcal{M}_2 \models \varphi$. Odsud plyne, že libovolné dva modely teorie T jsou elementárně ekvivalentní.

Naopak, buď T bezesporná teorie, jejíž libovolné dva modely jsou elementárně ekvivalentní. Buď φ sentence taková, že neplatí $T \vdash \neg\varphi$. Pak $\mathcal{M} \models \varphi$ platí pro libovolný model $\mathcal{M}$ teorie T, takže $T \models \varphi$. Z 4.6 plyne, že $T \vdash \varphi$. Tedy teorie T je úplná. □

6.2. Věta. *Teorie T je úplná, právě když existuje realizace $\mathcal{M}$ taková, že T je ekvivalentní $T(\mathcal{M})$.*

Důkaz. Teorie $T(\mathcal{M})$ je zřejmě úplná pro libovolnou realizaci $\mathcal{M}$. Buď T úplná teorie a $\mathcal{M}$ její model. Poněvadž $T \subseteq T(\mathcal{M})$, libovolný model teorie $T(\mathcal{M})$ je modelem teorie T. Z věty 6.1 plyne, že libovolný model teorie T je modelem teorie $T(\mathcal{M})$. Tedy teorie T a $T(\mathcal{M})$ jsou ekvivalentní. □

6.3. Věta. *Libovolné dvě izomorfní realizace jsou elementárně ekvivalentní.*

Důkaz. Buď $h : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ izomorfismus. Indukcí vzhledem ke složitosti formule se ověří, že platí

$$\mathcal{M}_1 \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{M}_2 \models \varphi[h(a_1), \ldots, h(a_n)]$$

pro libovolnou formuli φ. (Definice izomorfismu dává právě uvedený vztah pro atomické formule.) Odsud již plyne, že $\mathcal{M}_1 \equiv \mathcal{M}_2$ (zvolíme-li za φ sentenci). □

Z 5.3 plyne, že existují elementárně ekvivalentní modely, které nejsou izomorfní. V opačném případě by úplná teorie nemohla mít nekonečný model, což odporuje větě 6.2.

6.4. Věta. *Dvě konečné realizace jsou elementárně ekvivalentní, právě když jsou izomorfní.*

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že jazyk L je konečný a buď $\mathcal{M}$ konečná realizace jazyka L; nechť $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Ukážeme, že existuje sentence φ taková, že pro libovolnou realizaci $\mathcal{N}$ jazyka L platí

$$\mathcal{N} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{N} \cong \mathcal{M}.$$

V 5.3 jsme nalezli sentenci říkající, že model má právě n prvků. Lze ji doplnit popisem interpretace relačních a operačních symbolů. K tomu potřebujeme předpoklad, že jazyk L je konečný. Předvedeme to na příkladě jazyka L, který má jediný binární relační symbol R:

$$(\exists x_1, \ldots, x_n)[(\forall x)\varphi \wedge \bigwedge_{(a_i,a_j)\in R_{\mathcal{M}}} R(x_i, x_j) \wedge \bigwedge_{(a_i,a_j)\notin R_{\mathcal{M}}} \neg R(x_i, x_j)]$$

kde φ je formule v kulatých závorkách (po $(\forall x)$) v 5.3.)

Je-li nyní $\mathcal{N}$ realizace jazyka L elementárně ekvivalentní s $\mathcal{M}$, pak $\mathcal{N} \models \varphi$, t.j., $\mathcal{N} \cong \mathcal{M}$.

Buď nyní L libovolný jazyk a $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ dvě elementárně ekvivalentní konečné realizace jazyka L. Pro libovolnou konečnou podmnožinu $K \subseteq L$ (tím rozumíme, že K je konečná množina relačních a operačních symbolů z L) buď X_K množina všech bijekcí $h : M_1 \to M_2$ zachovávajících všechny relační a operační symboly z K (to znamená, vztah z definice izomorfismu platí pro R a f z K). Z první části důkazu plyne, že $X_K \neq \emptyset$. Dále zřejmě platí $X_{K_1} \subseteq X_{K_2}$ pro $K_2 \subseteq K_1$. Ukážeme, že existuje $h \in \bigcap_K X_K \neq \emptyset$. Pak h je hledaný izomorfismus $\mathcal{M}_1$ a $\mathcal{M}_2$.

