ALGEBRA 3

J. ROSICKÝ

1. Kategorie

Definice 1.1. *Kategorie* $\mathcal{K}$ se skládá z třídy objektů $\mathrm{ob}(\mathcal{K})$ a z třídy morfismů $\mathrm{mor}(\mathcal{K})$. Každý morfismus f má určený zdrojový objekt K a cílový objekt L. Značíme $f : K \to L$ a říkáme. že f je morfismus z K do L. Pro libovolnou dvojici objektů K, L morfismy z K do L tvoří množinu $\mathcal{K}(K, L)$. Pro libovolný objekt K máme morfismus $\mathrm{id}_K : K \to K$ nazývaný identita na K.

Pro libovolnou trojici objektů K, L, M máme definovanou operaci skládání morfismů

$$\mathcal{K}(K, L) \times \mathcal{K}(L, M) \to \mathcal{K}(K, M)$$

Složení morfismů $f : K \to L$ a $g : L \to M$ značíme $g \cdot f : K \to M$. Skládání morfismů je asociativní, t.j.

$$h \cdot (g \cdot f) = (h \cdot g) \cdot f$$

pro libovolná $f : K \to L$, $g : L \to M$ a $h : M \to N$. Konečně, pro libovolný morfismus $f : K \to L$ platí

$$f \cdot \mathrm{id}_K = f = \mathrm{id}_L \cdot f.$$

Příklady 1.2. (1) Kategorie množin **Set** má za objekty množiny a za morfismy zobrazení.

(2) Kategorie komutativních grup **Ab** má za objekty komutativní grupy a za morfismy homomorfismy.

(3) Kategorie vektorových prostorů $\mathbf{Vect}_T$ má za objekty vektorové prostory nad tělesem T a za morfismy lineární zobrazení.

(4) Kategorie uspořádaných množin **Pos** má za objekty uspořádané množiny a za morfismy izotonní zobrazení.

(5) Kategorie **Met** metrických prostorů má za objekty metrické prostory a za morfismy spojitá zobrazení. Také máme kategorii $\mathbf{Met}_1$ metrických prostorů a kontrakcí.

(6) Libovolný monoid M určuje kategorii s jediným objektem a množinou morfismů M.

(7) Libovolná uspořádaná množina P určuje kategorii s množinou objektů P. Pro $p, q \in P$ je $P(p, q)$ jednoprvková množina polud $p \leq q$ a prázdná množina jinak.

(8) Kategorie $\mathcal{K}$ se nazývá *malá* pokud $\mathrm{ob}(\mathcal{K})$ je množina.

Date: Prosinec 11, 2019.

Definice 1.3. *Duální* kategorie $\mathcal{K}^{\mathrm{op}}$ ke kategorii $\mathcal{K}$ má stejné objekty jako $\mathcal{K}$ a $\mathcal{K}^{\mathrm{op}}(K.L) = \mathcal{K}(L.K)$.

Definice 1.4. Morfismus $f : K \to L$ se nazývá *izomorfismus* pokud existuje morfismus $g : L \to K$ takový že $g \cdot f = \mathrm{id}_K$ a $f \cdot g = \mathrm{id}_L$.

Objekty K, L se nazývají *izomorfní*, pokud existuje izomorfismus $K \to L$. Značíme $K \cong L$.

Příklady 1.5. Izomorfismy v **Set** jsou bijekce. Izomorfismy v **Ab**, $\mathbf{Vect}_P$ a **Pos** jsou obvyklé izomorfismy. Izomorfismy v **Met** jsou homeomorfismy, izomorfismy v $\mathbf{Met}_1$ jsou izometrické bijekce.

Je-li M monoid, pak izomorfismy jsou invertibilní prvky. Je-li P uspořádaná množina, pak izomorfismy jsou pouze identity.

Definice 1.6. Objekt I kategorie $\mathcal{K}$ se nazývá *iniciální*, pokud pro libovolný objekt K kategorie $\mathcal{K}$ existuje právě jeden morfismus $I \to K$.

Duálně, objekt T se nazývá *terminální*, pokud pro libovolný objekt K existuje právě jeden morfismus $K \to T$.

Příklady 1.7. Iniciální objekt v **Set** je $\emptyset$, terminální objekt je jednoprvková množina. Podobně v **Pos**, **Met** a $\mathbf{Met}_1$. Iniciální a zároveň terminální objekt v **Ab** je jednoprvková grupa, podobně v $\mathbf{Vect}_P$.

Pokud má monoid M více než jeden prvek, příslušná kategorie nemá ani iniciální, ani terminální objekt. Iniciální objekt v uspořádané množině P je nejmenší prvek a terminální objekt je největší prvek.

Věta 1.8. *Libovolné dva iniciální objekty kategories $\mathcal{K}$ jsou izomorfní.*

Důkaz. Buďte I_1, I_2 iniciální v $\mathcal{K}$. Pak existuje jediný morfismus $f : I_1 \to I_2$ a jediný morfismus $g : I_2 \to I_1$. Poněvadž I_1 je iniciální, $g \cdot f = \mathrm{id}_{I_1}$. Podobně $f \cdot g = \mathrm{id}_{I_2}$, takže f je izomorfismus. □

Duálně, libovolné dva terminální objekty kategorie $\mathcal{K}$ jsou izomorfní.

Definice 1.9. Buďte $\mathcal{K}$ a $\mathcal{L}$ kategorie. *Funktor* $F : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ přiřazuje každému objektu K kategorie $\mathcal{K}$ objekt $F(K)$ kategorie $\mathcal{L}$ a každému morfismu $f : K_1 \to K_2$ kategorie $\mathcal{K}$ morfismus $F(f) : F(K_1) \to F(K_2)$ kategorie $\mathcal{L}$ tak, že

(1) $F(g \cdot f) = F(g) \cdot F(f)$ pro libovolné morfismy $f : K_1 \to K_2$ a $g : K_2 \to K_3$ kategorie $\mathcal{K}$,

(2) $F(\mathrm{id}_K) = id_{F(K)}$ pro libovolný objekt K kategorie $\mathcal{K}$.

Příklady 1.10. (1) *Zapomínající* funktor $U : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Set}$ přiřazuje každé komutativní grupě K její nosnou množinu $U(K)$ a každému homomorfismu $f : K_1 \to K_2$ jeho nosné zobrazení $U(f) : U(K_1) \to U(K_2)$.

Podobně máme zapomínající funktory kategorií $\mathbf{Vect}_P$, **Pos**, **Met** a $\mathbf{Met}_1$ do **Set**.

(2) Zapomínající funktor $\mathbf{Vect}_P \to \mathbf{Ab}$ přiřazuje vektorovému prostoru V jeho nosnou komutativní grupu a lineárnímu zobrazení nosný homomorfismus komutativních grup..

(3) Homomorfismy monoidů $M_1 \to M_2$ odpovídají funktorům příslušných kategorií. Podobně izotonní zobrazení uspořádaných množin $P_1 \to P_2$ odpovídají funktorům příslušných kategorií.

(4) Objekt K kategorie $\mathcal{K}$ určuje *hom-funktor* $\mathcal{K}(K, -) : \mathcal{K} \to \mathbf{Set}$ přiřazující objektu X kategorie $\mathcal{K}$ množinu $\mathcal{K}(K, X)$ a morfismu $f : X \to Y$ zobrazení

$$\mathcal{K}(K, f) : \mathcal{K}(K, X) \to \mathcal{K}(K, Y)$$

takové, že

$$\mathcal{K}(K, f)(g) = g \cdot f.$$

Duálně máme hom-funktor $\mathcal{K}(-, K) : \mathcal{K}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$, který přiřazuje morfismu $f : Y \to X$ zobrazení

$$\mathcal{K}(f, K) : \mathcal{K}(X, K) \to \mathcal{K}(Y, K)$$

předpisem

$$\mathcal{K}(f, K)(g) = g \cdot f$$

(5) Složení $G \cdot F : \mathcal{K} \to \mathcal{M}$ funktorů $F : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ a $G : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ je dáno předpisem

$$(G \cdot F)(K) = G(F(K)), \quad (G \cdot F)(f) = G(F(f)).$$

Pro libovolnou kategorii $\mathcal{K}$ máme funktor $\mathrm{Id}_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ daný předpisem $\mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(K) = K$, $\mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(f) = f$.

(5) Kategorie **Cat** má za objekty kategorie a za morfismy funktory.

Definice 1.11. Buďte $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ kategorie a $F, G : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ funktory. *Přirozená transformace* $\varphi : F \to G$ je třída morfismů $\varphi_K : F(K) \to G(K)$ indexovaná objekty kategorie $\mathcal{K}$, přičemž pro libovolný morfismus $f : K_1 \to K_2$ kategorie $\mathcal{K}$ komutuje diagram

$$\begin{tikzcd}
F(K_1) \arrow[r, "\varphi_{K_1}"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(K_1) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(K_2) \arrow[r, "\varphi_{K_2}"'] & G(K_2)
\end{tikzcd}$$

Přirozený izomorfismus funktorů je přirozená transformace φ taková, že φ_K je izomorfismus pro libovolný objekt K kategorie $\mathcal{K}$. Funktory se nazývají izomorfní, pokud mezi nimi existuje přirozený izomorfismus.

Příklady 1.12. (1) Zapomínající funktor $U : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Set}$ je izomorfní hom-funktoru $\mathbf{Ab}(\mathbb{Z}, -)$. Přirozený izomorfismus $\varphi : \mathbf{Ab}(\mathbb{Z}, -) \to U$ má složky

$$\varphi_K : \mathbf{Ab}(\mathbb{Z}, K) \to U(K)$$

dané předpisem

$$\varphi_K(h) = h(1).$$

(2) Funktor izomorfní hom-funktoru $\mathcal{K}(K, -)$ se nazývá *reprezentovatelný* (objektem K).

Zapomínající funktory $\mathbf{Vect}_T$, $\mathbf{Pos}$, $\mathbf{Met}$ a $\mathbf{Met}_1$ do $\mathbf{Set}$ jsou reprezentovatelné, v prvním případě T, v ostatních 1.

Definice 1.13. Buďte $\varphi : F \to G$ a $\psi : G \to H$ přirozené transformace. Pak jejich složení $\psi \cdot \varphi$ má složky

$$(\psi \cdot \varphi)_K = \psi_K \cdot \varphi_K.$$

Buď $\mathrm{id}_F : F \to F$ přirozená transformace se složkami $(\mathrm{id}_F)_K = \mathrm{id}_{FK}$.

Poznámka 1.14. (1) Buďte $\mathcal{K}$ a $\mathcal{L}$ kategorie, přitom $\mathcal{K}$ je malá. Pak $\mathbf{Cat}(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ tvoří kategorii.

