Limity funkce

DEFINICE

Říkáme, že bod $c \in \mathbb{R}^*$ je ***hromadný bod*** podmnožiny $A \subset \mathbb{R}$, jestliže každé okolí bodu c obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny A.
Říkáme, že posloupnost $\{x_n\}$ je ***prostá***, jestliže $x_n \neq x_m$ pro všechna $n \neq m$ (tj., příslušné zobrazení $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je prosté).

TVRZENÍ

Pro $c \in \mathbb{R}^*, A \subset \mathbb{R}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. c je hromadný bod A;
2. každé okolí bodu c obsahuje aspoň jeden bod množiny A různý od c;
3. existuje prostá posloupnost bodů z A konvergující k c.

POZOROVÁNÍ

V definici spojitosti funkce v bodě lze brát jen rostoucí nebo klesající posloupnosti.

DEFINICE

Říkáme, že funkce f je v bodě $x \in \mathcal{D}(f)$ ***spojitá zleva*** (resp. ***zprava***), jestliže pro jakoukoli rostoucí (resp. klesající) posloupnost $\{x_n\}$ z $\mathcal{D}(f)$ konvergující k x platí

$$\lim f(x_n) = f(x)\,.$$

POZOROVÁNÍ

Funkce je v nějakém bodě spojitá právě když je v tomto bodě spojitá zprava i zleva.

DEFINICE

Nechť c je hromadný bod definičního oboru funkce f.
Říkáme, že ***limita funkce*** f v bodě c se rovná A
(značení $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$, nebo $f(x) \to A$ pro $x \to c$), jestliže $\lim f(x_n) = A$ pro každou prostou posloupnost $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(f)\}$ konvergující k c.

TVRZENÍ

Nechť $c \in \mathcal{D}(f)$ je hromadným bodem $\mathcal{D}(f)$. Funkce f je spojitá v bodě c právě když $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

TVRZENÍ

Funkce má v daném bodě nejvýše jednu limitu.

TVRZENÍ

Následující tvrzení jsou pro funkci f, hromadný bod c definičního oboru f a bod A ekvivalentní:

1. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A$;
2. Pro každé okolí U bodu A existuje okolí V bodu c takové, že $f(x) \in U$ jakmile $x \in V \cap \mathcal{D}(f), x \neq c$.

Přepisy charakterizace limity pro různé situace:

Body c i A jsou vlastní. Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $|f(x) - A| < \varepsilon$ jakmile $0 < |x - c| < \delta$.

Bod c vlastní, bod A nevlastní. Pro každé číslo K existuje $\delta > 0$ tak, že $f(x) > K$ pro $A = +\infty$ (resp. $f(x) < K$ pro $A = -\infty$), jakmile $0 < |x - c| < \delta$.

Bod c nevlastní, bod A vlastní. Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje číslo k tak, že $|f(x) - A| < \varepsilon$ jakmile $x > k$ pro $c = +\infty$ (resp. $x < k$ pro $c = -\infty$).

Body c i A jsou nevlastní. Pro každé číslo K existuje číslo k tak, že $f(x) > K$ pro $A = +\infty$ (resp. $f(x) < K$ pro $A = -\infty$), jakmile $x > k$ pro $c = +\infty$ (resp. $x < k$ pro $c = -\infty$).

TVRZENÍ

Nechť c je hromadný bod definičních oborů funkce $f + g$. Pak platí (píšeme lim místo $\lim\limits_{x\to c}$):

1. $\lim(f(x) + g(x)) = \lim f(x) + \lim g(x)$, pokud má pravá strana smysl;
2. $\lim(f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$, pokud má pravá strana smysl;
3. $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$, pokud má pravá strana smysl;

TVRZENÍ

Nechť c je hromadný bod definičního oboru funkce $f \circ g$. Jestliže $\lim\limits_{x\to c} g(x) = A$ a f je spojitá v bodě A, pak

$$\lim_{x\to c} (f \circ g)(x) = f(A)$$

TVRZENÍ

Nechť c je hromadný bod definičního oboru funkce $f \circ g$. Jestliže $\lim\limits_{x\to c} g(x) = A$ a $\lim\limits_{y\to A} f(y) = \alpha$, pak

$$\lim_{x\to c} (f \circ g)(x) = \alpha$$

za předpokladu, že $g(x) \neq A$ pro všechna $x \neq c$ z nějakého okolí bodu c.

