VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

MATEMATIKA II

(Učební text pro kombinovanou formu studia)

RNDr. JIŘÍ KLAŠKA, Dr.

ÚSTAV MATEMATIKY• FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

BRNO 2002

PŘEDMLUVA

Matematická analýza, která je v rámci předmětu Matematika II studována, patří k základům vzdělání téměř ve všech technických oborech. Učební text je určen především jako učební pomůcka pro posluchače a konzultanty kombinovaného studia FSI VUT Brno. Nenahrazuje skriptum a tím méně studium vhodné monografie. Obsahová stránka textu je pak určena současnými osnovami předmětu. Čtení předpokládá aktivní znalost diferenciálního a integrálního počtu funkcí jedné reálné proměnné a elementární znalosti z lineární algebry. Hlavním úkolem bylo vytvořit přehled nejdůležitějších pojmů, tvrzení a typových úloh z matematické analýzy v R^n. Snahou autora bylo vytvořit obsažný, ale přitom stručný text, který by byl pokud možno dobře čitelný.

Krátký rozsah textu může vzbudit klamné zdání, že jeho nastudování a pochopení bude rychlé a snadné. Těžiště zkoušky, kterou je předmět zakončen, spočívá především v prověření schopnosti studenta samostatně vyřešit jisté typové úlohy. Tento požadavek vyžaduje hlubší pochopení studované problematiky. Aktivní zvládnutí látky je potřebné rovněž v aplikacích, tzn. při řešení konkrétních problémů v navazujících technických oborech.

Do textu jsou zařazeny vzorové příklady včetně metodického postupu řešení. Dostatečné množství úloh k procvičení látky obsahuje volně navazující sbírka řešených příkladů " Cvičení z matematiky II ".

Je dobře možné, že i po pečlivé korektuře se v textu budou vyskytovat chyby a překlepy. Budu proto vděčen čtenářům za každou připomínku, která povede k vylepšení textu a odstranění nedostatků. Přeji všem čtenářům hodně úspěchů, trpělivosti i radosti při studiu.

Brno, září 2002 Autor

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

OBSAH

Předmluva 1
Obsah 3

DIFERENCIÁLNÍ POČET V $\mathbf{R}^n$

§1. Funkce více proměnných 5
§2. Limita a spojitost 7
§3. Parciální a směrové derivace, gradient 10
§4. Diferenciál a Taylorův polynom 12
§5. Lokální extrémy 15
§6. Vázané a globální extrémy 17
§7. Implicitní funkce 20

INTEGRÁLNÍ POČET V $\mathbf{R}^n$

§1. Integrál přes n-rozměrný interval 22
§2. Integrál přes elementární oblast 23
§3. Transformace integrálů 26
§4. Aplikace vícerozměrných integrálů 30

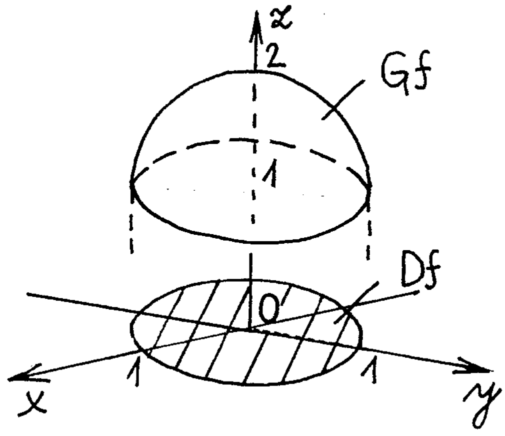
I. DIFERENCIÁLNÍ POČET V R^n

§1. FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

Definice 1. Reálná funkce n-reálných proměnných $f : R^n \to R$ je zobrazení, které každému $x \in R^n$ přiřadí nejvýše jedno $f(x) \in R$. Prvky $x = [x_1, \dots, x_n] \in R^n$ se nazývají body n-rozměrného prostoru R^n. Pro danou funkci f definujeme $Df = \{x \in R^n; \exists y \in R : f(x) = y\}$, $Hf = \{y \in R; \exists x \in Df : f(x) = y\}$. Množina Df se nazývá definiční obor funkce f a množina Hf obor hodnot funkce f. Místo $f([x_1, \dots, x_n])$ budeme pro jednoduchost psát pouze $f(x_1, \dots, x_n)$. Množina $Gf = \{[x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)] \in R^{n+1}; [x_1, \dots x_n] \in Df\}$ se nazývá graf funkce f.

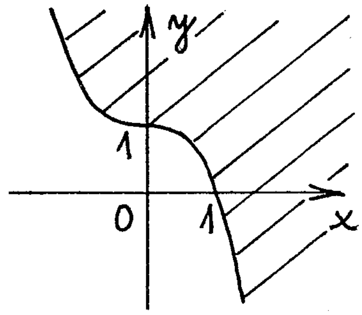
Poznámka 1. 1. Z předchozí definice grafu plyne, že funkční hodnotu chápeme jako $n + 1$ souřadnici, tj. $x_{n+1} = f(x_1, \dots x_n)$. 2. Místo x_1, x_2, x_3 budeme psát x, y, z. 3. Pro $n = 2$ si lze graf f představovat jako rovinu, nebo její část, zakřivenou v R^3, tj. jako plochu. 4. Pro $n > 2$ ztrácíme možnost názorné představy. V případě funkce tří proměnných je grafem funkce část čtyřrozměrného prostoru. Z analogie můžeme ale usuzovat, že grafem funkce tří proměnných je trojrozměrný prostor, který je zakřiven v R^4. Jediným grafem funkce tří poměnných, který dokážeme znázornit, je graf funkce $f(x, y, z) = 0$. Grafem f je celý trojrozměrný prostor R^3.

Příklad 1. Buď $f : R^2 \to R$ funkce dvou proměnných definovaná vztahem $f(x, y) = 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Vyšetřeme nejprve definiční obor. Zřejmě $[x, y] \in Df \Leftrightarrow 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1$. Tedy $Df = \{[x, y] \in R^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$. Geometricky je definiční obor kruh se středem v počátku a poloměrem 1. Jednoduchou úvahou lze zjistit, že $Hf = \langle 1, 2 \rangle$. Dále $Gf = \{[x, y, 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}] \in R^3; [x, y] \in Df\}$. Platí $z = 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Odtud $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$. Z analytické geometrie plyne, že graf funkce f je horní polovina kulové plochy o poloměru 1 se středem v bodě $[0, 0, 1]$. Graf je znázorněn v kartézské soustavě souřadnic (O, x, y, z) na obr. 1.



Obr. 1

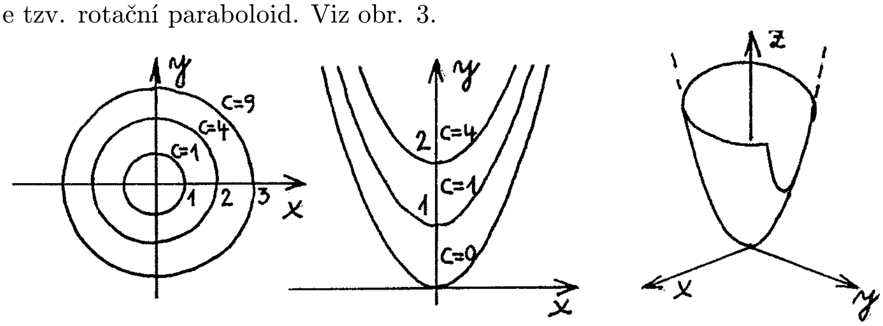
Příklad 2. Vyšetřete a nakreslete definiční obor funkce $f(x,y) = \sqrt{\ln(x^3+y)}$.
Řešení. Zřejmě platí, že $[x,y] \in Df \Leftrightarrow \ln(x^3+y) \geq 0 \Leftrightarrow x^3+y \geq 1$. Tedy $Df = \{[x,y], y \geq 1-x^3\}$. Nakreslíme obrázek. Viz obr. 2.



Obr. 2

Metoda řezů. Graf funkce dvou proměnných je podmnožina trojrozměrného prostoru R^3. Základní geometrickou představu o grafech funkcí $f : R^2 \to R$, lze získat v kartézské soustavě souřadnic (O,x,y,z) pomocí řezů grafu Gf systémem rovin $g_c(x,y)=c$, tj. $z=c$, kde $c \in R$. Řezy jsou tedy průniky grafů Gf a Gg_c. Podobně lze použít další systémy rovin, např. $x=c$ nebo $y=c$.

Příklad 3. Pomocí metody řezů vyšetřete a nakreslete graf funkce $f(x,y)=x^2+y^2$.
Řešení. Řezy rovinami $z=c$ jsou pro $c>0$ kružnice $x^2+y^2=c$ o poloměru $\sqrt{c}$. Pro $c=0$ je řez bod $[0,0]$. Pro $c<0$ jsou řezy prázdné množiny. Dále řezy rovinami $y=c$ jsou paraboly $z=x^2+c^2$ s vrcholem ve výšce c^2. Odtud a ze symetrie funkce f již plyne, že graf funkce f vznikne rotací paraboly $z=x^2$ kolem osy z. Grafem f je tzv. rotační paraboloid. Viz obr. 3.



Obr. 3

Definice 2. Buďte $x,y \in R^n$. Klademe $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$. Číslo $d(x,y)$ se nazývá vzdálenost bodů x,y. Buď $x_0 \in R^n, \delta > 0, \delta \in R$. Pak množina $K(x_0,\delta) = \{x \in R^n, d(x,x_0) < \delta\}$ se nazývá δ-okolí bodu x_0.

Poznámka 2. 1. δ-okolí bodu x_0 je otevřená koule v R^n. Má střed v x_0 a poloměr δ. 2. Pro $n=1$ dostáváme $K(x_0,\delta) = \{x \in R, |x-x_0| < \delta\} = (x_0-\delta, x_0+\delta)$. 3. Platí (i) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$, (ii) $d(x,y)=d(y,x)$, (iii) $d(x,y)+d(y,z) \leq d(x,z)$. Vztah (iii) se nazývá trojúhelníková nerovnost.

Definice 3. Buď $\Omega \subseteq R^n$. Pak $x_0 \in R^n$ se nazývá vnitřní bod množiny Ω, když existuje $K(x_0,\delta)$ tak, že $K(x_0,\delta) \subseteq \Omega$. Množina Ω, jejíž každý bod je vnitřní se nazývá otevřená. Bod $x_0 \in R^n$ se nazývá hraniční bod množiny Ω, když pro každé $\delta > 0$ platí $K(x_0,\delta) \cap \Omega \neq \emptyset \wedge K(x_0,\delta) \cap (R^n - \Omega) \neq \emptyset$. Označme $h(\Omega)$ množinu všech hraničních bodů množiny Ω. Množina $h(\Omega)$ se nazývá hranice množiny Ω. Množina Ω se nazývá uzavřená, když $h(\Omega) \subseteq \Omega$. Množina Ω se nazývá ohraničená, když existuje $\delta > 0$ tak, že $\Omega \subseteq K(o,\delta)$, kde $o = [0,\dots,0] \in R^n$.

§2. LIMITA A SPOJITOST

Definice 1. Buď $f : R^n \to R$ reálná funkce n reálných proměnných. Pak množina $(Df)' = \{x \in R^n; \forall \varepsilon > 0 : (K(x,\varepsilon) - \{x\}) \cap Df \neq \emptyset\}$ se nazývá derivace množiny Df. Řekneme, že f má v bodě $x_0 \in (Df)'$ limitu $a \in R$, když $\forall K(a,\varepsilon) \exists K(x_0,\delta)$ tak, že $\forall x \in (K(x_0,\delta) - \{x_0\}) \cap Df : f(x) \in K(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Poznámka 1. Buď $R_* = R \cup \{-\infty, \infty\}$. Pojem limity lze rozšířit na případ $x_0 \in R_*^n, a \in R_*$. Je-li $a \in \{-\infty, \infty\}$, nazývá se limita nevlastní. Pokud se v n-tici $x_0 \in R_*^n$ vyskytne aspoň jednou nevlastní bod ∞ nebo $-\infty$, mluvíme o limitě v nevlastním bodě. Definice limity nepožaduje, aby $x_0 \in Df$.

Věta 1. Funkce $f : R^n \to R$ má v bodě $x_0 \in (Df)'$ nejvýše jednu limitu $a \in R$.

Důkaz. Sporem. Buďte $a, b \in R, a \neq b$ dvě různé limity funkce f v bodě x_0. Položme $\varepsilon = \frac{1}{2} d(a,b)$. Pak $\varepsilon > 0$ a podle definice limity $\exists \delta_1, \delta_2 > 0$ tak, že $\forall x \in (K(x_0,\delta_1) - \{x_0\}) \cap Df$ platí, že $f(x) \in K(a,\varepsilon)$, což znamená, že $d(a, f(x)) < \varepsilon$ a $\forall x \in (K(x_0,\delta_2) - \{x_0\}) \cap Df$ platí, že $f(x) \in K(b,\varepsilon)$, tj. $d(b, f(x)) < \varepsilon$. Zvolme $x \in K(x_0, \min\{\delta_1,\delta_2\}) - \{x_0\}$. Pak $d(a,b) \leq d(a,f(x)) + d(b,f(x)) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$, což je spor, neboť $d(a,b) = 2\varepsilon$.

Definice 2. Buď $x_0 \in (Df)'$. Má-li f v x_0 limitu a, píšeme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.

Poznámka 2. Nejčastější úloha o limitách bývá formulována slovním obratem: Vyšetřete limitu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Co se má provést? Pokud $x_0 \notin (Df)'$, řekneme, že symbol $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ není definován. V opačném případě mohou nastat právě dvě navzájem se vylučující možnosti. 1. f nemá limitu. Též říkáme, že neexistuje limita f v x_0. 2. f má v x_0 limitu. Tato limita je pak podle věty 1 určena jednoznačně. Určení limity funkce více proměnných je obecně velmi obtížné. V některých jednodušších případech mohou při výpočtu pomoci následující věty.

Věta 2. Nechť existují limity $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$. Pak platí

$$(i) \lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b, \ (ii) \lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = ab, \ (iii) \text{ Pro } b \neq 0 : \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}.$$

Věta 3. Nechť $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ a existuje $K(x_0,\delta) - \{x_0\}$ tak, že funkce $g(x)$ je na $K(x_0,\delta) - \{x_0\}$ ohraničená. Pak pro limitu součinu platí $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$.

Věta 4. Nechť $\exists K(x_0,\delta)$ tak, že $\forall x \in K(x_0,\delta) - \{x_0\}$ platí, že $f(x) > 0$. Pak $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$. Nechť $\exists K(x_0,\delta)$ tak, že $\forall x \in K(x_0,\delta) - \{x_0\}$ platí, že $f(x) < 0$. Pak $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Věta 5. Buď $f : R^n \to R$ racionální lomená funkce, $x_0 \in Df$. Pak $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(x_0)$.

