Goniometrické a cyklometrické funkce

TVRZENÍ

Existuje jediná lichá funkce s na $\mathbb{R}$, která má následující vlastnosti:

(i) s je rostoucí na $(0, \pi/2)$;

(ii) $s(x+y) = s(x)s(y+\pi/2) + s(y)s(x+\pi/2)$
pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$;

(iii)

$$\lim_{x\to 0} \frac{s(x)}{x} = 1 \, .$$

Označíme $c(x) = s(x + \pi/2)$.

Vlastnosti:
$s(0) = 0$ a $s(x) > 0$ pro $x \in (0, \pi/2)$ (plyne z (iii) a (i));

$s(\pi/2) = 1, s(\pi) = s(2\pi) = 0, s(3\pi/2) = -1$ (vhodné volby pro x, y v (ii));

$s(x+\pi) = -s(x), s(x+2\pi) = s(x), c(-x) = c(x)$ (plyne opět z (ii));

$s^2(x) + c^2(x) = 1$ (volba $y = \pi/2 - x$ v (ii));

funkce s, c jsou spojité ((iii) dává spojitost v 0, z (ii) a z předchozí rovnosti plyne spojitost v dalších bodech);

z (ii) se běžným postupem dostanou všechny další známé vzorce pro sin a cos, např.

$$s^2 x = \frac{1 - c(2x)}{2} \, , \quad c^2(x) = \frac{1 + c(2x)}{2} \, .$$

Podle posledních vzorců lze indukcí definovat hodnoty $s(x)$ a $c(x)$ v bodech $k\pi/2^n, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$:

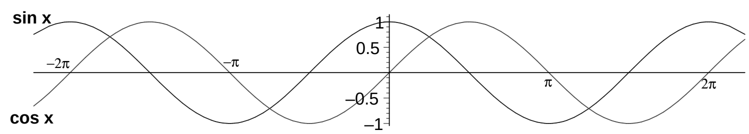
$$s^2(k\pi/2^{n+1}) = \frac{1 - c(k\pi/2^n)}{2} \, , \quad c^2(k\pi/2^{n+1}) = \frac{1 + c(k\pi/2^n)}{2}$$

(znaménka se berou podle výše uvedených vlastností).

Označme takto definované funkce na množině $D = \{k\pi/2^n; k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ jako $S(x), C(x)$. Je pouze technický problém ukázat, že S, C splňují vztah (ii) pro $x, y \in D$, vztah (i) na D a že S je spojitá v 0 (tedy podle (ii) je spojitá na D).

Jestliže $\{x_n\} \subset D, x_n \to x$, splňuje $S(x_n)$ Bolzanovu–Cauchyovu podmínku a tedy konverguje k číslu, které označíme $S(x)$ (toto číslo nezávisí na volbě $\{x_n\}$).
Protože S splňuje (i) a (ii) na D a je spojitá, splňuje (i) a (ii) i na $\mathbb{R}$. Zbývá ukázat, že funkce S splňuje (iii). Vzhledem k tomu, že každá funkce na $\mathbb{R}$ splňující (i), (ii) a (iii) je spojitá a shoduje se s S na D, musí se shodovat s S i na $\mathbb{R}$. Tuto jedinou funkci označíme $\sin$ a funkci C označíme $\cos$.

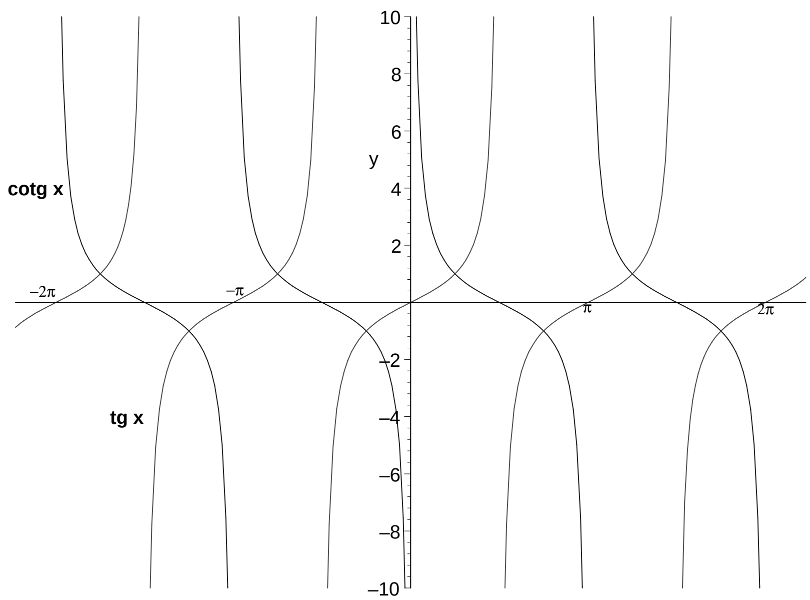
Funkce $\sin, \cos$ jsou spojité na $\mathbb{R}$, 2π–periodické, za obor hodnot mají interval $[-1, 1]$. Funkce $\sin$ je lichá, rostoucí na $[-\pi/2, \pi/2]$ a klesající na $[\pi/2, 3\pi/2]$. Funkce $\cos$ je sudá, rostoucí na $[-\pi, 0]$ a klesající na $[0, \pi]$.



grafy $\sin x, \cos x$

Funkce $\sin / \cos$ (značí se tg) je definována všude kromě lichých násobků $\pi/2$, je spojitá, lichá, rostoucí na jednotlivých intervalech definičního oboru, neomezená.