(2) Buďte $F, G : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ funktory a $\varphi : F \to G$ přirozená transformace. Pro funktory $E : \mathcal{M} \to \mathcal{K}$ a $H : \mathcal{L} \to \mathcal{N}$ dostáváme přirozené transformace $\varphi E : F \cdot E \to G \cdot E$ a $H(\varphi) : H \cdot F \to H \cdot G$ dané předpisem

$$(\varphi E)_M = \varphi_{EM}, H(\varphi)_K = H(\varphi_K).$$

2. Univerzální algebry

Navazujeme na [1]. Připomeňme, že *typ* je množina Ω spolu se zobrazením $a : \Omega \to \mathbb{Z}^+$. Prvky množiny Ω se nazývají *operační symboly* a zobrazení a přiřazuje každému symbolu jeho *aritu*. *Teorie* E je množina *identit* typu Ω. Kategorii E-algeber a homomorfismů označíme $\mathbf{Alg}(E)$. Zapomínající funktor $U : \mathbf{Alg}(E) \to \mathbf{Set}$ je reprezentovatelný volnou E-algebrou $F(1)$ nad jednoprvkovou množinou.

Připomeňme, že volná E-algebra nad množinou X se skládá z množiny *termů* teorie E s proměnnými z X. Tím vzniká zobrazení

$$\eta_X : X \to UF(X)$$

přiřazující prvku $x \in X$ term x. Přitom platí, že pro libovolné zobrazení $f : X \to U(A)$ existuje právě jeden homomorfismus $\tilde{f} : F(X) \to A$ tak. že komutuje

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\eta_X"'] & & U(A) \\ & UF(X) \arrow[ur, "U(\tilde{f})"'] & \end{tikzcd}$$

Znamená to, že η_X je iniciální objekt v kategorii $X \downarrow U$, která má za objekty zobrazení $f : X \to U(A)$ a morfismy $g : f_1 \to f_2$ jsou homomorfismy $g : A_1 \to A_2$ takové, 'že komutuje diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f_2"] \arrow[dr, "f_1"'] & & U(A_2) \\ & U(A_1) \arrow[ur, "U(g)"'] & \end{tikzcd}$$

Protože iniciální objekt je určen jednoznačně až na izomorfismus, výše uvedená vlastnost určuje volnou algebru nad X jednoznačně až na izomorfismus.

Mějme zobrazení $h : X \to Y$. Pak existuje jediný homomorfismus $F(h) : F(X) \to F(Y)$ takový, že komutuje

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\eta_X"'] & Y \arrow[d, "\eta_Y"] \\
UF(X) \arrow[r, "UF(h)"'] & UF(Y)
\end{tikzcd}$$

Z této jednoznačnosti plyne, že $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Alg}(E)$ je funktor a $\eta : \mathrm{Id} \to UF$ přirozená transformace.

Pro libovolnou E-algebru A, existuje právě jeden homomorfismus $\varepsilon_A : FUA \to A$ tak, že komutuje

$$\begin{tikzcd}
U(A) \arrow[rr, "\mathrm{id}_{U(A)}"] \arrow[dr, "\eta_{U(A)}"'] & & U(A) \\
& UFU(X) \arrow[ur, "U(\varepsilon_A)"'] &
\end{tikzcd}$$

Znamená to, že libovolná E-algebra je kvocient volné E-algebry. Navíc, pro libovolný homomorfismus $h : A \to B$, komutuje diagram

$$\begin{tikzcd}
FU(A) \arrow[r, "FU(h)"] \arrow[d, "\varepsilon_A"'] & FU(B) \arrow[d, "\varepsilon_B"] \\
A \arrow[r, "h"'] & B
\end{tikzcd}$$

Totiž

$$\eta_{UB} \cdot U(\varepsilon_B) \cdot UFU(h) \cdot UFU(h) = \mathrm{id}_{UFU(B)} \cdot UFU(h) = UFU(h)$$

a

$$\eta_{U(B)} \cdot U(h) \cdot U(\varepsilon_A) = UFU(h) \cdot \eta_{U(A)} \cdot U(\varepsilon_A) = UFU(h).$$

Tedy $\varepsilon : FE \to \mathrm{Id}$ je přirozená transformace.

V teorii kategorií se funktor $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Alg}(E)$ nazývá *zleva adjungovaný* k funktoru $U : \mathbf{Alg}(E) \to \mathbf{Set}$. Název pochází z izomorfismu

$$\mathbf{Set}(X, UA) \cong \mathbf{Alg}(E)(FX, A).$$

3. Moduly

Definice 3.1. Levý *modul* M nad okruhem R je komutativní grupa $(M, +)$ spolu s operací $\cdot : R \times M \to M$ takovou, že

(1) $r \cdot (a + b) = r \cdot a + r \cdot b$ pro libovolná $r \in R$, $a, b \in M$,
(2) $(r + s) \cdot a = r \cdot a + s \cdot a$ pro libovolná $r, s \in R$, $a \in M$,
(3) $(r \cdot s) \cdot a = r \cdot (s \cdot a)$ pro libovolná $r, s \in R$, $a \in M$,
(4) $1 \cdot a = a$ pro libovolné $a \in M$.

Moduly nad R rovněž nazýváme R-moduly. Homomorfismy R-modulů jsou právě homomorfismy komutativních grup $f : M \to N$ takové že

$$f(r \cdot a) = r \cdot h(a)$$

pro libovolná $r \in R$ a $a \in M$. Kategorii R-modulů a homomorfismů značíme $\mathbf{Mod}_R$.

Příklady 3.2. (1) Je-li R těleso, pak moduly nad R jsou právě vektorové prostory nad R.

(2) Moduly nad $\mathbb{Z}$ jsou právě komutativní grupy.

(3) Reprezentace gruoy G nad okruhem R je homomorfismus $f : G \to GL_n(R)$ do grupy (n, n)-matic nad R. Grupový okruh $R(G)$ je volný okruh nad G a skládá se z formálních lineárních kombinací $\sum_i r_i g_i$, kde $r_i \in R$, $g_i \in G$ a $i = 1, \dots, n$, $0 \le n \in \mathbb{Z}$. Okruhové operace jsou

$$(\sum_i r_i g_i) + (\sum s_i g_i) = \sum_i (r_i + s_i) g_i$$

$$(\sum_i r_i g_i) \cdot \sum_j r_j g_j = \sum_{i,j} r_i s_j g_i g_j.$$

Vzniká $R(G)$-modul R^n, kde

$$(\sum_i r_i g_i) x = \sum_i r_i f(g_i)(x).$$

Naopak, $R(G)$-modul nad R^n dává reprezentaci f tak. že

$$f(g)(x) = gx.$$

Poznámka 3.3. (1) R-moduly tvoří varietu univerzálních algeber s operacemi $+$ a $r \cdot -$, $r \in R$.

(2) Jsou-li M, N R-moduly, pak $\mathbf{Mod}_R(M, N)$ je komutativní grupa s operací

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a)$$

Nulový prvek je $0 : M \to N$, kde $0(a) = 0$ pro libovolné a. Tuto grupu budeme většinou značit $\hom(M, N)$. Dostáváme funktor $\hom(M, -) : \mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Ab}$.

Je-li R komutativní okruh, pak $\hom(M.N)$ je R-modul, kde

$$(rf)(a) = rf(a).$$

Totiž, $rf : M \to N$ je homomorfismus neboť

$$(rf)(sa) = rf(sa) = rsf(a) = srf(a) = sf(ra).$$

(3) Iniciálním a současně terminálním objektem v $\mathbf{Mod}_R$ je *nulový modul* $0 = \{0\}$.

(4) R je volný R-modul nad jednoprvkovou množinou.

(5) N je *podmodul* modulu M pokud $N \subseteq M$ a

(1) $a + b \in N$ pro libovolná $a, b \in M$,

(2) $r \cdot a \in N$ pro libovolná $r \in R$, $a \in M$.

(6) *Jádro* homomorfismu $f : M \to N$ je podmodul $K = \{a \in M | f(a) = 0\}$ modulu M.

(7) Je-li N podmodul modulu M, pak *faktorový modul* M/N je faktorová grupa M/N s operací $r \cdot (a + N) = r \cdot a + N$.

(8) *Krátká exaktní posloupnost*

$$0 \to N \to M \to M/N \to 0$$

se vyznačuje tím, že obraz homomorfismu je jádrem následujícího homomorfismu.

(9) *Součin* $M \times N$ R-modulů je kartézský součin $M \times N$ s operacemi

(1) $(a, c) + (b, d) = (a + b, c + d)$,

(2) $r \cdot (a, b) = (r \cdot a, r \cdot b)$.

Projekce $p_1 : M \times N \to M$ and $p_2 : M \times N \to N$ jsou homomorfismy.

Podobně, součin $\prod_{j \in J} M_i$ modulů je kartézský součin s operacemi definovanými po složkách. Projekce $p_j : \prod_{j \in J} M_j \to M_j$ jsou homomorfismy.

Lemma 3.4. *Buďte $f_j : M \to M_j$, $j \in J$ homomorfismy R-modulů. Pak existuje jediný homomorfismus $M \to \prod_{J \in I} M_j$ takový, že $p_j \cdot f = f_j$ pro libovolné $j \in J$.*

Důkaz. $f(a) = (f_j(a))_{j \in J}$. $\square$

Definice 3.5. *Součet* modulů $\bigoplus_{j \in J} M_j$ je podmodul $\prod_{j \in J} M_j$ složený z $(a_j)_{j \in J}$ takových. že pouze konečně mnoho a_j je různých od 0.

Injekce $i_j : M_j \to \bigoplus_{j \in J} M_j$ jsou definovány předpisem $p_j \cdot i_j(a) = a$ and $p_k \cdot i_j(a) = 0$ for $k \neq j$.

Lemma 3.6. *Buďte $f_j : M_j \to M$, $j \in J$ homomorfismy R-modulů. Pak existuje jediný homomorfismus $f : \bigoplus_{j \in J} M_j \to M$ takový, že $f \cdot i_j = f_j$ pro libovolné $j \in J$.*

Důkaz. $f(a_j)_{j \in J} = \sum_{j \in J} a_j$. Součet vpravo dává smysl neboť je pouze konečně mnoho $a_j \neq 0$. $\square$

Tento součet se často nazývá *přímý* a M_i se nazývá *přímý sčítanec* $\bigoplus_{i \in I} M_i$.

Poznámka 3.7. Platí

$$M_1 \times M_2 = M_1 \oplus M_2$$

Navíc platí

(1) $p_j \cdot i_k = 0$ pro $j \neq k$,

(2) $p_j \cdot i_j = \mathrm{id}_{M_j}$,
(3) $\imath_1 \cdot p_1 + i_2 \cdot p_2 = \mathrm{id}_{M_1 \times M_2}$.