Příklad 1. Vyšetříme limitu $\lim\limits_{[x,y] \to [0,0]} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$. Označme $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$. Pak $Df = R^2 - \{[0,0]\}$ a $o = [0,0] \in (Df)'$. Symbol $\lim\limits_{x \to o} f(x)$ je tedy definován. Dokažme, že f nemá limitu v bodě $[0,0]$. Sporem. Připusťme, že funkce f má v bodě $[0,0]$ limitu a. Pak podle definice pro $K(a,\frac{1}{4})$ existuje $K(o,\delta)$ tak, že $\forall x\in K(o,\delta)-\{o\}$ platí $f(x)\in K(a,\frac{1}{4})$. Uvažme body $b_1=[\frac{\delta}{2},0]$, $b_2=[\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}]$. Zřejmě platí, že $b_1,b_2\in K(o,\delta)$ neboť $d(o,b_1)=\sqrt{(0-\frac{\delta}{2})^2+(0-0)^2}=\frac{\delta}{2}<\delta$ a $d(o,b_2)=\sqrt{(0-\frac{\delta}{2})^2+(0-\frac{\delta}{2})^2}=\frac{\delta}{\sqrt{2}}<\delta$. Tedy $f(b_1)\in K(a,\frac{1}{4})$, $f(b_2)\in K(a,\frac{1}{4})$. Ale $f(b_1)=0$ a $f(b_2)=\frac{1}{2}$. Odtud plyne, že $a\in(-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$, $a\in(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$, což je spor, neboť $(-\frac{1}{4},\frac{1}{4})\cap(\frac{1}{4},\frac{3}{4})=\emptyset$.

Definice 3. Buď $f: R^2\to R$ funkce dvou proměnných, $x_0=[a,b]$. Pak limity $L_1=\lim\limits_{x\to a}(\lim\limits_{y\to b}f(x,y))$ a $L_2=\lim\limits_{y\to b}(\lim\limits_{x\to a}f(x,y))$ se nazývají postupné limity.

Následující věta popisuje vztah postupných limit k limitě $L=\lim\limits_{[x,y]\to[a,b]}f(x,y)$.

Věta 6. (1) Nechť existují limity L_1, L_2 a $L_1=L_2$. Pak L nemusí existovat.
(2) Nechť existuje L. Pak L_1,L_2 nemusí existovat.
(3) Existují-li L,L_1,L_2, pak nutně $L=L_1=L_2$.
(4) Nechť existují L_1,L_2 a $L_1\neq L_2$. Pak L neexistuje.

Příklad 2. Pro ilustraci uveďme příklad situace (2) z předchozího tvrzení. Buď $f: R^2\to R$ taková, že $Df=\{[x,y]\in R^2; x\le y\le 2x\}$, $Hf=\{1\}$, tj. $f(x,y)=1$ na Df. Zřejmě $[0,0]\in(Df)'$ a $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]}f(x,y)=1$, viz věta 5. Dvojnásobné limity L_1,L_2 ale neexistují. Podle definice limity funkce jedné proměnné si snadno rozmyslíte proč. Poznamenejme, že $f: R\to R$ má v $x_0\in R$ limitu $a\in R$ právě tehdy, když $\forall K(a,\varepsilon)\exists K(x_0,\delta)-\{x_0\}$ tak, že $K(x_0,\delta)-\{x_0\}\subseteq Df$ a $\forall x\in K(x_0,\delta)-\{x_0\}$: $f(x)\in K(a,\varepsilon)$.

Poznámka 3. Jak již bylo řečeno, vyšetřování limit funkcí více proměnných je obecně velmi obtížné. Uveďme nyní několik možností, jak při vyšetřování limit postupovat. Pro jednoduchost se omezíme na funkce dvou proměnných. Pro více proměnných se postupuje analogicky. Idea je založena na aplikaci věty 1.

1. Metoda svazku přímek. Místo limity L vyšetřujeme limitu L^*, kde

$$L^*=\lim_{x\to x_0}f(x,k(x-x_0)+y_0).$$

Závisí-li limita L^* na směrnici k, pak L neexistuje. Nezávisí-li na k, nelze o existenci limity L nic usoudit.

2. Metoda svazku parabol. Místo limity L vyšetřujeme limitu L^{**}, kde

$$L^{**}=\lim_{x\to x_0}f(x,k(x-x_0)^2+y_0).$$

Závisí-li limita L^{**} na směrnici k, pak L neexistuje. Nezávisí-li na k, nelze o existenci limity L nic usoudit.

3. Metoda polárních souřadnic. Provedeme transformaci funkce f do polárních souřadnic. Dosadíme za $x = x_0 + \rho \cos \varphi$ a za $y = y_0 + \rho \sin \varphi$. Místo limity L pak vyšetřujeme limitu L^{***}, kde

$$L^{***} = \lim_{\rho \to 0^+} f(x_0 + \rho \cos \varphi, y_0 + \rho \sin \varphi).$$

Závisí-li limita L^{***} na úhlu φ, pak L neexistuje. Nezávisí-li na φ, nelze o existenci limity L nic usoudit. Speciálně, je-li po transformaci $L^{***} = \lim\limits_{\rho \to 0^+} g(\rho) h(\varphi)$, kde $\lim\limits_{\rho \to 0^+} g(\rho) = 0$ a $h(\varphi)$ je ohraničená na $\langle 0, 2\pi)$, pak $L = 0$.

Příklad 3. Vyšetřete limitu $\lim\limits_{[x,y] \to [0,0]} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$. Řešení. Obě postupné limity L_1, L_2 existují a jsou rovny nule. O existenci limity nelze na tomto základě nic usoudit. Použijeme metodu svazku přímek. Platí

$$L^* = \lim_{x \to 0, y = kx} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot k^2 x^2}{x^4 + k^4 x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{k^2}{1 + k^4} = \frac{k^2}{1 + k^4}.$$

Protože limita L^* závisí na k, zadaná limita L neexistuje.

Příklad 4. Vyšetřete limitu $\lim\limits_{[x,y] \to [0,0]} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$. Řešení. Obě postupné limity L_1, L_2 existují a jsou rovny nule. Podobně neúspěšně dopadne vyšetření metodou svazku přímek i metodou svazku parabol. Platí $L^* = L^{**} = 0$. O existenci limity nelze na tomto základě nic usoudit. Použijeme metodu transformace do polárních souřadnic. Platí

$$L^{***} = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\rho^3 \cos^3 \varphi + \rho^3 \sin^3 \varphi}{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi} = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\rho^3 (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)}{\rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \lim_{\rho \to 0^+} \rho (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi) = 0.$$

Protože je funkce $h(\varphi) = \cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi$ ohraničená a funkce $g(\rho) = \rho$ má limitu 0, zadaná limita L existuje a je rovna 0.

Definice 4. Buď $f : R^n \to R, x_0 \in Df$. Řekneme, že f je spojitá v x_0, když $\forall K(f(x_0), \varepsilon) \exists K(x_0, \delta)$ tak, že $\forall x \in K(x_0, \delta) \cap Df : f(x) \in K(f(x_0), \varepsilon)$. Řekneme, že f je spojitá na množině $\Omega \subseteq Df$, je-li spojitá v každém bodě $x \in \Omega$.

Věta 7. Buď $x_0 \in Df \cap (Df)'$. Pak f je spojitá v $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Věta 8. Buď $x_0 \in Df \wedge x_0 \notin (Df)'$. Pak f je spojitá v x_0.

Důkaz. Protože $x_0 \notin (Df)'$ existuje $K(x_0, \delta)$ tak, že $(K(x_0, \delta) - \{x_0\}) \cap Df = \emptyset$. Zřejmě $\forall K(f(x_0), \varepsilon)$ platí $\forall x \in K(x_0, \delta) \cap Df = \{x_0\}$ platí $f(x) \in K(f(x_0), \varepsilon)$, tj. $f(x_0) \in K(f(x_0), \varepsilon)$.

Věta 9. Buďte $f : R^n \to R, g : R^n \to R$ spojité v $x_0 \in Df$. Pak $f \pm g, f \cdot g$ jsou spojité v x_0. Je-li $g(x_0) \neq 0$, pak rovněž $\dfrac{f}{g}$ je spojitá v x_0.

§3 PARCIÁLNÍ A SMĚROVÉ DERIVACE, GRADIENT

Definice 1. Buď $f : R^n \to R$ reálná funkce n reálných proměnných, $a = [a_1, \dots, a_n]$, $1 \le i \le n$. Položme $f_i : R \to R$, kde $f_i(x_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ $Df_i = \{x_i \in R; [a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n] \in Df\}$. Funkce f_i se nazývá i-tá parciální funkce. Číslo $f'_{x_i}(a) := f'_i(a)$ se nazývá parciální derivace funkce f v bodě a podle proměnné x_i. Buď Df'_{x_i} množina všech $a \in R^n$, pro něž $f'_{x_i}(a)$ existuje. Funkce $f'_{x_i} : R^n \to R$ přiřazující každému $x \in Df'_{x_i}$ číslo $f'_{x_i}(x)$ se nazývá parciální derivace funkce f podle x_i. Místo f'_{x_i} lze ekvivalentně psát $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Poznámka 1. Již samotná definice poskytuje návod, jak parciální derivace počítat. Parciální derivaci funkce podle pevně zvolené proměnné vypočítáme tak, že funkci derivujeme jen podle této proměnné, přičemž ostatní proměnné považujeme za konstanty. Princip výpočtu uvedeme na následujícím příkladu.

Příklad 1. Spočtěte parciální derivace f'_x a f'_y funkce $f(x, y) = x^2y + \ln(\frac{x}{y})$.
Řešení. Využijeme známých vzorců pro derivování funkce jedné proměnné a dále použijeme návodu v předchozí poznámce.

$$f'_x(x, y) = 2xy + \frac{1}{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = 2xy + \frac{1}{x} \text{ a } f'_y(x, y) = x^2 + \frac{1}{\frac{x}{y}} \cdot \frac{-x}{y^2} = x^2 - \frac{1}{y}.$$

Definice 2. Buď $f : R^n \to R$, $a \in Df$. Nechť $\forall i = 1, \dots, n$ existuje $f'_{x_i}(a)$. Vektor grad $f(a) = (f'_{x_1}(a), \dots, f'_{x_n}(a))$ se nazývá gradient funkce f v bodě a. Vektor grad $f = (f'_{x_1}, \dots, f'_{x_n})$ nazýváme gradient funkce f.

Poznámka 2. Symbolem V_n označme euklidovský vektorový prostor dimenze n nad R. Prvky $v = (v_1, \dots, v_n) \in V_n$ nazýváme vektory. Jsou to $n-$tice reálných čísel zapsaných v kulaté závorce. Z vektorové algebry připomeňme, že rozdíl $x - y$ bodů $x, y \in R^n$ interpretujeme jako vektor a součet $x+v$ bodu $x \in R^n$ a vektoru $v \in V_n$ jako bod. Platí $[x_1, \dots, x_n] + (v_1, \dots, v_n) = [x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n]$. Vektory $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1) \in V_n$ se nazývají orty. Orty jsou ortogonální, tzn. kolmé vektory, jejichž velikost je rovna 1.

Podobně jako u funkcí jedné reálné proměnné zavádíme pojem derivace vyšších řádů. Definici zavedeme pomocí principu matematické indukce.

Definice 3. Buď $m \ge 1$ libovolné, $x_{i_1}, \dots, x_{i_m} \in \{x_1, \dots, x_n\}$. Pak funkce

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_m}} \left(\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{m-1}}} \right)$$

se nazývá m-tá parciální derivace podle proměnných $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$ v tomto pořadí. Nultou parciální derivaci chápeme jako f. Výraz $\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}}$ je zvykem zapisovat rovněž ve tvaru $f^{(m)}_{x_{i_1}, \dots, x_{i_m}}$.

Poznámka 3. Druhou derivací funkce n-proměnných $f(x)$ chápeme matici

$$f'' = \begin{bmatrix} f''_{x_1x_1}, & \dots & , f''_{x_1x_n} \\ & \dots & \\ f''_{x_nx_1}, & \dots & , f''_{x_nx_n} \end{bmatrix}.$$

Gradient funkce f se v tomto kontextu někdy chápe jako první derivace funkce f. Píšeme tedy $f' = \text{grad } f$.

Příklad 2. Spočtěte parciální derivace druhého řádu $f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}$ a f''_{yx} funkce $f(x,y) = x^2y + \ln(\frac{x}{y})$. Řešení. Využijeme výsledků z příkladu 1. Platí $f'_x(x,y) = 2xy + \frac{1}{x}$ a $f'_y(x,y) = x^2 - \frac{1}{y}$. Druhé parciální derivace funkce f spočteme tak, že první parciální derivaci znovu parciálně zderivujeme podle zvolené proměnné. Platí

$$f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(f'_x) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy + \frac{1}{x}) = 2y - \frac{1}{x^2}, f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(f'_y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - \frac{1}{y}) = \frac{1}{y^2},$$

$$f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(f'_x) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy + \frac{1}{x}) = 2x, f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(f'_y) = 2x.$$

Odtud plyne, že matice druhé derivace je tvaru

$$f'' = \begin{bmatrix} 2y - \frac{1}{x^2}, & 2x \\ 2x, & \frac{1}{y^2} \end{bmatrix}.$$

Při výpočtu druhých parciálních derivací jsme narazili na důležitou skutečnost. Zjistili jsme, že $f''_{xy} = f''_{yx}$. Následující věta zaručuje, že nalezenou vlastnost mají všechny funkce, jejichž parciální derivace jsou spojité. Věta 1 se často nazývá Schwarzova věta, nebo též věta o zaměnitelnosti parciálních derivací. Matice f'' je v případě zaměnitelnosti symetrická podle hlavní diagonály.

Věta 1. Nechť všechny parciální derivace m-tého řádu funkce $f : R^n \to R$ jsou spojité v bodě $a \in Df$. Pak jsou všechny parciální derivace až do řádu m včetně záměnné v bodě a, tj. v libovolné parciální derivaci m-tého řádu v bodě a nezávisí na pořadí derivování.

Poznámka 4. Derivace do řádu m–1 včetně jsou záměnné dokonce v nějakém okolí bodu a. Obecně existuje n^m parciálních derivací m-tého řádu funkce n proměnných. Splnění předpokladů Schwarzovy věty redukuje tento počet na $\binom{n+m-1}{m}$.

Definice 4. Buď $f : R^n \to R$, $a \in Df$, $u \in V_n$, $g : R \to R$. Pro každé $t \in R$ položme $g(t) := f(a + tu)$. Pak

$$f'_u(a) := g'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t}$$

se nazývá derivace funkce f v bodě a ve směru vektoru u.

