Doc.RNDr.Ing.Josef Nedoma, CSc

# MATEMATIKA I

## Shrnutí a přehled

Text je přehledem a shrnutím látky přednášené v předmětu Matematika I posluchačům 1. semestru fakulty strojního inženýrství Vysokého učení technického v Brně. Vychází z autorových skript MATEMATIKA I vydaných nakladatelstvím CERM,s.r.o. Brno, 2001, která vznikla souhrnným přepracováním tří textů:

J.Nedoma: Matematika I, Část první, Algebra a geometrie. [PC-DIR, Nakladatelství Brno, 1998]

J.Nedoma: Matematika I, Část druhá, Diferenciální počet funkcí jedné proměnné. [PC-DIR Real, s.r.o., Brno, 1999]

J.Nedoma: Matematika I, Část třetí, Integrální počet funkcí jedné proměnné. [PC-DIR Real, s.r.o., Brno, 2000]

Za cenné připomínky děkuji zejména Doc.RNDr.M.Doupovcovi,CSc.

Tento text je určen jako učební pomůcka především pro konsultanty a posluchače kombinovaného studia FSI-VUT Brno.

Brno, září 2002. autor

# A. ZÁKLADNÍ POJMY.

## l. MNOŽINY .

**Základní pojmy teorie množin.** *Množinou* rozumíme soubor (množství, souhrn) určitých objektů, které se dají navzájem rozlišit. Množina je dána, dovedeme-li o každém objektu rozhodnout, jestli do ní patří nebo ne.

Zápis $a \in \mathcal{M}$ znamená *a patří do množiny* $\mathcal{M}$ nebo také *a je prvkem množiny* $\mathcal{M}$. Zápis $a \notin \mathcal{M}$ naopak znamená, že *a nepatří do množiny* $\mathcal{M}$ nebo také *a není prvkem množiny* $\mathcal{M}$.

Množinu, která neobsahuje žádný prvek, nazýváme *prázdnou množinou* a značíme ji $\emptyset$.

Množina, která obsahuje alespoň jeden prvek se nazývá *neprázdná.*

Množina, která obsahuje pouze konečný počet prvků se nazývá *konečná.* Konečnou nazýváme i prázdnou množinu.

Množina, která není konečná se nazývá *nekonečná.*

Nechť jsou dány dvě množiny $\mathcal{A}, \mathcal{B}$. Jestliže každý prvek množiny $\mathcal{A}$ je současně prvkem množiny $\mathcal{B}$, potom říkáme, že *množina* $\mathcal{A}$ *je částí množiny* $\mathcal{B}$ nebo také, že $\mathcal{A}$ je *podmožinou* množiny $\mathcal{B}$ nebo také, že $\mathcal{B}$ je *nadmnožinou* množiny $\mathcal{A}$ a píšeme $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, eventuálně $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$. $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ ovšem také znamená: Každý prvek nepatřící do $\mathcal{B}$ nepatří ani do $\mathcal{A}$.

Jestliže současně $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ a $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ , potom říkáme, že množiny$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ jsou *sobě rovny* a píšeme $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

**Operace s množinami**. Množinu tvořenou všemi prvky množiny $\mathcal{A}$ a všemi prvky množiny $\mathcal{B}$ nazýváme *sjednocením množin* $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ a označujeme ji $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, eventuálně $\mathcal{B} \cup \mathcal{A}$.

Množinu tvořenou všemi prvky patřícími současně do množiny $\mathcal{A}$ i do množiny $\mathcal{B}$ nazýváme *průnikem* množin $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ a označujeme ji $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ , eventuálně $\mathcal{B} \cap \mathcal{A}$. Jestliže $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ (prázdná množina), potom říkáme, že množiny $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ jsou *disjunktní* .

Množinu všech prvků patřících do množiny $\mathcal{A}$ a současně nepatřících do množiny $\mathcal{B}$ nazýváme *rozdílem* množiny $\mathcal{A}$ a množiny $\mathcal{B}$ nebo také *doplňkem* množiny $\mathcal{B}$ do množiny $\mathcal{A}$ a označujeme ji $\mathcal{A} - \mathcal{B}$.

Množinu tvořenou všemi uspořádanými dvojicemi $(a, b)$ takovými, že $a \in \mathcal{A}$ , $b \in \mathcal{B}$ nazýváme *kartézským součinem* množin $\mathcal{A}$ , $\mathcal{B}$ a označujeme ji $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Slova uspořádaná dvojice $(a, b)$ znamenají, že ve dvojici záleží na pořadí, t.j. dvojice $(a, b), (b, a)$ jsou různé.

**Reálné množiny, supremum a infimum.** Množiny, jejímiž prvky jsou pouze reálná čísla, nazýváme *reálnými množinami.* Tyto množiny mohou mít různé struktury. Pro nás zvláště důležitými jsou *otevřené, uzavřené a polouzavřené intervaly.*

O reálné množině $\mathcal{M}$ řekneme, že je *shora ohraničená*, jestliže existuje reálné číslo $h$ takové, že pro každé číslo $x \in \mathcal{M}$ platí $x \leq h$. Číslo $h$ se pak nazývá *horní závora* množiny $\mathcal{M}$. Nejmenší horní závora se nazývá *supremum* množiny $\mathcal{M}$ a označuje se $\sup \mathcal{M}$. Jestliže $\sup \mathcal{M} \in \mathcal{M}$, potom toto supremum nazýváme *maximem* množiny $\mathcal{M}$ a označujeme $\max \mathcal{M}$.

Analogicky definujeme *ohraničenost* reálné množiny *zdola, dolní závoru* a největší dolní závoru, která se nazývá *infimum* množiny $\mathcal{M}$ a označuje se $\inf \mathcal{M}$. Jestliže navíc $\inf \mathcal{M} \in \mathcal{M}$, potom je infimum nejmenším číslem v množině $\mathcal{M}$ a označuje se $\min \mathcal{M}$ (čti *minimum* množiny $\mathcal{M}$).

Příklad:Pro $\mathcal{M} = \langle 0, 1)$ platí $\sup \mathcal{M} = 1$ , $\max \mathcal{M}$ neexistuje, $\inf \mathcal{M} = \min \mathcal{M} = 0$.

## 2. MATEMATICKÁ LOGIKA.

**Výrok a výroková funkce.** *Výrokem* rozumíme gramaticky správně vytvořenou větu o které lze rozhodnout, zda je pravdivá nebo nepravdivá. *Výrokovou funkcí* pak rozumíme větu, která sice není výrokem, obsahuje však symbol $x$ připouštějící dosazení konkretní hodnoty a která po dosazení se stane výrokem. Tak například věta: "Číslo $x$ je sudé" je výrokovou funkcí. Dosadíme-li za symbol $x$ číslo 5 dostaneme nepravdivý výrok "číslo 5 je sudé". Výrokové funkce budeme označovat $p(x), q(x), \ldots$ zatímco výroky pouhými písmeny $p, q, \ldots$.

V matematice se často místo věty *"výrok p je pravdivý"* říká *"výrok p má logickou hodnotu true (pravda)"* anebo krátce *"platí p"*. Místo věty *"výrok p je nepravdivý"* se často říká *"výrok p má logickou hodnotu false (nepravda)"* anebo krátce *"neplatí p"*.

Naše definice výroku připouští pouze dvě logické hodnoty. Říkáme proto, že pracujeme ve *dvojhodnotové logice.*

**Negace výroku a logické kvantifikátory.** *Negací* výroku $p$ rozumíme výrok $q$, který má tuto vlastnost: když je výrok $p$ pravdivý, je výrok $q$ nepravdivý a naopak, když výrok $p$ je nepravdivý, je výrok $q$ pravdivý. Negaci $q$ výroku $p$ často označujeme $\neg p$ anebo $\overline{p}$ (čti non $p$).

Nechť $\mathcal{A}$ je nějaká množina a nechť $p(x)$ je nějaká výroková funkce. Výrok

*Pro každý prvek $x \in \mathcal{A}$ je pravdivý výrok $p(x)$*

se v matematice často zapisuje takto

$p(x) \quad \forall \quad x \in \mathcal{A} \quad$ nebo $\quad \forall \quad x \in \mathcal{A} : p(x)$

a čte se: $p(x)$ platí pro každé $x$ z množiny $\mathcal{A}$.

Je zřejmé, že opačným výrokem k tomuto výroku je výrok

*V množině $\mathcal{A}$ existuje (aspoň jeden) prvek $a$ takový, že výrok $p(a)$ je nepravdivý.*

Tento výrok se v matematice často zapisuje takto:

$\exists \quad a \in \mathcal{A} : \quad \overline{p(a)}$

a čte se: v množině $\mathcal{A}$ existuje prvek $a$ takový, že neplatí $p(a)$. Z uvedeného příkladu je význam symbolů $\forall, \exists$ zřejmý. Říká se jim *logické kvantifikátory.*

**Disjunkce a konjunkce výroků.** V matematice se často ze dvou výroků vytváří jeden složený výrok. Slouží k tomu různá spojení nebo spojky.

Jestliže jsou dány dva výroky $p, q$, potom nový (složený) výrok tvaru "*p nebo q*" nazýváme *disjunkcí* výroků $p$, $q$ a označujeme jej $p \vee q$ (čti $p$ or $q$). Disjunkce má následující vlastnost: je pravdivá, kdy alespoň jeden z výroků $p, q$ je pravdivý a nepravdivá v případě, kdy oba výroky $p, q$ jsou nepravdivé. Spojka *"nebo (or)"* není tedy v logice vylučovací, neznamená *"buď - anebo"*.

Jestliže jsou dány dva výroky $p, q$, potom nový (složený) výrok tvaru *"p a q"* nazýváme *konjunkcí* výroků $p$, $q$ a označujeme jej $p \wedge q$ (čti $p$ et $q$). Konjunkce má následující vlastnost: je pravdivá pouze v případě, kdy oba výroky $p, q$ jsou pravdivé a nepravdivá ve všech ostatních případech.

**Implikace a ekvivalence výroků.** Jestliže jsou dány dva výroky $p, q$, potom nový (složený) výrok tvaru *"jestliže platí p, potom platí q"* nazýváme *implikací* výroků $p, q$ a označujeme $p \Rightarrow q$ (čti $p$ implikuje $q$). Implikace má následující vlastnost: je nepravdivá pouze v případě, kdy výrok $p$ je pravdivý a současně výrok $q$ je nepravdivý.

V matematice daleko nejdůležitějším složeným výrokem je právě implikace. V souvislosti s ní je používána speciální terminologie. Místo výroku

*Jestliže platí p, potom platí q*

se používá některá z následujících konstrukcí:

*Nechť platí p. Potom platí q,*
*Z p plyne q.*
*p je postačující podmínkou pro q.*
*q je nutnou podmínkou pro p.*
*q platí tehdy, když platí p.*
*p platí jen tehdy, když platí q.*

Podotkněme také, že místo výroku *"jestliže $x \in \mathcal{M}$, potom platí $p(x)$"* se používá výrok *"pro každé $x \in \mathcal{M}$ platí $p(x)$"*.

V matematice se často setkáváme s výroky, kdy kromě implikace $p \Rightarrow q$ je pravdivá i implikace opačná, tj. s výroky tvaru

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

Tento složený výrok krátce zapisujeme

$p \Leftrightarrow q$ *nebo také* $p \equiv q$

(čti $p$ je ekvivalentní s $q$) a výroky $p, q$ nazýváme *ekvivalentní.*

Shodně se speciální matematickou terminologií, lze ekvivalenci tedy formulovat následovně

*p je nutnou a postačující podmínkou pro q*,

nebo také

*p platí tehdy a jen tehdy, když platí q*,

přičemž v obou formulacích lze mezi sebou vyměnit písmena $p$ a $q$.

**Teorémy a jejich důkazy.** Pravdivé výroky matematického charakteru nazýváme *matematickými větami* anebo *teorémy.*Většina teorémů má tvar implikace $p \Rightarrow q$.

Platnost (pravdivost) každého teorému je třeba vždy dokázat. Výjímku tvoří tak zvané *axiomy (postuláty)*, což jsou výroky, které v dané teorii přijmeme (bez důkazu) předem (a-priory) za pravdivé.

Důkazy vět většinou dělíme na *přímé* a *nepřímé.* Podstatou obou typů důkazů je opět implikace.

Nechť je dán nějaký výrok $v$ jehož platnost máme dokázat.

Podstata přímého důkazu spočívá v následujícím postupu: Hledá se pravdivý výrok $p$ (jehož platnost byla již dříve ověřena, může to být např. axiom) takový, aby platila implikace $p \Rightarrow v$. Platnost výroku $v$ je tím dokázána, neboť v pravdivé implikaci z pravdivého výroku může plynout pouze pravdivý výrok.

Podstata nepřímého důkazu spočívá v následujícím postupu: Hledá se nepravdivý výrok $n$ (jehož neplatnost byla již dříve ověřena) takový, aby platila implikace $\overline{v} \Rightarrow n$. Platnost výroku $v$ je tím dokázána, neboť v pravdivé implikaci nemůže z pravdivého výroku plynout nepravdivý výrok. To však znamená, že výrok $\overline{v}$ je nepravdivý a tedy výrok $v$ je pravdivý (pokud ovšem pracujeme ve dvojhodnotové logice).

V případě nepřímého důkazu musíme mimo jiné dokázat platnost implikace $\overline{v} \Rightarrow n$, tj. dokázat: *"jestliže platí $\overline{v}$, potom platí $n$".* Abychom dokázali platnost výroku $v$ předpokládáme tedy jeho neplatnost. V tom je ovšem rozpor. Nepřímý důkaz se proto často nazývá *důkaz sporem.*

Na závěr podotkněme,že zápisem $x \in \mathcal{A};\ w(x)$ rozumíme v matematice množinu všech prvků $x$ z množiny $\mathcal{A}$ takových, že pro ně platí výrok $w(x)$.

## 3. REÁLNÁ A KOMPLEXNÍ ČÍSLA.

Celá tato kapitola je věnována opakování látky ze středoškolské matematiky.

**Reálná čísla.** Reálná čísla dělíme na racionální a iracionální.

Racionální jsou ta čísla, která se dají vyjádřit ve tvaru zlomku p/q, kde p je číslo celé a q je číslo přirozené. Přirozená čísla jsou: 1, 2, 3, 4, . . . , celá čísla jsou:

0, 1, -1, 2, -2, … . Množinu všech přirozených čísel budeme označovat písmenem $\mathcal{N}$, množinu všech celých čísel písmenem $\mathcal{Z}$ a množinu všech racionálních čísel písmenem $\mathcal{W}$. Každé přirozené číslo je celým číslem a každé celé číslo je racionálním číslem.

S racionálními čísly v matematice nevystačíme. Všechna reálná čísla, která nejsou racionální, nazýváme iracionálními čísly. Tak např. $\Pi$ , $\sqrt{2}$ atd. Přesnou definici iracionálních čísel zde nepodáváme. Připomeňme poze, že každé iracionální číslo lze vyjádřit ve tvaru nekonečného neperiodického desetinného čísla a každé racionální číslo lze vyjádřit ve tvaru nekonečného periodického desetinného čísla.

Ze střední školy je také dobře znám pojem *číselná osa.* Na přímce je zvolen bod, který je označen číslem 0 (tak zvaný počáteční bod), vpravo od něj se zobrazují čísla větší než nula, vlevo čísla menší než nula a to podle velikosti (menší číslo leží vždy nalevo od většího).

**Operace s reálnými čísly.** S reálnými čísly $a, b$ mohou být provedeny čtyři základní aritmetické operace: sečítání $a + b$, odečítání $a - b$, násobení $a \cdot b$, dělení $a : b$ s výjímkou dělení, kdy $b = 0$. Výsledkem každé z těchto operací je opět reálné číslo.

Operátor násobení $\cdot$ se často vynechává, místo $a{\cdot}b$ se tedy píše $ab$. Místo $(-1){\cdot}b = -b$ se často píše $-b$. Místo operátoru / se často používá zlomková čára nebo : , tedy $1/a = \dfrac{1}{a} = 1 : a$.

Reálná čísla lze uspořádat podle velikosti, tj. každá dvě čísla $a, b$ lze spojit jedním ze tří symbolů: $<$ (menší), $=$ (rovná se), $>$ (větší). Toto uspořádání má následující vlastnosti ($a, b, c, d$ značí libovolná reálná čísla):

*1. Pro každá dvě reálná čísla $a, b$ nastane právě jedna z možností $a < b$, $a = b$, $a > b$*

*2. $(a < b) \wedge (b < c) \Rightarrow a < c$ (tranzitivní zákon). Zde podotkněme, že zápis $(a < b) \wedge (b < c)$ se často zkracuje takto: $a < b < c$.*

*3. $(a < b) \wedge (c \le d) \Rightarrow a + c < b + d$, kde zápis $c \le d$ je zkrácený zápis výroku $(c < d) \vee (c = d)$.*

*4. $(a < b) \wedge (c > 0) \Rightarrow ac < bc$*

*5. $(a < b) \wedge (c < 0) \Rightarrow ac > bc$.*

*6. Z posledních dvou vlastností plyne důležitá vlastnost: $a{\cdot}b > 0 \Leftrightarrow ((a > 0) \wedge (b > 0)) \vee ((a < 0) \wedge (b < 0))$.*

*7. $0 < a < b \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$*

*8. $a < b < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a} < 0$.*

Připomeňme, že sčítání, odečítání, násobení a dělení zlomků provádíme podle těchto pravidel ($a, b, c, d$ jsou libovolná reálná čísla):

*1.* $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + cb}{bd}$

*2.* $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad - cb}{bd}$

*3.* $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$

*4.* $\dfrac{a/b}{c/d} = \dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}$

Z těchto pravidel plynou ihned následující vzorce, které se často používají, a to oboustranně:

$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, *kde c je libovolné reálné číslo* ($\neq 0$)

$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$

**Absolutní hodnota a okolí reálného čísla.** *Absolutní hodnotou* $\mid a \mid$ čísla $a$ rozumíme vzdálenost bodu reprezentujícího číslo $a$ na číselné ose od počátku. Platí tedy

$$\mid a \mid = \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0, \\ -a & \text{pro } a < 0 \end{cases}$$

Pro absolutní hodnoty platí pravidla ($a, b$ jsou libovolná reálná čísla):

$\mid a \mid > 0$ *pro* $a \neq 0, \quad \mid 0 \mid = 0,$

$\mid a \mid = \sqrt{a^2},$

$\mid a + b \mid \leq \mid a \mid + \mid b \mid$ *tzv. (trojúhelníková nerovnost),*

$\mid\mid a \mid - \mid b \mid\mid \leq \mid a + b \mid,$

$\mid a \cdot b \mid = \mid a \mid \cdot \mid b \mid,$

$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{\mid a \mid}{\mid b \mid}$ *pro* $b \neq 0.$

*Nechť a je libovolné reálné číslo a* $\epsilon$ *je libovolné kladné reálné číslo. Potom zřejmě platí*

$(a - \epsilon, a + \epsilon) = \{x \in \mathcal{R}; \mid x - a \mid < \epsilon\}.$

Tento otevřený interval nazýváme $\epsilon$ - *okolím čísla (bodu)* $a$ nebo také *okolím čísla* $a$ *o poloměru* $\epsilon$.