Uvedený poslední předpoklad je splněn, je-li g ryze monotónní nebo A je nevlastní bod.

TVRZENÍ

Mějme na intervalu J funkce f, g a c buď hromadný bod J.

1. Jestliže $\lim\limits_{x\to c} f(x) < \lim\limits_{x\to c} g(x)$, pak existuje okolí U bodu c takové, že $f(x) < g(x)$ pro všechna $x \in U \cap J, x \neq c$.
2. Jestliže existuje okolí U bodu c takové, že $f(x) \leq g(x)$ pro všechna $x \in U \cap J, x \neq c$, pak $\lim\limits_{x\to c} f(x) \leq \lim\limits_{x\to c} g(x)$ (pokud existují).

DŮSLEDEK

Mějme funkce f, g, h na intervalu J, c buď hromadný bod J, U okolí c a pro $x \in J \cap U, x \neq c$ nechť $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Jestliže existují $\lim\limits_{x\to c} f(x)$, $\lim\limits_{x\to c} h(x)$ a rovnají se, pak existuje i $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ a rovná se oběma zbývajícím.

V případě $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty$ není nutné uvažovat funkci h, a podobně u limity $-\infty$ není nutné uvažovat funkci f.

DŮSLEDEK

Nechť $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$ a funkce g je omezená na nějakém okolí bodu c. Pak $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x) = 0$.

DEFINICE

Nechť c je hromadný bod $\mathcal{D}(f) \cap (-\infty, c)$.
Říkáme, že *limita zleva funkce* f v bodě c se rovná A (značení $\lim\limits_{x\to c_-} f(x) = A$, nebo $f(x) \to A$ pro $x \to c_-$), jestliže $\lim f(x_n) = A$ pro každou rostoucí posloupnost $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(f)\}$ konvergující k c.

Podobně *limita zprava* $\lim\limits_{x\to c_+} f(x)$, kde bereme *klesající* posloupnosti $\{x_n\}$ konvergující k c, je-li c hromadný bod $\mathcal{D}(f) \cap (c, +\infty)$.

POZOROVÁNÍ

Jestliže c je hromadný bod jak $\mathcal{D}(f) \cap (-\infty, c)$, tak $\mathcal{D}(f) \cap (c, +\infty)$, pak $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A$ právě když $\lim\limits_{x\to c_-} f(x) = \lim\limits_{x\to c_+} f(x) = A$.

TVRZENÍ

Monotónní funkce má obě jednostranné limity funkce f v každém bodě, ve kterém to má smysl.

Je-li např. f neklesající na (a, b) a $c \in [a, b]$, je

$$\lim_{x\to c_+} f(x) = \inf_{x\in(c,b)} f(x) \text{ \textit{pro} } c \neq b\,,$$

$$\lim_{x\to c_-} f(x) = \sup_{x\in(a,c)} f(x) \text{ \textit{pro} } c \neq a\,.$$

TVRZENÍ

Monotónní funkce má na intervalu nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti (skoky).

DEFINICE

Nechť c je bod definičního oboru funkce f.

1. Jestliže existuje $\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$, říkáme, že c je *bod odstranitelné nespojitosti* funkce f;
2. Jestliže obě jednostranné limity f v bodě c existují a nerovnají se, říkáme, že funkce f má v bodě c *skok* ;
3. Jestliže aspoň jedna jednostranná limita f neexistuje v bodě c, ve kterém to má smysl, říkáme, že f v bodě c *osciluje* .