Příklad 3. Spočtěte derivaci funkce $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ v bodě $a = [1,1]$ ve směru vektoru $u = (2,1)$. Řešení. Využijeme definičního vztahu. Platí

$$g(t) = f(a+tu) = f([1,1] + t(2,1)) = f(1+2t, 1+t) = \frac{(1+2t)^2-(1+t)^2}{(1+2t)^2+(1+t)^2} = \frac{3t^2+2t}{5t^2+6t+2}.$$

$$g'(t) = \frac{(6t+2)(5t^2+6t+2)-(3t^2+2t)(10t+6)}{(5t^2+6t+2)^2}, \qquad f'_u(a) = g'(0) = \frac{2\cdot 2 - 0\cdot 6}{2^2} = 1.$$

Věta 2. Buď $f : R^n \to R$, $a \in Df$, $u, v \in V_n$. Pak 1. $f'_{e_i}(a) = f'_{x_i}(a)$. 2. Nechť existuje $f'_u(a)$. Pak pro libovolné $c \in R$ existuje $f'_{cu}(a)$ a platí $f'_{cu}(a) = cf'_u(a)$. 3. Nechť $f'_u(x)$ je spojitá v $K(x,\delta)$ a existuje $f'_v(x)$. Pak existuje $f'_{u+v}(x)$ a platí $f'_{u+v}(x) = f'_u(x) + f'_v(x)$. 4. $f'_u(a) = \text{grad } f(a) \circ u = (f'_{x_1}(a), \ldots, f'_{x_n}(a)) \circ (u_1, \ldots, u_n)$.

Poznámka 5. Platí $f'_u(a) = |\text{grad } f(a)| \cdot |u| \cdot \cos\varphi$, $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$, kde φ je úhel vektorů grad $f(a), u$. Tedy $f'_u(a)$ je maximální, když $\varphi = 0$. Odtud plyne, že grad $f(a)$ určuje směr jímž f v a nejrychleji roste.

Příklad 4. Spočtěte derivaci funkce $f(x,y) = x^2y + \ln(\frac{x}{y})$ v bodě $a = [2,3]$ ve směru $u = (1,-2)$. Řešení. Pro gradient funkce f platí grad $f = (2xy + \frac{1}{x}, x^2 - \frac{1}{y})$ a grad $f(a) = (\frac{25}{2}, \frac{11}{3})$. Tedy $f'_u(a) = \text{grad } f(a) \circ u = (\frac{25}{2}, \frac{11}{3}) \circ (1,-2) = \frac{31}{6}$.

§4 TOTÁLNÍ DIFERENCIÁL, TAYLOROVA VĚTA

Definice 1. Buď $f : R^n \to R$, $a \in Df$. Řekneme, že f je diferencovatelná v bodě a, když $\forall h \in V_n$ takový, že $a+h \in Df$ platí $f(a+h)-f(a) = \text{grad} f(a) \circ h + |h| \cdot \tau(h)$, kde $\lim_{h \to o} \tau(h) = 0$. Funkce $\tau(h)$ se nazývá nulová funkce. Číslo

$$df_h(a) = \text{grad} f(a) \circ h = (f'_{x_1}(a), \ldots, f'_{x_n}(a)) \circ (h_1, \ldots, h_n) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(a) h_i$$

se nazývá totální diferenciál funkce f v bodě a při přírůstku h a zobrazení $df(a) : V_n \to R$ se nazývá diferenciál funkce f v bodě a.

Poznámka 1. 1. Každá funkce $f : R^n \to R$ má v $a \in Df$ nejvýše jeden totální diferenciál $df(a)$. 2. $df(a)$ je lineární funkce. Pro libovolné $h_1, h_2 \in V_n$ a $c \in R$ platí $df(a)(h_1 + h_2) = df(a)(h_1) + df(a)(h_2)$ a $df(a)(c \cdot h) = c \cdot df(a)(h)$. 3. V literatuře se používjí často různá označení. Následující zápisy znamenají totéž $d_h f(a) = df(a)(h) = df(a, h)$.

Příklad 1. Buďte $f_i : R^n \to R, f_i(x) = f_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ funkce pro $i = 1, \ldots, n$. Spočtěme $df_i(x)$. Předně platí, že $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$.

Odtud plyne $df_i(x)(h) = \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) h_i = h_i$. Protože $df_i(x) = dx_i$, platí $dx_i = h_i$. Pak lze psát $h = (h_1, \ldots, h_n) = (dx_1, \ldots, dx_n) = dx$ a diferenciál funkce f v obecném bodě $x = [x_1, \ldots, x_n]$ při přírůstku h lze zapsat ve tvaru $d_h f(x) = df(a)(h) = (\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} h_n) f(x) = (\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n) f(x)$.

Věta 1. Buď $f : R^n \to R, a \in Df$. (i) Nechť f je diferencovatelná v bodě a. Pak f je v tomto bodě spojitá. (ii) Nechť existují f'_{x_i} pro $i = 1, \ldots, n$ v nějakém okolí $K(a, \delta)$ a f'_{x_i} jsou spojité v a. Pak f je diferencovatelná v a.

Definice 2. Buď $g : R^n \to R$ definovaná vztahem $g(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + b$, kde $a_1, \ldots, a_n, b \in R$. Pak Gg se nazývá nadrovina v R^{n+1}. Speciálně pro $n=2$ je Gg rovina. Buď $f : R^n \to R$ a $a \in Df$ bod takový, že existuje okolí $K(a, \delta) \subseteq Df$. Řekneme, že nadrovina Gg je tečná nadrovina ke grafu Gf v bodě $[a, f(a)]$, když

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-g(x)}{|x-a|} = 0.$$

Věta 2. Graf funkce f má v bodě $[a, f(a)]$ tečnou nadrovinu právě tehdy, když f je diferencovatelná v bodě a. Pak rovnice tečné nadroviny v R^{n+1} má tvar $x_{n+1} = f(a) + f'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + \cdots + f'_{x_n}(a)(x_n - a_n)$, kde $a = [a_1, \ldots, a_n]$. Rovnici lze zapsat ve tvaru $f'_{x_1}(a) x_1 + \cdots + f'_{x_n}(a) x_n - x_{n+1} + c = 0$, kde $c \in R$.

Definice 3. Vektor n definovaný vztahem $n = (f'_{x_1}(a), \ldots, f'_{x_n}(a), -1) \in V_{n+1}$ se nazývá normálový vektor tečné nadroviny funkce f v bodě $[a, f(a)]$. Přímka v R^{n+1} definovaná vektorovou rovnicí

$$[x_1, \ldots x_n, x_{n+1}] = [a_1, \ldots a_n, f(a_1, \ldots a_n)] + t(f'_{x_1}(a), \ldots, f'_{x_n}(a), -1), t \in R,$$

se nazývá normála grafu Gf v bodě $[a, f(a)]$.

Poznámka 2. Diferenciálu $d_h f(a)$ lze využít k přibližnému vyjádření přírůstku funkce. Platí $d_h f(a) \approx f(a+h) - f(a)$. Diferenciál vyjadřuje přírůstek na tečné nadrovině. Výraz $f(x,y)dx + g(x,y)dy$ je totální diferenciál nějaké funkce $\Leftrightarrow f'_y = g'_x$.

Příklad 2. Spočtěte diferenciál funkce $f(x, y) = \text{arctg}(x + \ln y)$ v bodě $a = [0, 1]$ při přírůstku $h = (-0.2, 0.1)$. Řešení. Spočteme nejprve parciální derivace funkce f. Platí $f'_x = \frac{1}{1+(x+\ln y)^2}$, $f'_x(a) = 1$, $f'_y = \frac{1}{y(1+(x+\ln y)^2)}$, $f'_y(a) = 1$. Odtud a z obecného tvaru diferenciálu plyne $d_h f(a) = f'_x(a) h_1 + f'_y(a) h_2 = 1 \cdot (-0.2) + 1 \cdot 0.1 = -0.1$.

Příklad 3. Určete rovnici tečné roviny a normály k paraboloidu $f(x, y) = x^2 + y^2$ v bodě $[-2, 1, ?]$. Řešení. Dopočítáme chybějící souřadnici. Platí $? = f(-2, 1) = 5$.

Dále spočteme parciální derivace $f'_x = 2x$, $f'_x(-2,1) = -4$, $f'_y = 2y$, $f'_y(-2,1) = 2$. Dosadíme do rovnice tečné roviny. Dostáváme $z - 5 = -4(x+2) + 2(y-1)$. Odtud $4x - 2y + z + 5 = 0$. Normálový vektor je $n = (4, -2, 1)$. Rovnice normály má tvar $[x, y, z] = [-2, 1, 5] + t(4, -2, 1)$, kde $t \in R$.

Definice 4. Buď $f : R^n \to R$, $a \in R$, $k \geq 2$. Řekneme, že funkce f je k-krát diferencovatelná v a, když existuje okolí $K(a, \delta)$ v němž jsou diferencovatelné všechny parciální derivace řádu $0 \leq m \leq k-2$ a v bodě a jsou diferencovatelné všechny parciální derivace řádu $k-1$. Diferenciál k-tého řádu funkce f je pak zobrazení $d^k f(x) : V_n^k \to R$ definované vztahem

$$d^k f(x)(u_1, \dots, u_n) = (\tfrac{\partial}{\partial x_1} u_{11} + \dots + \tfrac{\partial}{\partial x_n} u_{1n}) \dots (\tfrac{\partial}{\partial x_1} u_{k1} + \dots + \tfrac{\partial}{\partial x_n} u_{kn}) f(x),$$

kde $u_i = (u_{i1}, \dots, u_{in}) \in V_n$. Speciálně pro $u_1 = \ldots = u_k = h = (h_1, \dots, h_n) \in V_n$ píšeme $d_h^k f(x) = d^k f(x)(h, \dots h) = (\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_1} h_n)^k f(x)$.

Poznámka 3. K exaktnímu vyjádření $d_h^k f(x)$ lze použít tzv. multinomickou větu. Buďte $n \geq 2, k \in N, a_1, \dots, a_n \in R$. Pak platí

$$(a_1 + \dots + a_n)^k = \sum_{k_1 + \dots + k_n = k} \binom{k}{k_1, \dots, k_n} a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n}, \quad \text{kde } \binom{k}{k_1, \dots, k_n} = \frac{k!}{k_1! \dots k_n!}.$$

Součet probíhá přes všechny rozklady (kompozice) čísla k na právě n sčítanců, v nichž závisí na pořadí sčítanců. Pro $n = 2$ dostáváme známou binomickou větu

$$(a_1 + a_2)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a_1^i a_2^{k-i}.$$

Poznámka 4. Někdy diferenciálem k-tého řádu funkce f v bodě x nazýváme pouze zobrazení $D^k f(x) : V_n \to R$, $D^k f(x)(h) = d^k f(x)(h, \dots, h) = d_h^k f(x)$.

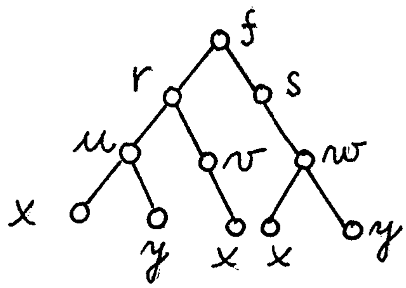
Věta 3. Buď $f : R^n \to R, a \in Df$. Nechť f má v nějakém $K(a, \delta)$ parciální derivace řádu k, které jsou spojité v a. Pak existuje $d^k f(a)$.

Věta 4. Nechť funkce $u(x, y), v(x, y)$ mají parciální derivace prvního řádu v bodě $[x_0, y_0]$. Nechť $u_0 = u(x_0, y_0), v_0 = v(x_0, y_0)$. Je-li funkce $f(u, v)$ diferencovatelná v bodě $[u_0, v_0]$, pak složená funkce $F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ má parciální derivace prvního řádu v $[x_0, y_0]$ a platí $F'_x(x_0, y_0) = f'_u(u_0, v_0) u'_x(x_0, y_0) + f'_v(u_0, v_0) v'_x(x_0, y_0)$, $F'_y(x_0, y_0) = f'_u(u_0, v_0) u'_y(x_0, y_0) + f'_v(u_0, v_0) v'_y(x_0, y_0)$.

Příklad 4. Buď $f = f(u(x, y), v(x, y))$. Spočtěme f''_{xy}. Nejprve určíme f'_x. Platí $f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x$. Nyní $f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(f'_x) = \frac{\partial}{\partial y}(f'_u u'_x + f'_v v'_x) = \frac{\partial}{\partial y}(f'_u) u'_x + f'_v u''_{xy} + \frac{\partial}{\partial y}(f'_v) v'_x + f'_v v''_{xy} = (f''_{uu} u'_y + f''_{uv} v'_y) u'_x + f'_u u''_{xy} + (f''_{vu} u'_y + f''_{vv} v'_y) v'_x + f'_v v''_{xy} = f''_{uu} u'_x u'_y + f''_{uv} u'_x v'_y + f''_{vu} u'_y v'_x + f''_{vv} v'_x v'_y + f'_u u''_{xy} + f'_v v''_{xy}$.

Poznámka 5. K nalezení parciální derivace složené funkce ve zcela obecné situaci poskytneme aspoň návod. Předpokládejme, že f je několikanásobně složená a má n proměnných. Postupujeme tak, že nejprve analyzujeme strukturu složení funkce f. To provedeme tak, že nakreslíme schema složení, tzv. strom. Strom se skládá z uzlů a hran. Uzly reprezentují proměnné a funkce, hrany závislosti mezi nimi. Uzly znázorníme v obrázku body nebo kolečky, hrany úsečkami, které uzly spojují. Kolik vede různých cest od uzlu f k x_i, tolik bude mít derivace f'_{x_i} sčítanců. Každý sčítanec je součinem tolika činitelů, kolik hran je na cestě z f do x_i.

Příklad 5. Analyzujte strukturu složení funkce $f(x, y) = \sqrt[3]{x^y + \ln^2 x} \cdot \operatorname{arctg}(1 + \frac{x}{y})$, nakreslete odpovídající strom a spočtěte f'_x, f'_y. Řešení. Označme $f(r, s) = r \cdot s$, $r(u, v) = \sqrt[3]{u + v^2}, s(w) = \operatorname{arctg} w, u(x, y) = x^y, v(x) = \ln x, w(x, y) = 1 + \frac{x}{y}$. Nakreslíme schema složení.



Obr. 4

Graf na obrázku se nazývá strom. Z jeho struktury získáme vzorce pro hledané parciální derivace. Platí

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad f'_y = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Odtud plyne

$$f'_x = \frac{1}{3}\frac{yx^{y-1}+\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{(x^y+\ln x)^2}} \cdot \operatorname{arctg}(1+\tfrac{x}{y}) + \sqrt[3]{x^y+\ln^2 x} \cdot \frac{1}{1+(1+\frac{x}{y})^2} \cdot \frac{1}{y},$$

$$f'_y = \frac{1}{3}\frac{x^y \ln x}{\sqrt[3]{(x^y+\ln x)^2}} \cdot \operatorname{arctg}(1+\tfrac{x}{y}) + \sqrt[3]{x^y+\ln^2 x} \cdot \frac{1}{1+(1+\frac{x}{y})^2} \cdot \frac{-x}{y^2}.$$

Definice 5. Buďte $a \in R^n, h \in V_n, h \neq 0$. Množina $\{x \in R^n, x = a + th, t \in \langle 0, 1\rangle\}$ se nazývá úsečka v R^n o krajních bodech $a, a+h$.