**Mocniny a odmocniny z reálných čísel.** Pro přirozené číslo $n = 1, 2, 3, \ldots$ a pro libovolné reálné číslo $\alpha$ definujeme

$$\alpha^n = \underbrace{\alpha.\alpha.\alpha.\ldots.\alpha}_{n \text{ krát}}$$

Pro celá čísla $m = -1, -2; -3, \ldots$ a pro libovolné reálné číslo $\beta \neq 0$ definujeme

$$\beta^m = \frac{1}{\beta^{-m}}$$

Dále definujeme

$$\beta^0 = 1 \quad \text{pro} \quad \beta \neq 0$$

.

Víme, že pro libovolné reálné číslo $\gamma > 0$ a pro libovolné přirozené číslo $n$ existuje právě jedno kladné reálné číslo $x$ takové, že $x^n = \gamma$. Toto čílo $x$ se nazývá *n- tá odmocnina z čísla x* a označuje se $\sqrt[n]{\gamma}$. Místo $\sqrt[2]{\gamma}$ se často píše pouze $\sqrt{\gamma}$. Dále definujeme $\sqrt[n]{0} = 0$. Pro záporná reálná čísla $\delta$ definujeme $n$- té odmocniny pouze pro lichá přirozená čísla $n$ a to vztahem $\sqrt[n]{\delta} = -\sqrt[n]{-\delta}$. Tak např. $\sqrt[3]{-8} = 2$ , $\sqrt[4]{-8}$ neexistuje

Nechť $\gamma$ je libovolné kladné reálné číslo a $r = p/q$ je libovolné racionální číslo. Potom definujeme $\gamma^r = \sqrt[q]{\gamma^p}$. Pro přirozené číslo $n$ tedy platí $\gamma^{1/n} = \sqrt[n]{\gamma}$.

Nechť konečně $\gamma$ je libovolné kladné reálné číslo a $s$ je libovolné iracionální číslo. Potom mocninu $\gamma^s$ definujeme dosti komplikovaným způsobem (viz literatura).

Pro mocniny platí následující pravidla ($u, v$ jsou libovolná kladná reálná čísla, $a, b$ jsou libovolná reálná čísla):

$u^a \cdot v^a = (u \cdot v)^a, \qquad u^a/v^a = (u/v)^a,$
$u^a \cdot u^b = u^{a+b}, \qquad u^a/u^b = u^{a-b}, \qquad u^{-a} = 1/u^a,$
$(u^a)^b = u^{a \cdot b},$
$u^a > 0, \qquad u^0 = 1,$
$(u < v) \wedge (a > 0) \Rightarrow u^a < v^a,$
$(u < v) \wedge (a < 0) \Rightarrow u^a > v^a,$
$(u > 1) \wedge (a < b) \Rightarrow u^a < u^b,$
$(u < 1) \wedge (a < b) \Rightarrow u^a > u^b.$

**Komplexní čísla.** Komplexní čísla jsou čísla tvaru $a + bi$, kde $a, b$ jsou reálná čísla a $i$ je tak zvaná *imaginární jednotka* pro kterou platí $i^2 = i.i = -1$. Číslo $a$ se nazývá *reálná část* komplexního čísla $z = a + bi$ a označuje se *Re* z, číslo $b$ se nazývá *imaginární část* komplexního čísla $z$ a označuje se *Im* z. Komplexní číslo $z$ se nazývá *ryze imaginární* je-li $Re\ z = 0$ a $Im\ z \neq 0$.

**Operace s komplexními čísly.** Rovnost dvou komplexních čísel
$z_1 = a_1 + b_1 i, \quad z_2 = a_2 + b_2 i$ je definována takto:

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (a_1 = a_2) \wedge (b_1 = b_2).$

Součet a součin dvou komplexních čísel $z_1, z_2$ je definován takto:

$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$

Pro sčítání a násobení komplexních čísel platí tatáž pravidla jako pro reálná čísla.

Nechť $z = a + bi \neq 0 + 0i$ je libovolné komplexní číslo. Potom komplexní číslo $y$ takové, že $z \cdot y = 1$ označujeme $1/z$ nebo také $z^{-1}$. Snadno se přesvědčíme, že platí

$$1/z = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$$

Místo operátoru / se často, stejně jako u reálných čísel, používá zlomková čára nebo dvojtečka, tedy $1/z = \dfrac{1}{z} = 1 : z$. Dělení dvou komplexních čísel $z_1, z_2$ v případě, že $z_2 \neq 0$ pak definujeme vztahem

$$z_1/z_2 = z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$$

Komplexní čísla nelze uspořádat tak, aby platila pravidla platná pro reálná čísla.

Nechť $z = a + bi$ je libovolné komplexní číslo. Potom číslo $a - bi$ se nazývá *komplexně sdružené číslo* k číslu $z$ a označuje se $\overline{z}$. Snadno lze dokázat, že pro komplexně sdružená čísla platí pravidla

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
$\overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2}$ pro $z_2 \neq 0$
$\overline{(\overline{z})} = z$
$z = \overline{z} \Leftrightarrow z$ je reálné číslo

**Binomická věta.** Ze střední školy připomeňme, že

a) každá uspořádaná $n$ tice utvořená z daných $n$ různých prvků se nazývá *permutace* těchto prvků. Snadno se ukáže, že počet všech různých permutací je

$$1.2.3.\ldots.(n-1).n = n!$$

Nechť $(p_1, p_2, \ldots p_n)$ je nějaká permutace čísel $1, 2, \ldots, n$. Říkáme, že čísla $p_i, p_j$, kde $i < j$, tvoří v této permutaci *inverzi*, je-li $p_i > p_j$. Má-li permutace $p_1, p_2, \ldots, p_n$ lichý počet inverzí, potom o ní říkáme, že je *lichá*, v opačném případě o ní říkáme, že je *sudá*.

b) *Kombinacemi* $k$-té třídy z $n$ různých prvků nazýváme skupiny po $k$ prvcích z daných $n$ prvků bez zřetele k uspořádání ve skupině. Snadno se ukáže, že počet těchto kombinací je

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Pro $k = 0$ se definuje

$$\binom{n}{0} = 1$$

Dále připomeňme *binomickou větu*:

*Nechť $n$ je přirozené číslo a nechť $a, b$ jsou reálná, eventuálně komplexní čísla. Potom platí Newtonův vzorec*

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

Speciálně

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Dále připomeňme, že platí

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1})$$

Speciálně

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b), \qquad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

.

**Důležitá nerovnost.** Snadno se dokáže, že pro nezáporná reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ platí

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$

Číslo vlevo se nazývá *geometrický střed (průměr)*, číslo uprostřed *aritmetický střed (průměr)* a číslo vpravo *kvadratický střed (průměr)* čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

**Řešení kvadratických rovnic a nerovností v reálném oboru.** Řešit kvadratickou rovnici nebo nerovnost v reálném oboru znamená nalézt všechna reálná čísla $x$ taková, aby platilo

$x^2 + px + q = 0$ v případě rovnice,

$x^2 + px + q \geq 0$ nebo $x^2 + px + q \leq 0$ v případě nerovnic,

$p, q$ jsou zadaná reálná čísla.

Rovnici je uvedena v tak zvaném normovaném tvaru, tj. koeficient u $x^2$ je roven 1. Obecnou rovnici $ax^2 + bx + c = 0$, stejně jako i nerovnici, lze snadno na normovaný tvar převést.

Kvadratickou rovnici, stejně jako nerovnici, řešíme následujícím způsobem: označme $d = p^2 - 4q$. Trojčlen převedeme na tvar

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{d}{4}.$$

Rozlišujeme nyní dva případy:

a) $d \geq 0$. V tomto případě dostáváme

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{d}{4} = \left(x + \frac{p}{2} - \frac{\sqrt{d}}{2}\right)\left(x + \frac{p}{2} + \frac{\sqrt{d}}{2}\right) = (x - x_1)(x - x_2),$$

kde $x_1 = \frac{-p+\sqrt{d}}{2}$, $x_2 = \frac{-p-\sqrt{d}}{2}$ a $x_1, x_2$ jsou řešeními rovnice. Řešení nerovnic pak snadno dostáváme z úvahy o znaménku součinu dvou činitelů.

b) $d < 0$. V tomto případě dostáváme

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{d}{4} > 0 \quad \text{pro } \forall \quad x \in \mathcal{R}$$

Odtud plyne, že rovnice nemá žádná reálná řešení, stejně jako nerovnice $x^2 + px + q < 0$, zatímco řešením nerovnice $x^2 + px + q \geq 0$ je každé reálné číslo $x$.

# B. ÚVOD DO ELEMENTÁRNÍ ALGEBRY.

## 4. MATICE A ALGEBRAICKÉ VEKTORY.

**Algebraické vektory.** Nechť $n$ je nějaké přirozené číslo. *Algebraickým reálným vektorem* $\mathbf{a}$ *dimense* $n$ rozumíme uspořádanou n–tici reálných čísel $[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$. Číslo $a_i, i = 1, 2, 3, \ldots, n$ se nazývá *i-tá složka* vektoru $\mathbf{a}$. O dvou vektorech $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$ říkáme, že se *rovnají*, a píšeme $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, právě tehdy, když jsou stejné dimense a když jejich odpovídající si složky $a_i$, $b_i$ jsou sobě rovny, tj. $a_i = b_i \quad \forall \quad i$. *Součtem* $\mathbf{a}$

+ **b** dvou algebraických vektorů stejné dimense $n$ o složkách $a_i$, $b_i$ nazýváme vektor **c** o složkách $c_i$ takových, že $c_i = a_i + b_i \quad \forall \quad i$. *Součinem* $\alpha\mathbf{a}$ *reálného čísla* $\alpha$ *s algebraickým vektorem* **a** dimense $n$ o složkách $a_i$ nazýváme vektor **d** o složkách $d_i$ takových, že $d_i = \alpha a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$. Množinu všech algebraických reálných vektorů (tj. množinu všech uspořádaných n-tic reálných čísel v níž je definováno výše uvedené sčítání a násobení číslem) nazýváme *n-rozměrným vektorovým prostorem* $V_n$ *nad oborem reálných čísel.* Vektor, jehož všechny složky jsou rovny nule, nazýváme *nulovým vektorem* a označujeme **o**.

Zcela analogicky definujeme *algebraický komplexní vektor* dimense $n$ (je to uspořádaná n–tice komplexních čísel) a *n-rozměrný vektorový prostor* $V_n$ *nad oborem komplexních čísel.*

Místo (-1)**a** se píše -**a**; tedy složky vektoru -**a** jsou složkami vektoru **a** s opačnými znaménky.

Všechny pojmy a věty vyslovené v této kapitole platí pro algebraické komplexní vektory i pro algebraické reálné vektory. Budeme v nich proto krátce používat pouze termín *algebraický vektor.* Velmi často budeme vynechávat i přívlastek *algebraický.*

**Skalární součin dvou algebraických vektorů.** *Skalárním součinem* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ dvou vektorů stejné dimense $n$ o složkách $a_i, b_i, i = 1, 2, \ldots, n$ nazýváme číslo definované vztahem

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots + a_n b_n$$

Tak např. pro **a**=[3,5,2], **b**=[6,4,-2] je **a**· **b**=34. **Lineární závislost vektorů.** Říkáme, že vektor $\mathbf{a} \in V_n$ je *lineární kombinací* vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ z $V_n$, existují-li taková čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ (komplexní v případě, kdy prostor $V_n$ je nad oborem komplexních čísel, reálná v případě, kdy prostor $V_n$ je nad oborem reálných čísel), že platí

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_k \mathbf{a}_k$$

Tak např. vektor **c**=[20,6,28] je lineární kombinací vektorů **a**=[4,6,5] a **b**=[2,-1,3], neboť **c**=2**a**+6**b**.

O vektorech $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ z $V_n$ říkáme,že jsou *lineárně závislé*, jestliže aspoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních. Tak např. vektory **a, b,c** y předcházejícího příkladu jsou lineárně závislé.

Nejsou-li vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ z $V_n$ lineárně závislé, potom říkáme, že jsou *lineárně nezávislé.* Tak např. vektory [1,0,0], [0,1,0], [0,0,1] jsou lineárně nezávislé (proč?).

Přímo z definice plyne, že nulový vektor je lineární kombinací jakýchkoliv vektorů a tedy, jestliže v nějaké skupině vektorů se vyskytuje nulový vektor, potom tato skupina tvoří lineárně závislé vektory.

Platí věta

*Vektory* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ *z* $V_n$ *jsou lineárně závislé tehdy a jen tehdy, když existují čísla* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ *taková, že aspoň jedno z nich je různé od nuly a platí* $\beta_1 \mathbf{a}_1 + \beta_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \beta_k \mathbf{a}_k = \mathbf{o}$.

**Souřadnice vektoru**. Libovolnou množinu $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ tvořenou $n$ lineárně nezávislými vektory z $V_n$ nazýváme *bází vektorového prostoru* $V_n$. Tak např. množina vektorů {**a,b,c**}, kde **a**=[1,0,0], **b**=[0,1,0], **c**=[0,0,1] je bází vektorového prostoru $V_3$.

Platí věta

*Nechť* $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ *je libovolná báze vektorového prostoru* $V_n$*. Potom každý vektor* $\mathbf{a}$ *z prostoru* $V_n$ *je lineární kombinací vektorů z této báze, tj. existují čísla* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *taková, že* $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{a}_n$.

Čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ uvedená v předcházející větě se nazývají *souřadnice vektoru* $\mathbf{a}$ *vzhledem k bázi* $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$.

**Hodnost soustavy vektorů**. Nechť je dána soustava $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ libovolných vektorů z $V_n$. Jestliže v soustavě existuje $h$ lineárně nezávislých vektorů a ne více, potom číslo h nazýváme *hodnost soustavy.* Tak např. hodnost soustavy $\{$**a,b,c** $\}$, kde **a**=[1,0,0], **b**=[0,1,0], **c**=[0,0,1] je rovna 3, zatímco hodnost soustavy $\{$**d,e,f**$\}$, kde **d**= [1,0,0], **e**=[1,1,1], **f**=[0,1,1] je rovna 2 (neboť **e**=**d**+**f** a vektory **d,f** jsou lineárně nezávislé).

Zřejmě platí:

*Nechť je dána soustava k libovolných vektorů z* $V_n$*. Potom pro její hodnost h platí*

$$h \leq \min(k, n)$$

Snadno se dokáže platnost následující důležité věty užitečné k určení hodnosti dané soustavy vektorů

*Hodnost libovolné soustavy* $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ *vektorů z* $V_n$ *se nezmění*

*1. zaměníme-li pořadí vektorů v soustavě,*

*2. vyměníme-li v každém vektoru soustavy mezi sebou i-tou a j-tou složku,*

*3. vynásobíme-li jeden vektor soustavy číslem různým od nuly,*

*4. přičteme-li k jednomu vektoru soustavy lineární kombinaci ostatních vektorů soustavy,*

*5. vynecháme-li v soustavě vektor, který je lineární kombinací ostatních vektorů soustavy (takovým je např. nulový vektor a vektor rovný jinému vektoru).*

**Matice**. Množinu m·n čísel (reálných nebo komplexních) uspořádanou do m–řádků a n–sloupců, tj. uspořádanou do tvaru

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

nazýváme *maticí typu* $(m, n)$. Čísla $a_{ij}$ se nazývají *prvky matice.* První index $i$ označuje řádek, druhý index $j$ sloupec ve kterém prvek leží. Matice označujeme velkými tučnými tiskacími písmeny, nebo také symbolicky $(a_{ij})_m^n$.

Jestliže všechny prvky matice typu $(m, n)$ jsou rovny nule, potom matici nazýváme *nulovou maticí* typu $(m, n)$ a označujeme $\mathbf{O}_m^n$.

O dvou maticích $\mathbf{A} = (a_{ij})_m^n$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_m^n$ říkáme, že se *sobě rovnají*, a píšeme $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, jestliže jsou téhož typu a odpovídající si prvky jsou sobě rovny, tj.

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

*Součtem* dvou matic $\mathbf{A} = (a_{ij})_m^n$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_m^n$ jednoho a téhož typu $(m,n)$ rozumíme matici $\mathbf{C} = (c_{ij})_m^n$ typu $(m,n)$ takovou, že $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Označujeme ji $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$. Součet matic různého typu se nedefinuje.

*Součinem čísla $\alpha$ s maticí* $\mathbf{A} = (a_{ij})_m^n$ typu $(m,n)$ rozumíme matici $\mathbf{C} = (c_{ij})_m^n$ typu $(m,n)$ takovou, že $c_{ij} = \alpha a_{ij}$. Označujeme ji $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{A}$. Místo $(-1)\mathbf{A}$ často píšeme $-\mathbf{A}$. Místo $\mathbf{A} + (-1)\mathbf{B}$ píšeme $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ a matici nazýváme *rozdílem matic* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$.

Pro sčítání matic a pro násobení matice číslem platí

*Jestliže matice jsou stejného typu, potom*

*1.* $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

*2.* $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$

*3.* $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$

*4. K maticím* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *existuje právě jedna matice* $\mathbf{X}$ *taková, že* $\mathbf{A} + \mathbf{X} = \mathbf{B}$. *Platí* $\mathbf{X} = \mathbf{B} + (-1)\mathbf{A} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$

*5.* $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}, \quad (\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}$

**Gaussovská matice**. Nechť je dána matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_m^n$ typu $(m,n)$. Potom o prvcích $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{kk}$, kde $k = \min(m,n)$, říkáme, že tvoří *hlavní diagonálu.* Jestliže $m \leq n$ (matice $\mathbf{A}$ má nanejvýš tolik řádků kolik sloupců), všechny prvky na hlavní diagonále matice $\mathbf{A}$ jsou různé od nuly a všechny její prvky pod hlavní diagonálou jsou nulové, potom o matici $\mathbf{A}$ říkáme, že je *gaussovská.* Tak např. nechť

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 3 & 7 \\ 3 & 0 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

potom matice $\mathbf{A}$ je gaussovská, zatímco matice $\mathbf{B}$ není gaussovská.