Lemma 3.8. *Buď M R-modul vybavený homomorfismy $p_j : M \to M_j$ a $i_j : M_j \to M$ pro $j = 1, 2$ splňujícími výše uvedené rovnosti. Pak $M \cong M_1 \times M_2$.*

Důkaz. Buďte $p : M \to M_1 \times M_2$ a $i : M_1 + M_2 \to M$ indukované homomorfismy. Platí

$$i \cdot p(a) = i(p_1(a), p_2(a)) = i_1 \cdot p_1(a) + i_2 \cdot p_2(a) = a,$$

$$p \cdot i(a_1, a_2) = p(i_1(a_1) + i_2(a_2)) = p(i_1(a_1)) + p(i_2(a_2)) = (p_1 i_1 a_1, p_2 i_1 a_2) + (p_2 i_1 a_1, p_2 i_2 a_2) = (a_1, a_2).$$

□

Věta 3.9. *Buď*

$$0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M/N \to 0$$

krátká exaktní posloupnost, pro níž existuje $s : M \to N$ tak, že $s \cdot f = \mathrm{id}_N$. Pak $M \cong N + M/N$.

Důkaz. Poněvadž

$$(id_M - f \cdot s) \cdot f = f - f = 0,$$

existuje jediné $r : M/N \to M$ tak, že $r \cdot g = \mathrm{id}_M - f \cdot s$. Tedy

$$r \cdot g + f \cdot s = \mathrm{id}_M$$

Zároveň

$$g \cdot r \cdot g = g - g \cdot f \cdot s = g - 0 = g,$$

takže $g \cdot r = \mathrm{id}_{M/N}$.

Dále

$$s \cdot r \cdot g = s - s \cdot f \cdot s = s - s = 0,$$

takže $s \cdot r = 0$. Tvrzení plyne z 3.8 □

Poznámka 3.10. Jinými slovy, pokud se f štěpí, pak se štěpí i g. Analogicky se dokáže, že pokud se g štěpí, pak se štěpí i f. Říkáme, že se štěpí krátká exaktní posloupnost.

4. Projektivní moduly

Ponădž R-moduly tvoří varietu univerzálních algeber, máme k dispozici pojem volného modulu.

Příklady 4.1. (1) Volný R-modul nad $\emptyset$ je iniciální modul 0.
(2) Volný R-modul nad jednoprvkovou množinou 1 je R.

Věta 4.2. *Volný R-modul nad množinou X je $\bigoplus_X R$.*

Proof. Podle 4.8, homomorfismy $h : \bigoplus_X R \to M$ odpovídají homomorfismům $h_x : R \to M$, kde $x \in X$ a tyto odpovídají prvkům $h_x(1) \in M$, kde $x \in X$ (podle 4.1 (2)). Poslední pak odpovídají zobrazením $\tilde{h} : X \to UM$ daným předpisem $\tilde{h}(x) = h_x(1)$. Tedy $\bigoplus_X R$ je volný R-modul nad X. □

Poznámka 4.3. (1) Volný R-modul nad konečnou množinou o n prvcích je R^n (podle 4.2 a 3.7).

(2) Libovolný vektorový prostor V je volný. Totiž, z principu maximality plyne, že V má bazi B (lineárně nezávislá množina generátorů = maximální lineárně nezávislá množina). Zřejmě V je volný nad B.

(3) $\mathbb{Z}_2$ je příklad komutativmí grupy, která není volná.

(4) Z univerzální algebry plyne, že libovolný modul je faktorový modul volného modulu.

Věta 4.4. *Libovolný R-modul je volný, právě když R je okruh s dělením (= nekomutativní těleso).*

Důkaz. Důkaz, že každý modul nad okruhem s dělením je volný je stejný, jak u vektorových prostorů (komutativita tělesa se v důkazu nevyužila).

Předpokládejme, že každý R-modul je volný. Buď I levý ideál v R. Poněvadž R/I je volný, platí buď $R/I \cong 0$ nebo $R/I \cong R$. V prvním případě $I = R$ a ve druhém $I = 0$. To znamená, že libovolný $0 \neq r \in R$ má zleva inverzní s, t.j., $s \cdot r = 1$. Poněvadž $0 \neq s$, existuje $t \in R$ tak, že $t \cdot s = 1$. Platí

$$t = t \cdot (s \cdot r) = (t \cdot s) \cdot r = r.$$

Tedy $r \cdot s = 1$, takže $s = r^{-1}$ a R je okruh s dělením. □

Definice 4.5. R-modul P se nazývá *projektivní*, jestliže pro libovolný surjektivní homomorphismus $h : M \to N$ a pro libovolný homomorfismus $f : P \to N$ existuje homomorfismus $g : P \to M$ takový že $h \cdot g = f$.

Věta 4.6. *Projektivní R-moduly jsou právě přímé sčítance volných R-modulů.*

Důkaz. Buď FX volný R-modul nad množinou X, $h : M \to N$ surjektivní homomorfismus a $f : FX \to N$ homomorfismus. Existuje zobrazení $t : X \to UM$ takové, že $Uh \cdot t = Uf \cdot \eta_X$. Buď $g : FX \to M$ homomorfismus takový, že $Ug \cdot \eta_X = t$. Pak platí $Uh \cdot Ug \cdot \eta_X = Uf \cdot \eta_X$ a tedy $h \cdot g = f$. Tedy FX je projektivní.

Buď Q přímý sčítanec projektivního R-modulu P. Tedy $P = Q \oplus Q'$ s projekcí $p_1 : P \to Q$ a injekcí $i_1 : Q \to P$. Buď $h : M \to N$ surjektivní homomorfismus a $f : Q \to N$ homomorfismus. Existuje homomorfismus $g : P \to M$ takový, že $h \cdot g = f \cdot p_1$. Pak

$$h \cdot g \cdot i_1 = f \cdot p_1 \cdot i_1 = f.$$

Tedy Q je projektivní.

Naopak, buď P projektivní R-modul. Podle 4.3(4), existuje surjektivní homomorfismus $h : FX \to P$ a tedy $g : P \to FX$ tak, že $h \cdot g = \mathrm{id}_I$. Podle 4.9 je P přímý sčítanec FX. □

Příklady 4.7. (1) Podgrupa volné komutativní grupy je volná, takže projektivní komutativní grupy jsou volné.

(2) Poněvadž $\mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_3$ a $\mathbb{Z}_3$ jsou projektivní $\mathbb{Z}_6$-moduly. Přitom nejsou volné neboť počet prvků konečného volného $\mathbb{Z}_6$-modulu je dělitelný šesti.

Věta 4.8. *Součet projektivních R-modulů je projektivní.*

Důkaz. Buď $\bigoplus_{j\in J} P_j$ součet projektivních R-modulů, $h : M \to N$ surjektivní homomorfismus a $f : \bigoplus_j P_j \to N$ homomorfismus. Pak pro libovolné $j \in J$ existuje homomorfismus $g_j : P_j \to M$ tak, že $h\cdot g_j = f\cdot i_j$. Buď $g : \bigoplus_j P_j \to N$ homomorfismus takovú, že $g \cdot i_j = g_j$. Pak $h \cdot g = f$. □

Věta 4.9. *Následující podmínky jsou ekvivalentní*

(1) *libovolný R-modul je projektivní,*
(2) *libovolný surjektivní homomorfismus R-modulů se štěpí,*
(3) *libovolný injektivní homomorfismus R-modulů se štěpí.*

Důkaz. (1)→(2): Buď $h : M \to N$ surjektivní homomorfismus. Poněvadž N je projektivní, existuje $g : N \to M$ tak, že $h \cdot g = \mathrm{id}_M$.

(2)→(1): Buď $h : M \to N$ surjektivní homomorfismus a $f : K \to N$ homomorfismus. Nechť $h \cdot s = \mathrm{id}_M$. Pak $h \cdot s \cdot g = g$, takže K je projektivní.

(2)↔(3): Plyne z 4.9 a 3.10. □

Definice 4.10. R-modul $0 \neq M$ se nazývá *jednoduchý*, pokd 0 a M jsou jeho jediné podmoduly. Součet jednoduchých R-modulů se nazývá *polojednoduchý*.

Věta 4.11. *Následující podmínky jsou ekvivalentní*

(1) *R je polojednoduchý R-modul,*
(2) *libovolný R-modul je polojednoduchý,*
(3) *libovolný R-modul je projektivní.*

Důkaz. Zřejmě součet polojednoduchých R-modulů je polojednoduchý. Ukážeme, že kvocient polojednoduchého R-modulu je polojednoduchý. Odsud vyplyne, že (1)→(2).

Buď $M = \oplus_{i\in I} M_i$, kde M_i, $i \in I$ jsou jednoduché R-moduly a $N \neq M$ podmodul M. Poněvadž $N \cap M_i = 0$ nebo $N \cap M_i = M_i$, existuje $i \in I$ tak, že $N \cap M_i = 0$. Množina $\mathcal{J} = \{J \subseteq I | N \cap \oplus_{j\in J} M_j = 0\}$ je tedy neprázdná. Poněvadž splňuje předpoklad principu maximality, obsahuje maximální prvek J_0. Uvažujme podmodul $N_0 = N \oplus \oplus_{j\in J_o} M_j$. Pokud $N_0 = M$, pak $M/N \cong \oplus_{j\in J_0} M_j$ je polojednoduchý R-modul. Dokonce víme, že podmodul polojednoduchého R-modulu je sčítanec, takže libovolný surjektivní homomorfismus se štěpí, takže každý R-modul je projektivní. Tedy i (2)→(3).

Nechť $N_0 \neq M$. Pak existuje $i \in I$ tak, že $N_0 \cap M_i = 0$. Tedy $i \notin J_0$, takže

$$N \cap (\oplus_{j\in J_0} M_j \oplus M_i) \neq 0.$$

Tedy existují $u \in \oplus_{j\in J_0} M_j$, $v \in M_i$ tak že $0 \neq u+v \in N$. Tedy $v = (v+u) - u \in N_0$. Poněvadž $N \cap M_i = 0$, platí $v = 0$ a tedy $0 \neq u \in N \cap (\oplus_{j\in J_9} M_j)$, což je spor s $J_0 \in \mathcal{J}$.

Zbývá dokázat, že (3)→(2). Z (3) plyne, že libovolný podmodul je sčítanec, odkud pak lze odvodit (2). □

5. Tenzorový součin modulů

Nejprve budeme definovat tenzorový součin modulů nad komutativním okruhem.

Definice 5.1. Buď R komutativní okruh a M, N, L R-moduly. *Bimorfismus* je zobrazení $f : M \times N \to L$ takové že

(1) $f(a+b,c) = f(a,c) + f(b,c)$,
(2) $f(ra,b) = rf(a,b)$,
(3) $f(a,c+d) = f(a,c) + f(a,d)$,
(4) $f(a,rc) = rf(a,c)$

pro libovolná $a, b \in M$, $c, d \in N$ a $r \in R$.

Definice 5.2. *Tenzorový součin* R-modulů M, N je dán bimorfismem

$$f : M \times N \to M \otimes N$$

takovým, že pro libovolný bimorfismus $g : M \times N \to L$ existuje právě jeden homomorfismus $h : M \otimes N \to L$ tak, že $h \cdot f = g$.