Věta 5. Taylor. Buď $f : R^n \to R, \Omega \subseteq Df$ otevřená množina. Nechť $m \in N$ a pro libovolné $x \in \Omega$ existuje $d_h^{m+1} f(x)$. Buď $a \in \Omega, h = (h_1, \ldots, h_n) \in V_n$ a nechť úsečka $a, a+h$ leží v Ω. Pak existuje $t \in R$, $0 < t < 1$ tak, že platí

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{1!}d_h f(a) + \frac{1}{2!}d_h^2 f(a) + \cdots + \frac{1}{m!}d_h^m f(a) + \frac{1}{(m+1)!}d_h^{m+1} f(a+th).$$

Poznámka 6. Polynom $T_m(x) = f(a) + \frac{1}{1!}d_h f(a) + \frac{1}{2!}d_h^2 f(a) + \cdots + \frac{1}{m!}d_h^m f(a)$ se nazývá Taylorův polynom m-tého řádu funkce f v bodě a a funkce $R_m(x) = \frac{1}{(m+1)!}d_h^{m+1} f(a+th)$ Taylorův zbytek. Formule uvedená v Taylorově větě se nazývá Taylorův vzorec nebo též Taylorova formule. Pro $a = [0, \ldots, 0]$ mluvíme o Maclaurinově vzorci. Věta platí i za slabšího předpokladu, když $d_h^{m+1} f(x)$ existuje v každém bodě x úsečky $a, a+h$. Zbytek $R_m(x)$ vyjadřuje chybu, které se dopustíme, nahradíme-li funkci f na Ω polynomem $T_m(x)$. Chybu $R_m(x)$ nedokážeme přesně spočítat, ale v řadě případů ji dokážeme uspokojivě odhadnout. Při konstrukci polynomu $T_m(x)$ používáme vztah $dx = h = x - a$.

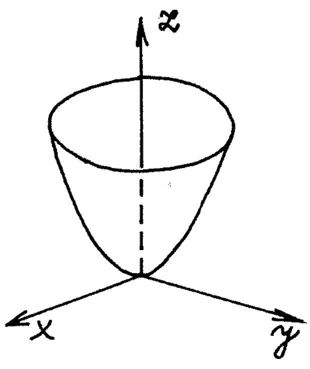
Příklad 6. Spočtěte Taylorův polynom $T_2(x, y)$ funkce $f(x, y) = \operatorname{arctg}(x + \ln y)$ v bodě $a = [0, 1]$. Řešení. Parciální derivace prvního řádu známe z příkladu 2. Dále víme, že $dx = x$ a $dy = y - 1$. Tedy první diferenciál funkce f v a má tvar $d_h f(a) = f'_x(a)dx + f'_y(a)dy = dx + dy = x + y - 1$. Pro parciální derivace druhého řádu platí $f''_{xx} = \frac{-2(x+\ln y)}{(1+(x+\ln y)^2)^2}, f''_{xy} = \frac{-2(x+\ln y)}{y(1+(x+\ln y)^2)^2}, f''_{yy} = \frac{-(1+x+\ln y)^2}{y^2(1+(x+\ln y)^2)^2}$, $f''_{xx}(a) = 0, f''_{xy}(a) = 0, f''_{yy}(a) = -1$. Druhý diferenciál funkce f v bodě a je tvaru $d_h f(a) = f''_{xx}(a)dx^2 + 2f'_{xy}(a)dxdy + f''_{yy}(a)dy^2 = -dy^2 = -(y-1)^2$. Diferenciály dosadíme do Taylorovy formule $T_2(x, y) = f(a) + \frac{1}{1!}d_h f(a) + \frac{1}{2!}d_h^2 f(a)$ a provedeme úpravu. Platí $T_2(x, y) = -\frac{3}{2} + x + 2y - \frac{1}{2}y^2$.

§5. LOKÁLNÍ EXTRÉMY

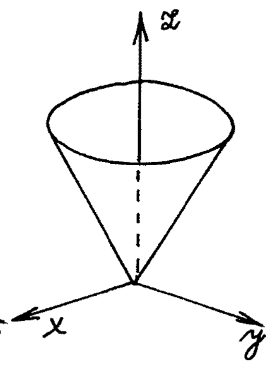
Definice 1. Řekneme, že $f : R^n \to R$ má v bodě $a \in Df$ lokální maximum, když $\exists K(a, \delta) \subseteq Df$ tak, že $\forall x \in K(a, \delta)$ platí $f(x) \le f(a)$. Řekneme, že $f : R^n \to R$ má v bodě $a \in Df$ lokální minimum, když $\exists K(a, \delta) \subseteq Df$ tak, že $\forall x \in K(a, \delta)$ platí $f(a) \le f(x)$. Lokální minima a maxima funkce f se nazývají lokální extrémy. Jsou-li nerovnosti na $K(a, \delta) - \{a\}$ splněny ostře, tzn. $<$, nazývají se extrémy ostré. Bod $a \in Df$ se nazývá stacionární, když pro každé $i = 1, \dots, n$ platí $f'_{x_i}(a) = 0$.

Věta 1. (1) Nechť funkce $f : R^n \to R$ má v bodě $a \in Df$ lokální extrém a pro každé $i = 1, \dots, n$ existuje $f'_{x_i}(a)$. Pak pro každé $i = 1, \dots, n$ platí $f'_{x_i}(a) = 0$, což znamená, že grad $f(a)$ je nulový vektor. (2) Funkce f může mít lokální extrémy pouze ve stacionárních bodech, nebo v bodech, v nichž neexistuje aspoň jedna parciální derivace prvního řádu.

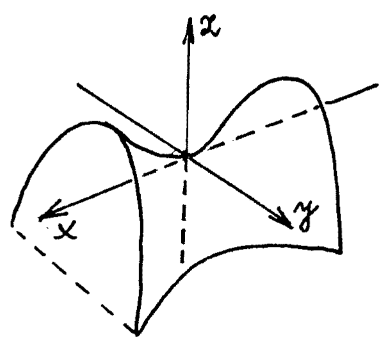
Příklad 1. (a) Nechť je dána funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$. Pak $f'_x = 2x$ a $f'_y = 2y$. Odtud plyne, že parciální derivace prvního řádu existují pro každé $[x, y] \in R^2$. Zřejmě jediný stacionární bod je bod $a = [0, 0]$ a grad $f(a) = (0, 0)$. V bodě a nastává lokální minimum. Viz obr. 5. (b) Pro funkci $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ platí, že $f'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ a $f'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Parciální derivace neexistují v bodě $a = [0, 0]$. V bodě a je lokální minimum funkce f. Viz obr. 6. (c) Nechť $f(x, y) = x^2 - y^2$. Pak $f'_x = 2x$ a $f'_y = -2y$. Parciální derivace prvního řádu existují pro libovolný bod $[x, y] \in R^2$ a zřejmě jediný stacionární bod je bod $a = [0, 0]$ a grad $f(a) = (0, 0)$. Zřejmě platí $\forall x \neq 0 : f(x, 0) = x^2 > 0$. Podobně $\forall y \neq 0 : f(0, y) = -y^2 < 0$. Z definice 1 plyne, že f nemá v bodě a lokální extrém. Viz obr. 7.



Obr. 5



Obr. 6



Obr. 7

Definice 2. Buď $a \in Df$ a nechť $\forall i, j = 1, \dots, n$ existuje $f''_{x_i x_j}(a)$. Položme

$$D_k(a) = \begin{vmatrix} f''_{x_1 x_1}(a), & \dots & , f''_{x_1 x_k}(a) \\ & \dots & \\ f''_{x_k x_1}(a), & \dots & , f''_{x_k x_k}(a) \end{vmatrix}.$$

Následující věta ukazuje, jak lze subdeterminantů $D_k(a)$ využít k vyšetření lokálních extrémů. Věta 2 se nazývá Sylvestrovo rozhodovací kritérium.

Věta 2. Buď $f : R^n \to R, a \in Df$ stacionární bod. Nechť existuje $d^2 f(a)$. Platí (1) Jestliže $D_1(a) > 0, D_2(a) > 0, \dots, D_n(a) > 0$, pak f má v a lok. minimum.

(2) Jestliže $D_1(a) < 0, D_2(a) > 0, \ldots, D_n(a)(-1)^n > 0$, pak f má v a lok. maximum.
(3) Nechť nenastane ani (1) ani (2) a $\forall k = 1, \ldots, n$ platí $D_k(a) \neq 0$. Pak v bodě a není lokální extrém.

Poznámka 1. Nenastane-li ani jedna z možností (1),(2),(3), pak může, ale nemusí být v a lokální extrém. V této situaci je nutno vyšetřit chování f v okolí $K(a, \delta)$ podrobněji. Viz bod 5 algoritmu. Věty 1 a 2 poskytují dobrý návod jak při hledání lokálních extrémů postupovat.

Algoritmus pro nalezení lokálních extrémů funkce n-proměnných.

1. Spočítáme parciální derivace prvního řádu funkce f a položíme je rovny nule. Tím získáme systém rovnic.
2. Určíme všechna řešení a systému. Řešení jsou stacionární body. V nich může, ale nemusí být extrém. Dále nalezneme všechny body, v nichž neexistuje aspoň jedna první parciální derivace.
3. Spočteme parciální derivace druhého řádu a sestavíme matici funkcí f''. Určíme číselné matice $f''(a)$ odpovídající stacionárním bodům.
4. Pro matice $f''(a)$ určíme hlavní subdeterminanty $D_k(a)$ pro $k = 1, \ldots, n$ a podle Sylvestrova kritéria rozhodneme, zda v a nastává extrém.
5. Nelze-li rozhodnout podle kritéria, použijeme následovně definici extrému. Spočteme $f(a)$. Zvolíme libovolný vektor v a spočteme $f(a+v)$. Pokusíme se dokázat jednu z nerovností $f(a) \geq f(a+v)$ (max), $f(a) \leq f(a+v)$ (min). Pokud se nedaří tyto nerovnosti dokázat, zkoušíme volit speciální podmnožiny okolí bodu a. Cílem volby je ukázat, že na zvolené části okolí není splněna definiční podmínka pro extrém, tj. dokázat, že v a není extrém. Podobně postupujeme v případě bodů v nichž neexistuje aspoň jedna parciální derivace prvního řádu.

Příklad 2. Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 6x - 9y$.

Řešení. Spočteme parciální derivace a položíme je rovny nule. Vznikne soustava rovnic $f'_x = 2x+y-6 = 0, f'_y = 2y+x-9 = 0$. Parciální derivace existují pro každé $[x, y] \in R^2$ a proto jedinými kandidáty na lokální extrémy jsou stacionární body, které nalezneme vyřešením vzniklé soustavy rovnic. Soustava je lineární, můžeme tedy použít metod lineární algebry.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & |6 \\ 1 & 2 & |9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & |9 \\ 2 & 1 & |6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 9 \\ 0 & -3 & | & -12 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & |9 \\ 0 & 1 & |4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & |1 \\ 0 & 1 & |4 \end{bmatrix}.$$

Nalezli jsme stacionární bod $a = [1, 4]$. Spočteme druhé parciální derivace a sestavíme matici $f''(a)$. Platí $f''_{xx} = 2, f''_{xy} = 1, f''_{yy} = 2$. Odtud plyne, že $f'' = f''(a) = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right]$. Určíme hlavní minory matice $f''(a)$ a použijeme Sylvestrovo kritérium. Platí $D_1(a) = 2 > 0$ a $D_2(a) = 3 > 0$. Podle kritéria nastává v bodě $a = [1, 4]$ lokální minimum funkce f.

§6. VÁZANÉ A GLOBÁLNÍ EXTRÉMY

Definice 1. Buďte $f : R^n \to R, m < n, g_1, \ldots, g_m : R^n \to R$ funkce. Položme $V = \{x \in R^n; g_1(x) = 0 \wedge \cdots \wedge g_m(x) = 0\}$. Řekneme, že f má v bodě $a \in Df \cap V$ vázané lokální maximum podmínkou $a \in V$, když $\exists K(a, \delta)$ tak, že $\forall x \in K(a, \delta) \cap Df \cap V$ platí $f(x) \leq f(a)$. Řekneme, že f má v bodě $a \in Df \cap V$ vázané lokální minimum podmínkou $a \in V$, když $\exists K(a, \delta)$ tak, že $\forall x \in K(a, \delta) \cap Df \cap V$ platí $f(a) \leq f(x)$. Vázaná lokální minima a maxima funkce f se nazývají vázané lokální extrémy.

Poznámka 1. Podmínka $a \in V$ se nazývá vazba a rovnice $g_1(x) = 0, \ldots, g_m(x) = 0$ se nazývají vazebné rovnice nebo též vazebné podmínky.

Buď $m = 1$. V některých případech lze z rovnice $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$ jednoznačně určit některé x_i. Například $x_i = \overline{g}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Pak za x_i dosadíme do $f(x_1, \ldots, x_n)$ výraz $\overline{g}$ a dostáváme funkci $F(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, která má pouze $n-1$ proměnných. Úloha o nalezení vázaných extrémů funkce f s vazbou V je tím převedena na ekvivalentní úlohu o nalezení lokálních extrémů funkce F. V případech, kdy nelze výše uvedeného postupu použít, vede v řadě případů k řešení tzv. metoda Lagrangeových multiplikátorů. Viz následující věta.

Věta 1. (Lagrange). Buďte $f : R^n \to R, g_1, \ldots, g_m : R^n \to R, m < n$ funkce spojitě diferencovatelné na otevřené množině Ω obsahující V a nechť $\forall x \in \Omega$ platí, že hodnost matice $[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)]_{i,j}$ je rovna m. Buď $L : R^n \to R$ funkce definovaná vztahem $L(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \ldots, x_n) + \cdots + \lambda_m g_m(x_1, \ldots, x_n)$. Funkce L se nazývá Lagrangeova funkce a konstanty $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in R$ se nazývají Lagrangeovy multiplikátory. Nechť systém $m+n$ rovnic o $m+n$ neznámých $L'_{x_1} = 0, \ldots, L'_{x_n} = 0$, $g_1 = 0, \ldots, g_m = 0$ má řešení $[a_1, \ldots, a_n, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0]$. Má-li L v bodě $a = [a_1, \ldots, a_n]$ pro $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0$ lokální extrém, pak f má v a vázaný lokální extrém téhož typu s vazbou $a \in V$. Nemá-li L lokální extrém, neplyne odtud, že f nemá vázaný lokální extrém.