**Transponovaná matice**. Jestliže z matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_m^n$ typu $(m,n)$ vytvoříme novou matici $\mathbf{B} = (b_{ij})_n^m$ typu $(n,m)$ tak, že za r-tý sloupec matice $\mathbf{B}$ dosadíme r-tý řádek matice $\mathbf{A}$, tj.

$$b_{ij} = a_{ji} \quad \text{pro} \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad j = 1,2,\ldots,m\ ,$$

potom tuto matici $\mathbf{B}$ nazveme maticí *transponovanou* k matici $\mathbf{A}$ a označujeme ji $\mathbf{A}^T$. Tak např. matice $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ je transponovanou maticí k matici $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Každý algebraický vektor $\mathbf{x}$ dimense $n$ lze zřejmě považovat za jednořádkovou matici typu $(1,n)$ nebo za jednosloupcovou matici typu $(n,1)$. Není-li výslovně uvedeno jinak, budeme symbolem $\mathbf{x}$ označovat vektor zapsaný jako jednořádková matice. Vektor zapsaný jako jednosloupcová matice budeme označovat symbolem $\mathbf{x}^T$.

**Násobení matice maticí**. Tato operace se definuje pouze v případě, kdy matice $\mathbf{A}$ má tentýž počet sloupců jako matice $\mathbf{B}$ řádků. *Součinem* $\mathbf{AB}$ *matice* $\mathbf{A} = (a_{ij})_m^p$ typu $(m,p)$ *s maticí* $\mathbf{B} = (b_{ij})_p^n$ typu $(p,n)$ nazýváme matici $\mathbf{C} = (c_{ij})_m^n$ typu $(m,n)$

takovou, že řádky a sloupce matic považujeme za vektory a prvek $c_{ij}$ je skalárním součinem i-tého řádku matice $\mathbf{A}$ a j-tého sloupce matice $\mathbf{B}$. Tak např pro matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

dostáváme

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 17 & 5 & 0 \\ 12 & 9 & -3 \\ 16 & 7 & 6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & -1 \\ 9 & 17 & 16 \end{bmatrix}$$

Pro násobení matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ platí pravidla

*1.* $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$
*2.* $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC} \quad , \qquad \mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{CA}+\mathbf{CB}$
*3.* $\mathbf{OA} = \mathbf{O}, \quad \mathbf{AO} = \mathbf{O}$
*4.* $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$
*5.* $\alpha(\mathbf{AB}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B})$

*pokud ovšem jsou v těchto rovnostech definovány součty a součiny příslušných matic (tj. mají-li matice* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ *předepsaný typ).*

Komutativní zákon obecně neplatí, nemusí tedy platit rovnost $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. Vid2li jsme to ve výše uvedeném příkladu. V případě, že rovnost $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ platí, potom říkáme, že matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *komutují.* Není také obecně pravda, že jestliže součin dvou matic je nulový, potom alespoň jedna z nich je nulová.

Nechť je dána libovolná soustava $m$ lineárních rovnic o $n$ neznámých:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & a_{13}x_3+ & \ldots+ & a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+ & a_{23}x_3+ & \ldots+ & a_{2n}x_n = & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1+ & a_{m2}x_2+ & a_{m3}x_3+ & \ldots+ & a_{mn}x_n = & b_m \end{array}$$

Zavedeme-li označení

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

potom soustavu lze zřejmě psát obzvláště jednoduše a přehledně ve tvaru

$$\mathbf{Ax}^T = \mathbf{b}^T$$

Podotkněme, že v posledním vzorci matice $\mathbf{A}$ se nazývá *matice soustavy*, vektor $\mathbf{x}$ se nazývá *vektor neznámých* a vektor $\mathbf{b}$ *vektor pravých stran.*

**Čtvercové matice**. Jestliže v matici $\mathbf{A} = (a_{ij})_m^n$ typu $(m,n)$ je $m = n$, potom ji nazýváme *čtvercovou maticí řádu n*. Čtvercovou matici jejíž všechny prvky neležící na hlavní diagonále jsou nulové (tj. $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$) nazýváme *diagonální maticí.* Jestliže v diagonální matici všechny prvky na hlavní diagonále jsou rovny jedné, potom ji nazýváme *jednotkovou maticí řádu* $n$ a značujeme $\mathbf{E}_n$, krátce $\mathbf{E}$. V jednotkové matici tedy platí $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$, $\quad a_{ij} = 1$ pro $i = j$.

Jestliže ve čtvercové matici všechny prvky pod hlavní diagonálou jsou rovny nule, potom ji nazýváme *horní trojúhelníkovou maticí.* V horní trojúhelníkové matici tedy platí $a_{ij} = 0$ pro $j < i$. Podobně definujeme *dolní trojúhelníkovou matici.*

Jestliže ve čtvercové matici $\mathbf{A} = (a_{ij})_n^n$ pro všechny její prvky platí $a_{ij} = a_{ji}$, potom ji nazýváme *symetrickou maticí.* Pro symetrickou matici $\mathbf{A}$ tedy platí $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. Jestliže však platí $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$, potom $\mathbf{A}$ nazýváme *antisymetrickou maticí.*

Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})_n^n$ je čtvercová matice řádu $n$. Potom součet všech jejích prvků ležících na hlavní diagonále, tj. číslo $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$, nazýváme *stopou matice.*

Nechť $\mathbf{A}$ je libovolná matice typu $(m, n)$ a nechť $\mathbf{E}_m$, $\mathbf{E}_n$ jsou jednotkové matice řádu $m$ a $n$. Potom zřejmě platí $\mathbf{A}\mathbf{E}_n = \mathbf{A} \quad , \quad \mathbf{E}_m\mathbf{A} = \mathbf{A}$.

Nechť $\mathbf{A}$ je libovolná čtvercová matice řádu $n$ a $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \quad \alpha_k \neq 0$, jsou libovolná čísla. Potom místo $\mathbf{AA}$ často píšeme $\mathbf{A}^2$, místo $\mathbf{AAA}$ píšeme $\mathbf{A}^3$ atd. Výraz $p(\mathbf{A}) = \alpha_k\mathbf{A}^k + \alpha_{k-1}\mathbf{A}^{k-1} + \cdots + \alpha_2\mathbf{A}^2 + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_0\mathbf{E}_n$ pak nazýváme *polynomem $k$-tého stupně v matici* $\mathbf{A}$.

**Inverzní matice**. Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu $n$. Jestliže existuje čtvercová matice $\mathbf{B}$ téhož řádu $n$ taková, že $\mathbf{AB} = \mathbf{E}_n$, kde $\mathbf{E}_n$ je jednotková matice řádu $n$, potom tuto matici nazýváme *inverzní maticí* k matici $\mathbf{A}$ a označujeme ji $\mathbf{A}^{inv}$ nebo $\mathbf{A}^{-1}$ (někdy také $\dfrac{\mathbf{E}_n}{\mathbf{A}}$). Lze dokázat, že jestliže $\mathbf{AB} = \mathbf{E}_n$, potom i $\mathbf{BA} = \mathbf{E}_n$.

Ne ke každé matici $\mathbf{A}$ existuje inverzní matice, tj. ne každá matice $\mathbf{A}$ je *invertovatelná.*

Pro invertovatelné matice platí

*a) ke každé matici* $\mathbf{A}$ *existuje nanejvýš jedna inverzní matice,*

*b)* $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ *(tento vztah je podobný jako pro transposici součinu).*

**Ortogonální matice**. O čtvercové matici $\mathbf{A}$ řádu $n$ říkáme, že je *ortogonální,* jestliže je invertovatelná a platí $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$

Ortogonalitu matice $\mathbf{A}$ snadno určíme podle následující věty:

*Nechť* $\mathbf{A} = (a_{ij})_n^n$ *je ortogonální matice řádu $n$. Potom skalární součin jejího libovolného řádku se sebou samým je roven jedné a s jakýmkoliv jiným řádkem je roven nule. Obdobné tvrzení platí o sloupcích ortogonální matice* $\mathbf{A}$. *Naopak, jestliže pro prvky matice* $\mathbf{A} = (a_{ij})_n^n$ *platí výše uvedené vztahy, potom matice* $\mathbf{A}$ *je ortogonální.*

**Hodnost matice**. *Hodností matice* $\mathbf{A}$ typu $(m, n)$ nazýváme hodnost soustavy vektorů vytvořených řádky této matice. Označujeme ji $h(\mathbf{A})$. Matice $\mathbf{A}$ má tedy hodnost $h(\mathbf{A})$, jestliže v ní existuje $h(\mathbf{A})$ lineárně nezávislých řádků a ne více.

Platí věta:

*Hodnost libovolné matice* $\mathbf{A}$ *typu* $(m, n)$ *se nezmění*

*a) zaměníme-li pořadí řádků v matici,*

*b) zaměníme-li pořadí sloupců v matici,*

*c) vynásobíme-li kterýkoliv řádek nenulovým číslem,*

*d) připočteme-li k jednomu řádku matice lineární kombinaci ostatních řádků matice* *e) vynecháme-li v matici řádek, který je lineární kombinací ostatních řádků (takovým je například nulový řádek a řádek rovný jinému řádku).*

Dále se velmi snadno přesvědčíme, že platí věta:

*Hodnost každé gaussovské matice* $\mathbf{A}$ *typu* $(m, n)$*, kde* $m \leq n$*, je rovna číslu* $m$*.*

Obě předcházející věty nám umožňují snadno spočítat hodnost libovolné matice $\mathbf{A}$ (a libovolné soustavy vektorů z prostoru $V_n$). Stačí totiž upravit matici $\mathbf{A}$ na gaussovský tvar. Povolené úpravy jsou výše uvedeny. Volíme je zcela analogicky jako v případě Gaussovy eliminační metody pro soustavu rovnic.

**Vlastní čísla a vlastní vektory matice**. Nechť je dána čtvercová matice $\mathbf{A}$ (obecně komplexní) n-tého řádu. Jestliže existuje komplexní číslo $\lambda$ a nenulový vektor $\mathbf{x}$ takový, že $\mathbf{A}\mathbf{x}^T = \lambda \mathbf{x}^T$, potom řekneme, že $\lambda$ je *vlastním číslem matice* $\mathbf{A}$ a $\mathbf{x}$ jejím *vlastním vektorem příslušným tomuto vlastnímu číslu.* Množinu všech vlastních čísel matice $\mathbf{A}$ nazýváme jejím *spektrem.*

## 5. DETERMINANTY

**Definice determinantu**. Nechť je dána čtvercová matice $\mathbf{A}$ n - tého řádu, tj.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Nechť $p_1, p_2, \dots, p_n$ je libovolná permutace čísel $1, 2, \dots,$ (permutací je $n\,!$). Utvořme součin $a_{1p_1} \cdot a_{2p_2} \cdot a_{3p_3} \cdots a_{np_n}$ a vynásobme jej číslem (-1) v případě, že permutace je lichá. Jinak ponechejme součin beze změny. Provedeme-li to pro všechny permutace, dostneme $n\,!$ součinů. Jejich součet se pak nazývá *determinant n - tého řádu* matice $\mathbf{A}$ a označuje se $\det \mathbf{A}$ nebo také

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \text{nebo} \qquad \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Platí tedy

$$\det \mathbf{A} = \sum_{p_1, p_2, \dots, p_n} (-1)^{r(p_1, p_2, \dots, p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n},$$

kde součet se bere přes všechny permutace $p_1, p_2, \dots, p_n$ čísel $1, 2, \dots, n$ a $r(p_1, \dots p_n)$ je počet inverzí v dané permutaci (je-li permutace lichá, pak tento počet je liché číslo a platí $(-1)^{r(p_1, p_2, \dots, p_n)} = -1$, jinak platí $(-1)^{r(p_1, p_2, \dots, p_n)} = 1$).

**Křížové a Sarrusovo pravidlo**. Odvoďme vzorec pro výpočet determinantů druhého řádu. Permutace čísel 1,2 jsou: 1,2 (sudá) a 2,1 (lichá). Výpočet tedy probíhá podle vzorce

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Vzorec se dobře pamatuje podle vyznačení uvedeného v determinantu a nazývaného *křížovým pravidlem.* Plné čárce odpovídá znaménko plus, přerušované čárce znaménko mínus.

Odvoďme vzorec pro výpočet determinantu třetího řádu. Všechny možné permutace čísel 1,2,3 jsou: 1,2,3(sudá), 1,3,2(lichá), 2,1,3(lichá),2,3,1(sudá), 3,1,2(sudá), 3,2,1(lichá). Tedy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

Vzorec se dobře pamatuje podle vyznačení uvedeného v determinantu a nazývaného *Sarrusovým pravidlem.* Zde opět plným čárkám odpovídá znaménko plus a přerušovaným čárkám znaménko mínus.

**Subdeterminant a algebraický doplněk**. Jestliže v matici $\mathbf{A} = (a_{ij})_m^n$ typu $(m, n)$ vynecháme r-tý řádek a s-tý sloupec, pak dostaneme novou matici typu $(m-1, n-1)$, kterou nazýváme *submaticí matice* $\mathbf{A}$ *příslušnou k r-tému řádku a s-tému sloupci* nebo krátce, *příslušnou k prvku* $a_{rs}$ a označujeme ji $\mathbf{A}_{rs}$. Jestliže matice $\mathbf{A}$ je čtvercová řádu $n$, potom $\det \mathbf{A}_{rs}$ nazýváme *subdeterminantem determinantu matice* $\mathbf{A}$ *příslušným k prvku* $a_{rs}$. Číslo $(-1)^{r+s} \cdot \det \mathbf{A}_{rs}$ nazýváme *algebraickým doplňkem příslušným k prvku* $a_{rs}$ a označujeme jej $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{rs}$. Tak např. pro matici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ máme $\det \mathbf{A}_{34} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ a $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{34} = (-1)^{3+4} det \mathbf{A}_{34} = -\det \mathbf{A}_{34}$.

**Cramerovo pravidlo a výpočet inverzní matice**. Čtvercovou matici $\mathbf{A}$ jejíž determinant je různý od nuly nazýváme *regulární maticí.* Jestliže $\det \mathbf{A} = 0$, potom o matici $\mathbf{A}$ říkáme, že je *singulární.*

Zavedení pojmu determinant bylo v minulosti převážně motivováno snahou odvodit vzorce pro řešení soustav $n$ rovnic o $n$ neznámých a pro výpočet inverzních matic. Byla dokázána pravidla:

$\alpha$)*Jestliže je dána soustava n rovnic o n neznámých* $\mathbf{A}\mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T$ *s regulární maticí* $\mathbf{A}$*, potom*

$$x_1 = \frac{\det \mathbf{A}_1}{\det \mathbf{A}} \quad , \quad x_2 = \frac{\det \mathbf{A}_2}{\det \mathbf{A}} \quad , \quad \dots \quad , \quad x_n = \frac{\det \mathbf{A}_n}{\det \mathbf{A}},$$

*kde* $\mathbf{A}_k$, *k=1,2, ... ,n, je matice vytvořená z matice* $\mathbf{A}$ *tím, že její k-tý sloupec je nahrazen sloupcem* $\mathbf{b}^T$. *Vzorec se nazývá Cramerovo pravidlo.*

$\beta$) *Inverzní matici* $\mathbf{A}^{-1} = \left(a_{ij}^*\right)_n^n$ *k matici* $\mathbf{A} = (a_{ij})_n^n$, *pokud matice* $\mathbf{A}$ *je regulární, lze spočítat podle vzorců*

$$a_{ij}^* = \frac{\boldsymbol{\mathcal{A}}_{ji}}{\det \mathbf{A}} \quad , \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Obě tato pravidla mají značný teoretický význam. Pro praktické použití se však vůbec nehodí.

**Základní vlastnosti determinantů.**Jsou uvedeny v následující větě

*Nechť* $\mathbf{A} = (a_{ij})_n^n$ *je čtvercová matice n-tého řádu. Potom platí*

*a) Jestliže* $\mathbf{B}$ *je matice, která vznikne z matice* $\mathbf{A}$ *tím, že v ní vyměníme mezi sebou dva řádky, eventuálně dva sloupce, potom platí* $\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$.

*b) Jestliže* $\mathbf{C}$ *je matice, která vznikne z matice* $\mathbf{A}$ *tím, že v ní vynásobíme některý řádek, eventuálně některý sloupec, číslem* $\lambda$*, potom platí* $\det \mathbf{C} = \lambda \det \mathbf{A}$.

*c) Jestliže matice* $\mathbf{A}$ *má dva stejné řádky, eventuálně dva stejné sloupce, potom její determinant je roven nule.*

*d) Jestliže matice* $\mathbf{A}$ *obsahuje nulový řádek, eventuálně nulový sloupec, potom její determinant je roven nule.*

**Rozvoj determinantu podle řádku a podle sloupce**. Platí věta

*Nechť* $\mathbf{A} = (a_{ij})_n^n$ *je čtvercová matice n-tého řádu a nechť r je libovolné číslo z množiny* $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$*. Potom platí vztahy*

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= a_{r1}\boldsymbol{\mathcal{A}}_{r1} + a_{r2}\boldsymbol{\mathcal{A}}_{r2} + \cdots + a_{rn}\boldsymbol{\mathcal{A}}_{rn}, \\ \det \mathbf{A} &= a_{1r}\boldsymbol{\mathcal{A}}_{1r} + a_{2r}\boldsymbol{\mathcal{A}}_{2r} + \cdots + a_{rn}\boldsymbol{\mathcal{A}}_{nr}, \end{aligned}$$

*kde* $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{ij}$ *je algebraický doplněk příslušný k prvku* $a_{ij}$ *v determinantu matice* $\mathbf{A}$.

Vztahy se nazývají *rozvoj determinantu podle r-tého řádku* a *rozvoj determinantu podle r-tého sloupce.*

Víme, že $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ij}$. Ve vztazích se proto znaménka subdeterminantů $\det \mathbf{A}_{ij}$ střídají.

**Další vlastnosti detertminantů** jsou uvedeny v následující větě

*a) Pro libovolné číslo* $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *platí*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,r-1} & a_{1r} + b_{1r} & a_{1,r+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,r-1} & a_{2r} + b_{2r} & a_{2,r+2} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,r-1} & a_{nr} + b_{nr} & a_{n,r+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nr} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_{1r} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_{2r} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_{nr} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

*b) Jestliže matice* $\mathbf{B}$ *vznikne z matice* $\mathbf{A} = (a_{ij})_n^n$ *tím, že některý její řádek vynásobíme číslem* $\omega$ *a připočteme k jinému řádku, potom* $\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}$*. Totéž platí o sloupcích.*

*c) Determinant horní, eventuálně dolní trojúhelníkové matice je roven součinu prvků ležících na její hlavní diagonále.*

*d) Determinant jednotkové matice je roven jedné.*

Vlastnosti determinantů uvedené v předchjázejících odstavcích a Gaussova eliminační metoda nám dávají návod, jak počítat determinanty.