Předpokládejme, že $\bigcap_K X_K = \emptyset$. Poněvadž existuje pouze konečně mnoho bijekcí $h : M_1 \to M_2$ a pro libovolnou takovou bijekci h existuje konečná podmnožina $K_h \subseteq L$ taková, že $h \notin X_{K_h}$, pro $K = \bigcup_h X_{K_h}$ platí $X_K = \emptyset$, což není možné. $\square$

Buď n kardinální číslo. Teorie T se nazývá *n-kategorická*, pokud všechny její modely mohutnosti n jsou izomorfní a přitom má model mohutnosti n.

6.5. Los-Vaughtova věta. *Buď T bezesporná teorie jazyka L, která nemá konečné modely a je n-kategorická pro nějaké $n \geq max\{|L|, \aleph_0\}$. Pak T je úplná.*

Důkaz. Vzhledem k větě 6.1 stačí ukázat, že libovolné dva modely $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ teorie T jsou elementárně ekvivalentní. Podle předpokladu jsou oba modely nekonečné. Z 5.3. plyne, že existuje model $\mathcal{M}_1'$ teorie $T(\mathcal{M}_1)$ mohutnosti n a model $\mathcal{M}_2'$ teorie $T(\mathcal{M}_2)$ mohutnosti n. Poněvadž T je n-kategorická, platí $\mathcal{M}_1 \cong \mathcal{M}_2$. Z věty 6.3 (a tranzitivity relace elementární ekvivalence) plyne, že $\mathcal{M}_1 \equiv \mathcal{M}_2$. $\square$

Právě dokázaná věta uvádí dostatečnou podmínkou pro úplnost teorie. Libovolná úplná teorie je samozřejmě bezesporná. Má-li úplná teorie konečný model $\mathcal{M}$, pak z vět 6.1 a 6.4 plyne, že, až na izomorfismus, $\mathcal{M}$ je jediný model teorie T. Tedy "zajímavé" úplné teorie nemají konečné modely.

6.6. Příklad. Ukážeme, že teorie hustého lineárního uspořádání bez nejmenšího a největšího prvku je úplná. Zřejmě se jedná o bezespornou teorii bez konečných modelů. Hausdorffova věta tvrdí, že tato teorie je $\aleph_0$-kategorická. Z 6.5 plyne, že je úplná.

Z věty 6.1 nyní plyne, že uspořádané množiny $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ jsou elementárně ekvivalentní. Přitom nejsou izomorfní neboť mají různou mohutnost.

7. Elementární třídy

Sentence se nazývá *univerzální*, je-li tvaru

$$(\forall x_1, \ldots, x_n)\varphi$$

kde φ neobsahuje žádné kvantifikátory. Teorie složená z univerzálních sentencí se nazývá *univerzální.*

Příklady 7.1. (1) Teorie grup je univerzální teorie. Připomeňme, že se jedná o teorii jazyka obsahujícího binární funkční symbol $\cdot$, unární funkční symbol $^{-1}$ a nulární funkční symbol 1, která se skládá ze sentencí

$$(\forall x, y, z)(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z))$$

$$(\forall x)(x \cdot x^{-1} = 1)$$

$$(\forall x)(x^{-1} \cdot x = 1)$$

$$(\forall x)(x \cdot 1 = x)$$

$$(\forall x)(1 \cdot x = x).$$

(2) Teorie komutativních okruhů s jedničkou je univerzální teorie. Připomeňme, že se jedná o teorii jazyka obsahujícího binární funkční symboly $+, \cdot$, unární funkční symbol $-$ a nulární funkční symboly $0, 1$, která se skládá ze sentencí