Tenzorový součin je tím určen jednoznačně až na izomorfismus.

Věta 5.3. *$M \otimes N$ je faktorový modul volného modulu $F(M \times N)$ nad množinou $M \times N$ podle podmodulu K generovaného prvky*

(1) $(a+b,c) - (a,c) - (b,c)$,
(2) $(ra,c) - r(a,c)$,
(3) $(a,c+d) - (a,c) - (a,d)$,
(4) $(a,rc) - r(a,c)$.

Důkaz. Kompozice

$$M \times N \xrightarrow{\eta_{M\times N}} UF(M \times N) \xrightarrow{Up} U(F(M \times N)/K)$$

je zřejmě bimorfismus. Pro bimorfismus $g : M \times N \to L$ existuje jediný homomorfismus $\tilde{g} : F(M \times N) \to L$ tak, že $U\tilde{g} \cdot \eta_{M\times N} = g$. Dále existuje jediný homomorfismus $h : F(M \times N)/K \to L$ tak, že $h \cdot p = \tilde{g}$. □

Poznámka 5.4. (1) Znamená to, že $M \otimes N$ je generován prvky $a \otimes b$, $a \in M$, $b \in N$ splňujícími rovnosti

(1) $(a+b) \otimes c = (a \otimes c) + (b \otimes c)$,
(2) $ra \otimes b = r(a \otimes b)$,
(3) $a \otimes (b+c) = (a \otimes b) + (a \otimes c,)$

(4) $a \otimes rc = r(a \otimes c)$.
Přitom zobrazení $f : M \times N \to M \otimes N$ je dáno předpisem $f(a, b) = a \otimes b$.
Komutativita okruhu R je nutná k

$$rs(a \otimes b) = ra \otimes sb = sr(a \otimes b).$$

(2) Poněvadž bimorfismy $h : M \times N \to L$ odpovídají homomorfismům $\tilde{f} : M \to \hom(N.L)$ dostáváme isomorfismus R-modulů

$$\hom(M, \hom(N.L)) \cong \hom(M \otimes N, L).$$

Věta 5.5. *Pro R-moduly M, N, L platí*

$$M \otimes N \cong N \otimes M.$$

$$M \otimes (N \otimes L) \cong (M \otimes N) \otimes L$$

Důkaz. Plyne z odpovídajících vlastností kartézského součinu množin. V prvním případě je izomorfismus $h : M \otimes N \to N \otimes M$ dán předpisem $h(a \otimes b) = b \otimes a$. Ve druhém případě je izomorfismus $h : M \otimes (N \otimes L) \to (M \otimes N) \otimes L$ dán předpisem

$$h(a \otimes (b \otimes c)) = a \otimes (b \otimes c).$$

□

Věta 5.6. *Pro R-moduly M, N, L platí*

$$M \otimes (N \oplus L) \cong (M \otimes N) \oplus (M \otimes L).$$

Důkaz. S využitím $M \oplus N = M \times N$ definujeme bimorfismus

$$f : M \times (N \oplus L) \to (M \otimes N) \oplus (M \otimes L)$$

předpisem.

$$f(a, b, c) = (a \otimes b, a \otimes c).$$

Je li $g : M \times (N \oplus L) \to K$ bimorfismus, pak předpis

$$h(a \otimes b, c \otimes d) = g(a, b, 0) + g(c, 0, d)$$

definuje jediný homomorfismus $h : (M \otimes N) \oplus (M \otimes L) \to K$ takový že $hf = g$. Tedy $(M \otimes N) \oplus (M \otimes L)$ je $M \otimes (N \oplus L)$. □

Poznámka 5.7. Podobně se dokáže

$$M \otimes \bigoplus_{i \in I} N_i \cong \bigoplus_{i \in I} (M \otimes N_i)$$

$$M \otimes 0 = 0.$$

Lemma 5.8. *Pro R-modul M a přirozené číslo n platí*

$$M \otimes R^n \cong M^n.$$

Důkaz. Z 5.6 plyne, že stačí dokázat $M \otimes R \cong M$. Avšak

$$a \otimes r = a \otimes r \cdot 1 = r(a \otimes 1).$$

Tedy $h : M \to M \otimes R$ dané předpisem $f(a) = a \otimes 1$ je izomorfismus. $\square$

Poznámka 5.9. $R^m \otimes R^n \cong R^{m \cdot n}$.

Příklad 5.10. V **Ab** platí $\mathbb{Z}_r \otimes \mathbb{Z}_s \cong 0$ pro nesoudělná r, s.
Existují n, n tak že $mr + ns = 1$. Pro $a \in \mathbb{Z}_r$, $b \in \mathbb{Z}_s$ platí

$$a \otimes b = mr(a \otimes b) + ns(a \otimes b) = m(ra \otimes b) + n(a \otimes sb) = 0.$$

Poznámka 5.11. Z definice tenzorového součinu plyne, že homomorfismus $f : M_1 \to M_2$ indukuje homomorfismus $f \otimes N : M_1 \otimes N \to M_2 \otimes N$. Zřejmě

$$- \otimes N : \mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Mod}_R$$

je funktor. Z 5.4(2) plyne, že $\hom(N, -)$ je zleva adjungovaný k funktoru $- \otimes N$. Z teorie kategorií plyne, že funktor $- \otimes N$ zachovává *kolimity*. Speciálním případem je 5.7.

Podobne máme funktor $M \otimes -$. Pro homomorfismy $f : M_1 \to M_2$ a $g : N_1 \to N_2$ platí

$$(M_2 \otimes g) \cdot (f \otimes N_1) = (f \otimes N_2) \cdot (M_1 \otimes g).$$

Lemma 5.12. *Je-li I ideál v R a M R-modul, pak platí*

$$R/I \otimes M \cong M/IM,$$

kde $IM = \{ra | r \in I, a \in M\}$.

Důkaz. Buď $p : R \to R/I$ projekce, $p \otimes \mathrm{id}_M : R \otimes M \to R/I \otimes M$ indukovaný homomorfismus a $g : M \to R/I \otimes M$ jeho kompozice s izomorfismem $M \to R \otimes M$. Zřejmě $g(a) = 1 \otimes a$. Poněvadž $g(ra) = 1 \otimes ra = r \otimes a = 0$, platí $g(IM) = 0$. Dostáváme indukovaný homomorfismus $u : M/IM \to R/I \otimes M$ daný předpisrm $u(a + IM) = 1 \otimes a$.

Máme bimorfismus $h : R/I \times M \to M/IM$ daný předpisem $h(r + I, a) = ra + IM$. Buď $v : R/I \otimes R \to M/IM$ indukovamý homomorfismus. Platí $v((r + I) \otimes a) = ra + IM$. Je-li $f : R/I \times M \to R/I \otimes M$ bimorfismus, pak platí

$$(u \cdot v \cdot f)(r + I, a) = (u \cdot v)((r + I) \otimes a) = u(ra + IM) = 1 \otimes ra = f(r + I, a),$$

takže $u \cdot v = \mathrm{id}_{R/I \otimes M}$.

Je-li $q : M \to M/IM$ projekce, pak

$$(v \cdot u \cdot q)(a) = (v \cdot u)(a + IM) = v(1 \otimes a) = a + IM = q(a),$$

takže $v \cdot u = \mathrm{id}_{M/IM}$. Tedy u je izomorfismus. $\square$

Příklad 5.13. V **Ab** platí

$$\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2/(2\mathbb{Z})\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2/0 = \mathbb{Z}_2.$$

Lemma 5.14. *Je-li $h : M \to N$ surjektivní, pak $\mathrm{id}_M \otimes h$ je surjektivní.*

Důkaz. $a \otimes h(b) = (\mathrm{id}_M \otimes h)(a, b)$. $\square$

Poznámka 5.15. Buď nyní R obecný okruh. Je-li M pravý R-modul, N levý R-modul a A komutativní grupa, pak zobrazení $f : M \times N \to A$ se nazývá *biaditivní*, pokud je aditivní v obou složkách a *R-balancované*, pokud

$$f(ar, b) = f(a, rb).$$

Pak $M \otimes_R N$ je komutativní grupa s univerzálním R-balancovaným biaditivním zobrazením

$$M \times N \to M \otimes_R N.$$

Obecně, pro (S, R)-bimodul M a (R, T)-bimodul N máme (R, T)-bimodul $M \otimes_R N$.

6. Ploché moduly

V celé kapitole budeme předpokládat, že R je komutativní okruh. Vše by ale fungovalo i pro nekomutativní okruhy, pokud bychom $\otimes$ nahradili $\otimes_R$.

Definice 6.1. R-modul M se nazývá *plochý*, pokud pro libovolný injektivní homomorfismus $h : M \to N$ je $\mathrm{id}_M \otimes h$ injektivní.

Příklad 6.2. R je plochý R-modul neboť $R \otimes N \cong N$.

Lemma 6.3. *(1) Součet plochých R-modulů je plochý.*
(2) Sčítanec plochého R-modulu je plochý.

Důkaz. (1) plyne z

$$\mathrm{id}_{\oplus M_i} \otimes f \cong \oplus_i (\mathrm{id}_{M_i} \otimes f)$$

a z faktu, že součet injektivních homomorfismů je injektivní.

(2) Je-li M sčítanec plochého R-modulu N, pak máme $i : M \to N$ a $p : N \to M$ takové, že $p \cdot i = \mathrm{id}_M$. Tedy $(p \otimes K) \cdot (i \otimes K) = \mathrm{id}_M \otimes K$, takže $i \otimes K$ je injektivní.

Buď $f : K \to L$ injektivní. Poněvadž

$$(\mathrm{id}_N \otimes f) \cdot (i \otimes \mathrm{id}_K) = (i \otimes f) = (i \otimes \mathrm{id}_L) \cdot (\mathrm{id}_M \otimes f)$$

a levá strana je injektivní, je $\mathrm{id}_M \otimes f$ injektivní. $\square$

Důsledek 6.4. *Libovolný projektivní R-modul je plochý.*

Důkaz. Plyne z 4.2, 4.6 a 6.3. $\square$

Definice 6.5. Buď I direktní uspořádaná množina (t.j., libovolná konečná podmnožina má horní závoru). Mějme R-moduly M_i, $i \in I$ a homomorfismy $f_{ij} : M_i \to M_j$ pro $i < j$ takové, že $f_{jk} \cdot f_{ij} = f_{ik}$ pro $i < j < k$. Buď M R-modul vybavený homomorfismy $f_i : M_i \to M$, $i \in I$ takovými, že $f_j \cdot f_{ij} = f_i$ pro $i < j$.

Řekneme, že M je *direktní kolimita* modulů M_i pokud pro libovolný R-modul N spolu s homomorfismy $g_i : M_i \to N$, $i \in I$ splňujícími $g_j \cdot f_{ij} = g_i$ pro $i < j$ existuje právě jeden homomorfismus $g : M \to N$ takový že $g \cdot f_i = g_i$ pro libovolné $i \in I$.