**Nutná podmínka invertovatelnosti matic**. Pro determinanty platí věta *Nechť* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *jsou čtvercové matice n-tého řádu. Potom platí*

*a)* $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$

*b)* $\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$

Jestliže $\mathbf{A}$ je čtvercová matice n-tého řádu a jestliže k ní existuje inverzní matice $\mathbf{A}^{inv}$ (tj. matice $\mathbf{A}$ je invertovatelná), potom, jak víme, $\mathbf{A}\mathbf{A}^{inv} = \mathbf{E}_n$. Odtud a ze skutečnosti, že determinant jenotkové matice je roven jedné, ihned plyne $\det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{A}^{inv} = 1$, tj. $\det \mathbf{A} \neq 0$ a současně $\det \mathbf{A}^{inv} = \dfrac{1}{\det \mathbf{A}}$. Dostáváme tak větu

*Nutnou podmínkou invertovatelnosti čtvercové matice* $\mathbf{A}$ *je její regulárnost.*

Dále uvidíme, že regulárnost matice $\mathbf{A}$ je i postačující podmínkou její invertovatelnosti.

## 6. SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC.

**Matice a rozšířená matice soustavy**. Soustavu $m$ lineárních rovnic o $n$ neznámých

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

lze psát ve tvaru

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T \quad ,$$

kde jsme zavedli označení

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Matici $\mathbf{A}$ nazýváme *maticí soustavy*, vektor $\mathbf{x}$ *vektorem neznámých* a vektor $\mathbf{b}$ *vektorem pravých stran.*

Přidáme-li k matici $\mathbf{A}$ vektor pravých stran, dostaneme matici

$$\mathbf{A}|\mathbf{b}^T = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right],$$

kterou nazýváme *rozšířenou maticí soustavy.*

**Řešitelnost soustavy. Frobeniova věta**. Platí tzv. *Frobeniova věta*:

*1. Soustava* $\mathbf{A}\mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T$ *má řešení tehdy a jen tehdy, když* $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}^T)$, *tj., když hodnosti matice soustavy a rozšířené matice soustavy se sobě rovnají.*

*2. Jestliže $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}^T) = k$, potom v případě $k < n$ má soustava nekonečně mnoho řešení, která mohou být zapsána pomocí $n - k$ parametrů a v případě $k = n$ má soustava právě jedno řešení.*

V případě, kdy $m = n$ (tj. počet rovnic je roven počtu neznámých), říkáme, že *soustava je čtvercová*. V tomto případě mohou zřejmě nastat dvě možnosti: $h(\mathbf{A}) = n \quad a \quad h(\mathbf{A}) < n$. V prvním případě je automaticky splněn vztah $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}^T)$ a shodně s Frobeniovou větou má tato soustava právě jedno řešení. V tomto případě je $\det \mathbf{A} \neq 0$, tj. matice $\mathbf{A}$ je regulární. Ve druhém případě je $\det \mathbf{A} = 0$, tj. matice $\mathbf{A}$ je singulární a shodně s Frobeniovou větou soustava buďto nemá žádné řešení nebo má nekonečně mnoho řešení.

**Homogenní soustavy**. Jestliže vektor $\mathbf{b}$ pravých stran v soustavě je nulový, tj. soustava má tvar $\mathbf{A}\mathbf{x}^T = \mathbf{o}$, potom o ní říkáme, že je *homogenní*. V tomto případě je automaticky splněna podmínka $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}^T) = k$ a soustava má, shodně s Frobeniovou větou, buďto jedno řešení (v případě $k = n$) anebo nekonečně mnoho řešení (v případě $k < n$). V prvním případě je to pochopitelně pouze nulové řešení. Ve druhém případě pak má kromě nulového i nenulové řešení. Lze ukázat, že mezi všemi řešeními homogenní soustavy existuje $n - k$ lineárně nezávislých řešení a ne více.

**Řešení soustav**. Cramerovo pravidlo pro řešení soustav $n$ rovnic o $n$ neznámých pomocí determinantů se užívá jen zcela výjímečně. Většinou se používá známá *Gaussova eliminační metoda*. Tato metoda spočívá v tom, že postupnými úpravami dosáhneme toho, aby neznámá $x_1$ zůstala v 1. rovnici a byla vyeliminována ze 2. až $m$. rovnice, neznámá $x_2$ zůstala ve 2. rovnici (eventuálně i v první) a byla vyeliminována ze 3. až $m$. rovnice, neznámá $x_3$ zůstala ve 3. rovnici (eventuálně i v první a ve druhé) a byla vyeliminována ze 4. až $m$. rovnice atd. Dostaneme tak z původní soustavy rovnic soustavu ve tvaru (nazveme ji *soustavou v Gaussově tvaru*), kdy je již snadno řešitelná od zadu (tzv zpětný chod). Zmíněné postupné úpravy nemohou být libovolné. Musí mít pochopitelně tu vlastnost, že soustava po úpravě je *ekvivalentní* se soustavou před úpravou, tj., že každé řešení soustavy před úpravou je řešením soustavy po úpravě a naopak. Takovými povolenými úpravami zřejmě jsou:

G1) záměna pořadí rovnic v soustavě,

G2) záměna pořadí členů s neznámými v rovnicích,

G3) vynásobení kterékoliv rovnice libovolným nenulovým číslem,

G4) připočtení ke kterékoliv rovnici libovolné násobky jiných rovnic,

G5) vynechání rovnice, která je součtem libovolných násobků jiných rovnic (odtud plyne, že lze vynechat rovnici tvaru $0.x_1 + 0.x_2 + \cdots + 0.x_n = 0$, říkáme jí nulová rovnice, a také ze všech stejných rovnic ponechat jen jednu).

Uvedené úpravy nazýváme *Gaussovými elementárními úpravami* soustavy rovnic.

Proti metodě používání determinantů má Gaussova eliminační metoda ještě i další velkou výhodu, počet rovnic nemusí být shodný s počtem neznámých.

**Výpočet inverzní matice**. Víme, že nalézt inverzní matici $\mathbf{A}^{inv} = \left(a^*_{ij}\right)^n_n$ ke čtvercové matici $\mathbf{A} = (a_{ij})^n_n$ $n$-tého řádu. znamená řešit maticovou rovnici $\mathbf{A}\mathbf{A}^{inv} = \mathbf{E}_n$, kde $\mathbf{E}_n$ je jednotková mativce $n$-tého řádu. To ovšem znamená řešit $n$ soustav

$$\mathbf{A}\mathbf{S}_r^T = \mathbf{I}_r^T \quad , \quad r = 1, 2, \ldots, n \quad ,$$

kde v první soustavě je vektorem neznámých první sloupec inverzní matice a vektorem pravých stran první sloupec jednotkové matice, ve druhé soustavě je vektorem neznámých druhý sloupec inverzní matice a vektorem pravých stran druhý sloupec jednotkové matice atd. Řešení provádíme Gaussovou eliminační metodou. Využijeme přitom skutečnost, že všechny soustavy mají tutéž matici soustavy $\mathbf{A}$, mění se pouze jejich vektory pravých stran.

**Charakteristická rovnice matice**. Víme, že vlastní čísla čtvercové matice $\mathbf{A}$ $n$-tého řádu jsou taková čísla $\lambda$, pro která má homogenní soustava rovnic $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_n)\, \mathbf{x}^T = \mathbf{o}^T$ nenulové řešení $\mathbf{x}$. To je však možné pouze v případě, kdy determinant soustavy je roven nule. Dospíváme tak k definici: Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})_n^n$ je matice $n$-tého řádu. Potom rovnice

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_n) = 0,$$

tj. rovnice

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

se nazývá *charakteristická rovnice matice* $\mathbf{A}$.

Z definice determinantu ihned plyne, že charakteristická rovnice má tvar

$$\alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0,$$

kde $\lambda$ je neznámé číslo a $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0$ jsou čísla závisející na prvcích matice.

## 7. POLYNOMY A JEJICH PODÍLY.

**Polynom a jeho kořeny**. Ze střední školy víme: Nechť $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ jsou daná reálná, případně komplexní čísla, přičemž $\alpha_n \neq 0$. Pravidlo (výraz), které každému komplexnímu číslu $x$ přiřazuje číslo $p(x)$, kde

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n,$$

nazýváme *polynomem (mnohočlenem)* stupně $n$ v proměnné $x$ s koeficienty $\alpha_i$. Tak např. polynom $q(x) = 3 + 2x$ je polynomem prvního stupně (zvaným *lineárním*), polynom $r(x) = -2+x+3x^2$ je polynomem druhého stupně (zvaným *kvadratickým*), $s(x) = x^4 - 1(= -1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 1 \cdot x^4)$ je polynomem čtvtého stupně.

Jestliže všechny koeficienty $\alpha_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$ jsou reálná čísla, potom polynom nazýváme *reálným polynomem*. Každé komplexní číslo $\xi$ takové, že $p(\xi) = 0$, tj.

$$\alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \dots + \alpha_n \xi^n = 0 \quad ,$$

se nazývá *kořen polynomu* $p(x)$. Každý kořen je tedy řešením rovnice

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n = 0 \quad .$$

Tato rovnice se nazývá *algebraickou rovnicí $n$-tého stupně.*

Např.polynom $s(x)$ má čtyři kořeny $\xi_1 = 1, \xi_2 = -1, \xi_3 = i, \xi_4 = -i$, tj. rovnice $x^4 - 1 = 0$ má čtyři řešení $1, -1, i, -i$.

**Bézoutova věta**. Francouzský matematik E.Bézout odvodil následující velmi důležitou větu

*Nechť $n$ je libovolné přirozené číslo a nechť $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n$ je libovolný polynom $n$-tého stupně. Potom číslo $\xi$ je řešením algebraické rovnice $p(x) = 0$ tehdy a jen tehdy, když pro každé komplexní číslo $x$ platí*

$$p(x) = (x - \xi)q(x),$$

*kde $q(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_{n-1} x^{n-1}$ je polynom $n-1$-ního stupně takový, že $\beta_{n-1} = \alpha_n$*

Znamená to tedy: *Je–li $\xi$ kořenem polynomu $p(x)$, potom $p(x)$ lze dělit beze zbytku polynomem $(x - \xi)$.*

**Základní věta algebry**. Přední místo v algebře zaujímá tzv. základní věta algebry, kterou v r. 1799 dokázal Gauss:

*Každá algebraická rovnice $p(x) = 0$ $n$-tého stupně, kde $n$ je libovolné přirozené číslo (tj. $n \geq 1$), má v oboru komplexních čísel alespoň jedno řešení.*

**D'Alembertova věta**. Ze základní věty algebry a z Bézoutovy věty ihned plyne následující D'Alembertova věta:

*Pro každý polynom $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n$ $n$-tého stupně, kde $n \geq 1$, existuje právě $n$ komplexních čísel $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ (nemusí být všechna navzájem různá) takových, že pro každé komplexní číslo $x$ platí*

$$p(x) = \alpha_n (x - \xi_1)(x - \xi_2) \ldots (x - \xi_n) \tag{7.1}$$

**Rozklad polynomu v komplexním oboru**. Výrazy $(x - \xi_k)$ v (7.1) nazýváme *lineárními kořenovými činiteli* polynomu $p(x)$. Název je odvozen ze skutečnosti, že $p(\xi_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n$, tj., že všechna čísla $\xi_k$ jsou řešeními (kořeny) algebraické rovnice $p(x) = 0$. Někteří činitelé v (7.1) se mohou opakovat. Jestliže nějaký činitel $(x - \xi_r)$ vystupuje v (7.1) právě $t_r$ krát (tj. $t_r$ krát a ne vícekrát), potom říkáme, že číslo $\xi_r$ je *$t_r$-násobným kořenem polynomu $p(x)$*. Vzorec (7.1) lze tedy psát ve tvaru

$$p(x) = \alpha_n (x - \xi_1)^{t_1} (x - \xi_2)^{t_2} \cdots (x - \xi_s)^{t_s}, \tag{7.2}$$

kde $t_1 + t_2 + \cdots + t_s = n$ a všechny kořeny $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ jsou navzájem různé. Vzorci (7.2) říkáme *rozklad polynomu v komplexním oboru.* Tak např. $x^4 - 1 = (x+1)(x-1)(x+i)(x-i)$, $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$.

Všimněme si, že počítáme-li každý $k$-násobný kořen za $k$ kořenů, má algebraická rovnice $p(x) = 0$ stupně $n \geq 1$ právě $n$ řešení. Odtud ihned plyne, že

*má-li rovnice $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n = 0$ více než $n$ řešení, pak nutně $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, tj. $p(x) = 0$ pro každé číslo $x$.*

Takový polynom pak nazýváme *nulovým polynomem* (nemá žádný stupeň).

**Věta o imaginárních kořenech reálných polynomů**. Reálné polynomy mají speciální vlastnost, kterou nyní uvedeme ve tvaru tzv.*věty o imaginárních kořenech:*

*Nechť $p(x)$ je reálný polynom. Má-li tento polynom kořen $\xi = u + iv$, potom i komplexně sdružené číslo $\bar{\xi} = u - iv$ je kořenem tohoto polynomu. Je-li kořen $\xi = u + iv$ $k$-násobný, je i kořen $\bar{\xi} = u - iv$ $k$-násobný.*

Podotkněme, že $(x - \xi)(x - \bar{\xi}) = (x - u - iv)(x - u + iv) = (x - u)^2 + v^2$ a to je reálný kvadratický polynom.

**Rozklad reálného polynomu v reálném oboru**. Shodně s předcházející větou plyne z D'Alembertovy věty ihned závěr:

*Nechť $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n$ je reálný polynom stupně $n \geq 1$. Nechť $\xi_r, \quad r = 1, 2, \ldots, j$ jsou všechny jeho reálné kořeny, každý s násobností $t_r$ a nechť $\xi_s = u_s + iv_s, \quad s = 1, 2, \ldots, k$ jsou všechny jeho imaginární kořeny, každý s násobností $q_s$. Potom platí*

$$\begin{aligned} p(x) =&\alpha_n \left(x - \xi_n\right)^{t_1} \cdot \left(x - \xi_2\right)^{t_2} \cdots \left(x - \xi_j\right)^{t_j} \cdot \\ &\cdot \left[\left(x - u_1\right)^2 + v_1^2\right]^{q_1} \cdot \left[\left(x - u_2\right)^2 + v_2^2\right]^{q_2} \cdots \left[\left(x - u_k\right)^2 + v_k^2\right]^{q_k}, \end{aligned} \tag{7.3}$$

*přičemž*

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_j + 2\left(q_1 + q_2 + \cdots + q_k\right) = n.$$

Výrazy $\left(x - u_s\right)^2 + v_s^2$ v (7.3) nazýváme *kvadratickými kořenovými činiteli* a samotný vzorec (7.3) nazýváme *rozkladem reálného polynomu v reálném oboru.*

**Reálný racionální výraz**. Podíl dvou reálných polynomů nazýváme *reálným racionálním výrazem.* Jestliže v reálném racionálním výrazu $\frac{p(x)}{q(x)}$ je stupeň polynomu $p(x)$ menší než stupeň polynomu $q(x)$, potom reálný racionální výraz se nazývá *reálný ryzí racionální výraz.* Platí věta, že

*každý reálný racionální výraz lze vyjádřit jako součet reálného polynomu a reálného ryzího racionálního výrazu.*

**Rozklad reálného ryzího racionálního výrazu na parciální zlomky**. V další části, zejména v kapitole o integrování, hraje důležitou roli následující věta:

*Nechť $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ je reálný ryzí racionální výraz a nechť polynom $q(x)$ stupně $n$ má v reálném oboru rozklad*

$$\begin{aligned} q(x) \quad = \quad & \alpha_n \left(x - \xi_1\right)^{t_1} \left(x - \xi_2\right)^{t_2} \cdots \left(x - \xi_j\right)^{t_j} \cdot \\ & \cdot \left[(x - u_1)^2 + v_1^2\right]^{q_1} \left[(x - u_2)^2 + v_2^2\right]^{q_2} \cdots \left[(x - u_k)^2 + v_k^2\right]^{q_k}, \end{aligned}$$

*přičemž*

$$t_1 + t_2 + \cdots + 2(q_1 + q_2 + \cdots + q_k) = n.$$

*Potom existují reálná čísla $A_{rs}, M_{rs}, N_{rs}$, v celkovém počtu $n$, taková, že platí*

$$\begin{aligned}
r(x) \quad = \quad & \tfrac{A_{11}}{x-\xi_1} + \tfrac{A_{12}}{(x-\xi_1)^2} + \cdots + \tfrac{A_{1t_1}}{(x-\xi_1)^{t_1}} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \tfrac{A_{j1}}{x-\xi_j} + \tfrac{A_{j2}}{(x-\xi_j)^2} + \cdots + \tfrac{A_{jt_j}}{(x-\xi_j)^{t_j}} \\
& + \tfrac{M_{11}x+N_{11}}{(x-u_1)^2+v_1^2} + \tfrac{M_{12}x+N_{12}}{[(x-u_1)^2+v_1^2]^2} + \cdots + \tfrac{M_{1q_1}x+N_{1q_1}}{[(x-u_1)^2+v_1^2]^{q_1}} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \tfrac{M_{k1}x+N_{k1}}{(x-u_k)^2+v_1^2} + \tfrac{M_{k2}x+N_{k2}}{\left[(x-u_k)^2+v_k^2\right]^2} + \cdots + \tfrac{M_{kq_k}x+N_{kq_k}}{\left[(x-u_k)^2+v_k^2\right]^{q_k}}
\end{aligned}$$

Výrazy

$$\frac{A}{(x-\xi)^r} \quad , \quad \frac{Mx+N}{[(x-u)^2+v^2]^s}$$

se nazývají *parciální zlomky* a samotný vzorec pak *rozklad na parciální zlomky.*

# C. ÚVOD DO ANALYTICKÉ GEOMETRIE.

## 8. GEOMETRICKÉ VEKTORY.

**Kartézská soustava souřadnic**. Zvolme v prostoru tři navzájem kolmé přímky $O_x, O_y, O_z$ procházející společným bodem $O$ a považujme je za číselné osy s jednou a touže jednotkou. Číselné osy orientujme (tj. uveďme, které poloosy jsou kladné a které záporné) takto: osy $O_x, O_y$ libovolně, osu $O_z$ tak, že pozorujeme-li osy $O_x, O_y$ z některého bodu kladné části osy $O_z$, musela by kladná část osy $O_x$ opsat kladně orientovaný (tj. proti směru otáčení hodinových ručiček) úhel $\pi/2$, aby poprvé splynula s kladnou částí osy $O_y$. Říkáme pak, že jsme vytvořili *pravoúhlou pravotočivou soustavu souřadnic.* Podobně bychom mohli definovat levotočivou soustavu. Budeme pracovat pouze v pravoúhlé pravotočivé soustavě, kterou krátce nazýváme *kartézskou soustavou souřadnic.* Přímky $O_x, O_y, O_z$ pak nazveme *souřadnicovými osami* a roviny určené dvojicemi souřadnicových os $(O_x, O_y), (O_y, O_z), (O_x, O_z)$ nazveme *souřadnicovými rovinami (půdorysnou, nárysnou a bokorysnou).* Jestliže z bodu $A$ v prostoru spustíme kolmice na číselné osy $O_x, O_y, O_z$, potom jejich paty $P, Q, R$ odpovídají číslům $a_1, a_2, a_3$, která nazýváme *první (x-ovou), druhou (y-ovou) a třetí (z-ovou) souřadnicí bodu $A$* a označujeme $A = (a_1, a_2, a_3)$. Pro každé dva různé body v prostoru dostaneme dvě různé (uspořádané) trojice čísel (souřadnic) a opačně, dvěma různým trojicím odpovídají dva různé body. Prostor, ve kterém jsme zavedli kartézskou soustavu souřadnic, krátce *kartézský prostor*, lze tedy považovat za trojrozměrný vektorový prostor $V_3$ nad oborem reálných čísel a jeho body za algebraické vektory dimense 3, pokud ovšem definujeme rovnost dvou vektorů, jejich součet a součin reálného čísla s vektorem tak, jak je uvedeno ve čtvrté kapitole. Souřadnicovou rovinu $(O_x, O_y)$ krátce nazýváme *kartézskou rovinou.* Opět bychom se snadno přesvědčili, že ji lze považovat za dvojrozměrný vektorový prostor $V_2$. Všechny body půdorysny však můžeme pochopitelně interpretovat také jako body kartézského prostoru, jejichž třetí souřadnice je nulová. A tuto interpretaci budeme většinou používat. Podobně, všechny body osy $O_x$ můžeme interpretovat jako body kartézského prostoru, jejichž druhá a třetí souřadnice jsou nulové.