Funkce $\cos / \sin$ (značí se cotg) je definována všude kromě násobků π, je spojitá, lichá, klesající na jednotlivých intervalech definičního oboru, neomezená.

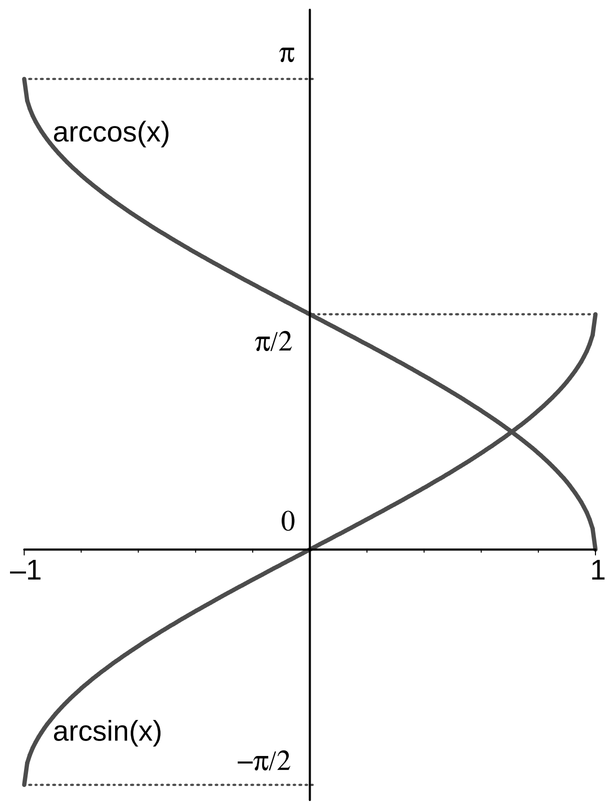


grafy $\mathrm{tg}\, x, \mathrm{cotg}\, x$

DEFINICE

Funkce sin je rostoucí na $[-\pi/2, \pi/2]$, tento interval zobrazuje na $[-1, 1]$. Na $[-1, 1]$ tedy existuje inverzní funkce (značí se arcsin), která je spojitá, rostoucí a zobrazuje $[-1, 1]$ na $[-\pi/2, \pi/2]$.

Funkce cos je klesající na $[0, \pi]$, tento interval zobrazuje na $[-1, 1]$. Na $[-1, 1]$ tedy existuje inverzní funkce (značí se arccos), která je spojitá, klesající a zobrazuje $[-1, 1]$ na $[0, \pi]$.

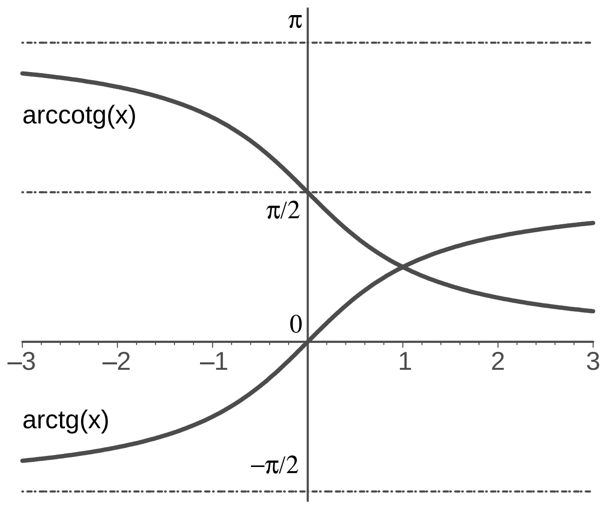


grafy $\arcsin x, \arccos x$

DEFINICE

Funkce tg je rostoucí na $(-\pi/2, \pi/2)$, tento interval zobrazuje na $(-\infty, +\infty)$. Na $(-\infty, +\infty)$ tedy existuje inverzní funkce (značí se arctg), která je spojitá, rostoucí a zobrazuje $(-\infty, +\infty)$ na $(-\pi/2, \pi/2)$.

Funkce cotg je klesající na $(0, \pi)$, tento interval zobrazuje na $(-\infty, +\infty)$. Na $(-\infty, +\infty)$ tedy existuje inverzní funkce (značí se arccotg), která je spojitá, klesající a zobrazuje $(-\infty, +\infty)$ na $(0, \pi)$.



grafy $\operatorname{arctg} x, \operatorname{arccotg} x$