Značíme $M = \operatorname{colim} M_i$.

Poznámka 6.6. Podobně definujeme direktní kolimity množin. Ukážeme že tyto vždy existují.

Buď I direktní uspořádaná množina. Mějme množiny X_i, $i \in I$ a zobrazení $f_{ij} : X_i \to X_j$ pro $i < j$ takové, že $f_{jk} \cdot f_{ij} = f_{ik}$ pro $i < j < k$. Buď $\coprod_{i \in I} X_i$ disjunktní sjednocení množin X_i a $\sim$ relace na na této množině taková že $x \sim y$ pro $x \in X_{i_1}$ a $y \in I_{i_2}$, právě když existuje $i_1, i_2 \leq j$ tak, že $f_{i_1 j}(x) = f_{i_2 j}(y)$.Tato relace je reflexivní a symetrická a z direktnosti I plyne, že je i tranzitivní. Tedy $\sim$ je relace ekvivalence. Pak $\operatorname{colim}_i X_i = \coprod_{i \in I} X_i / \sim$. Přitom $f_i : X_i \to \operatorname{colim}_i X_i$ je kompozice inkluze $X_i \to \coprod_i X_i$ a projekce $p : \coprod_i X_i \to \operatorname{colim}_i X_i / \sim$. Snadno se ověří, že se jedná o direktní kolimitu.

Věta 6.7. *Direktní kolimity R-modulů existují.*

Důkaz. Buď I direktní uspořádaná množina, M_i, $i \in I$ R-moduly a $f_{ij} : M_i \to M_j$ homomorfismy pro $i < j$ takové, že $f_{jk} \cdot f_{ij} = f_{ik}$ pro $i < j < k$. Uvažujme množinu $X = \operatorname{colim}_i UM_i$. Zvolme $x, y \in X$. Z direktnosti plyne, že existuje $i \in I$ a $x' \in UM_i$, $y' \in UM_i$ tak, že $x = U(f_i)(x')$ a $y = U(f_i)(y')$. Položme

$$x + y = f_i(x' + y'),$$

$$rx = f_i(rx').$$

Tím na množině X vznikne R-modul, který je zřejmě $\operatorname{colim}_i M_i$. $\square$

Poznámka 6.8. Zapomínající funktor $U : \mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Set}$ zachovává direktní kolimity, t.j.

$$U(\operatorname{colim}_i M_i) = colim_i UM_i.$$

Lemma 6.9. *Buďte $(f_i : M_i \to M)_{i \in I}$ a $(g_i : N_i \to N)_{i \in I}$ direktní kolimity R-modulů M_i s homomorfismy $(f_{ij} : M_i \to M_j)_{i \leq j \in I}$ a R-modulů N_i s homomorfismy $(g_{ij} : N_i \to N_j)_{i \leq j \in I}$. Buďte $h_i : M_i \to N_i$, $\imath \in I$ homomorfismy takové, že $h_j \cdot f_{ij} = g_{ij} \cdot h_i$ pro $i \leq j \in I$. Pak existuje právě jeden homomorfismus $h : M \to N$ takový, že $h \cdot f_i = g_i \cdot h_i$ pro všechna $i \in I$.*

Jsou-li h_i, $i \in I$ injektivní, pak je h injektivní.

Důkaz. Existence a jednoznačnost h plyne z definice direktní kolimity. Nechť $h(x) = h(y)$ pro $x, y \in M$. Pak existuje $i \in I$ a $x', y' \in M_i$ tak, že $f_i(x') = x$ a $f_i(y') = y$. Poněvadž $g_i(h_i(x')) = g_i(h_i(y'))$, existuje $i \leq j \in I$ tak že $g_{ij}(h_i(x')) = g_{ij}(h_i(y'))$. Tedy $h_i(f_{ij}(x')) = h_i(f_{ij}(y'))$ a poněvadž h_i je injektivní, $f_{ij}(x') = f_{ij}(y')$ Tedy $x = y$. $\square$

Poznámka 6.10. Budeme značit $h = \operatorname{colim}_i h_i$.

Důsledek 6.11. *Buď $(f_i : M_i \to M)_{i \in I}$ direktní kolimita R-modulů M_i s injektivních homomorfismů $(f_{ij} : M_i \to M_j)_{i \leq j \in I}$. Pak f_i, $i \in I$ jsou injektivní.*

Důkaz. Zvolme $k \in I$. Nejprve si uvědomme, že $\mathrm{colim}_{i \in I} M_i = \mathrm{colim}_{k \leq i \in I} M_i$. Dále položme $N_i = M_k$ pro $k \leq i \in I$ a $g_{ij} = \mathrm{id}_{M_k}$ pro $k \leq i \in I$. Pak $\mathrm{colim}\, N_i = M_k$. Nechť $h_i = f_{ki}$ pro $k \leq i$. Pak $\mathrm{colim}\, h_i = f_k$. Tedy f_k je injektivní podle 6.9. □

Věta 6.12. *Direktní kolimita plochých modulů je plochý modul.*

Důkaz. Buď $f_i : M_i \to \mathrm{colim}\, M_i$ direktní kolimita plochých modulů a $h : N_1 \to N_2$ injektivní homomorfismus. Z 5.7 plyne, že

$$(\mathrm{colim}_i\, M_i) \otimes N \cong \mathrm{colim}_i (M_i \otimes N).$$

Příslušné homomorfismy jsou $f_i \otimes \mathrm{id}_N : M_i \otimes N \to \mathrm{colim}_i (M_i \otimes \mathrm{id}_N)$. Buď $h : N_1 \to N_2$ injektivní homomorfismus. Pak

$$\mathrm{id}_{\mathrm{colim}_i M_i} \otimes h = \mathrm{colim}_i (\mathrm{id}_{M_i} \otimes h).$$

Podle 6.9 je $\mathrm{colim}_i\, M_i$ plochý. □

Věta 6.13 (Lazard)**.** *Ploché R-moduly jsou právě direktní kolimity projektivních modulů.*

Poznámka 6.14. Konečně generované R-moduly jsou právě kvocienty volných modulů nad konečnou množinou. Konečně generovaný R-modul M se nazývá *konečně prezentovaný* pokud jádro kvocientu $FX \to M$ je konečně generované.

Důsledek 6.15. *Libovolný konečně prezentovaný plochý modul je projektivní.*

Důkaz. Buď M konečně prezentovaný plochý modul. Podle 6.13 je $M = \mathrm{colim}_{i \in I} M_i$ direktní kolimita projektivních R-modulů M_i. Poněvadž M_i je konečně prezentovaný, je sčítanec některého M_i a tedy je projektivní. □

Definice 6.16. Okruh R se nazývá *regulární*, pokud pro libovolné $r \in R$ existuje $s \in R$ tak, že $r = rsr$.

Věta 6.17. *R je regulární, právě když libovolný R-modul je plochý.*

Důkaz. I. Nechť libovolný R-modul je plochý. Buď rR hlavní ideál v R. Poněvadž R/rR je plochý a konečně prezentovaný, R/rR je projektivní (podle 6.15). Tedy projekce $p : R \to R/rR$ se štěpí. Podle 3.10 se inkluze $i : rR \to R$ štěpí, takže existuje $t : R \to rR$ tak'že $t \cdot i = \mathrm{id}_{rR}$. Pro $e = t(1)$ existuje $s \in R$ tak, že $e = rs$. Platí

$$r = t(r) = t(1r) = t(1)r = er,$$

takže $rsr = er = r$.

II. Buď R regulární. Pak libovolný hlavní ideál v R je generován idempotentem. Skutečně $rR = rsR$ a rs je idempotent. Ukážeme, že libovolný konečně generovaný ideál v R je hlavní.

Uvažujme idempotenty e_1, e_2 a ideál $I = e_1R + e_2R$. Nejprve ukážeme, že

$$I = e_1R + (e_2 - e_1e_2)R.$$

Platí

$$e_2 = e_1e_2 + (e_2 - e_1e_2) \in e_1R + (e_2 - e_1e_2)R,$$

takže

$$e_1R + e_2R \subseteq e_1R + (e_2 - e_1e_2)R.$$

Naopak $e_2 - e_1e_2 \in e_1R + e_2R$, takže

$$e_1R + (e_2 - e_1e_2)R \subseteq e_1R + e_2R.$$

Víme, že $(e_2 - e_1e_2)R = eR$ pro nějaký idempotent e. Platí

$$e_1e \in e_1(e_2 - e_1e_2)R = 0$$

taže $e_1e = 0$. Tedy

$$e = (e - e_1)e \in (e - e_1)R$$

a tedy i

$$e_1 = e - (e - e_1) \in (e - e_1)R.$$

Odsud plyne

$$I = e_1R + eR \subseteq (e - e_1)R.$$

Opačná inkluze je zřejmá, takže $I = (e - e_1)R$ je hlavní ideál.

Libovolný hlavní ideál generovaný idempotentem je sčítanec R neboť inkluze $eR \to R$ se štěpí pomocí $t : R \to eR$, kde $t(x) = ex$. Dokázali jsme, že libovolný konečně generovaný ideál v R je sčítanec R.

Pro libovolný R-modul M a inkluzi $g : I \to R$ konečně generovaného ideálu I je $\mathrm{id}_M \otimes g$ injektivní. Poněvadž libovolný ideál I je direktní kolimita konečně generovaných ideálů, $\mathrm{id}_M \otimes h$ injektivní pro inkluzi $h : I \to R$. Později uvidíme, že to stačí k tomu, aby$M$ byl plochý. $\square$

Příklad 6.18. $\mathbb{Z}$ není regulární, takže existují komutativní grupy, které nejsou ploché. Ploché komutativní grupy jsou právě komutativní grupy bez torze.

7. Injektivní moduly

Definice 7.1. R-modul E se nazývá *injektivní*, jestliže pro libovolný imjektivní homomorfismus $h : M \to N$ a pro libovolný homomorfismus $f : M \to E$ existuje homomorfismus $g : N \to E$ takový, že $g \cdot h = f$.

Věta 7.2 (Baerovo kritérium). *R-modul E je injektivní, právě když pro libovolný levý ideál I v R, libovolný homomorfismus $f : I \to M$ lze rozšířit na R.*

Důkaz. Nechť E splňuje podmínku věty a uvažujme $h : M \to N$ a $f : M \to E$. Uvažujne množinu rozšíření f na podmoduly $M \subseteq K \subseteq N$ uspořádanou restrikcí. Z principu maximality plyne, že existuje maximální prvek K_0. Ukážene, že $K_0 = M$.