$$(\forall x, y, z)(x + (y + z) = (x + y) + z))$$

$$(\forall x)(x + (-x) = 0)$$

$$(\forall x)(x + 0 = x)$$

$$(\forall x, y)(x + y = y + x)$$

$$(\forall x, y, z)(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z))$$

$$(\forall x)(x \cdot 1 = x)$$

$$(\forall x)(1 \cdot x = x)$$

$$(\forall x, y)(x \cdot y = y \cdot x)$$

$$(\forall x, y, z)(x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z).$$

(3) Teorie oborů integrity je univerzální teorie. Jedná se o teorii jazyka komutativních okruhů s jedničkou, která, kromě sentencí této teorie, obsahuje sentence

$$\neg(0 = 1)$$

$$(\forall x, y)(x \cdot y = 0 \to (x = 0 \vee y = 0)).$$

(4) Teorie uspořádaných množin je univerzální teorie. Připomeňme, že se jedná o teorii jazyka obsahujícího binární relační symbol $\leq$, která se skládá ze sentencí

$$(\forall x, y, z)(x \leq y \wedge y \leq z \to x \leq z)$$

$$(\forall x, y)(x \leq y \wedge y \leq x \to x = y)$$

$$(\forall x)(x \leq x).$$

(5) Teorie lineárně uspořádaných množin je univerzální teorie. Jedná se o teorii stejného jazyka jako teorie uspořádaných množin, která navíc obsahuje sentenci

$$(\forall x, y)(x \leq y \vee y \leq x).$$

Buď $\mathcal{M}$ realizace jazyka L s nosnou množinou M. Řekneme, že realizace $\mathcal{N}$ jazyka L s nosnou množinou N je *podrealizace* realizace $\mathcal{M}$, jestliže $N \subseteq M$, pro libovolný n-ární relační symbol jazyka L platí

$$R_{\mathcal{N}} = N^n \cap R_{\mathcal{M}}$$

a pro libovolný n-ární funkční symbol jazyka L platí, že $f_{\mathcal{N}}$ je zúžení $f_{\mathcal{M}}$ na N^n.

Lemma 7.2. *Buď T univerzální teorie, $\mathcal{M}$ model teorie T a $\mathcal{N}$ podrealizace realizace $\mathcal{M}$. Pak $\mathcal{N}$ je model teorie T.*

Důkaz. Je zřejmý.

Říkáme, že univerzální teorie je *uzavřená na podmodely.* Lze dokázat, že platí obrácené tvrzení: Libovolná teorie uzavřená na podmodely je ekvivalentní univerzální teorii.

Univerzální Hornova sentence je definována jako sentence tvaru

$$(\forall x_1, \dots, x_n)(\varphi \to \psi),$$

kde φ je konjunkce atomických formulí a ψ je atomická fromule nebo jako sentence tvaru

$$(\forall x_1, \dots x_n)\neg\varphi,$$

kde φ je konjunkce atomických formulí. *Univerzální Hornova teorie* je definována jako teorie složená z univerzálních Hornových sentencí.

Příklady 7.3. (1) Teorie grup a teorie komutativních okruhů s jedničkou jsou univerzální Hornovy teorie. Totiž libovolnou rovnost $t_1 = t_2$, kde t_1 a t_2 jsou termy v proměnných $x_1, \ldots, x_n$, lze napsat jako univerzální Hornovu sentenci

$$(\forall x, x_1, \ldots, x_n)(true \to t_1 = t_2),$$

kde $true$ je prázdná konjunkce atomických formulí.

(2) Teorie oborů integrity není univerzální Hornova teorie. Sentence $\neg(0 = 1)$ je sice univerzální Hornova, ale axiom neexistence dělitelů nuly není univerzální Hornova sentence (a ani nelze nahradit univerzální Hornovou sentencí).

(3) Teorie uspořádaných množin je univerzální Hornova teorie, zatímco teorie lineárně uspořádaných množin není univerzální Hornova teorie.

