Funkce – základní vlastnosti

DEFINICE

Funkce f (přesněji reálná funkce reálné proměnné) je zobrazení nějaké podmnožiny $D \subset \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, tj. přiřazuje každému $x \in D$ přesně jedno reálné číslo $f(x)$.

Množina D se nazývá *definiční obor* dané funkce (značí se $\mathcal{D}(f)$), čísla z D jsou (nezávisle) *proměnné* , příslušná přiřazená čísla jsou *hodnoty* (též nazývané závisle proměnné). Množina všech hodnot dané funkce se nazývá její *obor hodnot* .

Množina všech bodů v rovinném (x,y)–souřadnicovém systému, které mají souřadnice $(x, f(x))$, kde $x \in D$, budeme nazývat *grafem* funkce f.

$f^{-1}(y)$ je množina těch bodů x z definičního oboru funkce f, pro které je $f(x) = y$, tj. $f^{-1}(y) = \{x \in \mathcal{D}(f) : f(x) = y\}$.

Tedy vzor množiny A je

$$f^{-1}(A) = \bigcup\{f^{-1}(y); y \in A\} = \{x \in \mathcal{D}(f); f(x) \in A\}$$

DEFINICE

Funkce, která má jednobodový obor hodnot, se nazývá *konstantní* (tedy $f(x) = f(y)$ pro všechna $x, y \in \mathcal{D}(f)$)). Grafem konstantní funkce je přímka rovnoběžná s osou x nebo její část.

Funkce f se nazývá *sudá* (resp. *lichá*), jestliže její definiční obor je symetrický kolem 0 (tj. $x \in \mathcal{D}(f)$ právě když $-x \in \mathcal{D}(f)$) a $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$) pro všechna $x \in \mathcal{D}(f)$. Graf sudé funkce je symetrický podle osy y. Graf liché funkce je symetrický podle počátku.

Funkce f definovaná na intervalu I se nazývá *rostoucí* (resp. *neklesající*), jestliže $f(x) < f(y)$ (resp. $f(x) \leq f(y)$) jakmile $x, y \in \mathcal{D}(f), x < y$. Zřejmým způsobem se definují funkce *klesající* , resp. *nerostoucí* .

Rostoucí nebo klesající funkce se nazývá *ryze monotónní* ; neklesající nebo nerostoucí funkce se nazývá *monotónní* .

Říkáme, že funkce f je *omezená* (resp. *shora omezená* nebo *zdola omezená*), jestliže její obor hodnot má uvedenou vlastnost, tj. existuje číslo k tak, že $|f(x)| \leq k$ (resp. $f(x) \leq k$, nebo $f(x) \geq k$) pro všechna $x \in \mathcal{D}(f)$.

DEFINICE

Jsou-li f, g funkce, budeme značit $f+g, f \cdot g, f/g$ funkce, které mají za hodnotu v bodě x postupně $f(x) + g(x)$,
$f(x) \cdot g(x), f(x)/g(x)$.

Složení $f \circ g$ definujeme jako funkci, která má v bodě x hodnotu $f(g(x))$.

U inversní funkce f^{-1} je definiční obor totožný s oborem hodnot funkce f a platí

$$(f \circ f^{-1})(y) = y \text{ pro } y \in \mathcal{D}(f^{-1})$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \text{ pro } x \in \mathcal{D}(f)\,.$$

Graf inverzní funkce f^{-1} je symetrický obraz grafu funkce f podle diagonály $\{(x,x); x \in \mathbb{R}\}$.

Inverzní funkce f^{-1} je rostoucí nebo klesající, nerostoucí, neklesající, právě když má stejnou vlastnost funkce f. Inverzní funkce f^{-1} je lichá, právě když je funkce f lichá.

Jinak zadané "funkce"

Implicitně zadaná křivka je dána rovnicí $f(x,y) = 0$, kde $f(x,y)$ je funkce dvou reálných proměnných x, y.

Parametrický zadaná křivka je tvaru

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t) \qquad \text{pro } t \in T,$$

kde T je nějaká množina reálných čísel (většinou interval).

Speciálním případem parametricky zadané křivky je zadání pomocí *polárních souřadnic* r, φ, kde r je popsáno nějakou funkcí $r = h(\varphi)$.

Protože $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, dostáváme parametrické zadání

$$x = h(\varphi)\cos\varphi, \quad y = h(\varphi)\sin\varphi\,.$$

DEFINICE

Funkce f definovaná na intervalu J se nazývá *konvexní* jestliže pro každé dva body $x, y \in J$ a každé $\lambda \in (0,1)$ platí vztah

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)\,.$$

Platí-li v uvedeném vztahu vždy ostrá nerovnost, nazývá se f *ryze konvexní* .

Obrátíme-li v uvedeném vztahu nerovnost, dostáváme funkci *(ryze) konkávní* .

TVRZENÍ

Pro funkci f definovanou na intervalu J jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. *f je na J konvexní;*
2. *jestliže $x_1 < x_2 < x_3$ jsou body J, pak*

$$f(x_2)(x_3 - x_1) \le f(x_3)(x_2 - x_1) + f(x_1)(x_3 - x_2)$$

3. *jestliže $x_1 < x_2 < x_3$ jsou body J, pak*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}\,.$$

DEFINICE

Funkce f definovaná na $\mathbb{R}$ se nazývá *periodická* , jestliže existuje $p \in (0, +\infty)$ (nazývané *perioda*) tak, že $f(x+p) = f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.