V opačném případě existuje $a \in M - K_0$. Nechť $I = \{r \in R | ra \in K_0\}$. Zřejmě I je levý ideál v R. Buď $f_1 : I \to E$ dané předpisem $f_1(r) = g_0(ra)$, kde $g_0 : K_0 \to E$ je rozšíření f. Buď $g_1 : R \to E$ rozšíření f_1 a označme $a_1 = g_1(1)$. Buď

$$u : K_0 + Ra \to E$$

dané předpisem

$$u(x + ra) = g_0(x) + ra_1.$$

Definice je korektní neboť pro $x + ra = x' + r'a$ platí $(r - r')a = x' - x \in K_0$, takže $r - r' \in I$. Tedy

$$u(x + ra) - u(x' + r'a) = (g_0(x) + ra_1) - (g_0(x') + r'a_1) = g_0(x - x') + (r - r)a_1$$

a

$$(r - r')a_1 = g_1(r - r') = f_1(r - r') = g_0((r - r')a).$$

Tedy

$$u(x + ra) - u(x' + r'a) = g_0(x - x') + (r - r')a_1 = g_0(x - x') + g_0((r - r')a) = 0.$$

Nalezli jsme vlastní rozšíření g_0, což není možné. □

Věta 7.3. *Libovolný R-modul je injektivní, právě když libovolný R-modul je projektivní.*

Důkaz. Plyne z 4.9. □

Tedy libovolný vektorový prostor je injektivní.

Věta 7.4. *Komutativní grupa je injektivní, právě když je divizibilní.*

Důkaz. Buď A injektivní a zvolme $a \in A$. $n \in \mathbb{Z}$. Uvažujme $f : n\mathbb{Z} \to A$ dané předpisem $f(nx) = xa$. Buď $g : \mathbb{Z} \to A$ rozšíření f na $\mathbb{Z}$ a $b = g(1)$. Pak

$$a = f(n) = f(n \cdot 1) = g(n \cdot 1) = ng(1) = nb.$$

Tedy A je divizibilní.

Buď A divizibilní. Uvažujme $f : n\mathbb{Z} \to A$ a $a = f(n)$. Buď $a = nb$ a $g : \mathbb{Z} \to A$ tak, že $g(1) = b$. Pak g je rozšření f na $\mathbb{Z}$. Podle 7.2 je A injektivní. □

Věta 7.5. *(1) Součin injektivních R-modulů je injektivní.*

(2) Sčítanec injektivního R-modulu je injektivní.

Důkaz. Důkaz je duální k odpovídajím tvrzením o projektivních modulech. □

Definice 7.6. Buď M levý R-modul. Pak $M^+ = \mathbf{Ab}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ je pravý R-modul, kde pro $f : M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ je

$$(fr)(x) = f(rx).$$

Nazývá se *modul charakterů.*

Věta 7.7. *Levý R-modul M je plochý, právě když M^+ je injektivní.*

Důkaz. Buď M plochý a $h : K \to L$ injektivní homomorfismus pravých R-modulů. Platí

$$\mathbf{Ab}(K \otimes_R M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathbf{Mod}_R(K, M^+),$$

kde $\mathbf{Mod}_R$ zde je kategorie pravých R-modulů. Poněvadž $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ je divizibilní a tedy injektivní a $h \otimes_R M$ je injektivní,

$$(h \otimes_R M)^+ = \mathbf{Ab}(h \otimes_R M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

je surjektivní. Tedy $\mathbf{Mod}_R(h, M^+)$ je surjektivní, takže M^+ je injektivní.

Naopak, buď M^+ injektivní a $h : K \to L$ injektivní homomorfismus pravých R-modulů. Pak $\mathbf{Mod}_R(h, M^+)$ je surjektivní, takže $(h \otimes_R M)^+$ je surjektivní. Potřebujeme odvodit, že $h \otimes_R M$ je injektivní, čímž bude důkaz ukončen.

Předpokládejme, že $(h \otimes_R M)(a) = (h \otimes_R M)(b)$ pro $a, b \in K \otimes_R M$, $a \neq b$. Buď H podgrupa grupy $K \otimes_R M$ generovaná prvkem $a - b$. Buď $f : H \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ homomorfismus daný předpisem

$$f(n(a-b)) = \begin{cases} \frac{n}{t} + \mathbb{Z}, & \text{má-li } a-b \text{ konečný řád } t, \\ \frac{n}{2} + \mathbb{Z}, & \text{má-li } a-b \text{ nekonečný řád.} \end{cases}$$

Poněvadž $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ je injektivní, existuje rozšíření f na $f' : K \otimes_R M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Poněvadž $(h \otimes_R M)^+$ je surjektivní, existuje homomorfismus $g : L \otimes_R M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tak, že $f' = g \cdot (h \otimes_R M)$, což není možné. □

Poznámka 7.8. V podstatě jsme dokázali, že $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ je *kogenerátor* v $\mathbf{Ab}$, t.j., že pro dva různé homomorfismy $u, v : A \to B$ komutativních grup, existuje homomorfismus $f : B \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ takový že $f \cdot u \neq f \cdot v$. Totiž pro $a \in A$ takové, že $u(a) \neq v(a)$, sestrojíme $f : B \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ jak výše s $u(a) - u(b)$ místo $a - b$.

Tedy $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ je injektivní kogenerátor v $\mathbf{Ab}$.

Všimněme si, že $\mathbb{Z}$ je projektivní generátor v $\mathbf{Ab}$.

Důsledek 7.9. *R-modul M je plochý, právě když* $\mathrm{id}_M \otimes h$ *je injektivní pro libovolný injektivní homomorfismus* $h : I \to R$.

Důkaz. Plyne z 7.2 a 7.7. □

8. Injektivní obaly

Definice 8.1. Buďte $f : M_0 \to M_1$ a $g : M_0 \to M_2$ homomorfismy R-modulů. Buď M R-modul vybavený homomorfismy $\overline{f} : M_2 \to M$ a $\overline{g} : M_1 \to M$ takovými, že $\overline{f} \cdot g = \overline{g} \cdot f$. Řekneme, že R-modul M je *amalgovaný součet* M_1 a M_2 pokud pro libovolný R-modul N spolu s homomorfismy $u : M_1 \to N$, $v : M_2 \to N$ takovými, že $u \cdot f = v \cdot g$ existuje právě jeden homomorfismus $h : M \to N$ takový, že $h \cdot \overline{f} = v$ a $h \cdot \overline{g} = u$.

Značíme $M = M_1 \oplus_{M_0} M_2$.

Poznámka 8.2. $M_1 \oplus M_2 = M_1 \oplus_0 M_2$.

Lemma 8.3. *Amalgovaný součet $M_1 \oplus_{M_0} M_2$ existuje a pokud je f injektivní, pak je $\overline{f}$ injektivní.*

Důkaz. Buď $i_j : M_1 \to M_1 \oplus M_2$, $j = 1, 2$, součet, $h = j_1 \cdot f - j_2 \cdot g : M_0 \to M_1 \oplus M_2$ a $p : M_1 \oplus M_2 \to (M_1 \oplus M_2)/h(M_0)$. Zřejmě $M_1 \oplus_{M_0} M_2 = (M_1 \oplus M_2)/h(M_0)$, kde $\overline{f} = p \cdot i_2$ a $\overline{g} = p \cdot i_1$.

Buď f injektivní. Nechť $\overline{f}(a) = 0$ pro $a \in M_2$. Pak $p(0, a) = 0$, takže $(0, a) \in h(M_0)$. Tedy

$$(0, a) = h(x) = (f(x), -g(x))$$

pro nějaké $x \in M_0$. Odsud plyne, že $f(x) = 0$, takže $x = 0$ a tedy $g(x) = 0$. Ukázali jsme, že $\overline{f}$ je injektivní. □

Věta 8.4. *Libovolný R-modul je podmodul injektivního R-modulu.*

Důkaz. Buď M R-modul. Buď $(h_\alpha : I_\alpha \to M)_{\alpha<\gamma}$ dobře uspořádaná množina všech homomorfismů, kde $I_\alpha \subseteq R$ je pravý ideál okruhu R. Sestrojíme R-moduly M_α, $\alpha \leq \gamma$ a homomorfismy $f_{\alpha\beta} : M_\alpha \to M_\beta$, $\alpha < \beta \leq \gamma$ takové, že $f_{\alpha_2\alpha_3} \cdot f_{\alpha_1\alpha_2} = f_{\alpha_1\alpha_3}$ pro $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \leq \gamma$. následovně. Buď $M_0 = M$. Předpokládejme, že máme R-moduly M_α, $\alpha < \delta$ a homomorfismy $f_{\alpha\beta}$ pro $\alpha < \beta < \delta$. Pro $0 < \delta$ limitní, položíme $M_\delta = \operatorname{colim}_{\alpha<\delta} M_\alpha$, přičemž $f_{\alpha\delta} : M_\alpha \to M_\delta$ jsou dány direktní kolimitou.

Buď $\delta = \alpha + 1$ izolované nebo 0. Buď

$$\begin{tikzcd} I_\alpha \arrow[r] \arrow[d, "f_{0\alpha}\cdot h_\alpha"'] & R \arrow[d] \\ M_\alpha \arrow[r, "f_{\alpha.\alpha_1}"'] & M_{\alpha_1} \end{tikzcd}$$

amalgovaný součet, kde horní homomorfismus je inkluze (pro $\alpha = 0$ je $f_{00} = \mathrm{id}_M$). Podle 6.11 a 8.3 jsou $f_{\alpha\beta}$, $\alpha < \beta \leq \gamma$ injektivní.

Položme $M^* = M_\gamma$. Buď $\lambda = |R|^+$. Sestrojme R-moduly $(E_\alpha)_{\alpha\leq\lambda}$ a homomorfismy $g_{\alpha\beta} : E_\alpha \to E_\beta$, kde $\alpha < \beta \leq \lambda$ takové, že $g_{\alpha_2\alpha_3} \cdot g_{\alpha_1\alpha_2} = g_{\alpha_1\alpha_3}$ pro $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \leq \lambda$ následovně. Buď $E_0 = M$. Pro $0 < \delta$ limitní, položíme $E_\delta = \operatorname{colim}_{\alpha<\delta} E_\alpha$, přičemž $g_{\alpha\delta} : E_\alpha \to E_\delta$ jsou dány direktní kolimitou. Buď $\delta = \alpha + 1$ izolované nebo 0. Položíme $E_\delta = (E_\alpha)^*$ a $g_{\alpha\delta} : E_\alpha \to E_\alpha^*$ sestrojené výše. Podle 6.11 a 8.3 jsou $g_{\alpha\beta}$, $\alpha < \beta \leq \lambda$ injektivní.

Ukážeme, že E_λ je injektivní. Buď $h : I \to E_\lambda$ homomorfismus, kde I je pravý ideál okruhu R. Poněvzdž $|I| < \lambda$, existuje $h' : I \to E_\alpha$ pro nějaké $\alpha < \lambda$ tak, že $h = g_{\alpha\lambda} \cdot h'$. Podle konstrukce, existuje rozšíření $g_{\alpha,\alpha+1} \cdot h'$ na R. Tedy existuje rozšíření h na R. □

Definice 8.5. Podmodul L R-modulu M se nazývá *podstatný*, jestliže $L \cap N \neq 0$ pro libovolný podmodul $0 \neq N \subseteq M$. Také říkáme, že M je *podstatné rozšíření L*.