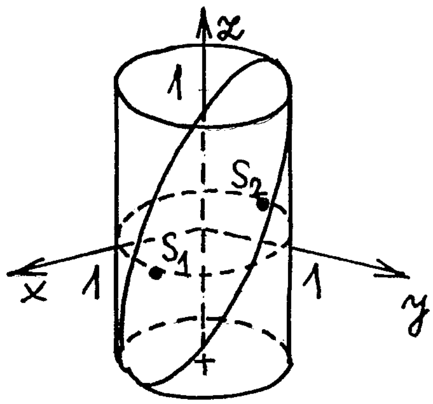
Poznámka 2. Výraz $[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)]_{i,j}$ označuje matici o m řádcích a n sloupcích. Podmínka, že hodnost matice $[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)]_{i,j}$ je rovna m znamená, že žádná z rovnic $g_i(x) = 0$ není zbytečná.

Příklad 1. Vyšetřete vázané extrémy $f(x, y) = 6 - 4x - 3y$ s vazbou $x^2 + y^2 = 1$.

Řešení. Z vazby nelze vyjádřit jednoznačně žádnou proměnnou. Sestavíme tedy Lagrangeovu funkci $L(x, y) = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$. Spočteme parciální derivace a položíme je rovny nule. $L'_x = -4 + 2\lambda x = 0, L'_y = -3 + 2\lambda y = 0$. Přidáme vazebnou rovnici $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Získali jsme tak soustavu tří rovnic o třech neznámých x, y, λ. Tuto soustavu musíme nyní vyřešit. Z první rovnice plyne $x = \frac{2}{\lambda}$ a ze druhé $y = \frac{3}{2\lambda}$. Dosazením za x a y do rovnice vazby dostáváme $\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 = 1$. Odtud po krátké úpravě plyne $\lambda^2 = \frac{25}{4}$ a tedy $\lambda = \pm\frac{5}{2}$. Pro $\lambda = \frac{5}{2}$ dostáváme $x = \frac{4}{5}, y = \frac{3}{5}$. Získali jsme stacionární bod Lagrangeovy funkce $a_1 = [\frac{4}{5}, \frac{3}{5}]$. Podobně pro $\lambda = -\frac{5}{2}$ dostáváme $x = -\frac{4}{5}, y = -\frac{3}{5}$. Nalezli jsme druhý stacionární bod $a_2 = [-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}]$. Nyní vyšetříme nalezené stacionární body pomocí druhé derivace Lagrangeovy funkce. Určíme druhé parciální derivace a sestavíme matice $L'', L''(a_1), L''(a_2)$. Platí

$$L'' = \begin{bmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{bmatrix}, \qquad L''(a_1) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \qquad L''(a_2) = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Nyní můžeme použít Sylvestrovo kritérium. Pro a_1 platí $D_1(a_1) = 5, D_2(a_1) = 25$. Odtud plyne, že L má v bodě $a_1 = [\frac{4}{5}, \frac{3}{5}]$ pro $\lambda = \frac{5}{2}$ lokální minimum a podle věty 1 má f ve stejném bodě vázané lokální minimum vzhledem k dané vazbě. Analogicky pro a_2 platí $D_1(a_2) = -5, D_2(a_2) = 25$. Odtud plyne, že L má v bodě $a_2 = [-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}]$ pro $\lambda = -\frac{5}{2}$ lokální maximum a f má v bodě a_2 vázané lokální maximum. Tím je úloha vyřešena. Pokusme se ještě vysvětlit geometrický význam celé úlohy. Grafem funkce f je rovina v obecné poloze. Vazebná rovnice je rovnice kružnice ležící v rovině xy. Hledáme tedy extrémy na křivce, která vznikne průnikem válcové plochy určené touto kružnicí s danou rovinou. Průnikovou křivkou je elipsa. Situace je znázorněna na následujícím obrázku.



Obr. 8

Příklad 2. Vyšetřete vázané extrémy $f(x, y) = x^2 - y^2$ s vazbou $2x - y + 1 = 0$.

Řešení. Lagrangeova funkce je tvaru $L(x, y) = x^2 - y^2 + \lambda(2x - y + 1)$. Spočteme parciální derivace a položíme je rovny nule. $L'_x = 2x + 2\lambda = 0, L'_y = -2y - \lambda = 0$. Přidáme vazebnou rovnici $2x - y + 1 = 0$. Získali jsme soustavu tří rovnic o třech neznámých x, y, λ. Z první rovnice plyne $\lambda = -x$ a ze druhé $\lambda = -2y$. Odtud dostáváme $x = 2y$. Dosazením do vazby a krátkým výpočtem zjistíme, že existuje jediný stacionární bod $a = [-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}]$ pro $\lambda = \frac{2}{3}$. Nyní vyšetříme stacionární bod pomocí druhé derivace Lagrangeovy funkce. Spočteme druhé parciální derivace a sestavíme matice $L'', L''(a)$. Platí

$$L'' = L''(a) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Protože $D_1(a) = 2 > 0$ a $D_2(a) = -4 < 0$ nemá Lagrangeova funkce L podle Sylvestrova kritéria lokální extrém. Pozor! Odtud ale neplyne, že f nemá vázaný extrém s danou vazbou. Ukážeme nyní, že f vázaný extrém má. Budeme postupovat tak, že úlohu o vázaném extrému převedeme na ekvivalentní úlohu nalezení lokálního extrému funkce jedné proměnné. Z vazby vyjádříme y. Platí $y = 2x + 1$. Dosadíme do zadané funkce. Dostaneme $F(x) = f(x, 2x + 1) = x^2 - (2x + 1)^2$. Odtud $F'(x) = -6x - 4$. Nalezneme stacionární bod $x_0 = -\frac{2}{3}$. Protože platí $F''(x) = -6 < 0$ je v bodě $x_0 = -\frac{2}{3}$ lokální maximum funkce $F(x)$. Tedy funkce $f(x, y)$ má v bodě $[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}]$ vázané lokální maximum.

Definice 2. Buď $f : R^n \to R, \Omega \subseteq Df, a \in \Omega$. Řekneme, že f má v a globální maximum na Ω, když $\forall x \in \Omega$ platí $f(x) \le f(a)$. Klademe $\max f(\Omega) = f(a)$. Řekneme, že f má v a globální minimum na Ω, když $\forall x \in \Omega$ platí $f(a) \le f(x)$. Klademe $\min f(\Omega) = f(a)$. Hodnoty $\max f(\Omega)$ a $\min f(\Omega)$ se nazývají globální maximum a globální minimum funkce f na množině Ω. Místo globální též říkáme absolutní.
Věta 2. (Weierstrasse). Buď $\emptyset \ne \Omega \subseteq R^n$ ohraničená, uzavřená množina a $f : R^n \to R$ spojitá funkce na $\Omega \subseteq Df$. Platí následující tvrzení. (1) f je ohraničená na Ω. (2) Existují $a, b \in \Omega$ tak, že $\forall x \in \Omega : f(a) \le f(x) \le f(b)$, tzn. existuje $\min f(\Omega) = f(a)$ a $\max f(\Omega) = f(b)$. (3) Nechť $\min f(\Omega)$ nastane v bodě $a \in \Omega$. Pak f má v a lokální minimum, nebo $a \in h(\Omega)$. Analogicky nechť $\max f(\Omega)$ nastane v bodě $a \in \Omega$. Pak f má v a lokální maximum, nebo $a \in h(\Omega)$.

Poznámka 3. (1) Není-li Ω uzavřená, nebo ohraničená, pak $\min f(\Omega)$ a $\max f(\Omega)$ nemusí existovat. (2) Pokud $\min f(\Omega)$, $\max f(\Omega)$ existují, jsou určena jednoznačně. Funkce však může nabývat těchto hodnot obecně ve více bodech. (3) Hranici množiny Ω lze často popsat pomocí rovnic. Vyšetřování hranice tedy vede k vázaným extrémům. (4) Weierstrassova věta poskytuje návod pro nalezení $\min f(\Omega)$ a $\max f(\Omega)$. Jak postupovat popíšeme v následujícím algoritmu.

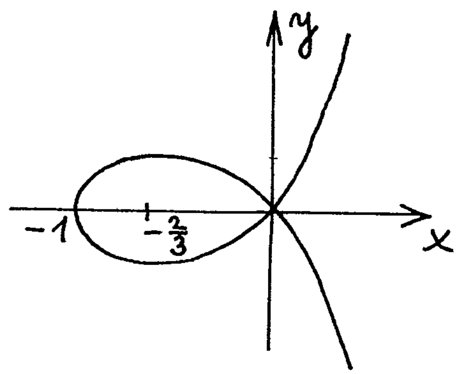
Algoritmus pro nalezení globálních extrémů.

(1) Nalezneme lokální extrémy funkce f a z nich vybereme ty, které leží v Ω. Nechť $\mathbb{A}$ označuje množinu funkčních hodnot v nalezených bodech lokálních extrémů.
(2) Nalezneme vázané extrémy funkce f s vazbou $V = h(\Omega)$. Nechť $\mathbb{B}$ označuje množinu funkčních hodnot v nalezených bodech vázaných extrémů a v bodech, které jsou průniky různých vazeb.
(3) Nechť $M = \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$. Pak globální maximum $\max f(\Omega) = \max M$ a globální minimum $\min f(\Omega) = \min M$.

Příklad 3. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = (x-1)^2+(y-\frac{1}{2})^2$ na obdélníku Ω, který je určen body $A = [0, 0], B = [2, 0], C = [2, 1], D = [0, 1]$.
Řešení. (1) Nalezneme lokální extrémy funkce f. Spočteme parciální derivace $f'_x = 2x - 2$ a $f_y = 2y - 1$ a nalezneme stacionární bod $s = [1, \frac{1}{2}]$. Matice druhé derivace je rovna $f'' = f''(s) = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$. Hlavní minory této matice jsou kladné a proto v bodě s nastává lokální minimum funkce f. Platí $f(s) = 0$. Tedy $\mathbb{A} = \{0\}$. (2) Hranice množiny Ω je tvořena čtyřmi úsečkami. Vyšetření hranice $h(\Omega)$ se tedy rozpadá na vyřešení čtyř úloh na vázané extrémy s funkcí f a vazbami $V_1 : y = 0$, $V_2 : x = 2$, $V_3 : y = 1$ a $V_4 : x = 0$. Pozor! Při této formulaci je zapotřebí zvlášť vyšetřit body A, B, C, D, které jsou průniky různých vazeb. Úlohy f, V_i, kde $i = 1, 2, 3, 4$ převedeme na ekvivalentní úlohy nalezení lokálních extrémů funkcí F_i, kde $F_1(x) = f(x, 0) = (x - 1)^2 + \frac{1}{4}$, $F_2(y) = f(2, y) = (y - \frac{1}{2})^2 + 1$, $F_3(x) = f(x, 1) = (x - 1)^2 + \frac{1}{4}$, $F_4(y) = f(0, y) = (y - \frac{1}{2})^2 + 1$. Snadno se zjistí, že úloha f, V_1 má vázané minimum v bodě $a = [1, 0]$; f, V_2 má vázané minimum v $b = [2, \frac{1}{2}]$; f, V_3 má vázané minimum v $c = [1, 1]$ a f, V_4 má vázané minimum v $d = [0, \frac{1}{2}]$. Spočteme funkční hodnoty v nalezených bodech. Platí $f(a) = f(c) = \frac{1}{4}$, $f(b) = f(d) = 1$ a $f(A) = f(B) = f(C) = f(D) = \frac{5}{4}$. Odtud $\mathbb{B} = \{\frac{1}{4}, 1, \frac{5}{4}\}$. (3) $M = \{0, \frac{1}{4}, 1, \frac{5}{4}\}$. Odtud $\max f(\Omega) = \max M = \frac{5}{4}$ a nastává v bodech A, B, C, D. Dále $\min f(\Omega) = \min M = 0$ a nastává v bodě s.

§7. IMPLICITNÍ FUNKCE

Uvažujme rovnici $f(x,y) = 0$, kde $f(x,y)$ je funkce dvou proměnných a nechť $\Omega = \{[x,y] \in Df; f(x,y) = 0\}$ je množina všech řešení této rovnice. Na následujících příkladech ukažme, že množina Ω může být velmi rozmanitá.
(1) Pro $f(x,y) = x^6 + x^2 + 1$ je $\Omega = \emptyset$. (2) Pro $f(x,y) = x^4 + y^4$ je $\Omega = \{[0,0]\}$. (3) Pro $f(x,y) = xy - |xy|$ je $\Omega = \{[x,y]; x,y \geq 0 \vee x,y \leq 0\}$, tj. celý první a třetí kvadrant. (4) Pro $f(x,y) = x^2 - y^2$ je $\Omega = \{[x,x]; x \in R\} \cup \{[x,-x]; x \in R\}$. Množinu Ω tedy tvoří dvojice přímek $y = x$ a $y = -x$. (5) Pro $f(x,y) = x^3 + x^2 - y^2$ se nedá struktura množiny Ω již snadno uhodnout. Snadno se ale spočítá, že $y = \pm\sqrt{x^3 + x^2}$. Odtud plyne, že množina Ω bude symetrická podle osy x. Stačí tedy vyšetřit průběh funkce $g(x) := \sqrt{x^3 + x^2}$. Viz cvičení lekce 2, příklad 2.



Obr. 9

Je zřejmé, že množina Ω není grafem žádné funkce. V okolí některých konkrétních bodů ji však lze za graf funkce považovat. Tyto úvahy přirozeným způsobem vedou k zavedení pojmu funkce dané implicitně rovnicí.

Definice 1. Buď $A = [x_0, y_0] \in Df$ bod definičního oboru funkce $f(x,y)$ takový, že $A \in \Omega$. Existuje-li okolí $K(A,\delta)$ tak, že $\Omega \cap K(A,\delta)$ je totožná s grafem nějaké funkce $y = g(x)$, pak říkáme, že funkce $g(x)$ je v okolí bodu A určena implicitně rovncí $f(x,y) = 0$.

Věta 1. O existenci. Nechť $f(x,y)$ je spojitá na δ-okolí bodu $A = [x_0, y_0]$ a $A \in \Omega$. Má-li funkce $f(x,y)$ spojitou parciální derivaci $f'_y(x,y)$ v bodě A a platí $f'_y(A) \neq 0$, pak existuje okolí bodu A v němž je rovnicí $f(x,y) = 0$ definována implicitně právě jedna spojitá funkce $y = g(x)$.

Poznámka 1. Věta 1 nemá konstruktivní charakter, tj. neumožňuje funkci g nalézt. Funkce g daná implicitně rovnicí $f(x,y) = 0$ může být totiž vyšší funkce, i když f je elementární. Podmínka $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$ je postačující, nikoli však nutná pro existence implicitní funkce. Viz například rovnice $x - y^3 = 0$.

