Obecná mocnina a logaritmus

Pro $a > 0$ je funkce a^x definována pro všechna racionální čísla a je na $\mathbb{Q}$ rostoucí pro $a > 1$, konstantní s hodnotou 1 pro $a = 1$ a klesající pro $0 < a < 1$.

TVRZENÍ

Funkce a^x je spojitá na $\mathbb{Q}$.

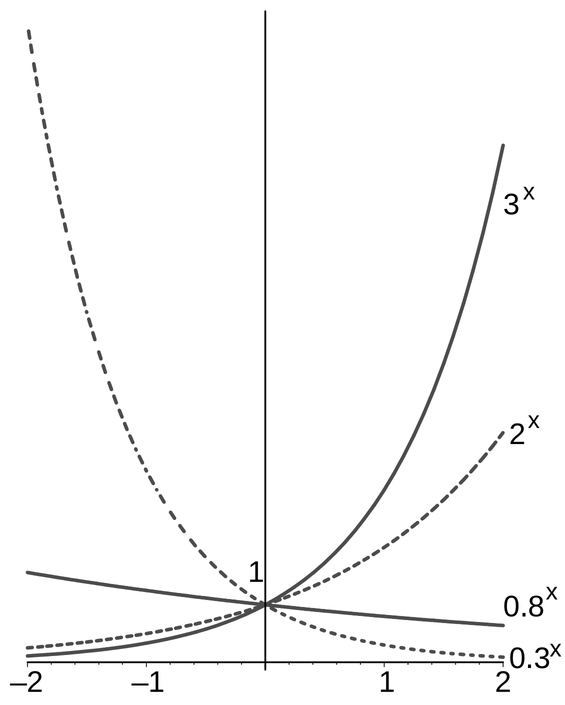
Jestliže $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}$ a $x_n \to x \in \mathbb{R}$, pak $\{a^{x_n}\}$ splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku a tedy konverguje v $\mathbb{R}$ a tato limita nezávisí na volbě posloupnosti konvergující k x. Tato limita se označí a^x. Vzniklá funkce se nazývá **obecná mocnina** nebo **obecná exponenciání funkce**.

TVRZENÍ

Funkce a^x je spojitá na $\mathbb{R}$ a je rostoucí pro $a > 1$, konstantní s hodnotou 1 pro $a = 1$ a klesající pro $0 < a < 1$.

TVRZENÍ

Obor hodnot funkce a^x pro $a \neq 1$ je $(0, \infty)$.

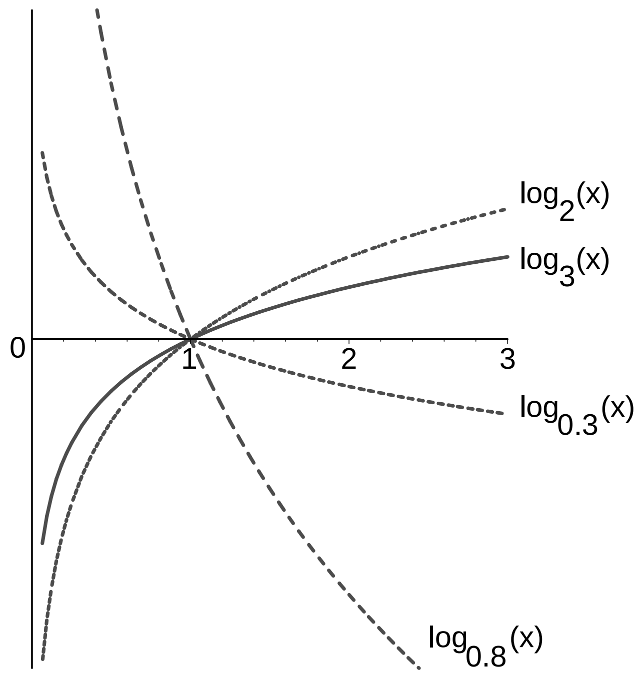


grafy a^x

TVRZENÍ

Pro $a \neq 1, a > 0$ má funkce a^x inverzní funkci, která je spojitá, definovaná na $(0, \infty)$, je rostoucí pro $a > 1$ a klesající pro $0 < a < 1$ a má obor hodnot $\mathbb{R}$. Tato funkce se značí $\lg_a x$. Platí (první vzorec pro $x > 0$, druhý vzorec pro všechna x).

$$a^{\lg_a x} = x, \quad \lg_a(a^x) = x\,.$$



grafy $\lg_a x$

TVRZENÍ

Nechť f, g jsou spojité funkce na intervalu J, které mají stejné hodnoty pro všechna racionální čísla z J (nebo pro všechna čísla z nějaké husté podmnožiny J). Pak $f = g$ na J.

DŮSLEDEK

Funkce a^x má vlastnosti:

- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$;
- $(a^x)^y = a^{xy}$;
- $a^{x+y} = a^x a^y$.

TVRZENÍ

Funkce $\lg_a x$ má vlastnosti:

- $\lg_a \frac{1}{x} = -\lg_a x\,;$
- $\lg_a (x^y) = y \lg_a x\,;$
- $\lg_a (xy) = \lg_a x + \lg_a y\,.$

Pro $x > 0$ označíme $g(z) = \frac{x^z - 1}{z}$. Tato funkce je definována všude kromě 0. Je neklesající na obou definičních intervalech a $\sup\{g(z); z < 0\} = \inf\{g(z); z > 0\}$.

Existuje tedy $\lim\limits_{z \to 0} g(z)$. Tato limita závisí na x a označíme ji $h(x)$. Funkce h je definována na $(0, +\infty)$, je nenulová a $h(x^y) = yh(x)$. Takováto funkce existuje jediná a rovná se $\lg_a x$ pro nějaké a Označme toto číslo a písmenem e a příslušný logaritmus jako $\lg x$ bez indexu.

Platí

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lg a, \quad \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\lg_a x} = \lg a\,,$$

speciálně

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\lg x} = 1\,.$$

Použijeme-li na $(1 + 1/n)^n$ vzorec $a^b = e^{b \lg a}$, dostaneme, že limita $(1 + 1/n)^n$ vypočtená dříve, se shoduje s číslem e získaným nyní.

TVRZENÍ

Pro $a > 1, u > 0, v > 0$ platí:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^{ux}}{x^v} = +\infty\,, \text{ speciálně } \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} |x|^v a^{ux} = 0\,, \text{ speciálně } \lim_{x \to -\infty} |x|^n e^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^u}{\lg_a{}^v x} = +\infty\,, \text{ speciálně } \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\lg x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0_+} x^u \overset{v}{\lg_a} x = 0\,, \text{ speciálně } \lim_{x \to 0_+} x \lg x = 0\,.$$

Poznámka. Exponenciální a logaritmická funkce (se základem e) lze definovat i axiomaticky:

1. Existuje jediná funkce f na $\mathbb{R}$ (označí se e^x), pro kterou je $f(x+y) = f(x)f(y)$ a $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-1}{x} = 1\,.$
2. Existuje jediná funkce f na $(0, +\infty)$ (označí se $\lg x$), pro kterou je $f(xy) = f(x) + f(y)$ a $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1\,.$