Lemma 8.6. *Je-li K podstatné rozšíření M a M podstatné rozšíření L, pak K je podstatné rozšíření L.*

Důkaz. Pro $0 \neq N \subseteq K$ je $N \cap M \neq 0$ a tedy $0 \neq (N \cap M) \cap L = N \cap L$. □

Definice 8.7. Buďte N, L podmoduly R-modulu M. Pak N se nazývá *podstatný komplement* L, pokud $L \cap N = 0$ a $L + N$ je podstatný podmodul M.

Lemma 8.8. *Libovolný podmodul L R-modulu M má podstatný komplement.*

Důkaz. Podle principu maximality existuje maximální podmodul N R-modulu M takový, že $N \cap L = 0$. Ukážeme, že N je podstatný komplement L. Uvažujme $K \subseteq M$ tak, že $K \cap (L + N) = 0$. Pak $L \cap (N + K) = 0$. V opačném případě existují $x \in N$ a $y \in K$ tak, že $x + y \in L$. Tedy

$$y = (x + y) - x \in K \cap (L + N) = 0,$$

takže $y = 0$ a tedy $x \in N \cap L$ a proto $x = 0$. Tedy $x + y = 0$.

Z maximality N plyne, že $K \subseteq N$ a tedy $K = 0$.

Poznámka 8.9. Je-li N podstatný komplement $L \subseteq M$ z 8.8, pak M/N je podstatné rozšíření L.

Především $L \cong (L + N)/N \subseteq M/N$. Nechť $N \subseteq K \subseteq M$ a $(K/N) \cap L = 0$. Pak $K \cap (L + N) \subseteq N$, takže

$$(K \cap L) \cap (L + N) \subseteq L \cap N = 0.$$

Poněvadž $L + N$ je podstatný, platí $K \cap L = 0$. Poněvadž N je daný 8.8, N je maximální s vlastností $N \cap L = 0$. Tedy $K = N$, takže L je podstatný v M/N.

Lemma 8.10. *Buď E injektivní R-modul, $h : M \to N$ podstatné rozšíření, $f : M \to E$ injektivní homomorfismus a $g : N \to E$ s $g \cdot h = f$. Pak g je injektivní.*

Důkaz. Buď K jádro g. Poněvadž $M \cap K = 0$, pl;atí $K = 0$. □

Věta 8.11. *Buď M podmodul R-modulu E. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(1) *E je maximální podstatné rozšíření M,*
(2) *E je injektivní R-modul a podstatné rozšíření M,*
(3) *E je minimální injektivní R-modul obsahující M.*

Navíc, libovolný R-modul má takové rozšíření.

Důkaz. (1)$\to$(2). Podle 8.4 je E podmodul injektivního R-modulu E'. Buď N podstatný komplement E v E'. Pak E'/N je podstatné rozšíření E, takže $E = E'/N$. Tedy $E' = E + N$ neboť pro $x \in E'$ platí $x + N = y + N$ pro nějaké $y \in E$, takže $x \in E + N$. Tedy $E' = E \oplus N$, takže E je injektivní.

Nyní ukážeme, že vždy existuje $M \subseteq E$ splňující (1). Víme, že M je podmodul injektivního R-modulu E'. Uvažujme množinu podstatných rozšíření M v E' uspořádanou inkluzí. Tato množina je uzavřená na sjednocení řetězců neboť pro řetězec podstatných rozšíření $M \subseteq N_i$ a pro $K \subseteq \cup_i N_i$ $K \cap M = 0$ platí $K \cap N_i = 0$

pro všechna i a tedy $K = 0$. Podle principu maximality obsahuje maximální prvek E. Ukážeme, že E je maximální podstatné rozšíření M. Buď N podstatné rozšíření M. Z 8.10 plyne, že N je podmodul E', takže $E = N$.

(3)→(1). Buď E_0 maximální podstatné rozšíření M v E. Už víme, že E_0 splňuje (1). takže je injektivní. Tedy $E = E_0$.

(2)→(3). Uvažujme $M \subseteq E_0 \subseteq E$, E_0 injektivní. Pak E_0 je sčítanec E, takže $E = E_0 \oplus N$. Poněvadž $N \cap M = 0$ a M je podstatný, platí $N = 0$ a tedy $E = E_0$. □

R-nodul E z 8.11 se nazývá *injektivní obal M*.

Věta 8.12. *Injektivní obal je určený jednoznačně až na izomorfismus.*

Proof. Buďte $f : M \to E$ a $f' : M \to E'$ injektivní obaly R-modulu M. Pak existují homomorfismy $g : E' \to E$ a $g' : E \to E'$ takové že $g \cdot f = f'$ a $g' \cdot f' = f$. Podle 8.10 jsou g a f' injektivní. Tedy $f'(M) \subseteq g'(E) \subseteq E'$ a $g'(E)$ je injektivní, takže $g'(E) = E'$ a $E \cong E'$. □

Věta 8.13. *Buď M podmodul injektivního R-modulu E. Pak E je injektivní obal M, právě když libovolný homomorfismus $g : E \to E$ takový, že $g/M = \mathrm{id}_M$ je izomorfismus.*

Proof. Je-li E injektivní obal M, pak g je izomorfismus podle 8.12. Nechť E splňuje podmínku věty. Buď $M \subseteq E_0 \subseteq E$ injektivní obal M. Buď $g : E_0 \to E$ inkluze a $g' : E \to E_0$ homomorfismus daný injektivitou E_0. Poněvadž $(g' \cdot g)/M = \mathrm{id}_M$, $g' \cdot g$ je izomorfismus, takže g je izomorfismus. Tedy E jen injektivní obal M. □

9. Plochá pokrytí

Definice 9.1. Řekneme, že $f : P \to M$ je *projektivní pokrytí R-modulu M*, pokud P je projektivní, f je surjektivní a libovolný homomorfismus $g : P \to P$ takový, že $f \cdot g = f$ je izomorfismus.

Věta 9.2 (Bass)**.** *Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(1) *libovolný R-modul má projektivní pokrytí,*
(2) *libovolný plochý R-modul je projektivní,*
(3) *R splňuje podmínku konečnosti klesajících řetězců pro hlavní pravé ideály.*

Takové okruhy se nazývají *(zleva) perfektní.*

Příklady 9.3. (1) $\mathbb{Z}$ není perfektní.

(2) Okruh R se nazývá *(zprava) Artinovský* pokud splňuje podmínku konečnosti klesajících řetězců pro pravé ideály.

(3) Libovolný polojednoduchý okruh je perfektní.

Definice 9.4. Řekneme, že $f : F \to M$ je *ploché pokrytí R-modulu M*, pokud F je plochý, f je surjektivní a libovolný homomorfismus $g : F \to F$ takový, že $f \cdot g = f$ je izomorfismus.

Lemma 9.5. *Buďte $N \subseteq M$ R-moduly takové že N a M/N jsou ploché. Pak M je plochý.*

Důkaz. Máme krátkou exaktní posloupnost

$$0 \to N \to M \to M/N \to 0,$$

kde N a M/N jsou ploché. Poněvadž $(-)^+$ je funktor zachovávající krátké exaktní posloupnosti,

$$0 \to (M/N)^+ \to M^+ \to N^+ \to 0$$

je krátká exaktní posloupnost. kde $(M/N)^+$ a N^+ jsou injektivní. Tedy $(M/N)^+ \to M^+$ se štěpí a proto $M^+ = N^+ \oplus (M/N)^+$. Tedy M^+ je injektivní, takže M je plochý. □

Definice 9.6. Injektivní homomorhismus $h : M \to N$ se nazývá *plochý*, pokud R-modul $M/h(N)$ je plochý.

Lemma 9.7. *Složení plochých homomorfismů je ploché.*

Důkaz. Buďte $f : A \to B$ and $g : B \to C$ ploché inkluze. Uvažujme diagram

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[rr, "g"] \arrow[d, "p_1"'] & & C \arrow[dl, "p_2"'] \arrow[d, "p_3"] \\
& B/A \arrow[r, "u"'] & \mathbf{C}/A \arrow[r, "v"'] & C/B
\end{tikzcd}$$

kde p_1, p_2, p_3 jsou projekce. Prostřední lichoběžník je amalgovaný součet neboť z $s \cdot p_1 = t \cdot g$ plyne $t \cdot g \cdot f = s \cdot p_2 \cdot f = 0$. Podle 8.3 je u injektivní. Platí $C/B = (C/A)/(B/A)$. Totiž $q \cdot u = 0$ implikuje $q \cdot p_2 \cdot g = 0$, takže $q \cdot p_2 = h \cdot p_3$ pro nějaké h. Pak $h \cdot v \cdot p_2 = h \cdot p_3 = q \cdot p_2$ a tedy $h \cdot v = q$.

Podle 9.5 je B/A plochý. □

Lemma 9.8. *Pokud v amalgovaném součtu je f plochý, pak $\overline{f}$ je plochý.*

Proof. Buď

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\overline{g}"] & D \\
A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] & C \arrow[u, "\overline{f}"']
\end{tikzcd}$$

amalgamovaný součet, kde f je plochý. Podle 8.3 je $\overline{f}$ injektivní. Uvažujme projekci $p : D \to D/\overline{f}(C)$. Stačí ukázat, že $p \cdot \overline{g} : B \to B/f(A)$ je projekce na faktorový R-modul. Nechť $q : B \to K$, $q \cdot f = 0$. Pak $q \cdot f = 0 \cdot g$, takže existuje $h : D \to K$ tak, že $h \cdot \overline{g} = q$. Tedy existuje t tak, že $t \cdot p = h$ a $h \cdot \overline{f} = 0$. Tedy $t \cdot p \cdot \overline{g} = h \cdot q$.
□ □

Lemma 9.9. *Direktní kolimita plochých homomorfismů je plochý.*

Důkaz. Buďte $(f_i : M_i \to M)_{i \in I}$ a $(g_i : N_i \to N)_{i \in I}$ direktní kolimity R-modulů M_i s homomorfismy $(f_{ij} : M_i \to M_j)_{i \leq j \in I}$ a R-modulů N_i s homomorfismy $(g_{ij} : N_i \to N_j)_{i \leq j \in I}$. Buďte $h_i : M_i \to N_i$, $\imath \in I$ ploché homomorfismy takové, že $h_j \cdot f_{ij} = g_{ij} \cdot h_i$ pro $i \leq j \in I$ a $h = \operatorname{colim}_i h_i$. Podle 6.9 je h injektivní. Platí $N/h(M) = \operatorname{colim}_i N_i h(M_i)$. Tento R-modul je plochý podle 6.12, takže h je plochý. □

Definice 9.10. R-modul E se nazývá *kotorzní*, jestliže pro libovolný plochý homomorfismus $h : M \to N$ a pro libovolný homomorfismus $f : M \to E$ existuje homomorfismus $g : N \to E$ takový, že $g \cdot h = f$.