Věta 2. O derivaci. Nechť jsou splněny předpoklady věty 1 a nechť f má v okolí bodu $A = [x_0, y_0]$ spojité parciální derivace prvního řádu. Pak má funkce $y = g(x)$, která je v okolí A určena implicitně rovnicí $f(x,y) = 0$ derivaci v bodě x_0 a platí

$$g'(x_0) = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}.$$

Poznámka 2. Vysvětleme hlavní ideu důkazu. Rovnici $f(x,y) = 0$ zderivujeme podle x, přičemž f považujeme za složenou funkci proměnné x. Tedy y považujeme ze funkci proměnné x. Platí $f'_x \cdot x'_x + f'_y \cdot y'_x = 0 \Leftrightarrow f'_x + f'_y y' = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$. Analogicky lze počítat i vyšší derivace. Odvoďme vzorec pro y''. Rovnici $f'_x + f'_y y' = 0$ znovu zderivujeme podle x. $f''_{xx} + f''_{xy} y' + (f''_{yx} + f''_{yy} y') y' + f'_y y'' = 0$. Odtud po dosazení za y' a krátké úpravě dostaneme

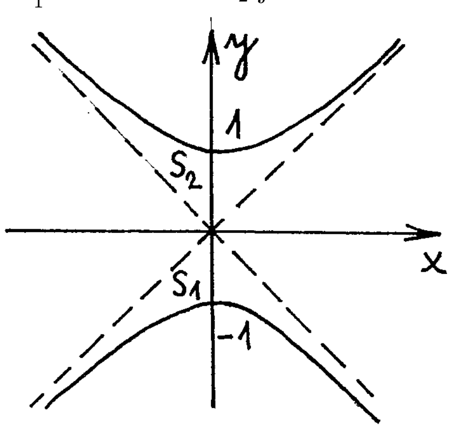
$$y'' = -\frac{f''_{xx}(f'_y)^2 - 2f''_{xy}f'_x f'_y + f''_{yy}(f'_x)^2}{(f'_y)^3}.$$

Příklad 1. Nalezněte $y'(0)$ pro funkci danou implicitně rovnicí $e^{xy} - x^2 + y^3 = 0$.
Řešení. Nejprve postupujme podle vzorce $y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$. Spočteme $F'_x = ye^{xy} - 2x$ a $F'_y = xe^{xy} + 3y^2$. Odtud plyne $y' = -\dfrac{ye^{xy} - 2x}{xe^{xy} + 3y^2} = \dfrac{2x - ye^{xy}}{xe^{xy} + 3y^2}$.
Ke stejnému výsledku lze dojít zderivováním zadané rovnice podle x. Platí

$$e^{xy}(y + xy') - 2x + 3y^2y' = 0.$$
$$y'(xe^{xy} + 3y^2) = 2x - ye^{xy}.$$

Odtud však opět plyne $y' = \dfrac{2x - ye^{xy}}{xe^{xy} + 3y^2}$. Abychom mohli do posledně uvedeného vztahu dosadit, musíme vědět čemu je rovno y. To zjistíme tak, že dosadíme $x = 0$ do zadané rovnice. Platí $e^0 - 0 + y^3 = 0$. Odtud $y^3 = -1$ a tedy $y = -1$. Nyní $y'(0) = \frac{2\cdot 0 - (-1)e^{0(-1)}}{3(-1)^2 + 0\cdot e^{0\cdot(-1)}} = \frac{1}{3}$. Z kladnosti derivace plyne, že funkce daná implicitně je v bodě $x = 0$ rostoucí.

Příklad 2. Nalezněte lokální extrémy funkce dané implicitně rovnicí $x^2 - y^2 + 1 = 0$.
Řešení. Nejprve vypočteme derivaci y' podle vzorce $y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$. Platí $y' = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}$. Podobně zderivováním rovnice $x^2 - y^2 + 1 = 0$ dostáváme $2x - 2yy' = 0$, odkud plyne $y' = \frac{2x}{2y} = \frac{x}{y}$. Derivace existuje kdykoliv, když $y' \neq 0$. Nalezneme stacionární body. Zřejmě $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Ze zadané rovnice dosazením $x = 0$ dopočítáme y. Platí $y^2 = 1$ a odtud $y = -1$ nebo $y = 1$. Získali jsme dva stacionární body $S_1 = [0, -1]$ a $S_2 = [0, 1]$. Dále spočteme y''. Rovnici $2x - 2yy' = 0$ znovu zderivujeme podle x. Platí $2 - 2y'y' - 2yy'' = 0$. Odtud $y'' = \frac{2 - 2(y')^2}{2y} = \frac{1 - (y')^2}{y}$. Pomocí druhé derivace rozhodneme existenci extrémů ve stacionárních bodech. Pro bod S_1 platí $y''(0) = \frac{1 - (\frac{0}{-1})^2}{-1} = -1 < 0$. Tedy v bodě S_1 je lokální maximum. Pro bod S_2 platí $y''(0) = \frac{1 - (\frac{0}{1})^2}{1} = 1 > 0$. V S_2 je lokální minimum. Viz obr. 10.



Obr. 10

II. INTEGRÁLNÍ POČET V R^{n}

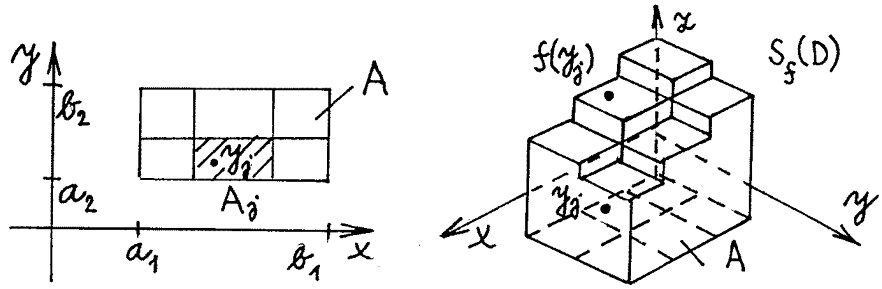
§1. INTEGRÁL PŘES N-ROZMĚRNÝ INTERVAL

Definice 1. Buď $A = \langle a_1, b_1\rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n\rangle \subseteq R^n$ n-rozměrný uzavřený interval, $f : R^n \to R$ funkce ohraničená na $A \subseteq Df$. Definujme $|A| = (b_1 - a_1)\dots(b_n - a_n)$, $d(A) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}$ objem a průměr A. Pro $i = 1, \dots, n$ buď $D_i : a_i = x_i^{(0)} < x_i^{(1)} < \cdots < x_i^{(m_i)} = b_i$ tzv. dělení $\langle a_i, b_i\rangle$. Pak $D = [D_1, \dots, D_n]$ se nazývá dělení A. D rozloží A na $m = m_1 \dots m_n$ n-rozměrných intervalů $A_{k_1,\dots,k_n} = \langle x_1^{(k_1-1)}, x_1^{(k_1)}\rangle \times \cdots \times \langle x_n^{(k_n-1)}, x_n^{(k_n)}\rangle$, kde $1 \le k_i \le m_i$ a $i = 1, \dots, n$. Označme tyto intervaly pro zjednodušení $A^{(1)}, \dots, A^{(m)}$. V každém intervalu $A^{(j)}$ pro $j = 1, \dots, m$ zvolme bod $y_j \in A^{(j)}$. Položme $\|D\| = \max\{d(A^{(j)}); j=1, \dots, m\}$. $\|D\|$ je tzv. norma dělení D. Nyní každému $k \in N$ přiřaďme dělení $D(k)$ intervalu A. Posloupnost $\{D(k)\}_{k=1}^{\infty}$ se nazývá nulová, když $\|D(k)\| \to 0$. Definujme $S_f(D) = \sum_{j=1}^{m} f(y_j)|A^{(j)}|$. Číslo $S_f(D)$ se nazývá integrální součet funkce f pro dělení D intervalu A a pro danou volbu reprezentantů y_j. Řekneme, že ohraničená funkce f je Riemannovsky integrovatelná na A a číslo $a \in R$ nazveme n-rozměrný Riemannův integrál f na A, když pro každou nulovou posloupnost $D(k)$ dělení intervalu A a pro každou volbu reprezentantů v těchto děleních platí $\lim\limits_{k\to\infty} S_f(D(k)) = a$. Riemannův n-rozměrný integrál f na A budeme označovat

$$\int\limits_A f(x_1, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n, \qquad \text{nebo také} \qquad \overbrace{\int \cdots \int}^{\text{n-krát}}\limits_A f(x_1, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n.$$

Poznámka 1. (1) Speciálně dvojrozměrný a trojrozměrný integrál funkce f na A budeme označovat $\iint_A f(x,y)dxdy$ a $\iiint_A f(x,y,z)dxdydz$. (2) Místo dvojrozměrný a trojrozměrný říkáme rovněž dvojný a trojný. (3) Historickou motivací k zavedení vícerozměrných integrálů byl výpočet objemů těles.

Poznámka 2. V následující poznámce objasníme podrobněji hlavní myšlenku konstrukce a pro názornost uvedeme obrázek pro případ $n = 2$. Viz obr. 11.



Obr. 11

Integrální součet $S_f(D)$ přibližně vyjadřuje hodnotu integrálu z f na A. Čím je dělení D jemnější, tím přesněji $S_f(D)$ vyjadřuje integrál. Předpoklad konvergence posloupnosti norem dělení k nule znamená, že zjemňování je rozloženo po A rovnoměrně. Číslo $S_f(D)$ pak vyjadřuje součet objemů $n{+}1$ rozměrných kvádrů nad dělením D s výškami závislými na volbě reprezentantů. Po limitním přechodu pak získáme objem $n+1$ rozměrného tělesa nad podstavou A, které je zhora ohraničeno grafem funkce f.

Definice 2. Buď $f : R^n \to R$, $\Omega \subseteq Df$ ohraničená množina. Funkce definovaná vztahem

$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x \in R^n - \Omega, \\ 1, & \text{pro } x \in \Omega, \end{cases}$$

se nazývá charakteristická funkce množiny Ω. Zřejmě pro ohraničenou množinu Ω vždy existuje n-rozměrný uzavřený interval A tak, že $\Omega \subseteq A$. Řekneme, že f je Riemannovsky integrovatelná (RI) na Ω, když funkce $\chi_\Omega \cdot f : R^n \to R$ je Riemannovsky integrovatelná na A. Pak klademe

$$\int\limits_\Omega f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n = \int\limits_A \chi_\Omega(x_1,\dots,x_n)f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n.$$

Poznámka 3. Definice je korektní, protože integrál z funkce f nezávisí na volbě A. Existuje-li $\int_\Omega dx_1\dots dx_n$, pak se Ω nazývá měřitelná v Jordanově smyslu a $|\Omega| = \int_\Omega dx_1\dots dx_n$ se nazývá míra Ω. Pro $n = 2$ je míra obsah, pro $n = 3$ objem.

Věta 1. (1) Buďte $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq R^n$ měřitelné množiny, které nemají společné vnitřní body. Pak $|\Omega_1 \cup \Omega_2| = |\Omega_1| + |\Omega_2|$. (2) Buď f spojitá na měřitelné množině Ω. Pak f je RI na Ω. (3) Buď f ohraničená na Ω a nechť pro množinu A všech bodů nespojitosti f platí $|A| = 0$. Pak f je RI na Ω. (4) Nechť f, g jsou RI na Ω a pro každý bod $[x_1,\dots,x_n] \in \Omega$ platí $f(x_1,\dots,x_n) \leq g(x_1,\dots,x_n)$. Pak $\int_\Omega f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots x_n \leq \int_\Omega g(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n$. Speciálně, když pro každé $[x_1,\dots,x_n] \in \Omega$ platí $f(x_1,\dots,x_n) \geq 0$, pak $\int_\Omega f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots x_n \geq 0$.

Věta 2. (1) Nechť $\forall[x_1,\dots,x_n] \in \Omega$ platí $c_1 \leq f(x_1,\dots,x_n) \leq c_2$, kde $c_1, c_2 \in R$ a f je RI na měřitelné množině Ω. Pak $c_1|\Omega| \leq \int_\Omega f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n \leq c_2|\Omega|$. (2) Buď f spojitá funkce na uzavřené měřitelné množině Ω. Pak uvnitř Ω existuje bod $[a_1,\dots,a_n] \in \Omega$ tak, že platí $\int_\Omega f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n = f(a_1,\dots,a_n)|\Omega|$. Číslo $f(a_1,\dots,a_n)$ se nazývá střední hodnota f na Ω a platí $f(a_1,\dots,a_n) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n$.

Věta 3. Buďte $f_i : R^n \to R$ funkce RI na měřitelné množině Ω a $c_i \in R$ libovolné konstanty, kde $i = 1,\dots,m$. Pak funkce $\sum\limits_{i=1}^{m} c_i f_i(x_1,\dots,x_n)$ je RI na Ω a platí

$$\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{m} c_i f_i(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n = \sum_{i=1}^{m} c_i \int\limits_\Omega f_i(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n.$$

§2. INTEGRÁL PŘES ELEMENTÁRNÍ OBLAST

Definice 1. Množina $\Omega \subseteq R^n$ se nazývá elementární oblast typu $(x_1,\dots,x_n)$, když každý bod $[x_1,\dots,x_n] \in \Omega$ splňuje nerovnosti

$$a_1 \leq x_1 \leq a_2$$

$$g_1(x_1) \leq x_2 \leq h_1(x_1)$$

$$g_2(x_1,x_2) \leq x_3 \leq h_2(x_1,x_2)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$g_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-1}) \leq x_n \leq h_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-1}),$$

kde $a_1, a_2 \in R$, $a_1 < a_2$ a pro každé $i = 1,\dots,n-1$ jsou $g_i, h_i : R^i \to R$ spojité funkce splňující podmínku $g_i < h_i$ pro vnitřní body Ω. Buď σ permutace množiny $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Pokud v předchozích nerovnostech píšeme $\sigma(x_i)$ místo x_i, pak Ω se nazývá elementární oblast typu $(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n))$.

Poznámka 1. (1) Místo elementární se též někdy říká normální. (2) Tatáž množina může být různých typů. (3) Speciálně n-rozměrný uzavřený interval je elementární oblast všech možných typů.

Příklad 1. Kruh $\Omega = \{[x, y] \in R^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ je elementární oblast typu (x, y) ale i typu (y, x). Platí $\Omega = \{[x, y] \in R^2; -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$ a $\Omega = \{[x, y] \in R^2; -1 \leq y \leq 1, -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}$. Mezikruží Ω, kde $\Omega = \{[x, y] \in R^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ není elementární oblastí žádného typu, ale lze ji na elementární rozdělit.

Definice 2. Množina $\Omega \subseteq R^n$ se nazývá regulární, je-li sjednocením konečného počtu elementárních oblastí libovolného typu, které mají společné nejvýše svoje hranice.

Věta 1. Buď $\Omega \subseteq R^n$ elementární oblast. Pak Ω je měřitelná. Důsledek: Každá regulární množina je měřitelná.

