Derivace funkce

DEFINICE

Nechť c je bod definičního oboru funkce f. Jestliže existuje

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c},$$

označíme ji $f'(c)$ a nazveme ***derivací*** funkce f v bodě c.

Definiční obor funkce f' je $\{c \in \mathcal{D}(f); f'(c) \in \mathbb{R}\}$.

Vezmeme-li v definici $f'(c)$ limitu zprava (resp. zleva), dostaneme ***derivaci zprava*** $f'_+(c)$ (resp. ***derivaci zleva*** $f'_-(c)$).

TVRZENÍ

Má-li funkce v bodě vlastní derivaci, je v tomto bodě spojitá.

Podobně pro jednostrannou derivaci a spojitost. Jestliže má tedy funkce v nějakém bodě obě jednostranné derivace vlastní (mohou být různé), je v tomto bodě spojitá.

TVRZENÍ

Nechť funkce f, g mají v bodě c vlastní derivaci a c je hromadným bodem $\mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$. Pak platí:

1. $(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$
2. $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$
3. pro $g(c) \neq 0$ je
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g^2(c)}.$$

TVRZENÍ

Nechť funkce g má vlastní derivaci v bodě c a funkce f má vlastní derivaci v bodě $g(c)$, kde c je hromadným bodem $\mathcal{D}(f \circ g)$. Pak $f \circ g$ má derivaci v bodě c a platí

$$(f \circ g)'(c) = f'(g(c)) \cdot g'(c).$$

DŮSLEDEK

1. Derivace liché (sudé) funkce je sudá (resp. lichá) funkce.

2. Nechť je funkce f prostá na intervalu J a má na tomto intervalu derivaci. Pak její inverzní funkce g má na $f(J)$ derivaci. Pro $x \in f(J)$ je

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}.$$

TVRZENÍ

Nechť má funkce f v bodě $c \in (a, b)$ maximální nebo minimální hodnotu na (a, b). Jestliže $f'(c)$ existuje, musí být rovna 0.

TVRZENÍ

Nechť funkce f má derivaci na intervalu J. Pak f' zobrazuje intervaly z J na bod nebo intervaly.

DŮSLEDEK

Jestliže funkce f má derivaci na intervalu J, tak

1. f' nemá na J žádné skoky,
2. je-li f' monotónní, je spojitá.

TVRZENÍ

(Rolleova věta) Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném omezeném intervalu $[a, b]$ a má derivaci všude v otevřeném intervalu (a, b). Jestliže $f(a) = f(b)$, pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f'(c) = 0$.

TVRZENÍ

(Lagrangeova věta) Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném omezeném intervalu $[a, b]$ a má derivaci všude v otevřeném intervalu (a, b). pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

DŮSLEDEK

Jestliže má funkce na intervalu derivaci rovnu 0, je na tomto intervalu konstantní.

TVRZENÍ

(Cauchyova věta) Nechť funkce f, g jsou spojité na uzavřeném omezeném intervalu $[a, b]$ a mají derivaci všude v otevřeném intervalu (a, b). Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)) .$$

Speciálně, když g' nenabývá hodnoty 0 v (a, b), existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} .$$

TVRZENÍ

Nechť funkce f má derivaci na otevřeném intervalu (a, b) a je spojitá zprava v bodě a. Jestliže existuje $\lim_{x \to a_+} f'(x)$, pak se rovná $f'_+(a)$.