**Euklidovský prostor**. Jestliže v kartézském prostoru, shodně s Pythagorovou větou, zavedeme vzdálenost dvou bodů $A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1, b_2, b_3)$ vztahem

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2},$$

potom říkáme, že jsme kartézský prostor *metrizovali euklidovskou vzdáleností* a nazveme jej *euklidovským prostorem* $\mathcal{R}_3$.

Poznamenejme, že euklidovskou vzdálenost lze formálně zavést v každém $n$-rozměrném vektorovém prostoru $V_n$ nad oborem reálných čísel vztahem

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2},$$

kde $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \cdots, a_n], \quad \mathbf{b} = [b_1, b_2, \cdots, b_n]$.

**Vektory ve fyzice**. Ve fyzice a v technických vědách se vyskytují veličiny různého charakteru. Ty, které jsou charakterizovány pouze velikostí (a samozřejmě rozměrem a fyzikálním významem) nazýváme *skalárními veličinami.* Jsou to například čas, teplota atd. Pro jejich popis se užívají čísla. Ty veličiny, které jsou kromě velikosti, rozměru a fyzikálního významu charakterizovány navíc směrem a orientací nazýváme *vektorovými veličinami.* Jsou to například síla, okamžitá rychlost atd. Pro jejich popis se používají tak zvané *volné (geometrické) vektory, vázané vektory a klouzavé vektory.* Tyto pojmy si v dalších částech vysvětlíme.

**8.6. Orientovaná úsečka**. *Orientovanou úsečkou* $\overrightarrow{AB}$ v euklidovském prostoru $\mathcal{R}_3$ rozumíme nejkratší spojnici uspořádané dvojice $(A, B)$ bodů $A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1, b_2, b_3)$ tohoto prostoru. Bod $A$ nazýváme *počátečním*, bod $B$ *koncovým bodem* úsečky. O úsečce $\overrightarrow{BA}$ pak říkáme, že je *orientována opačně* než úsečka $\overrightarrow{AB}$. Čísla $b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3$ nazýváme *první, druhou a třetí souřadnicí orientované úsečky* $\overrightarrow{AB}$ a píšeme $\overrightarrow{AB} = (b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3)$. V případě, kdy koncový bod $B$ úsečky splývá s jejím počátečním bodem $A$, tj. $B = A$, potom orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$ se redukuje do jednoho bodu a má zřejmě všechny tři souřadnice nulové. Číslo
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$
nazýváme *velikostí (délkou) úsečky* $\overrightarrow{AB}$ , kde pro přehlednost jsme použili pouze kartézskou rovinu).

Všimněme si, že každá orientovaná úsečka $\overrightarrow{CD}$, kde $C = (c_1, c_2, c_3)$, $D = (d_1, d_2, d_3)$, která vznikne rovnoběžným posunutím úsečky $\overrightarrow{AB}$ má stejné souřadnice, tj. $d_1 - c_1 = b_1 - a_1, d_2 - c_2 = b_2 - a_2, d_3 - c_3 = b_3 - a_3$. Mezi tyto úsečky patří i orientovaná úsečka $\overrightarrow{OU}$, kde $O = (0, 0, 0)), U = (u_1, u_2, u_3)$, tedy $u_1 = b_1 - a_1, u_2 = b_2 - a_2, u_3 = b_3 - a_3$. Orientované úsečky $\overrightarrow{DC}$ a $\overrightarrow{UO}$ mají naopak souřadnice opačné. Všimněme si dále, že všechny tyto úsečky jsou navzájem rovnoběžné, stejně dlouhé (mají tutéž velikost rovnou číslu $\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$) a vyznačují tentýž směr. Naopak, orientovaná úsečka, která mezi ně nepatří, má nutně jiné souřadnice $v_1, v_2, v_3$, tj. $(v_1, v_2, v_3) \neq (u_1, u_2, u_3)$.

**Geometrický vektor**. Množinu všech orientovaných úseček v euklidovském prostoru $\mathcal{R}_3$, které mají jedny a tytéž souřadnice $v_1, v_2, v_3$ (v uvedeném pořadí) nazýváme *geometrickým vektorem* v $\mathcal{R}_3$ a označujeme $\overrightarrow{v}$ anebo také $(v_1, v_2, v_3)$. Každou orientovanou úsečku $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{v}$ budeme nazývat *reprezentantem vektoru* $\overrightarrow{v}$ *s počátkem* $A$, nebo také *vektorem* $\overrightarrow{v}$ *s počátečním bodem* $A$ a naopak, o vektoru $\overrightarrow{v}$ budeme říkat, že je *indukován* orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$. Reprezentanta vektoru $\overrightarrow{v}$ s počátkem $O = (0, 0, 0)$ budeme nazývat *polohovým reprezentantem* vektoru $\overrightarrow{v}$ (ve fyzice se často nazývá *polohovým vektorem*). Shodně s definicí rovnosti dvou množin říkáme o dvou geometrických vektorech $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$, že se *sobě rovnají* a píšeme $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$, jestliže $u_1 = v_1, u_2 = v_2, u_3 = v_3$. *Součtem dvou geometrických vektorů* $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ nazýváme geometrický vektor, který označujeme $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ a který definujeme vztahem $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$. *Součinem reálného čísla* $\alpha$ *a geometrického vektoru* $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ nazýváme geometrický vektor, který označujeme $\alpha\overrightarrow{u}$ a který definujeme vztahem $\alpha\overrightarrow{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)$. *Rozdílem dvou geometrických vektorů* $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ nazýváme geometrický vektor, který označujeme $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ a který definujeme vztahem $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + (-1)\overrightarrow{v}$.

**Vztah mezi geometrickým a algebraickým vektorem**. Geometrický vektor s uvedenou definicí sčítání a násobení reálným číslem lze považovat za speciální případ trojrozměrného algebraického reálného vektoru, přesněji řečeno, za jeho geometrickou interpretaci v $\mathcal{R}_3$. Proto pro operace s geometrickými vektory platí všechna pravidla pro algebraické vektory (např. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$ atd.).

Nechť $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ jsou geometrické vektory v $\mathcal{R}_3$ dané vztahy $\overrightarrow{i} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{j} = (0, 1, 0)$, $\overrightarrow{k} = (0, 0, 1)$ a nechť $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ je libovolný geometrický vektor. Potom z definice součtu vektorů a součinu reálného čísla s vektorem ihned plyne $\overrightarrow{v} = v_1\overrightarrow{i} + v_2\overrightarrow{j} + v_3\overrightarrow{k}$, tj. vektor $\overrightarrow{v}$ je lineární kombinací bázových vektorů $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ a čísla $v_1, v_2, v_3$ jsou souřadnicemi vektoru $\overrightarrow{v}$ vzhledem k bázi $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$.

**Skalární součin geometrických vektorů**. Geometrický vektor je speciálním případem algebraického vektoru. Proto i pro geometrické vektory $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ definujeme jejich skalární součin $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ vztahem $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$. Snadno lze dokázat:

*Jestliže* $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$ *jsou libovolné geometrické vektory a* $\alpha$ *je libovolné reálné číslo, potom platí*

*a)* $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$

*b)* $(\alpha\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \alpha(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$

*c)* $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$

*d)* $\left|\overrightarrow{u}\right| = \sqrt{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}}$, *kde* $\left|\overrightarrow{u}\right|$ *je velikost vektoru* $\overrightarrow{u}$*, tj., shodně s definicí velikosti úsečky,* $\left|\overrightarrow{u}\right| = \sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$.

**Odchylka dvou geometrických vektorů**. Dvě polopřímky $p, q$ se společným počátkem svírají dva úhly jejichž součet je $2\pi$. *Úhlem polopřímek* $p, q$ nazýváme vždy ten úhel $\omega$ pro který platí $0 \le \omega \le \pi$.

*Odchylkou dvou nenulových geometrických vektorů* $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ nazýváme úhel $\omega \in \langle 0, \pi\rangle$ polopřímek $OU, OV$, kde $\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV}$ jsou polohoví reprezentanti vektorů $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ . Jestliže $\omega = \pi/2$, potom o vektorech $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ říkáme, že jsou *orthogonální (kolmé).*

**Vztah mezi odchylkou a skalárním součinem vektorů**. V aplikacích je velmi důležitá formule:

*Jestliže* $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *jsou libovolné nenulové vektory a* $\omega$ *je jejich odchylka, potom platí*

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\cos\omega$$

Poznamenejme, že odtud ihned plyne:

*Skalární součin dvou nenulových geometrických vektorů je roven nule tehdy a jen tehdy, když vektory jsou orthogonální.*

**Směrové kosiny vektoru**. Snadnmo se přesvědčíme, že orty $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ jsou navzájem orthogonální a jednotkové (tj., jejich velikost je rovna jedné). Nechť $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ je libovolný nenulový geometrický vektor. Kosiny odchylek, které svírá vektor $\overrightarrow{v}$ s jednotlivými ortami se nazývají *směrovými kosiny vektoru* $\overrightarrow{v}$ a označují se $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$. V aplikacích se často používá vzorec

$$\frac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|} = \left(\frac{v_1}{|\overrightarrow{v}|}, \frac{v_2}{|\overrightarrow{v}|}, \frac{v_3}{|\overrightarrow{v}|}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

**Vektorový součin vektorů**. Moment síly a řada dalších pojmů v aplikacích nás vedou k následující definici: Nechť $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ jsou nenulové geometrické vektory a $\omega$ jejich odchylka. *Vektorovým součinem vektorů* $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ (v tomto pořadí) rozumíme geometrický vektor $\overrightarrow{w}$ takový, že

a) je kolmý na oba vektory $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$,

b) jeho velikost $|\overrightarrow{w}|$ je dána vztahem $|\overrightarrow{w}| = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\sin\omega$,

c) uspořádaná trojice polohových reprezentantů vektorů $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ tvoří pravotočivý systém, který je definován obdobně jako pravotočivá soustava souřadnic s tím rozdílem, že $\omega \in \langle 0, \pi\rangle$.

Vektor $\overrightarrow{w}$ se často označuje $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ (v tomto pořadí).

Vektorový součin definujeme i v případě, kdy některý z vektorů $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ je nulový. V tomto případě přímo z definice položíme $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (0, 0, 0)$.

Z vlastnosti b) ihned plyne, že

*vektorový součin dvou nenulových vektorů $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ je nulovým vektorem tehdy a jen tehdy, když jejich odchylka je rovna nule, tj., když $\overrightarrow{v} = \alpha \overrightarrow{u}$, kde $\alpha$ je reálné číslo. V tomto případě říkáme, že vektory $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ jsou kolineární.*

Z vlastnosti b) dále ihned plyne geometrická interpretace velikosti vektorového součinu:

*velikost vektorového součinu $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ je číselně rovna obsahu rovnoběžníku vytvořeného úsečkami $\overline{AB}, \overline{AC}$, kde $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{u}, \overrightarrow{AC} \in \overrightarrow{v}$.*

**Vlastnosti vektorového součinu**. Snadno lze dokázat větu:

*Jestliže $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3), \overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3), \overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$ jsou libovolné geometrické vektory a $\alpha, \beta$ jsou libovolná reálná čísla, potom platí*

*a)* $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u})$, *tzv. antikomutativní zákon,*
*b)* $\alpha \overrightarrow{u} \times \beta \overrightarrow{v} = \alpha\beta(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})$,
*c)* $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$, *tzv. první distributivní zákon,*
*d)* $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}$, *tzv. druhý distributivní zákon.*

**Výpočet souřadnic vektorového součinu**. Platí věta:

*Jsou–li $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3), \overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ geometrické vektory, potom pro jejich vektorový součin $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ platí*

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1)$$

Tento vzorec lze také zapsat ve tvaru

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

**Objem rovnoběžnostěnu a čtyřstěnu**. Objemy $v_r$ rovnoběžnostěnu a objem $v_c$ čtyřstěnu zadaných úsečkami $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ jsou dány vztahy

$$v_r = |\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})|, \quad v_c = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})\right|$$

**Smíšený součin vektorů**. Nechť $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3), \overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3), \overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$ jsou libovolné geometrické vektory. *Smíšeným součinem vektorů $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$* (v tomto pořadí) rozumíme číslo, které značíme $[\overrightarrow{u}\ \overrightarrow{v}\ \overrightarrow{w}]$ a které definujeme vztahem

$$\left[\overrightarrow{u}\ \overrightarrow{v}\ \overrightarrow{w}\right] = \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})$$

**Výpočet smíšeného součinu**. Smíšený součin počítáme ze vzorce

$$[\overrightarrow{u}\ \overrightarrow{v}\ \overrightarrow{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

**Vlastnosti smíšeného součinu**. Snadno lze dokázat:

*Jestliže* $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$, $\overrightarrow{z} = (z_1, z_2, z_3)$ *jsou libovolné geometrické vektory a* $\alpha$ *je libovolné reálné číslo, potom platí*

*a)* $[\overrightarrow{u}\ \overrightarrow{v}\ \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{v}\ \overrightarrow{w}\ \overrightarrow{u}] = [\overrightarrow{w}\ \overrightarrow{u}\ \overrightarrow{v}]$

*b)* $[\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\ \overrightarrow{w}\ \overrightarrow{z}] = [\overrightarrow{u}\ \overrightarrow{w}\ \overrightarrow{z}] + [\overrightarrow{v}\ \overrightarrow{w}\ \overrightarrow{z}]$ *(distributivní zákon)*

*c)* $[\alpha\overrightarrow{u}\ \overrightarrow{v}\ \overrightarrow{w}] = \alpha[\overrightarrow{u}\ \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$

*d) Jsou-li alespoň dva vektory sobě rovny, potom smíšený součin je roven nule, např.* $[\overrightarrow{u}\ \overrightarrow{u}\ \overrightarrow{v}] = 0$.

## 9. ANALYTICKÁ GEOMETRIE V PROSTORU.

**Parametrické rovnice přímky**. O přímce v prostoru řekneme, že *má směr nenulového vektoru* $\overrightarrow{s} = (s_1, s_2, s_3)$, jestliže obsahuje orientovanou úsečku $\overrightarrow{CD}$ takovou, že $\overrightarrow{CD} \in \overrightarrow{s}$. Platí věta:

*Nechť v euklidovském prostoru* $\mathcal{R}_3$ *jsou zadány bod* $A = (a_1, a_2, a_3)$ *a nenulový geometrický vektor* $\overrightarrow{s} = (s_1, s_2, s_3)$. *Potom pro každý bod* $P = (p_1, p_2, p_3)$ *ležící na přímce* $q$ *procházející bodem* $A$ *a mající směr vektoru* $\overrightarrow{s}$ *existuje právě jedno reálné číslo* $t$ *takové, že platí*

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + t\,\overrightarrow{s}, \tag{9.1}$$

*kde* $\overrightarrow{p} = (p_1, p_2, p_3)$ *a* $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *jsou geometrické vektory indukované orientovanými úsečkami* $\overrightarrow{OP}$ *a* $\overrightarrow{OA}$ *a naopak, pro každé reálné číslo* $t$ *bod* $P$ *daný vztahem* (1) *leží na přímce* $q$. *Jestliže bod* $P$ *neleží na přímce* $q$, *potom žádné takové číslo* $t$ *neexistuje.*

Rovnici (1) nazýváme *parametrickou rovnicí přímky* $q$ *ve vektorovém tvaru.* Číslo $t$ se nazývá *parametr.*

Porovnáme-li v rovnici (1) jednotlivé složky vektorů a označíme-li $x, y, z$ místo $p_1, p_2, p_3$ dostaneme rovnice

$$x = a_1 + ts_1, \quad y = a_2 + ts_2, \quad z = a_3 + ts_3, \tag{9.2}$$

které se nazývají *parametrické rovnice přímky.*

**Kanonické rovnice přímky**. Za předpokladu $s_i \neq 0, i = 1, 2, 3$ vyeliminováním parametru $t$ z parametrických rovnic (2) dostáváme tzv. *kanonické rovnice přímky* $q$:

$$\frac{x - a_1}{s_1} = \frac{y - a_2}{s_2} = \frac{z - a_3}{s_3}$$

**Vektorová rovnice roviny určené normálovým směrem**. Víme, že libovolná přímka $q$ je kolmá na rovinu $\rho$ tehdy a jen tehdy, když je kolmá na každou přímku ležící v rovině. Odtud ihned plyne věta:

*Nechť v euklidovském prostoru* $\mathcal{R}_3$ *jsou zadány bod* $A = (a_1, a_2, a_3)$ *a nenulový geometrický vektor* $\overrightarrow{n} = (n_1, n_2, n_3)$. *Potom pro každý bod* $P = (p_1, p_2, p_3)$ *ležící v rovině* $\rho$ *procházející bodem* $A$ *a kolmé na vektor* $\overrightarrow{n}$ *platí*

$$(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{n} = 0 \quad , \tag{9.3}$$

*kde* $\overrightarrow{p} = (p_1, p_2, p_3)$ *a* $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *jsou geometrické vektory indukované orientovanými úsečkami* $\overrightarrow{OP}$ *a* $\overrightarrow{OA}$. *Jestliže bod* $P$ *neleží v rovině* $\rho$, *potom pro něj vztah* (3) *neplatí.*

Rovnici (3) nazýváme *vektorovou rovnicí roviny určené kolmým (normálovým) směrem.*

**Obecná rovnice roviny**. Rozepíšeme–li skalární součin (3) ve složkách a píšeme–li $x, y, z$ místo $p_1, p_2, p_3$, dostaneme

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z + d \,=\, 0 \quad , \tag{9.4}$$

kde

$$d \,=\, -(n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3) \,=\, -\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{a} \tag{9.5}$$

Rovnice (4) se nazývá *obecná*, nebo také *normálová rovnice roviny.* Podotkněme, že z rovnice (4) roviny $\rho$ ihned plyne:

*Jestliže počátek* $O = (0, 0, 0)$ *leží v rovině* $\rho$, *potom* $d = 0$ *a naopak, jestliže* $d = 0$, *potom rovina* $\rho$ *prochází počátkem.*

**Obecná rovnice roviny v úsekovém tvaru.** Předpokládejme, že číslo $d$ v obecné rovnici roviny (4) je různé od nuly. Po vydělení rovnice číslem $-d$ a po zavedení označení (předpokládejme, že $n_i \neq 0, i = 1, 2, 3$) $p = -\frac{d}{n_1}$ , $q = -\frac{d}{n_2}$ , $r = -\frac{d}{n_3}$ , rovnice (4) nabude tak zvaný *úsekový tvar*

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} \,=\, 1 \ .$$

**Úhel dvou přímek v prostoru**. Úhel $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, který svírají přímky $p, q$ dané směrovými vektory $\overrightarrow{s}$, $\overrightarrow{r}$ je definován vztahem

$$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{s} \cdot \overrightarrow{r}|}{|\overrightarrow{s}| \cdot |\overrightarrow{r}|}$$

**Úhel přímky a roviny**. Úhlem přímky $q$ a roviny $\rho$ nazýváme úhel, který svírá daná přímka $q$ se svým pravoúhlým průmětem $q'$ do roviny $\rho$.