Věta 2. Buď $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \Omega_i$ regulární oblast, složená z elementárních oblastí Ω_i, které mají společné nejvýše svoje hranice. Pak

$$\int\limits_{\Omega} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\Omega_i} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n.$$

Věta 3. Fubini. Buď $\Omega \subseteq R^n$ elementární oblast typu $(x_1, \ldots, x_n)$ a nechť funkce f je RI na Ω. Pak

$$\int\limits_{\Omega} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n = \int\limits_{a_1}^{a_2} (\int\limits_{g_1(x_1)}^{h_1(x_1)} (\ldots (\int\limits_{g_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})}^{h_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_n) dx_n) \ldots) dx_2) dx_1.$$

Pro typ $(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n))$ platí analogické tvrzení.

Důsledek. (Dirichletova věta). Buď $\Omega = \langle a_1, b_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle$ n-rozměrný uzavřený interval a nechť funkce f je RI na Ω. Pak

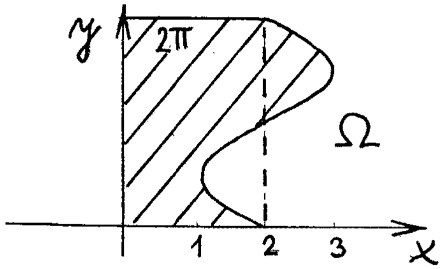
$$\int\limits_{\Omega} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n = \int\limits_{a_1}^{b_1} (\ldots (\int\limits_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n) dx_n) \ldots) dx_1.$$

Je-li navíc funkce $f(x_1, \ldots, x_n)$ ve tvaru součinu $f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \ldots f_n(x_n)$, pak integrál lze počítat podle vztahu

$$\int\limits_{\Omega} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n = \int\limits_{a_1}^{b_1} f_1(x_1) dx_1 \cdots \int\limits_{a_n}^{b_n} f_n(x_n) dx_n.$$

Příklad 1. Spočtěte dvojrozměrný integrál $\iint\limits_{\Omega} \frac{x}{3}\, dxdy$, kde Ω je určena vztahy $x = 0, y = 0, y = 2\pi, x = 2 + \sin y$.

Řešení: Nejprve nakreslíme oblast Ω. Vztahy $x = 0, y = 0, y = 2\pi$ určují přímky, které v rovině spolu s křivkou $x = 2 + \sin y$ vymezují obor Ω. Viz obr. 12.



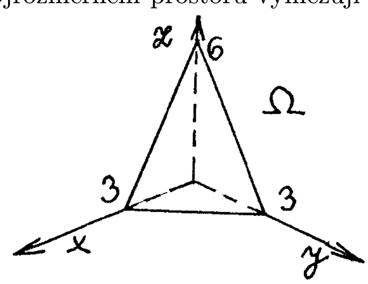
Obr. 12

Oblast Ω je typu (y, x), ale není typu (x, y). Nerovnosti charakterizující obor Ω jako oblast typu (y, x) jsou tvaru $0 \le y \le 2\pi, 0 \le x \le 2 + \sin y$. Aplikujeme Fubiniho větu.

$\iint\limits_{\Omega} \frac{x}{3}\ dxdy = \int_0^{2\pi} (\int_0^{2+\sin y} \frac{x}{3}\ dx)dy = \int_0^{2\pi} \left[\frac{x^2}{6}\right]_0^{2+\sin y} dy = \frac{1}{6}\int_0^{2\pi}(2+\sin y)^2 dy =$
$\frac{1}{6}\int_0^{2\pi}(4 + \sin y + \sin^2 y)\ dy = \frac{1}{6}\left[4y - 4\cos y + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\sin 2y\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}.$

Příklad 2. Spočtěte trojrozměrný integrál $\iiint\limits_{\Omega} y\, dxdydz$, kde Ω je určena vztahy $x, y, z \ge 0, 2x + 2y + z \le 6$.

Řešení: Nejprve nakreslíme oblast Ω. Vztahy $x = 0, y = 0, z = 0, 2x + 2y + z = 6$ určují roviny, které v trojrozměrném prostoru vymezují čtyřstěn. Viz obr. 13.



Obr. 13

Čtyřstěn je oblast libovolného typu. Provedeme zápis pomocí nerovností. Typ oblasti zvolíme (x, y, z). Platí $0 \le x \le 3, 0 \le y \le 3 - x, 0 \le z \le 6 - 2x - 2y$. Nyní můžeme aplikovat Fubiniho větu.

$\iiint\limits_{\Omega} y\ dxdydz = \int_0^3 (\int_0^{3-x} (\int_0^{6-2x-2y} y\ dz)dy)dx = \int_0^3 (\int_0^{3-x} \left[yz\right]_0^{6-2x-2y} dy)dx =$
$\int_0^3 (\int_0^{3-x} y(6-2x-2y)\ dy)dx = 2\int_0^3 (\int_0^{3-x} y(3-x) - y^2 dy)dx = 2\int_0^3 \left[\frac{y^2}{2}(3-x) - \frac{y^3}{3}\right]_0^{3-x} dx =$
$= 2\int_0^3 \frac{(3-x)^2}{6} - \frac{(3-x)^2}{6} dx = 2\int_0^3 \frac{(3-x)^2}{6} dx = \frac{1}{3}\left[-\frac{(3-x)^4}{4}\right]_0^3 = \frac{27}{4}.$

Pro ilustraci rozepíšeme ještě daný čtyřstěn jako oblast typu (y, z, x). Nerovnosti jsou tvaru $0 \le y \le 3, 0 \le z \le 6 - 2y, 0 \le x \le \frac{1}{2}(6 - 2y - z)$. Aplikace Fubiniho věty má pak tvar $\int_0^3 (\int_0^{6-2y} (\int_0^{(6-2y-z)/2} y\ dx)dz)dy$.

§3. TRANSFORMACE INTEGRÁLŮ

Definice 1. Buď $\Omega \subseteq R^n$ uzavřená a ohraničená množina. Pak Ω se nazývá n-rozměrná oblast. Buď $F : R^n \to R^n$ zobrazení, kde $F = [f_1, \ldots, f_n]$, přičemž $f_i : R^n \to R, i = 1, \ldots, n$. Nechť $\Omega^* \subseteq DF$ je oblast a nechť ke každému bodu $[y_1, \ldots, y_n] \in \Omega^*$ je rovnicemi $x_1 = f_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, x_n = f_n(y_1, \ldots, y_n)$ přiřazen bod $[x_1, \ldots, x_n] = [f_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(y_1, \ldots, y_n)] \in R^n$ tak, že platí: (1) Je-li $F(\Omega^*) = \Omega$, pak Ω je oblast v R^2. (2) Zobrazení F je na $\Omega^* - h(\Omega^*)$ injektivní (prosté). (3) Je-li $\Omega_1^* \subseteq \Omega^*$ oblast, pak $F(\Omega_1^*)$ je oblast a platí $F(\Omega_1^*) \subseteq \Omega$. Pak řekneme, že transformační rovnice $x_1 = f_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, x_n = f_n(y_1, \ldots, y_n)$ transformují oblast Ω na oblast Ω^*. Zobrazení F se pak nazývá transformace a determinant $J(F(y_1, \ldots, y_n)) = J(y_1, \ldots, y_n)$ Jakobián transformace F.

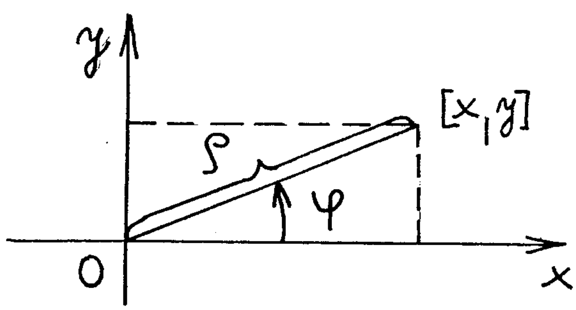
$$J(y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}, & \ldots & , \dfrac{\partial f_n}{\partial y_1} \\ & \ldots & \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y_n}, & \ldots & , \dfrac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}.$$

Věta 1. Nechť rovnice $x_1 = f_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, x_n = f_n(y_1, \ldots, y_n)$ transformují oblast Ω na oblast Ω^*, $f_1, \ldots, f_n$ mají spojité parciální derivace na Ω^* a pro každý bod $[y_1, \ldots, y_n] \in \Omega^* - h(\Omega^*)$ platí $J(y_1, \ldots, y_n) \neq 0$. Dále nechť f je spojitá na oblasti Ω. Pak platí

$$\int\limits_{\Omega} f(x_1, ..., x_n) dx_1 ... dx_n = \int\limits_{\Omega^*} f(f_1(y_1, ..., y_n), ..., f_n(y_1, ..., y_n)) |J(y_1, ..., y_n)| dy_1 ... dy_n.$$

Důsledek. Nechť platí předpoklady předchozí věty. (1) Pro $n = 2$ platí. Je-li $x = f_1(u, v), y = f_2(u, v)$, pak $\iint\limits_{\Omega} f(x, y) dxdy = \iint\limits_{\Omega^*} f(f_1(u, v), f_2(u, v)) |J(u, v)| dudv$.
(2) Pro případ $n = 3$ platí. Je-li $x = f_1(u, v, w), y = f_2(u, v, w), z = f_3(u, v, w)$, pak $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z) dxdydz = \iiint\limits_{\Omega^*} f(f_1(u, v, w), f_2(u, v, w), f_3(u, v, w)) |J(u, v, w)| dudvdw$.

Definice 2. Buď $F : R^2 \to R^2$ transformace, která je definovaná rovnicemi $x = f_1(\rho, \varphi) = \rho \cos \varphi$, $y = f_2(\rho, \varphi) = \rho \sin \varphi$, přičemž $DF = \langle 0, \infty) \times \langle 0, 2\pi)$. Pak F se nazývá transformace do polárních souřadnic. Rovnice transformují R^2 na množinu $\langle 0, \infty) \times \langle 0, 2\pi)$. Význam ρ, φ zachycuje následující obrázek.



Obr. 14

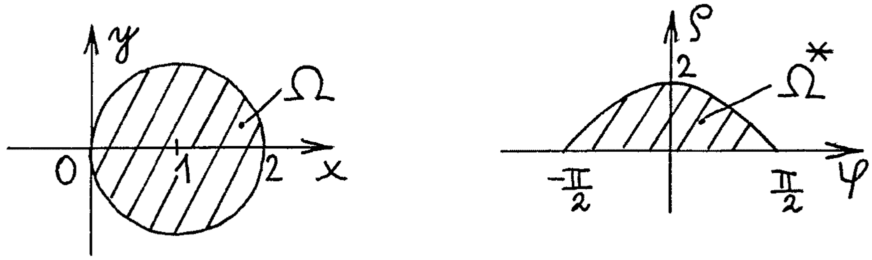
Věta 4. Transformace do polárních souřadnic má Jakobián $J = J(\rho, \varphi) = \rho$.

Důkaz: $J(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\rho \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho.$ □

Poznámka 1. Buďte $x_0, y_0, a, b \in R$, $a, b > 0$. Rovnice $x = x_0 + a\rho\cos\varphi$, $y = y_0 + b\rho\sin\varphi$ se nazývají transformační rovnice do zobecněných polárních souřadnic. Jakobián této transformace je $J = J(\rho,\varphi) = ab\rho$.

Příklad 1. Spočtěte dvojrozměrný integrál $\iint\limits_{\Omega} x\, dxdy$, kde $\Omega : x^2 + y^2 \leq 2x$.

Řešení: Nejprve nakreslíme oblast Ω. Vztah $x^2 + y^2 \leq 2x$ upravíme na tvar $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Odtud je již zřejmé, že oblast Ω je kruh o poloměru 1 se středem v bodě $[1, 0]$. Viz obr. 15.



Obr. 15

V případě, že oblast Ω je kruh nebo jeho část, je výhodné provést transformaci do polárních souřadnic. Rovnice $x^2 + y^2 = 2x$ hranice oblasti přejde transformací v rovnici $\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 2\rho\cos\varphi$, tj. $\rho = 2\cos\varphi$. Transformací se oblast Ω změní v oblast Ω^*. Přitom $\Omega^* : -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ a $0 \leq \rho \leq 2\cos\varphi$. Viz obr. 20. Použijeme větu o transformaci. Platí

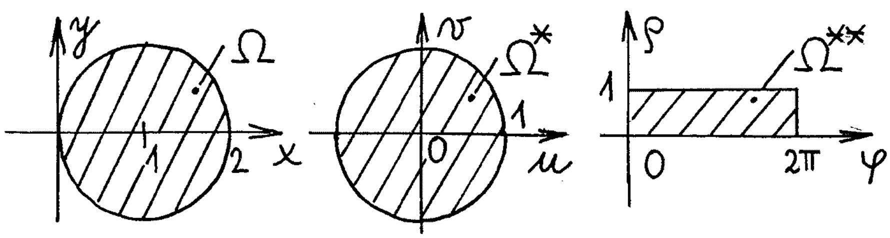
$$\iint\limits_{\Omega} x\, dxdy = \iint\limits_{\Omega^*} \rho\cos\varphi \cdot \rho\, d\rho d\varphi = \iint\limits_{\Omega^*} \rho^2\cos\varphi\, d\rho d\varphi.$$

Poslední integrál dopočítáme podle Fubiniho věty.

$$\iint\limits_{\Omega^*} \rho^2\cos\varphi\, d\rho d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\varphi} \rho^2\cos\varphi\, d\rho\right) d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3}\rho^3\cos\varphi\right]_0^{2\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{3}\cos^4\varphi\, d\varphi = \frac{8}{3}\left[\frac{1}{4}\cos^3 x \cdot \sin x + \frac{3}{8}\cos x \cdot \sin x + \frac{3}{8}x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{8}\pi = \pi.$$

Existuje více postupů, jak daný integrál vypočítat. V následujícím řešení nejprve provedeme transformaci, která posune střed kruhu do počátku systému souřadnic. Teprve pak provedeme transformaci do polárních souřadnic. V tomto případě se vyhneme integrálu z funkce $\cos^4 x$, který vyžaduje delší samostatný výpočet.