Buďte $\mathcal{M}_i$, $i \in I$ realizace jazyka L. Součin $\prod\limits_{i\in I} \mathcal{M}_i$ definujeme jako realizaci $\mathcal{M}$ s nosnou množinou $M = \prod\limits_{i\in I} M_i$ takovou, že

$$(a_1, \ldots, a_n) \in R_{\mathcal{M}} \Leftrightarrow (a_{1i}, \ldots, a_{ni}) \in R_{\mathcal{M}_i} \text{ pro všechna } i \in I$$

$$f_{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n) = (f_{\mathcal{M}_i}(a_{1i}, \ldots, a_{ni}))_{i\in I}$$

kde $a_j = (a_{ji})_{i\in I} \in M$, $j = 1, \ldots, n$.

Lemma 7.4. *Buď T univerzální Hornova teorie a $\mathcal{M}_i$ modely teorie T pro $i \in I$. Pak $\prod\limits_{i\in I} \mathcal{M}_i$ je model teorie T.*

Důkaz. Je zřejmý.

Říkáme, že T je uzavřená na součiny. Lze ukázat, že libovolná teorie uzavřená na podmodely a součiny je ekvivalentní univerzální Hornově teorii. Z 7.4 plyne, že obory integrity nelze popsat pomocí univerzální Hornovy teorie neboť součin oborů integrity není obor integrity. Podobně pro lineárně uspořádané množiny.

Sentence se nazývá *pozitivní*, pokud lze vytvořit z atomických formulí pomocí $\wedge, \vee, \forall, \exists$. Teorie se nazývá *pozitivní*, pokud je složená z pozitivních sentencí.

Příklady 7.5. (1) Teorie grup a komutativních okruhů s jedničkou jsou pozitivní teorie.

(2) Teorie oborů integrity, uspořádaných množin a lineárně uspořádaných množin nejsou pozitivní.

Homomorfismus realizací $h : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ jazyka L je definován jako zobrazení $h : M_1 \to M_2$ nosných množin takové, že

$$(a_1, \ldots, a_n) \in R_{\mathcal{M}_1} \Rightarrow (h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in R_{\mathcal{M}_2},$$

$$h(f_{\mathcal{M}_1}(a_1, \ldots, a_n)) = f_{\mathcal{M}_2}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

pro libovolný n-ární relační symbol R a libovolný n-ární funkční symbol f jazyka L.

Lemma 7.6. *Buď T pozitivní teorie a $h : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ surjektivní homomorfismus. Pokud $\mathcal{M}_1$ je model teorie T, pak $\mathcal{M}_2$ je model teorie T.*

Důkaz. Je zřejmý

Říkáme, že T je uzavřená na homomorfní obrazy. Lze ukázat, že libovolná teorie uzavřená na homomorfní obrazy je ekvivalentní pozitivní teorii. Odsud vyplývá, že obory integrity nelze popsat pomocí pozitivní teorie. Podobně pro uspořádané množiny.

Jediné pozitivní univerzální Hornovy sentence jsou konjunkce atomických sentencí. Tedy pozitivní univerzální Hornovy teorie jsou ekvivalentní teoriím složeným z atomických sentencí. Pokud jazyk L neobsahuje relační symboly, pak atomické sentence jsou právě *rovnosti*, t.j. sentence tvaru $t_1 = t_2$, kde t_1, t_2 jsou termy. Teorie, jejíž sentence jsou rovnosti, se nazývá *ekvacionální*. Ekvacionální teorie je uzavřená na podmodely, součiny a homomorfní obrazy. Obráceně, pokud jazyk L obsahuje pouze funkční symboly, pak libovolná třída realizací uzavřená na podmodely, součiny a homomorfní obrazy lze axiomatizovat pomocí ekvacionální teorie.

Třída E realizací jazyka L se nazývá *elementární*, pokud existuje teorie T taková, že E se skládá právě z modelů teorie T. Libovolná elementární třída je uzavřená na elementární ekvivalence, t.j. pokud $\mathcal{M} \in E$ a $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$, pak $\mathcal{N} \in E$. To k charakterizaci elementárních tříd nestačí. Lze zavést tzv. *ultrasoučiny* a ukázat, že elementární třídy jsou právě třídy uzavřené na elementární ekvivalence a ultrasoučiny.