Snadno se přesvědčíme, že platí věta:

*Úhel* $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, *který svírá přímka* $q$ *mající směr vektoru* $\overrightarrow{s}$ *s rovinou* $\rho$ *mající normálový vektor* $\overrightarrow{n}$, *je dán vztahem*

$$\sin\varphi = \frac{|\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{s}|}{|\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{s}|} \quad .$$

**Úhel dvou rovin**. Úhlem dvou rovin $\rho$ a $\tau$ nazýváme úhel, který svírají normály daných rovin. Zřejmě platí:

*Jestliže $\overrightarrow{m}$ a $\overrightarrow{n}$ jsou normálové směry rovin $\rho$ a $\tau$, potom úhel $\varphi$, který svírají roviny $\rho$ a $\tau$ je dán vztahem*

$$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{m}|}{|\overrightarrow{n}|\cdot|\overrightarrow{m}|} \quad .$$

**Vzdálenost bodu od roviny**. Vzdáleností bodu $Q = (q_1, q_2, q_3)$ od roviny $\rho$ rozumíme délku $v$ úsečky $\overline{QR}$, kde $R$ je kolmý průmět bodu $Q$ do roviny $\rho$.

Platí věta:

*Nechť v prostoru $\mathcal{R}_3$ jsou dány rovina $\rho$ obecnou rovnicí $n_1x + n_2y + n_3z + d = 0$ a bod $Q = (q_1, q_2, q_3)$. Potom vzdálenost $v$ bodu $Q$ od roviny $\rho$ je dána vztahem*

$$v = \frac{|n_1q_1 + n_2q_2 + n_3q_3 + d|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \quad .$$

**Vzdálenost bodu od přímky**. Vzdáleností $v$ bodu $Q = (q_1, q_2, q_3)$ od přímky $r$ v prostoru $\mathcal{R}_3$ rozumíme délku úsečky $\overline{QP}$, kde $P$ je kolmý průmět bodu $Q$ na přímku $r$.

Platí věta:

*Nechť v prostoru $\mathcal{R}_3$ jsou dány bod $Q = (q_1, q_2, q_3)$ a přímka $r$ procházející bodem $A = (a_1, a_2, a_3)$ a mající směr vektoru $\overrightarrow{s}$. Potom vzdálenost $v$ bodu $Q$ od přímky $r$ je dána vztahem*

$$v = \frac{|(q_1 - a_1, q_2 - a_2, q_3 - a_3) \times \overrightarrow{s}|}{|\overrightarrow{s}|} \quad .$$

**Válcové plochy**. Nechť jsou dány křivka $k$ ležící v rovině $\rho$ a přímka $q$, která není rovnoběžná s touto rovinou. Potom všechny přímky rovnoběžné s přímkou $q$ a procházející body křivky $k$ vytvoří plochu, kterou nazýváme *válcovou plochou.* V případě, kdy křivka $k$ leží v některé ze souřadnicových rovin a přímka $q$ je na tuto rovinu kolmá, válcovou plochu nazýváme *kolmou válcovou plochou.* Z kolmých válcových ploch jsou pak nejdůležitější ty, kdy křivkou $k$ je kuželosečka (kružnice, elipsa, hyperbola, parabola). Potom hovoříme o kruhové, eliptické, hyperbolické a parabolické válcové ploše.

**Kuželové a rotační plochy**. Nechť jsou dány křivka $k$ ležící v rovině $\rho$ a bod $V$, který v této rovině neleží. Potom všechny spojnice bodu $V$ s body křivky $k$ vytvoří plochu, kterou nazývyme *kuželovou plochou.*

Nechť jsou dány křivka $k$ ležící v rovině $\rho$ a přímka $q$, která rovněž leží v této rovině. Jestliže rovina $\rho$ rotuje kolem přímky $q$, potom křivka $k$ vytváří plochu, kterou nazýváme *rotační plochou s osou rotace $q$.*

**Kvadriky**. Většina ploch nejčastěji uvažovaných v technické praxi má rovnici tvaru

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + B_1xy + B_2xz + B_3yz + ax + by + cz + d = 0,$$

kde $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, a, b, c, d$ jsou zadaná reálná čísla. Jestliže alespoň jedno z čísel $A_i, B_i$ je různé od nuly, potom plocha se nazývá *kvadratická plocha* nebo krátce *kvadrika.*

# D. DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ.

## 10. FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ

**Obecný pojem zobrazení**. Mějme dvě neprázdné množiny $\mathcal{A}, \mathcal{B}$. *Zobrazením množiny $\mathcal{A}$ do množiny $\mathcal{B}$* rozumíme předpis (pravidlo), který <u>každému</u> prvku $a$ množiny $\mathcal{A}$ přiřadí nějaký <u>jediný</u> prvek $b$ z množiny $\mathcal{B}$. Pojem předpis musíme upřesnit. Definujeme přesně: Zobrazením $f$ množiny $\mathcal{A}$ do množiny $\mathcal{B}$ rozumíme množinu $\mathcal{C}$ všech uspořádaných dvojic $(a, b)$ takových, že $a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$ a přitom je splněna podmínka: každý prvek množiny $\mathcal{A}$ se vyskytuje pouze v jedné dvojici patřící do $\mathcal{C}$.

Skutečnost, že $f$ je zobrazením množiny $\mathcal{A}$ do množiny $\mathcal{B}$ se často zapisuje takto: $f : a \in \mathcal{A} \longrightarrow b \in \mathcal{B}$ anebo krátce $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$,, eventuálně $f : a \longrightarrow b$..

Ve dvojici $(a, b)$ první prvek $a$ se nazývá *vzorem prvku* $b$, druhý prvek $b$ *obrazem prvku* $a$, nebo také *hodnotou zobrazení $f$ v bodě $a$* a označuje se $f(a)$. Místo zápisu $(a, b)$ se pak používá zápis $(a, f(a))$ nebo také $b = f(a)$.

Všechny prvky z množiny $\mathcal{B}$, které se vyskytují alespoň v jedné dvojici $(a, b)$ tvoří podmnožinu množiny $\mathcal{B}$. Tato podmnožina se nazývá *obor hodnot* zobrazení $f$ a často se označuje $\mathcal{H}(f)$, nebo také $f(\mathcal{A})$. Platí tedy

*Prvek $b \in \mathcal{H}(f)$ tehdy a jen tehdy, když existuje (aspoň jeden) prvek $a \in \mathcal{A}$ takový, že $b = f(a)$.*

Množina $\mathcal{A}$ se nazývá *definiční obor* zobrazení $f$ a často se označuje $\mathcal{D}(f)$.

**Reálné a vektorové funkce**. Charakter množin $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ může být různorodý. Budou nás zajímat pouze případy, kdy jejich prvky jsou
a) reálná čísla,
b) algebraické reálné vektory dimense větší než jedna.
Jestliže $\mathcal{B} = \mathcal{R}$ (tj. všechny prvky množiny $\mathcal{B}$ jsou reálná čísla), potom zobrazení $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ nazýváme *reálnou funkcí.* Jestliže $\mathcal{B} = \mathcal{R}_m$ (tj. všechny prvky množiny $\mathcal{B}$ jsou uspořádané m-tice reálných čísel) a přitom $m \geq 2$, potom zobrazení nazýváme *reálnou vektorovou funkcí.* Jestliže zobrazení je reálnou nebo reálnou vektorovou funkcí a současně $\mathcal{A} \subset \mathcal{R}$, eventuálně $\mathcal{A} \subset \mathcal{R}_n$, potom hovoříme o reálné nebo o reálné vektorové funkci *jedné*, eventuálně *$n$ reálných proměnných.*

**Zadávání funkcí**. Reálné funkce jedné reálné proměnné, a pouze takovými se budeme v dalším textu zabývat, mohou být zadány různými způsoby:

a) pomocí určitého slovního popisu - většinou to není matematické,

b) pomocí tabulek, tj. uvedením všech dvojic $(a, f(a))$ tvořících funkci, například logaritmickými tabulkami, tarifními tabulkami atd.,

c) pomocí jednoho nebo více matematických vzorců udávajících, jak počítat hodnoty funkcí v jejich libovolném vzoru, například

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha - 1} \quad , \quad \alpha \neq 0.$$

Písmeno $\alpha$ v tomto vzorci nazýváme *nezávisle proměnnou.* Budeme se většinou zabývat funkcemi zadanými tímto způsobem. V takovém případě však musíme ještě specifikovat jejich definiční obor. Děláme to tak, jak vidíme výše, že jej přímo uvedeme. V matematice, zejména v klasické, je přijata úmluva, že není–li definiční obor uveden, pak se jím rozumí tzv. *přirozený definiční obor*, kterým je množina všech reálných čísel pro něž má vzorec smysl.

d) pomocí rovnic udávajících vztah mezi vzorem a obrazem. Tyto rovnice jsou tvaru $F(a, b) = 0$, kde $F$ je reálná funkce dvou proměnných zadaná matematickými vzorci udávajícími, jak počítat její hodnoty. O reálné funkci definované právě popsaným způsobem rovnicí říkáme, že *je zadána implicitně*, nebo krátce, že to je *implicitní funkce.* O funkcích, které jsou zadány způsobem uvedeným v bodu c) zase říkáme, že *jsou zadány explicitně*, nebo krátce, že to jsou *explicitní funkce.* V našem učebním textu se budeme zabývat pouze funkcemi zadanými explicitně a implicitně. Slovo explicitní budeme často vynechávat. Použijeme-li pouze slovo funkce, potom jím rozumíme explicitně zadanou reálnou funkci jedné proměnné.

**Kartézské a polární souřadnice v rovině**. Víme, že každý bod $P$ v rovině lze považovat za uspořádanou dvojici reálných čísel $(a, b)$ zvaných jeho kartézskými souřadnicemi. První složku ve dvojici nazýváme *x-ovou souřadnicí*, druhou složku *y-ovou souřadnicí* bodu $P$. x-ová souřadnice je rovna orientované vzdálenosti bodu $P$ od osy $O_y$, y-ová souřadnice pak orientované vzdálenosti bodu $P$ od osy $O_x$. *Orientovanou vzdáleností* přitom rozumíme vzdálenost se znaménkem + nebo − podle toho, zda pata kolmice spuštěné na příslušnou číselnou osu leží na kladné nebo záporné poloose.

V technické praxi ani zdaleka nevystačíme s kartézskými souřadnicemi. Často jsme nuceni používat tzv. *polární souřadnice.* V kartézské rovině kladnou poloosu $O_x$ s počátečním bodem $O$ nazveme *polární osou* a označme ji písmenem $p$. Bod $O$ nazveme *pólem.* Každé uspořádané dvojici reálných čísel $(\theta, r)$, kde $r \geq 0$ přiřaďme v rovině bod $P$ takto: Sestrojme polopřímku $q$ s počátkem v pólu $O$ a svírající s polární osou $p$ orientovaný úhel (měřený v radianech) rovnající se číslu $\theta$. Polopřímku $p$ považujeme přitom za počáteční. Jako bod $P$ zvolme bod ležící na polopřímce $q$ ve vzdálenosti $r$ od pólu. Uspořádanou dvojici $(\theta, r)$ nazýváme *polárními souřadnicemi* bodu $P$, její první složku $\theta$ pak *polárním úhlem* a druhou složku $r$ *orientovanou vzdáleností* od pólu. Je zřejmé, že každé dvojici $(\theta, r)$ reálných čísel odpovídá právě jeden bod $P$ v rovině.

Vztah mezi kartézskými a polárními souřadnicemi je jednoduchý:

$$x = r\cos\theta \qquad , \qquad y = r\sin\theta$$

**Obecný úhel a jeho velikost**. Nechť v rovině jsou dány bod $O$, kružnice $k$ o poloměru $r = 1$ se středem v bodě $O$ a dvě polopřímky $p, q$ s počátkem v $O$. Tyto dvě polopřímky určí dva úhly $\alpha, \beta$ (menší z nich nazýváme *odchylkou* polopřímek). Jejich velikost se měří ve stupňové nebo v obloukové míře. Jednotkou stupňové míry je *stupeň*, kterým rozumíme jednu stoosmdesátinu úhlu vytvořeného opačnými polopřímkami $p, p'$.

Ve vyšší matematice, ve fyzice i v technických vědách se velikost úhlu uvádí téměř výhradně v obloukové míře. I v našem textu tomu tak bude. Jednotkou obloukové míry je *radian*, kterým rozumíme úhel vytvořený polopřímkami $p, q$ takovými, že délka obloučku $PQ$ na jednotkové kružnici $k$ je rovna jedné. Poněvadž celá délka oblouku jednotkové kružnice je $2\pi$, odpovídá $2\pi$ radianů 360-ti stupňům a tedy

$$1 \text{ radian} \quad = \quad \frac{360 \text{ stupňů}}{2\pi} \approx 57 \text{ stupňů } 17 \text{ minut } 45 \text{ vteřin}$$

a opačně

$$1 \text{ stupeň } = \frac{\pi}{180} \text{ radianů}$$

**Funkce sinus a kosinus.** Ze střední školy je dobře znám pojem sinus, eventuálně kosinus úhlu pro obecný úhel $\varphi$ zavedený v minulém odstavci (měřený v radianech a definovaný pro všechna reálná čísla).

**Graf funkce.** Nechť je dána reálná funkce $f$ jedné reálné proměnné. Často je velmi důležité graficky znázornit funkci $f$, abychom mohli posoudit její vlastnosti. Grafické znázorňování provádéme pomocí *grafů* v kartézských nebo v polárních souřadnicích. Grafem reálné funkce jedné proměnné v kartézských souřadnicích rozumíme množinu $\mathcal{K}_f$ všech bodů $A$ v rovině $\mathcal{R}_2$ takových, že pro jejich kartézské souřadnice $(x, y)$ platí $y = f(x)$, tj. druhá souřadnice bodu $A \in \mathcal{K}_f$ je číselně rovna hodnotě funkce $f$ v jeho první souřadnici. Rovnici $y = f(x),\ x \in \mathcal{A}$ pak nazýváme *rovnicí grafu funkce $f$ v kartézských souřadnicích* $(x, y)$, nebo krátce, *rovnicí kartézského grafu funkce $f$*. Analogicky, grafem funkce v polárních souřadnicích (krátce *polárním grafem*) rozumíme množinu $\mathcal{G}_f$ všech bodů $P$ v rovině $\mathcal{R}_2$ takových, že pro jejich polární souřadnice $(\theta, r)$ platí $r = f(\theta)$. Rovnici $r = f(\theta)\ ,\ \theta \in \mathcal{A}$, pak nazýváme *rovnicí grafu funkce $f$ v polárních souřadnicích* $(\theta, r)$, nebo krátce, *rovnicí polárního grafu funkce $f$*.

Víme, že reálná funkce $f$ jedné proměnné může být zadána i implicitně, tj. pomocí rovnice udávající vztah mezi vzorem a obrazem. Tato rovnice je tvaru $F(a, b) = 0$, kde $F$ je reálná funkce dvou proměnných. Pro každé číslo $a \in \mathcal{D}(f)$ přitom platí $F(a, f(a)) = 0$. Odtud ihned plyne, že množina všech bodů $A$ s kartézskými souřadnicemi $(x, y)$, {resp. s polárními souřadnicemi $(\theta, r)$} takovými, že $F(x, y) = 0$ {resp. $F(\theta, r) = 0$}, je nadmnožinou grafu funkce $f$. Tato nadmnožina se často nazývá *kartézský* {resp.*polární*}*implicitní graf funkce $f$*.

**Rovnost dvou funkcí, rozšíření a zúžení.** Nechť jsou dány dvě reálné funkce $f, g$ jedné reálné proměnné Jestliže $\mathcal{D}(f) \subset \mathcal{D}(g)$ a $f(x) = g(x)\ \forall\ x \in \mathcal{D}(f)$, potom říkáme, že funkce $f$ je *zúžením (restrikcí)* funkce $g$ z definičního oboru $\mathcal{D}(g)$ na obor $\mathcal{D}(f)$, anebo také, že funkce $g$ je *rozšířením* funkce $f$ z $\mathcal{D}(f)$ na $\mathcal{D}(g)$. Jestliže $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g)$ a $f(x) = g(x)\ \forall\ x \in \mathcal{D}(f)$, potom říkáme, že *funkce $f, g$ se sobě rovnají* a píšeme $f = g$.

**Nulový bod funkce.** *Nulovým bodem (číslem)* funkce $f$ nazýváme každý prvek $\alpha \in \mathcal{A}$ takový, že $f(\alpha) = 0$.

