

Spojitosť funkce

DEFINICE

Nechť f je funkce, $x \in \mathcal{D}(f)$, a pro jakoukoli posloupnost $\{x_n\}$ z $\mathcal{D}(f)$ konvergující k x nechť $\lim f(x_n) = f(x)$. Pak říkáme, že f je *spojitá v bodě* x a tento bod se nazývá *bodem spojitosti* funkce f .

Je-li f spojitá v každém bodě množiny A , říkáme, že f je *spojitá na množině* A .

Je-li f spojitá v každém bodě svého definičního oboru, říkáme, že f je *spojitá*.

Je-li f spojitá funkce, je i $|f|$ spojitá funkce.

Identická funkce $f(x) = x$ na \mathbb{R} je spojitá.

TVRZENÍ

Jsou-li funkce f, g spojité v bodě x , jsou i funkce $f+g, f \cdot g$ a v případě $g(x) \neq 0$ i funkce f/g spojité v bodě x .

Součet, součin a podíl spojitých funkcí je spojitá funkce. Racionální funkce jsou spojité.

TVRZENÍ

Je-li funkce g spojitá v bodě x a funkce f v bodě $g(x)$, je funkce $f \circ g$ spojitá v bodě x .

Složení spojitých funkcí je spojitá funkce. Je-li f spojitá funkce, je i $|f|$ spojitá funkce.

POMOCNÉ TVRZENÍ

Je-li f spojitá na uzavřeném omezeném intervalu $[a, b]$ a $f(a) < 0 < f(b)$, pak existuje $c \in (a, b)$ s hodnotou $f(c) = 0$.

Každý polynom lichého stupně má reálný kořen.

TVRZENÍ

Spojité funkce zobrazuje interval na bod nebo na interval.

Je-li $n \in \mathbb{N}$ liché, existuje jednoznačná n -tá odmocnina z každého reálného čísla, je-li $n \in \mathbb{N}$ sudé, existuje jednoznačná n -tá odmocnina z každého nezáporného reálného čísla.

Částečně obrácené tvrzení: Je-li monotónní funkce f definována na intervalu J a zobrazuje podintervaly J na bod nebo intervaly, je spojitá.

TVRZENÍ

Spojité funkce zobrazuje uzavřený omezený interval na bod nebo na uzavřený omezený interval.

DŮSLEDEK

Spojité funkce dosahuje na uzavřeném omezeném intervalu J své největší a nejmenší hodnoty, tj., existují body $c, d \in J$ takové, že

$$f(c) = \sup_{x \in J} f(x), \quad f(d) = \inf_{x \in J} f(x).$$

TVRZENÍ

Spojité a prosté funkce na intervalu je ryze monotónní a její inverzní funkce je spojitá.

Mocnina $f(x) = x^r$, kde r je nenulové racionální číslo, je spojitá a ryze monotónní.

TVRZENÍ

Spojité funkce na intervalu J , která zobrazuje otevřené podintervaly J na otevřené intervaly, je ryze monotónní.

Spojité funkce na intervalu J , která zobrazuje otevřené podintervaly J na otevřené intervaly, je prostá a tedy ryze monotónní.

TVRZENÍ

Konvexní funkce na otevřeném intervalu je spojitá.

TVRZENÍ

Spojité nekonstantní periodická funkce má nejmenší periodu.