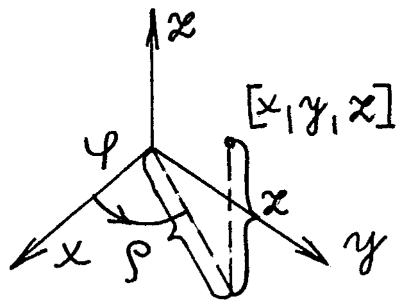


Obr. 16

Chceme, aby se rovnice $(x-1)^2 + y^2 = 1$ změnila v rovnici $u^2 + v^2 = 1$. Je zřejmé, že stačí položit $u = x - 1$ a $v = y$. Odtud plyne, že $x = u + 1$ a $y = v$. Jakobián této transformace je $J(u, v) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Platí

$\iint\limits_{\Omega} x \ dxdy = \iint\limits_{\Omega^*}(u+1) \ dudv = \iint\limits_{\Omega^{**}}(\rho\cos\varphi + 1)\cdot\rho \ d\rho d\varphi = \iint\limits_{\Omega^{**}}\rho^2\cos\varphi \ d\rho d\varphi +$
$\iint\limits_{\Omega^{**}}\rho \ d\rho d\varphi = \int_0^1 \rho^2 d\rho\cdot\int_0^{2\pi}\cos\varphi \ d\varphi + \int_0^1 \rho \ d\rho\cdot\int_0^{2\pi} d\varphi = \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1\cdot[\sin\varphi]_0^{2\pi} + \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1\cdot[\varphi]_0^{2\pi} = \pi.$

Definice 3. Buď $F : R^3 \to R^3$ transformace, která je definovaná rovnicemi $x = f_1(\rho,\varphi,z) = \rho\cos\varphi$, $y = f_2(\rho,\varphi,z) = \rho\sin\varphi$, $z = f_3(\rho,\varphi,z) = z$, přičemž $DF = \langle 0,\infty) \times \langle 0, 2\pi) \times R$. Pak F se nazývá transformace do válcových (cylindrických) souřadnic. Rovnice transformují R^3 na množinu $\langle 0,\infty) \times \langle 0, 2\pi) \times R$. Význam ρ, φ, z zachycuje následující obrázek.



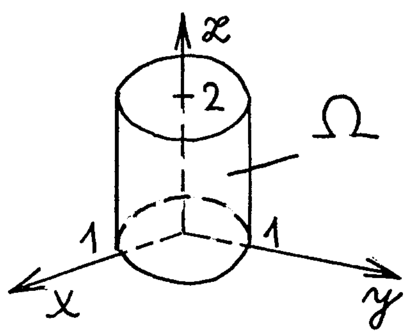
Obr. 17

Věta 5. Transformace do válcových souřadnic má Jakobián $J = J(\rho,\varphi,z) = \rho$.

Důkaz: $J(\rho,\varphi,z) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \rho.$ $\square$

Příklad 2. Spočtěte trojrozměrný integrál $\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, kde Ω je určena vztahy $x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2$.

Řešení: Nejprve nakreslíme oblast Ω. Vztah $x^2+y^2 \leq 1$ určuje válec o poloměru 1. Výška válce je dána vztahy $0 \leq z \leq 2$. Omezení $x \geq 0, y \geq 0$ vyčlení z válce čtvrtinu. Viz obr. 18.



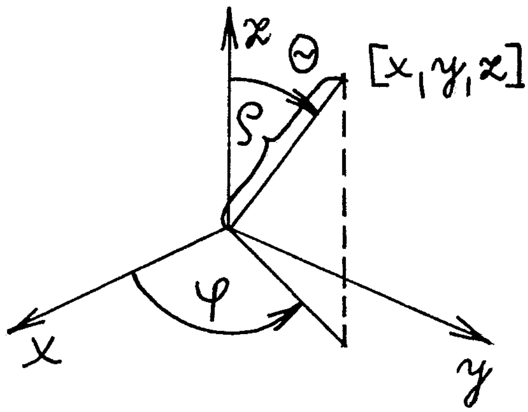
Obr. 18

Zjištění, že oblast Ω je čtvrtina válce nás vede k nápadu ztransformovat danou oblast do válcových souřadnic. Zřejmě $\rho \in \langle 0,1\rangle$, $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ a $z \in \langle 0, 2\rangle$. Tedy transformací se oblast Ω změní v kvádr $\Omega^* = \langle 0,1\rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle \times \langle 0,2\rangle$. Viz obr. 20. Použijeme větu o transformaci. Platí

$\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz = \iiint\limits_{\Omega^*} z\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi}\cdot\rho \ d\rho d\varphi dz = \iiint\limits_{\Omega^*} z\rho^2 \ d\rho d\varphi dz.$

Integrační obor Ω^* je trojrozměrný interval a proto můžeme použít Dirichletovu větu. Navíc integrand je ve tvaru součinu a proto použijeme její speciální verzi.
$\iiint\limits_{\Omega^*} z\rho^2 \, d\rho d\varphi dz = \int_0^1 \rho^2 \, d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cdot \int_0^2 z \, dz = \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 \cdot [\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 = \frac{\pi}{3}$.

Definice 4. Buď $F : R^3 \to R^3$ transformace, která je definovaná rovnicemi $x = f_1(\rho, \varphi, \theta) = \rho \cos\varphi \sin\theta$, $y = f_2(\rho, \varphi, \theta) = \rho \sin\varphi \sin\theta$, $z = f_3(\rho, \varphi, \theta) = \rho \cos\theta$, přičemž $DF = \langle 0, \infty) \times \langle 0, 2\pi) \times \times \langle 0, \pi \rangle$. Pak F se nazývá transformace do kulových (sférických) souřadnic. Rovnice transformují R^3 na množinu $\langle 0, \infty) \times \langle 0, 2\pi) \times \langle 0, \pi\rangle$. Význam ρ, φ, θ zachycuje následující obrázek.



Obr. 19

Věta 5. Transformace do kulových souřadnic má Jakobián $J = J(\rho, \varphi, \theta) = -\rho^2 \sin\theta$.

Důkaz: $J(\rho, \varphi, \theta) = \begin{vmatrix} \cos\varphi \sin\theta & \sin\varphi \sin\theta & \cos\theta \\ -\rho \sin\varphi \sin\theta & \rho \cos\varphi \sin\theta & 0 \\ \rho \cos\varphi \cos\theta & \rho \sin\varphi \cos\theta & -\rho \sin\theta \end{vmatrix} =$

$$= -\rho^2 \cos^2\varphi \sin^3\theta - \rho^2 \sin^2\varphi \cos^2\theta \sin\theta - \rho^2 \cos^2\varphi \cos^2\theta \sin\theta - \rho^2 \sin^2\varphi \sin^3\theta =$$
$$= -\rho^2 \sin^3\theta (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) - \rho^2 \cos^2\theta \sin\theta (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) =$$
$$= -\rho^2 \sin^3\theta - \rho^2 \cos^2\theta \sin\theta = -\rho^2 \sin\theta (\sin^2\theta + \cos^2\theta) = -\rho^2 \sin\theta. \quad \square$$

Příklad 3. Spočtěte trojrozměrný integrál $\iiint\limits_{\Omega} x^2 + y^2 + z^2 \, dxdydz$, kde Ω je určena vztahy $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $z \geq 0$.

Řešení: Vztah $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ určuje kouli o poloměru jedna se středem v počátku. Protože $z \geq 0$ je Ω polokoule. Je-li oblast Ω je částí koule, je výhodné provést transformaci do kulových souřadnic. Zřejmě $\rho \in \langle 0, 1\rangle$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$ a $\theta \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Transformací se oblast Ω změní v kvádr $\Omega^* = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Podle věty o transformaci platí

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2 + y^2 + z^2 dxdydz = \iiint\limits_{\Omega^*} (\rho^2 \cos^2\varphi \sin^2\theta + \rho^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta + \rho^2 \cos^2\theta) \cdot \rho^2 \sin\theta \, d\rho d\varphi d\theta.$$

Upravíme integrand a provedeme výpočet. Integrační obor Ω^* je trojrozměrný interval a proto můžeme použít Dirichletovu větu. Navíc po úpravě je integrand ve tvaru součinu a proto použijeme její speciální verzi. Platí

$$\iiint\limits_{\Omega^*} \rho^4 \sin\theta \, d\rho d\varphi d\theta = \int_0^1 \rho^4 \, d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, d\theta = \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^1 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [-\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{5}.$$

§4. APLIKACE VÍCEROZMĚRNÝCH INTEGRÁLŮ

Věta 1. Buď $|\Omega|$ obsah rovinné oblasti $\Omega \subseteq R^2$ (obrazce). Pak $|\Omega| = \iint\limits_{\Omega} dxdy$.

Věta 2. Buď $|\Omega|$ objem prostorové oblasti $\Omega \subseteq R^3$ (tělesa). Pak $|\Omega| = \iiint\limits_{\Omega} dxdy$.

Věta 3. Buď $f(x,y) \geq 0$ spojitá funkce na oblasti $\Omega \subseteq R^2$. Pak objem kolmého válce ohraničeného podstavou Ω v rovině xy a plochou Gf je roven $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$.

Věta 4. Buďte $f : R^2 \to R, f'_x, f'_y$ spojité funkce na oblasti $\Omega \subseteq R^2$. Pak obsah plochy $S = Gf$ nad oblastí Ω je roven $|S| = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dxdy$.

Věta 5. Buď $\Omega \subseteq R^2$ oblast, $\rho(x,y) \geq 0$ hustota v bodě $[x,y] \in \Omega$, ρ spojitá na Ω. Nechť $m(\Omega)$ označuje hmotnost oblasti Ω. Pak platí $m(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} \rho(x,y)dxdy$.

Věta 6. Buď $\Omega \subseteq R^3$ oblast, $\rho(x,y,z) \geq 0$ hustota v bodě $[x,y,z] \in \Omega$, ρ spojitá na Ω. Nechť $m(\Omega)$ označuje hmotnost oblasti Ω. Pak $m(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} \rho(x,y,z)dxdydz$.

Věta 7. Buď $\Omega \subseteq R^2$ oblast, $\rho(x,y) \geq 0$ hustota v bodě $[x,y] \in \Omega$, ρ spojitá na Ω. Pak statické momenty oblasti Ω vzhledem k souřadnicovým osám x, y jsou $S_x(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} y\rho(x,y)dxdy$ a $S_y(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} x\rho(x,y)dxdy$ a pro těžiště T oblasti Ω platí

$$T = \left[\frac{S_y(\Omega)}{m(\Omega)}, \frac{S_x(\Omega)}{m(\Omega)}\right].$$

Poznámka. Místo slova těžiště je lépe použít termínu hmotný střed. Uvedené vztahy platí totiž za předpokladu, že tíhové pole je homogenní.

Věta 8. Buď $\Omega \subseteq R^3$ oblast, $\rho(x,y,z) \geq 0$ hustota v bodě $[x,y] \in \Omega$, ρ spojitá na Ω. Pak statické momenty oblasti Ω vzhledem k souřadnicovým rovinám xy, xz, yz jsou $S_{xy}(\Omega) = \iiint_{\Omega} z\rho(x,y,z)dxdydz$, $S_{xz}(\Omega) = \iiint_{\Omega} y\rho(x,y,z)dxdydz$, $S_{yz}(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} x\rho(x,y,z)dxdydz$ a pro těžiště T oblasti Ω platí

$$T = \left[\frac{S_{yz}(\Omega)}{m(\Omega)}, \frac{S_{xz}(\Omega)}{m(\Omega)}, \frac{S_{xy}(\Omega)}{m(\Omega)}\right].$$

Věta 9. Buď $\Omega \subseteq R^2$ oblast, $\rho(x,y) \geq 0$ hustota v bodě $[x,y] \in \Omega$, ρ spojitá na Ω. Pak kvadratické momenty (momenty setrvačnosti) oblasti Ω vzhledem k osám x, y, z jsou $I_x(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} y^2\rho(x,y)dxdy$, $I_y(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} x^2\rho(x,y)dxdy$ a $I_z(\Omega) = I_x(\Omega) + I_y(\Omega)$.

Věta 10. Buď $\Omega \subseteq R^3$ oblast, $\rho(x,y,z) \geq 0$ hustota v bodě $[x,y,z] \in \Omega$, ρ spojitá na Ω. Pak kvadratické momenty (momenty setrvačnosti) Ω vzhledem k osám x, y, z jsou $I_x(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dxdydz$, $I_y(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + z^2)\rho(x,y,z)dxdydz$ a $I_z(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)dxdydz$.

Příklad 1. Určete velikost povrchu plochy, která je grafem funkce $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

Řešení: Grafem funkce $f(x,y)$ je horní polovina kulové plochy. Velikost povrchu Gf vypočteme ze vztahu $|Gf| = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}dxdy$, kde oblast $\Omega = Df$ je kruh $x^2+y^2 \leq 1$. Určíme parciální derivace. Platí $f'_x = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, $f'_y = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$. Při výpočtu integrálu provedeme transformaci do polárních souřadnic. Oblast Ω se změní v obdélník $\Omega^* = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\pi\rangle$. Dostáváme

$$|Df| = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}}dxdy = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{\frac{1}{1-x^2-y^2}}dxdy = \iint\limits_{\Omega^*} \frac{\rho\, d\rho d\varphi}{\sqrt{1-\rho^2}} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^1 \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = \left| \begin{array}{c} t^2 = 1-\rho^2 \\ \rho d\rho = -tdt \\ 0 \to 1 \\ 1 \to 0 \end{array} \right| = 2\pi \cdot \int_1^0 \frac{-t\, dt}{\sqrt{t^2}} = 2\pi \int_0^1 dt = 2\pi.$$

Příklad 2. Spočtěte souřadnice těžiště tělesa $\Omega : 0 \leq z \leq 1-(x^2+y^2)$. Hustota tělesa je konstantní a je rovna 1.

Řešení: Těleso Ω je ohraničeno dvěma plochami. Zdola rovinou $z = 0$ a zhora paraboloidem $z = 1-(x^2+y^2)$. Vzhledem k tvaru tělesa Ω je zřejmé, že $x_T = 0$ a $y_T = 0$. Dopočítáme $z_T = \frac{S_{xy}(\Omega)}{m(\Omega)}$. Oblast Ω transformujeme do válcových souřadnic. Platí $\rho \in \langle 0,1\rangle, \varphi \in \langle 0,2\pi\rangle, z \in \langle 0, 1-\rho^2\rangle$.

$$S_{xy}(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} z\, dxdydz = \iiint\limits_{\Omega^*} z\rho\, d\rho d\varphi dz = \int_0^1 (\int_0^{2\pi} (\int_0^{1-\rho^2} z\rho\, dz) d\varphi) d\rho =$$
$$= \int_0^1 (\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}\rho(1-\rho^2)^2\, d\varphi) d\rho = \pi \int_0^1 \rho(1-\rho^2)^2 d\rho = \tfrac{\pi}{6}.$$
$$m(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz = \iiint\limits_{\Omega^*} \rho\, d\rho d\varphi dz = \int_0^1 (\int_0^{2\pi} (\int_0^{1-\rho^2} \rho\, dz) d\varphi) d\rho =$$
$$= \int_0^1 (\int_0^{2\pi} \rho(1-\rho^2)\, d\varphi) d\rho = 2\pi \int_0^1 \rho(1-\rho^2)\, d\rho = 2\pi [\tfrac{\rho^2}{2} - \tfrac{\rho^4}{4}]_0^1 = \tfrac{\pi}{2}.$$

Odtud plyne, že těžiště tělesa Ω je bod $T = [0,0,\frac{1}{3}]$.