**Posloupnosti.** Reálnou funkci $f$ jedné reálné proměnné jejímž definičním oborem je množina všech přirozených čísel $\mathcal{N}$ nazýváme *posloupností* reálných čísel. Posloupnost je tedy funkce, která každému přirozenému číslu $n$ přiřazuje nějaké reálné číslo. Místo $f(n)$ (hodnota funkce $f$ v bodě $n$) často píšeme $f_n$. Toto reálné číslo pak nazýváme *n-tým členem posloupnosti.*

**Operace s funkcemi.** *Součtem* dvou reálných funkcí jedné proměnné $f, g$ nazýváme reálnou funkci $v$ jedné proměnné takovou, že

$$v: \quad x \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g) \longrightarrow f(x) + g(x) \in \mathcal{R}.$$

Podobně definujeme *rozdíl* a *součin* dvou funkcí $f, g$.

*Podíl* $f/g$ dvou funkcí $f, g$ definujeme také obdobně až na to, že definičním oborem je množina $\mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$ z níž jsou vyjmuty nulové body funkce $g$.

Dále definujeme *absolutní hodnotu* $|f|$ reálné funkce $f$ jedné proměnné jako funkci $|f|: \quad x \in \mathcal{D}(f) \longrightarrow |f(x)|$.

**Složená funkce.** Nechť $g, f$ jsou dvě reálné funkce jedné proměnné. Nechť $\mathcal{P}$ je množina všech reálných čísel $x$ patřících do $\mathcal{D}(g)$ takových, že $g(x) \in \mathcal{D}(f)$. Potom reálná funkce $h$ jedné proměnné definovaná vztahem

$$h(x) = f(g(x)) \ \forall \ x \in \mathcal{P} \tag{10.1}$$

se nazývá *funkce složená* z funkcí $g, f$ a označuje se $f \bullet g$. Funkce $g$ se nazývá *vnitřní*, zatímco $f$ *vnější složka* složené funkce $f \bullet g$.

Vztah (1) je pro praktické použití dost složitý. Začátečníkům dělá potíže sestavit podle něj složenou funkci, zvláště v případě, kdy obě funkce $g, f$ jsou zadány matematickými vzorci. Sestavení vzorce pro výpočet hodnot složené funkce $f \bullet g$ nám může podstatněji usnadnit následující formulace vztahu (1):

$$(f \bullet g)(x) = f(g(x)) = f(u) \ , \ \text{kde } u = g(x) \ \forall \ x \in \mathcal{P} \ , \tag{10.1'}$$

která je samozřejmě stejná jako (1).

**Inverzní zobrazení.** Zobrazení $f: \ \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ nazýváme *prostým*, jestliže pro jakékoliv dva různé prvky $\alpha_1, \alpha_2$ z definičního oboru $\mathcal{A}$ jsou i jejich obrazy $f(\alpha_1), f(\alpha_2)$ různé. To ovšem znamená, že každý prvek z oboru hodnot zobrazení $\mathcal{H}(f)$ má právě jeden vzor v $\mathcal{A}$. Můžeme tedy definovat nové zobrazení, označme je $invf$, které má definiční obor $\mathcal{H}(f)$ a které každému prvku z $\mathcal{H}(f)$ přiřazuje právě tento jeden vzor v $\mathcal{A}$, tj. platí

$$invf: \quad \beta \in \mathcal{H}(f) \longrightarrow \alpha \in \mathcal{D}(f) \wedge \ f(\alpha) = \beta \ . \tag{10.2}$$

Zobrazení $invf$ se nazývá *inverzní zobrazení* k $f$. Ze vztahů $invf(\beta) = \alpha \wedge f(\alpha) = \beta$ ihned dostáváme

$$invf(f(\alpha)) = \alpha \ \forall \ \alpha \in \mathcal{D}(f) \quad \text{a také} \quad f(invf(\beta)) = \beta \ \forall \ \beta \in \mathcal{H}(f) \tag{10.3}$$

Místo označení $invf$ se v literatuře často používá označení $f^{-1}$ (nezaměňovat s $\frac{1}{f}$).

**Výpočet inverzní funkce.** Jestliže $f$ je prostá reálná funkce jedné proměnné, potom shodně s (3) platí $f(invf(x)) = x, \ \forall \ x \in \mathcal{H}(f)$, což můžeme samozřejmě formulovat takto

$$f(u) = x \ \forall \ x \in \mathcal{H}(f), \ \text{kde } u = invf(x) \ .$$

Jestliže funkce $f$ je dána explicitně, potom $f(u) = x$ představuje rovnici. Pokud se nám podaří ji vyřešit vzhledem k neznámé $u$, dostaneme hledanou funkci $invf$. Nezapomínejme ovšem, že řešení $u$ musí patřit do $\mathcal{D}(f)$.

**Graf inverzní funkce.** Nechť $A = (a, b)$ je libovolný bod grafu funkce $f$, tj. $a \in \mathcal{D}(f) \wedge b = f(a)$. Z definice inverzní funkce pak plyne, že bod $\overline{A} = (b, a)$ je bodem grafu funkce $invf$, neboť $b \in \mathcal{H}(f) = \mathcal{D}(invf) \wedge a = invf(b)$. Bod $\overline{A}$ je však symetrický k bodu $A$ podle přímky $y = x$. Dospíváme tak k závěru

*grafy funkcí $f$ a $invf$ jsou symetrické podle přímky $y = x$.*

**Význačné typy funkcí.** Nechť $f$ je libovolná reálná funkce jedné proměnné.

1. Jestliže pro každé dva prvky $\alpha, \beta$ z $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}(f)$ takové, že $\alpha < \beta$ platí

a) $f(\alpha) \le f(\beta)$, potom o funkci $f$ říkáme, že je *neklesající v* $\mathcal{A}$,

b) $f(\alpha) \ge f(\beta)$, potom o funkci $f$ říkáme, že je *nerostoucí v* $\mathcal{A}$,

c) $f(\alpha) < f(\beta)$, potom o funkci $f$ říkáme, že je *rostoucí v* $\mathcal{A}$,

d) $f(\alpha) > f(\beta)$, potom o funkci $f$ říkáme, že je *klesající v* $\mathcal{A}$.

Jestliže funkce je neklesající nebo nerostoucí, potom o ní říkáme, že je *monotonní v* $\mathcal{A}$, jestliže je rostoucí nebo klesající, potom o ní říkáme,že je *ryze monotonní v* $\mathcal{A}$. Samozřejmě každá ryze monotonní funkce je i monotonní. Opak neplatí.

Z definice ihned plyne, že

*každá ryze monotonní funkce v* $\mathcal{A}$ *je prostá v* $\mathcal{A}$ *(a tudíž k ní existuje inverzní funkce).*

2. Nechť definiční obor $\mathcal{D}(f)$ funkce $f$ má vlastnost: Jestliže číslo $a$ patří do $\mathcal{D}(f)$, potom i číslo $-a$ patří do $\mathcal{D}(f)$. V případě, že pro každé číslo $x \in \mathcal{D}(f)$ platí

a) $f(-x) = f(x)$, potom o funkci $f$ říkáme, že je *sudá*,

b) $f(-x) = -f(x)$, potom o funkci $f$ říkáme, že je *lichá*.

Graf sudé funkce je zřejmě symetrický podle osy $O_y$, graf liché funkce je symetrický podle počátku $O$.

3. Nechť existuje kladné číslo $p$ takové, že platí

a) jestliže $x \in \mathcal{D}(f)$, potom i $x + p \in \mathcal{D}(f)$,

b) $f(x + p) = f(x) \; \forall \; x \in \mathcal{D}(f)$ ,

c) číslo $p > 0$ je nejmenší ze všech kladných čísel pro která platí současně podmínky a), b), tj. existuje aspoň jedno kladné číslo menší než $p$ pro něž alespoň jedna z podmínek a), b) neplatí.

Potom o funkci $f$ říkáme, že je *periodická s periodou* $p$. Jestliže žádné takové číslo $p$ neexistuje, potom o funkci $f$ říkáme, že je *neperiodická*.

4. Jestliže obor hodnot $\mathcal{H}(f)$ funkce $f$ je ohraničená množina, potom i o samotné funkci $f$ říkáme, že je *ohraničená* nebo také *omezená*.

**Základní elementární funkce.** V matematických popisech (modelech) fysikálních a inženýrských problémů se často vyskytují tzv. *elementární funkce*. Rozumíme jimi každou funkci, která vznikne jako výsledek konečného počtu operací sčítání, odečítání, násobení, dělení a tvoření složených funkcí z tzv. *základních elementárních funkcí*. Těmi jsou konstantní, mocninné, exponenciální, logaritmické, goniometrické a cyklometrické funkce.

**Konstantní a mocninné funkce.** Konstantní funkce $const_a$ je definována explicitně vztahem $const_a(x) = a$, kde $a$ je pevně zvolené reálné číslo. Jejím definičním oborem je množina všech reálných čísel $\mathcal{R}$. Funkce je monotonní (neklesající i nerostoucí), není prostá. Je sudá. Není periodická. Je omezená, její obor hodnot je tvořen jediným prvkem, číslem $a$.

Mocninná funkce $pow_a$ je definována explicitně vztahem $pow_a(x) = x^a$, kde $a$ je zadané reálné číslo. Její definiční obor závisí na typu čísla $a$ a je určen definicí mocniny.

**Exponenciální funkce.** Exponenciální funkce $exp_a$ je definována explicitně vztahem $exp_a(x) = a^x$, kde $a > 0$ je zadané kladné reálné číslo. Její definiční obor je $\mathcal{R}$.

Při $a = 1$ je exponenciální funkce konstantní, při $0 < a < 1$ je klesající, při $a > 1$ je rostoucí. V posledních dvou případech je tedy prostá a má obor hodnot $(0, \infty)$.

V teorii i v aplikacích je zdaleka nejdůležitější případ, kdy $a = e$, kde $e = 2,718\ 281\ 828\ 459\ \ldots$ je tzv. *Eulerovo číslo*. V tomto případě se exponenciální funkce nazývá *přirozená* a místo $exp_e$ se krátce označuje $exp$. Funkce $exp$ je tedy definována explicitně vztahem $exp(x) = e^x$.

**Logaritmické funkce**. Exponenciální funkce $exp_a$ je při $a \neq 1$ prostá. Existuje proto k ní inverzní funkce $invexp_a$ definovaná pro všechna kladná čísla, neboť $\mathcal{D}(invexp_a) = \mathcal{H}(exp_a) = (0, \infty)$ a nabývající jako hodnoty všechna reálná čísla (i záporná), neboť $\mathcal{H}(invexp_a) = \mathcal{D}(exp_a) = \mathcal{R}$. Tuto inverzní funkci $invexp_a$ nazýváme *logaritmickou funkcí* nebo krátce *logaritmem při základu a* a označujeme $log_a$. V případě $a = 10$ logaritmická funkce se nazývá *dekadická* a místo $log_{10}$ se krátce označuje $log$. Daleko nejdůležitější je případ, kdy $a = e$. Logaritmická funkce $log_e$ se pak nazývá *přirozená* a místo $log_e$ se krátce píše $ln$ nebo $lg$. Tedy $ln = invexp$.

Zřejmě platí

$$log_a a^x = x\ \forall\ x \in \mathcal{R} \quad , \quad a^{log_a x} = x\ \forall\ x \in (0, \infty)\ .$$

Z posledního vztahu ihned plyne,že

*každé kladné číslo* $\alpha$ *lze vyjádřit ve tvaru* $\alpha = e^{ln\alpha}$.

Na závěr uveďme několik základních vlastností logaritmických funkcí, které činí tyto funkce nepostradatelnými v teorii i v aplikacích:

*Nechť* $a, b, \alpha, \beta$ *jsou libovolná kladná reálná čísla, přičemž* $a \neq 1,\ b \neq 1$. *Potom platí*

$$log_a(\alpha\beta) = log_a\alpha + log_a\beta\ ,\ log_a(\alpha/\beta) = log_a\alpha - log_a\beta\ ,\ log_a(\alpha^\gamma) = \gamma log_a\alpha\ \forall\ \gamma \in \mathcal{R}$$

$$log_a\alpha = \frac{log_b\alpha}{log_b a}\ ,\ log_a\alpha = \frac{ln\alpha}{lna}\ ,\ a^\alpha = e^{\alpha lna}$$

**Goniometrické funkce.** Základními goniometrickými funkcemi jsou funkce sinus a kosinus. Tyto funkce nejsou monotonní. Funkce sin je lichá, funkce cos sudá. Obě funkce jsou periodické s periodou $2\pi$. Obě jsou také ohraničené, jejich oborem hodnot je interval $\langle -1, 1 \rangle$.

Platí pro ně následující důležité vzorce (platí vždy buď jen horní znaménka, nebo jen dolní znaménka):

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

Dalšími goniometrickými funkcemi jsou *tangens, kotangens* (funkcemi sekans a kosekans se zabývat nebudeme). Jsou definovány vztahy

$$\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \forall\, x \in \mathcal{R} \wedge \cos x \neq 0$$
$$\cot(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad \forall\, x \in \mathcal{R} \wedge \sin x \neq 0$$

Platí pro ně vztah:

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \tan\beta}$$

**Cyklometrické funkce.** Funkce sinus a tangens nejsou prosté. Proto k nim neexistují funkce inverzní. Zúžením těchto funkcí na menší definiční obory lze dosáhnout toho, aby byly prosté.

Definujme tedy nové funkce *Sinus a Tangens* (z metodických důvodů jsme použili stejné názvy, rozlišili jsme je pouze velkými počátečními písmeny) vztahy

$$Sin(x) = \sin x\ , \quad x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \quad , \quad Tan(x) = \tan x\ , \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

Tyto funkce jsou již ryze monotonní a tudíž prosté. Existují k nim proto funkce inverzní. Nazýváme je cyklometrickými funkcemi *arkussinus a arkustangens* a označujeme $\arcsin, \arctan$. Zřejmě platí

$$\mathcal{D}(\arcsin) = \langle -1, 1\rangle\ , \qquad \mathcal{H}(\arcsin) = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle\ ,$$
$$\mathcal{D}(\arctan) = (-\infty, \infty)\ , \quad \mathcal{H}(\arctan) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Dalšími cyklometrickými funkcemi jsou *arkuskosinus* a *arkuskotangens* (cyklometrickými funkcemi *arkussekans* a *arkuskosekans* se zabývat nebudeme). Jsou to inverzní funkce k funkcím *Kosinus* a *Kotangens* definovaným následovně:

$$Cos(x) = \cos x\ ,\ x \in \langle 0, \pi\rangle \quad , \quad Cot(x) = \cot x\ ,\ x \in (0, \pi\rangle$$

Platí tedy

$$\mathcal{D}(arccos) = \langle -1, 1\rangle\ ,\ \mathcal{H}(arccos) = \langle 0, \pi\rangle$$
$$\mathcal{D}(arccot) = (-\infty, \infty)\ ,\ \mathcal{H}(arccot) = (0, \pi)$$

Pro cyklometrické funkce platí vztahy

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2\ ,\ \arccos x + \arccos(-x) = \pi\ ,$$
$$\arctan x\ +\ arccot\, x = \frac{\pi}{2}\ \forall\ x\ \in\ (-\infty, \infty)$$

**Vektorové funkce.** Zobrazení $f:\ \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ nazýváme *reálnou vektorovou funkcí jedné reálné proměnné*, jestliže $\mathcal{A}$ je množina reálných čísel a $\mathcal{B}$ je množina uspořádaných $m$-tic reálných čísel $a_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$, tj. $m$-rozměrných reálných algebraických vektorů $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_m]$. Tuto funkci budeme krátce nazývat *$m$-rozměrnou vektorovou funkcí* a označovat $\mathbf{f}$. Budeme vždy automaticky předpokládat, že $m \geq 2$. $m$-rozměrná vektorová funkce $\mathbf{f}$ je tedy pravidlo, které každému reálnému číslu $x \in \mathcal{A}$ přiřazuje nějaký vektor $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_m]$. Všechny složky $a_i$ vektoru $\mathbf{a}$ samozřejmě závisí na vzoru $x$. Můžeme je proto považovat za hodnoty reálných funkcí $f_i$ proměnné $x$ a $m$-rozměrnou vektorovou funkci $\mathbf{f}$ definovanou v $\mathcal{A}$ pak za uspořádanou $m$-tici reálných funkcí $f_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$, tj. $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \ldots, f_m]$ definovaných v jedné a téže množině reálných čísel $\mathcal{A}$. Hodnotou $\mathbf{f}(x)$ $m$-rozměrné vektorové funkce $f$ je potom vektor

$$\mathbf{f}(x) = [f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)] \ .$$

**Operace s vektorovými funkcemi.** Nechť $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \ldots, f_m]$, $\mathbf{g} = [g_1, g_2, \ldots, g_m]$ jsou dvě $m$-rozměrné vektorové funkce definované v $\mathcal{A} \subset \mathcal{R}$ a nechť $\alpha$ je reálná funkce, rovněž definovaná v $\mathcal{A}$.

a) Říkáme, že vektorové funkce $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ *jsou sobě rovny* a píšeme $\mathbf{f} = \mathbf{g}$, jestliže $f_i = g_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, m$.

b) *Součtem vektorových funkcí* $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ nazýváme vektorovou funkci $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ definovanou vztahem

$$\mathbf{f} + \mathbf{g} = [f_1 + g_1, f_2 + g_2, \ldots, f_m + g_m] \ .$$

Podobně definujeme rozdíl $\mathbf{f} - \mathbf{g}$.

c) *Součinem reálné funkce* $\alpha$ *a reálné vektorové funkce* $\mathbf{f}$ nazýváme vektorovou funkci $\alpha\mathbf{f}$ definovanou vztahem

$$\alpha\mathbf{f} = [\alpha f_1, \alpha f_2, \ldots, \alpha f_m] \ .$$

d) *Skalárním součinem vektorových funkcí* $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ nazýváme reálnou funkci $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$ definovanou vztahem

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = f_1 g_1 + f_2 g_2 + \cdots + f_m g_m \ .$$

Místo $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$ často používáme označení $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$.

e) *Velikostí vektorové funkce* $\mathbf{f}$ nazýváme reálnou funkci $|\mathbf{f}|$ definovanou vztahem

$$|\mathbf{f}| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_m^2} \ .$$

Zřejmě platí

$$|\mathbf{f}|^2 = \mathbf{f} \cdot \mathbf{f} = (\mathbf{f}, \mathbf{f}) \ .$$

f) V případě , že vektorové funkce $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ jsou trojrozměrné, tj. $\mathbf{f} = [f_1, f_2, f_3]$, $\mathbf{g} = [g_1, g_2, g_3]$, definujeme i jejich *vektorový součin* $\mathbf{f} \times \mathbf{g}$ a to vztahem

$$\mathbf{f} \times \mathbf{g} = [f_2 g_3 - f_3 g_2,\ f_3 g_1 - f_1 g_3,\ f_1 g_2 - f_2 g_1] \ .$$

Označíme-li $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ konstantní vektorové funkce

$$\mathbf{i} = [1, 0, 0] \ , \ \mathbf{j} = [0, 1, 0] \ , \ \mathbf{k} = [0, 0, 1] \ ,$$

potom trojrozměrné vektorové funkce $\mathbf{f} = [f_1, f_2, f_3]$, $\mathbf{g} = [g_1, g_2, g_3]$ můžeme zřejmě, shodně s výše uvedenými definicemi součinu reálné a vektorové funkce a součtu dvou vektorových funkcí, psát ve tvaru

$$\mathbf{f} = f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k} \ , \ \mathbf{g} = g_1\mathbf{i} + g_2\mathbf{j} + g_3\mathbf{k}$$

a vektorový součin $\mathbf{f} \times \mathbf{g}$ vyjádřit pomocí determinantu

$$\mathbf{f} \times \mathbf{g} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} \ .$$

## 11. LIMITA A SPOJITOST.

**Definice limity posloupnosti.** Říkáme, že číslo $g$ je *limitou* dané posloupnosti čísel $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$ (nebo také, že posloupnost $\{a_n\}$ *konverguje* k číslu $g$), jestliže ke každému kladnému číslu $\epsilon$ existuje přirozené číslo $n^*$ takové, že počínaje indexem $n^*$ všechna čísla $a_n$ se liší od $g$ méně než o $\epsilon$, tj. $|a_n - g| < \epsilon \quad \forall\, n \geq n^*$ anebo, což je totéž, $a_n \in (g-\epsilon, g+\epsilon) \quad \forall\, n \geq n^*$. Skutečnost, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $g$ zapisujeme takto: $\lim a_n = g$ nebo také $a_n \to g$. Podotkněme, že přirozené číslo $n^*$ obecně závisí na číslu $\epsilon$.

