Newtonova metoda numerického řešení rovnic

Hledáme řešení rovnice $f(x) = 0$ na intervalu J pro nějakou funkci f, která má derivaci všude v J. Zvolíme nějaký bod $x_1 \in J$ a položíme

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} .$$

Existují podmínky, za kterých body x_n (při vhodné nebo dokonce libovolné volbě x_1) konvergují k řešení rovnice $f(x) = 0$ na intervalu J. Např., pokud f' a f'' na J existují a obě jsou nenulové nebo platí jedna z následujících dvou podmínek (d je délka intervalu I):

$$\left|\frac{d \cdot f''(x)}{2f'(x)}\right| < 1 , \quad \left|\frac{f''(x)f(x)}{f'^2(x)}\right| < 1 .$$

L'Hospitalovo pravidlo

TVRZENÍ

(l'Hospital) Nechť funkce f, g mají derivaci na otevřeném intervalu (a, b) a $\lim_{x\to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existuje.

Jestliže platí buď

$$\lim_{x\to a_+} f(x) = \lim_{x\to a_+} g(x) = 0$$

nebo

$$\lim_{x\to a_+} |f(x)| = \lim_{x\to a_+} |g(x)| = +\infty ,$$

pak

$$\lim_{x\to a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Ve druhé podmínce se nemusí předpokládat $\lim_{x\to a_+} |f(x)| = +\infty$, což má praktický význam jen v případě, že f je neomezená a její limita v a neexistuje.

Průběh funkce

TVRZENÍ

Nechť má funkce f na intervalu J derivaci.

1. Funkce f je na J neklesající právě když je $f' \geq 0$.
2. Je-li $f' > 0$, je f rostoucí na J.

Podobně pro nerostoucí a klesající funkce.

TVRZENÍ

Nechť má funkce f na intervalu J derivaci.

1. Funkce f je na J konvexní právě když je f' neklesající.
2. Funkce f je na J ryze konvexní právě když je f' rostoucí.

DŮSLEDEK

Nechť má funkce f na J druhou derivaci.

1. Funkce f je na J konvexní právě když je $f'' \geq 0$.
2. Je-li $f'' > 0$, je f na J ryze konvexní.

Podobně pro (ryze) konkávní funkce.

DEFINICE

Říkáme, že v bodě $c \in \mathcal{D}(f)$ má funkce f *lokální maximum* , resp. *lokální minimum* , jestliže existuje okolí U bodu c takové, že $f(c)$ je maximální (resp. minimální) hodnota f na $U \cap \mathcal{D}(f)$.

Funkce f má v c *lokální extrém* , jestliže má v c lokální maximum nebo lokální minimum.

Nahradíme-li v definici lokálních extrémů slovo *maximální* slovem *největší* (resp. slovo *minimální* slovem *nejmenší* , dostáváme definici tzv. ostrých lokálních extrémů.

TVRZENÍ

Funkce f definovaná na intervalu J může mít lokální extrém pouze v následujících bodech:

1. v krajním bodě J, patří-li do definičního oboru;
2. ve vnitřním bodě J, ve kterém f nemá derivaci;
3. ve vnitřním bodě J, kde má f derivaci rovnou 0.

Body popsané v předchozí větě se nazývají *kritické body* (pro lokální extrémy).

TVRZENÍ

Nechť je $c \in \mathcal{D}(f)$ a (a, b) je okolí c.

1. Jestliže f je neklesající v jedné ze dvou částí $(a, c], [c, b)$ a nerostoucí ve druhé části, má f v c lokální extrém.
2. Jestliže f je rostoucí v jedné části a klesající ve druhé části okolí bodu c, má f v c ostrý lokální extrém.

DŮSLEDEK

Nechť je c vnitřním bodem definičního oboru funkce f a nechť f má derivaci v nějakém okolí bodu c. Jestliže f' mění v bodě c znaménko, má f v tomto bodě lokální extrém.

TVRZENÍ

Nechť funkce f má ve vnitřním bodě c svého definičního oboru lokální extrém. Je-li f v okolí bodu c konvexní (resp. konkávní), má v c lokální minimum (resp. lokální maximum).

DŮSLEDEK

Nechť funkce f má ve vnitřním bodě c svého definičního oboru druhou derivaci $f''(c)$.

1. Je-li $f'(c) = 0$ a $f''(c) > 0$, má f v bodě c ostré lokální minimum.
2. Je-li $f'(c) = 0$ a $f''(c) < 0$, má f v bodě c ostré lokální maximum.

DEFINICE

Nechť je funkce f definována na intervalu J a spojitá v c, který je vnitřním bodem J. Říkáme, že c je ***inflexní*** bod f, jestliže existuje okolí $(a, b) \subset J$ bodu c takové, že funkce f je ryze konvexní na jedné ze dvou částí $(a, c], [c, b)$ a ryze konkávní na zbývající části.

Funkce f přechází ve svém inflexním bodě z jedné strany tečny v tomto bodě na druhou stranu.

TVRZENÍ

Nechť funkce f má druhou derivaci na nějakém okolí (a, b) bodu c. Pak c je inflexním bodem funkce f, jestliže f'' mění v bodě c znaménko.

DŮSLEDEK

Funkce f definovaná na intervalu J může mít inflexní bod pouze v následujících bodech:

1. ve vnitřním bodě J, ve kterém f nemá druhou derivaci;
2. ve vnitřním bodě J, kde má f druhou derivaci rovnou 0.

DEFINICE

Přímka $y = ax+b$ se nazývá ***asymptotou*** funkce f v nevlastním bodě c, jestliže $\lim\limits_{x\to c}(f(x) - (ax + b)) = 0$.

TVRZENÍ

Přímka $y = ax + b$ je asymptotou funkce f v nevlastním bodě c právě když existují limity

$$a = \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to c} (f(x) - ax)$$

(podle l'Hospitalova pravidla je první limita rovna $\lim_{x \to c} f'(x)$, pokud tato limita existuje, což znamená, že směrnice asymptoty je vlastně derivace v nevlastním bodě c, nebo-li směrnice tečny grafu f v bodě c).

DEFINICE

Průběh funkce f znamená určit přinejmenším následující její vlastnosti:

definiční obor;

spojitost;

lokální a absolutní extrémy;

asymptoty;

konvexita, konkávita, inflexní body;

nakreslit graf.