Poznámka 9.11. (1) Libovolný injektivní R-modul je kotorzní.

(2) Komutativní grupa je kotorzní, právě když je sčítanec v každé komutativní grupě, která ji obsahuje s kvocientem bez torze.

Věta 9.12. *Pro libovolný R-modul M existuje plochý homomorfismus $h : M \to \tilde{M}$ do kotorzního R-modulu $\tilde{M}$.*

Nástin důkazu. Postupujeme stejně, jak v důkazu 8.4 s tím, že za $h_\alpha : I_\alpha \to M$ a $I_\alpha \subseteq R$ bereme homomorfismy $h_\alpha : A_\alpha \to M$ a ploché homomorfismy $g_\alpha : A_\alpha \to B_\alpha$. Přitom využíváme 9.8 a 9.9. Musíme však vědet, že se stačí omezit na množinu plochých homomorfismů g_α, což je rozhodující část důkazu. □

Definice 9.13. Surjektivní homomorfismus R-modulů se nazývá *kotorzní*, poku jeho jádro je kotorzní.

Poznámka 9.14. Homomorfismus $M \to 0$ je kotorzní, právě když M je kotorzní.

Lemma 9.15. *Buď $g : C \to D$ homomorfismus takový, že pro libovolný komutativní čtverec*

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "v"] & D \\
A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "u"'] & C \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}
$$

kde f je plochý, existuje $t : B \to C$ tak, že $t \cdot f = u$ a $g \cdot t = v$. Pak g je kotorzní.

Důkaz. Nejprve ukážeme, ž g je surjektivní. K tomu za u stačí zvolit $0 \to R$.

Buď $j : E \to C$ jádro g. V diagramu

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "v"] \arrow[dd, "f"'] & E \arrow[d, "j"] \\
 & C \arrow[d, "g"] \\
B \arrow[r, "0"'] \arrow[uur, dashed, "q"] \arrow[ur, dashed, "t"'] & D
\end{tikzcd}$$

máme t takové že $g \cdot t = 0$ and $t \cdot f = j \cdot u$. Tedy máme v tak, že $j \cdot v = t$ (neboť $g \cdot t = 0$). Tedy

$$j \cdot v \cdot f = t \cdot f = j \cdot u$$

a tedy $v \cdot f = u$. $\square$

Poznámka 9.16. (1) Platí i opačná implikace – libovolný kotorzní homomorfismus má vlastnost z 9.15. Navíc, homomorfismus f je plochý, právě když má tuto vlastnost vzhledem ke kotorzním homomorfismům g. Tedy ploché a kotorzní homomorfismy se navzájem určují vlastností z 9.15, která se nazývá *liftovací* vlastnost.

(2) Podobně se určují injektivní homomorfismy a surjektivní homomorfismy s injektivním jádrem a injektivní homomorfismy s projektivním kvocientem a surjektivní homomorfismy.

(3) Odsud vyplývá, že libovolný kotorzní R-modul je injektivní, právě když libovolný R-modul je plochý. Podobně, libovolný plochý R-modul je projektivní, právě když libovolný R-modul je kotorzní.

Věta 9.17. *Libovolný homorfismus R-modulů $f : M \to N$ lze faktorizovat jako $f = f_2 \cdot f_1$, kde $f_1 : M \to \tilde{M}$ je plochý a $f_2 : \tilde{M} \to N$ kotorzní.*

Nástin důkazu. Postupujeme stejně, jak v důkazu 9.12 s tím, že místo $h_\alpha : A_\alpha \to M$ a $g_\alpha : A_\alpha \to B_\alpha$ bereme $h_\alpha : A_\alpha \to M$, $g_\alpha : A_\alpha \to B_\alpha$ a $w_\alpha : B_\alpha \to N$ takové, že $w_\alpha \cdot g_\alpha = f \cdot h_\alpha$. $\square$

Důsledek 9.18. *Pro libovolný R-modul M existuje kotorzní homomorfismus $p : \tilde{M} \to M$ plochého R-modulu $\tilde{M}$.*

Důkaz. Aplikujeme 9.17 na $0 \to M$. $\square$

Z 9.18 lze odvodit následující výsledek. Využívá se uzavřenosti plochých R-modulů na direktní kolimity. Podrobnosti lze nalézt v [2], či [3], [4].

Věta 9.19 (Bican, El Bashir, Enochs)**.** *Libovolný R-modul má ploché pokrytí.*

Podobně se ukáže libovolný R-modul má kotorzní obal.

10. Čistě injektivní moduly

Definice 10.1. Injektivní homomorfismus $h : M \to N$ (levých) R-modulů se nazývá *čistý*, pokud $h \otimes_R K$ je injektivní pro libovolný pravý R-modul K.

Lemma 10.2. *Direktní kolimity rozštěpených injektivních homomorfismů jsou čisté.*

Důkaz. Buď $h = \operatorname{colim}_i h_i$ direktní kolimita, kde h_i jsou rozštěpené injektivní homomorfismy. Pak $h \otimes_R K = \operatorname{colim} h_i \otimes K$ je direktní kolimita rozštěpených injektivních homomorfismů. □

Poznámka 10.3. (1) Platí i opačná implikace, čisté homomorfismy jsou právě direktní kolimity rozštěpených injektivních homomorfismů.

(2) Homomorfismus $f : M \to N$ je čistý, právě když v libovolném komutativním čtverci

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] & N \\
A \arrow[u, "u"] \arrow[r, "g"'] & B \arrow[u, "v"']
\end{tikzcd}$$

kde A, B jsou konečně prezentované, existuje $t : B \to M$ tak, že $t \cdot g = u$.

Definice 10.4. R-modul se nazývá *čistě injektivní*, pokud je injektivní k čistým homomorfismům.

Poznámka 10.5. Libovolný injektivní R-modul je čistě injektivní.

Věta 10.6. *Pro libovolný R-modul M, je modul charakterů M^+ čistě injektivní pravý R-modul.*

Důkaz. Buď $K \subseteq L$ čistý podmodul R-modulu L. Potřebujeme ukázat, že

$$\mathbf{Mod}_R(L, M^+) \to \mathbf{Mod}_R(K, M^+)$$

je surjektivní. To však plyne z důkazu 7.7 neboť $h \otimes_R M$ je injektivní. □

Lemma 10.7. *Injektivní homomorfismus $h : K \to L$ je čistý, právě když $h^+ : L^+ \to K^+$ se štěpí (jako surjektivní homomorfismus).*

Důkaz. Je-li h čistý, pak $h \otimes_R M$ je injektivní pro libovolný pravý R-modul M. Tedy $(h \otimes_R M)^+$ je surjektivní a proto

$$\mathbf{Mod}_R(M, h^+) : \mathbf{Mod}_R(M, L^+) \to \mathbf{Mod}_R(M, K^+)$$

je surjektivní (obojí podle důkazu 7.7). Volbou $M = K^+$ dostaneme, že h^+ se štěpí.

Naopak, pokud h^+ se štěpí, pak $\mathbf{Mod}_R(M, h^+) : \mathbf{Mod}_R(M, L^+) \to \mathbf{Mod}_R(M, K^+)$ je surjektivní a tedy $h \otimes_R M$ je injektivní. □

Věta 10.8. *Libovolný R-modul je čistý podmodul čistě injektivního R-modulu.*

Důkaz. Máme injektivnı homomorfismus $f : M \to M^{++}$ daný předpisem

$$f(a)(h) = h(a)$$

pro libovolné $a \in M$ a $h : M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Poněvadž $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ je kogenerátor, f je injektivní. Potřebujeme ukázat, že $M^{+++} \to M^{+}$ se štěpí. Tím štěpením je $M^{+} \to (M^{+})^{++}$. $\square$

Definice 10.9. Buďte $f : M_1 \to M_0$ a $g : M_2 \to M_0$ homomorfismy R-modulů. Buď M R-modul vybavený homomorfismy $\overline{f} : M \to M_2$ a $\overline{g} : M \to M_1$ takovými, že $g \cdot \overline{f} = f \cdot \overline{g}$. Řekneme, že R-modul M je *fibrovaný součin* M_1 a M_2 pokud pro libovolný R-modul N spolu s homomorfismy $u : N \to M_1$, $v : N \to M_2$ takovými, že $f \cdot u = g \cdot v$ existuje právě jeden homomorfismus $h : N \to M$ takový, že $\overline{f} \cdot h = v$ a $\overline{g} \cdot h = u$.

Značíme $M = M_1 \times_{M_0} M_2$.

Poznámka 10.10. $M_1 \times M_2 = M_1 \times_0 M_2$.

Lemma 10.11. *Fibrovaný součin $M_1 \times_{M_0} M_2$ existuje a pokud je f surjektivní, pak je $\overline{f}$ surjektivní.*

Důkaz. Buď $p_j : M_1 \times M_2 \to M_j$, $j = 1, 2$, součin, $h = f \cdot p_1 - g \cdot p_2 : M_1 \times M_2 \to M_0$ a $j : M \to M_1 \times M_2$ jádro h. Zřejmě $M = M_1 \times_{M_0} M_2$, kde $\overline{f} = p_2 \cdot j$ a $\overline{g} = p_1 \cdot j$.

Buď f surjektivní a zvolme $a \in M_2$. Existuje $b \in M_1$ tak, že $f(b) = g(a)$. Pak $(b.a) \in M_1 \times_{M_0} M_2$ a $\overline{f}(b, a) = a$. $\square$

Lemma 10.12. *Libovolný plochý homomorfismus je čistý.*

Důkaz. Buď $h : M \to N$ plochý homomorfismus a $p : N \to N/h(M)$. Pak $N/h(M)$ je direktní kolimita $f_i : P_i \to N/h(M)$ projektivních R-modulů P_i. Uvažujme fibrované součiny

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "p"] & N/h(M) \\
Q_i \arrow[u, "g_i"] \arrow[r, "p_i"'] & P_i \arrow[u, "f_i"']
\end{tikzcd}$$

Pak $p = \mathrm{colim}_i\, p_i$ a p_i jsou surjektivní. Tedy p_i se štěpí a proto jeho jádro h_i se štěpí. Poněvadž $h = \mathrm{colim}_i\, h_i$, h je čistý. $\square$

Důsledek 10.13. *Libovolný čistě injektivní R-modul je kotorzní.*

References

[1] L. Bican a J. Rosický, *Teorie svazů a univerzální algebra*, Praha 1988.

[2] L. Bican, R. El Bashir and E. Enochs, *All modules have flat cover*, Bull. London Math. Soc. 33 (2001), 385-390.

[3] J. Rosický, *Flat covers and factorizations*, J. Algebra 263 (2002), 1-13.

[4] J. Rosický, *On projectivity in locally presentable categories*, J. Algebra 272 (2004), 701-710.