**Jednoznačnost limity posloupnosti.** Platí věta:

*Každá posloupnost může mít nanejvýš jednu limitu.*

**Kriteria konvergence posloupnosti.** Je důležité zabývat se otázkou, za jakých podmínek je daná posloupnost konvergentní a kdy konvergentní není. Těmto podmínkám se říká *kriteria konvergence.* Platí věta:

*1. Neohraničená posloupnost není konvergentní, tj. nutnou podmínkou konvergence posloupnosti je její ohraničenost.*
*2. Každá monotonní ohraničená posloupnost je konvergentní.*
*3. Jestliže tři posloupnosti $\{a_n\},\ \{b_n\},\ \{c_n\}$ splňují nerovnosti*

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad , \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

*a krajní posloupnosti $\{a_n\},\ \{c_n\}$ konvergují k jednomu a témuž číslu $g$, potom i posloupnost $\{b_n\}$ konverguje a to k témuž číslu $g$. Toto tvrzení se nazývá větou o třech posloupnostech.*

**Algebra limit posloupností.** Jestliže jsou dány dvě posloupnosti $\{a_n\},\ \{b_n\}$, potom z nich můžeme vytvořit čtyři nové posloupnosti

$$\{a_n + b_n\} \ ,\ \{a_n - b_n\} \ ,\ \{a_n \cdot b_n\} \ ,\ \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \tag{11.1}$$

nazývané *součtem, rozdílem, součinem* a *podílem* daných posloupností. Podíl má zřejmě smysl pouze tehdy, když všechna čísla $b_n$ jsou různá od nuly. Platí věta, která je jednou z nejdůležitějších vět v diferenciálním počtu:

*Jestliže $a_n \to a$ a $b_n \to b$, potom všechny první tři posloupnosti v* (1) *jsou také konvergentní a platí*

$$a_n + b_n \to a + b \quad , \quad a_n - b_n \to a - b \quad , \quad a_n \cdot b_n \to a \cdot b\ .$$

*Jestliže navíc $b \neq 0$, potom také poslední posloupnost v* (1) *je konvergentní a platí*

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}\ .$$

**Podposloupnost.** Nechť $\{a_n\}$ je libovolná posloupnost a nechť $n_1,\ n_2,\ n_3,\ \ldots$ je libovolná rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom posloupnost $a_{n_1},\ a_{n_2},\ a_{n_3},\ \ldots$

nazýváme *podposloupností* posloupnosti $\{a_n\}$ (nebo také *vybranou posloupností* z posloupnosti $\{a_n\}$). Platí věta

*Každá podposloupnost posloupnosti $\{a_n\}$ konvergující k číslu $g$ rovněž konverguje k číslu $g$.*

**Hromadný bod množiny.** Nechť $\mathcal{A}$ je libovolná množina reálných čísel a nechť $\alpha$ je libovolné reálné číslo (patřící do $\mathcal{A}$ nebo nikoliv). Jestliže v každém $\epsilon$-okolí $(\alpha-\epsilon, \alpha+\epsilon)$ čísla $\alpha$ leží alespoň jedno číslo z množiny $\mathcal{A}$ různé od $\alpha$, potom číslo $\alpha$ nazýváme *hromadným bodem množiny $\mathcal{A}$.*

Platí věta:

*Číslo $\alpha$ je hromadným bodem reálné množiny $\mathcal{A}$ tehdy a jen tehdy, když v množině $\mathcal{A}$ existuje posloupnost $\{x_n\}$ bodů různých od $\alpha$ taková, že $x_n \to \alpha$.*

**Nevlastní limity posloupnosti.** Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ má *nevlastní limitu plus nekonečno*, jestliže ke každému (libovolně velkému) číslu $M$ existuje přirozené číslo $n^*$ (závisející na $M$) takové, že počínaje indexem $n^*$ všechna čísla $a_n$ jsou větší než $M$.Skutečnost, že posloupnost $\{a_n\}$ má nevlastní limitu plus nekonečno, zapisujeme takto: $\lim a_n = \infty$ nebo také $a_n \to \infty$ .

Analogicky definujeme *nevlastní limitu mínus nekonečno.*

Posloupnosti mající nevlastní limitu plus nekonečno nebo mínus nekonečno nazýváme *divergentními* a zápisy $a_n \to \infty$, $a_n \to -\infty$ čteme: $a_n$ *diverguje k plus nekonečnu,* $a_n$ *diverguje k mínus nekonečnu.* Nekonvergentní posloupnosti, které nedivergují nazýváme *oscilujícími.* Platí

*1. Jestliže posloupnost $\{a_n\}$ je ohraničená a posloupnost $\{b_n\}$ diverguje k plus nekonečnu, potom*

$$a_n + b_n \to \infty \quad , \quad a_n - b_n \to -\infty \quad , \quad \frac{a_n}{b_n} \to 0 \ .$$

*2. Jestliže posloupnost $\{a_n\}$ diverguje (k plus nekonečnu anebo k mínus nekonečnu), potom posloupnost $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ konverguje k nule. Opačně, jestliže $a_n \to 0$ a současně $a_n > 0 \ \forall \ n$, potom $\frac{1}{a_n} \to \infty$.*

*3. Jestliže posloupnost $\{a_n\}$ konverguje ke kladnému číslu a posloupnost $\{b_n\}$ diverguje k plus nekonečnu, potom posloupnost $\{a_n b_n\}$ diverguje k plus nekonečnu.*

**Heine'ho definice limity funkce.** Nechť $f$ je reálná funkce jedné reálné proměnné a nechť $\alpha$ je hromadný bod jejího definičního oboru $\mathcal{D}(f)$ ($\alpha$ může, ale také nemusí, patřit do $\mathcal{D}(f)$, tj. funkce $f$ může, ale také nemusí, být definována v $\alpha$ ). Říkáme, že číslo $g$ *je limitou funkce $f$ v bodě $\alpha$* (nebo také, že $f$ *konverguje k číslu $g$ v bodě $\alpha$*), jestliže pro každou posloupnost $\{x_n\}$ bodů $x_n$ z $\mathcal{D}(f)$ různých od $\alpha$ konvergující k číslu $\alpha$, tj. pro každou posloupnost

$$x_1, \ x_2, \ x_3, \ \ldots \quad , \quad x_n \neq \alpha \quad , \quad x_n \to \alpha \quad , \quad x_n \in \mathcal{D}(f) \tag{11.2}$$

jí odpovídající posloupnost hodnot

$$f(x_1), \ f(x_2), \ f(x_3), \ \ldots \tag{11.3}$$

konverguje k číslu $g$.

Skutečnost, že funkce $f$ má v bodě $\alpha$ limitu $g$ zapisujeme takto:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) \;=\; g \;,\; \text{nebo také } f(x) \;\to\; g \quad \text{když} \quad x \;\to\; \alpha$$

**Jednostranné limity funkce.** Nechť $f$ je reálná funkce jedné proměnné a nechť $\alpha$ je hromadný bod jejího definičního oboru $\mathcal{D}(f)$ takovým, že v $\mathcal{D}(f)$ existuje alespoň jedna posloupnost $\{x_n\}$ bodů $x_n > \alpha \;\forall\; n$ konvergující k $\alpha$. Říkáme, že funkce $f$ má v bodě $\alpha$ *limitu zprava* rovnající se číslu $g$, a píšeme $\lim\limits_{x\to\alpha+} f(x) = g$, jestliže pro každou posloupnost (2) takovou, že $x_n > \alpha,\; n = 1, 2, \ldots$, posloupnost 3 konverguje k číslu $g$. Analogicky definujeme *limitu zleva* $\lim\limits_{x\to\alpha-} f(x)$. Limita zprava i limita zleva se souhrnně nazývají *jednostranné limity.*

**Algebra limit funkcí.** Víme, že ze dvou daných funkcí $f, g$ můžeme vytvořit jejich součet, rozdíl, součin a podíl. Platí důležitá věta

*Jestliže funkce $f$ a $g$, definované na jedné a téže množině $\mathcal{A}$, mají v hromadném bodě $\alpha$ množiny $\mathcal{A}$ limity*

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) \;=\; a \qquad , \qquad \lim_{x\to\alpha} g(x) \;=\; b \;,$$

*potom jejich součet, rozdíl a součin mají rovněž limitu v $\alpha$ a platí*

$$\lim_{x\to\alpha}[f(x) + g(x)] = a + b \quad , \quad \lim_{x\to\alpha}[f(x) - g(x)] = a - b \;,$$
$$\lim_{x\to\alpha}[f(x)g(x)] = a \cdot b$$

*Podíl, za předpokladu, že $g(x) \neq 0 \wedge b \neq 0$, má také limitu a platí*

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} \;=\; \frac{a}{b} \;.$$

*Tato věta platí i pro jednostranné limity.*

**Věta o třech funkcích.** Důležitá v aplikacích je tzv. *věta o třech funkcích* (často se také nazývá *věta o sevření*):

*Nechť tři funkce $u$, $v$, $w$ jsou definovány na společné množině $\mathcal{A}$ a nechť $\alpha$ je hromadný bod této množiny. Jestliže pro všechna čísla $x$ z množiny $\mathcal{A}$ platí*

$$u(x) \;\leq\; w(x) \;\leq\; v(x)$$

*a krajní funkce $u, v$ konvergují v $\alpha$ k jedné a téže limitě $g$, potom i prostřední funkce $w$ konverguje v $\alpha$ k limitě $g$. Věta platí i pro jednostranné limity.*

**Nevlastní limity funkce.** Definujme: Nechť $f$ je reálná funkce jedné reálné proměnné definovaná na množině $\mathcal{D}(f)$ a nechť $\alpha$ je hromadný bod této množiny ($\alpha$ může, ale také nemusí patřit do množiny $\mathcal{D}(f)$). Říkáme, že funkce $f$ má v bodě $\alpha$ *nevlastní limitu plus nekonečno* (nebo také, že $f$ *diverguje k plus nekonečnu* *v bodě $\alpha$ )*, jestliže pro každou posloupnost (2) jí odpovídající posloupnost hodnot 3 diverguje k plus nekonečnu. Skutečnost, že funkce $f$ má v bodě $\alpha$ nevlastní limitu plus nekonečno zapisujeme takto

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) \ = \ \infty \quad \text{nebo také} \quad f(x)\to\infty \quad \text{když} \qquad x\to\alpha \ .$$

Analogicky definujeme *nevlastní limitu mínus nekonečno* funkce $f$ a *jednostranné nevlastní limity* funkce (proveďte sami).

**Limita funkce v nekonečnu.** Definujeme: Jestliže $\mathcal{A}$ je množina reálných čísel v níž existuje alespoň jedna posloupnost prvků $\{x_n\}$ taková, že $x_n \to \infty$, eventuálně $x_n \to -\infty$, potom říkáme, že množina $\mathcal{A}$ má *nevlastní hromadný bod plus nekonečno*, eventuálně *mínus nekonečno*. Nechť $f$ je reálná funkce jedné proměnné definovaná na množině $\mathcal{D}(f)$ mající nevlastní hromadný bod plus nekonečno. Říkáme, že číslo $g$ je *limitou funkce $f$ v plus nekonečnu* (nebo také, že $f$ *konverguje k číslu $g$ v plus nekonečnu*), jestliže pro každou posloupnost

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots \quad , \quad x_n\to\infty \quad , \quad x_n\in\mathcal{D}(f)\ , \tag{11.4}$$

jí odpovídající posloupnost 3 hodnot funkce konverguje k číslu $g$. Skutečnost, že funkce $f$ má v plus nekonečnu limitu $g$ zapisujeme takto:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \ = \ g, \quad \text{nebo také} \quad f(x) \ \to \ g \quad \text{když} \quad x \ \to \ \infty \ .$$

Jestliže ve (4) podmínku $x_n \to \infty$ nahradíme podmínkou $x_n \to -\infty$, potom číslo $g$ nazýváme *limitou funkce $f$ v mínus nekonečnu* a píšeme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \ = \ g$.

Analogicky definujeme nevlastní limity plus a mínus nekonečno v plus a v mínus nekonečnu.

**Algebra nevlastních limit a limit v nekonečnu.** Při výpočtu nevlastních limit a jednostranných nevlastních limit funkcí a limit funkcí v nekonečnu se často využívají následující pravidla:

*1. Jestliže funkce $f$ je ohraničená a funkce $g$ má v $\alpha$ nevlastní limitu $\infty$ $\{$resp. $-\infty\}$, potom platí*

$$\lim_{x\to\alpha}[f(x)+g(x)]=\infty \qquad \{\textit{resp.} \lim_{x\to\alpha}[f(x)+g(x)]=-\infty\}\ ,$$
$$\lim_{x\to\alpha}[f(x)-g(x)]=-\infty \qquad \{\textit{resp.} \lim_{x\to\alpha}[f(x)-g(x)]=\infty\}$$
$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

*2. Jestliže $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=0$ a současně $f(x)>0$ $\{$resp. $f(x)<0\}$, potom $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{1}{f(x)}=\infty$ $\{$resp. $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{1}{f(x)}=-\infty\}$ ,*

*3. Jestliže $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = a > 0$ $\{$resp. $a<0\}$ a současně $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=\infty$, potom $\lim\limits_{x\to\alpha}[f(x)g(x)] = \infty$ $\{$resp. $\lim\limits_{x\to\alpha}[f(x)g(x)] = -\infty\}$. Samozřejmě platí $f(x)g(x) =$*

*$g(x)f(x)$ a tedy $\lim\limits_{x\to\alpha}[f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to\alpha}[g(x)f(x)]$. Toto pravidlo zapíšeme krátce symbolicky takto*

$$a\cdot\infty \;=\; \infty\cdot a \;=\; \begin{cases} \infty & \textit{pro} \quad a>0 \\ -\infty & \textit{pro} \quad a<0 \end{cases}$$

*4. Jestliže $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = a$ a současně $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \infty$ {resp. $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = -\infty$}, potom $\lim\limits_{x\to\alpha}[f(x)+g(x)] = \infty$ {resp. $-\infty$}. Toto pravidlo zapíšeme krátce*

$$a+\infty=\infty \qquad \{\textit{resp.}\ a+(-\infty)=-\infty\}.$$

5. $\quad \infty+\infty=\infty \quad , \quad -\infty+(-\infty)=-\infty$ .

*První část zápisu znamená: Jestliže funkce $f, g$ mají v bodě $\alpha$ nevlastní limitu plus nekonečno, potom i jejich součet $f+g$ má v bodě $\alpha$ nevlastní limitu plus nekonečno. Analogický význam má druhá část zápisu.*

6. $\quad \infty-(-\infty)=\infty$
7. $\quad -\infty-\infty=a-\infty=-\infty-a=-\infty$
8. $\quad \infty-a=\infty$
9. $\quad a-(-\infty)=\infty$
10. $\quad \infty\cdot\infty=(-\infty)\cdot(-\infty)=\infty$
11. $\quad \infty\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot\infty=-\infty$
12. $\quad a\cdot(-\infty)=-(\infty)\cdot a=\begin{cases} -\infty & \textit{pro} \quad a>0 \\ \infty & \textit{pro} \quad a<0 \end{cases}$
13. $\quad \dfrac{a}{\infty}=\dfrac{a}{-\infty}=0$
14. $\quad \dfrac{\infty}{a}=\begin{cases} \infty & \textit{pro} \quad a>0 \\ -\infty & \textit{pro} \quad a<0 \end{cases}$
15. $\quad \dfrac{-\infty}{a}=\begin{cases} -\infty & \textit{pro} \quad a>0 \\ \infty & \textit{pro} \quad a<0 \end{cases}$

*. Všechna výše uvedená pravidla platí i pro jednostranné limity a limity funkcí v nekonečnu, tj. ve všech formulích symbol $x\to\alpha$ můžeme nahradit libovolným ze symbolů $x\to\alpha-,\ x\to\alpha+,\ x\to\infty,\ x\to-\infty$.*

Existují kombinace, které se v pravidlech nevyskytují, např. $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $1^\infty$, $0^0$, $\infty^0$. Nazýváme je *neurčitými výrazy.* V praktických problémech se vyskytují velmi často a o výpočtu jejich limit bude pojednáno později.

**Asymptoty.** O funkci $f$ říkáme, že *je definována v okolí plus nekonečna* {resp. *mínus nekonečna*}, jestliže existuje neohraničený interval $J=(a,\infty)$ {resp. $J=(-\infty,b)$} takový, že $J\subset\mathcal{D}(f)$. V tomto případě má definiční obor $\mathcal{D}(f)$ nevlastní hromadný bod plus nekonečno {resp. mínus nekonečno}.

Definujeme: Nechť $f$ je funkce definovaná v okolí plus nekonečna {resp. mínus nekonečna}. Jestliže existují reálné konstanty $a, b$ takové, že $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ {resp. $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$} , potom přímku o rovnici $y = ax + b$ nazýváme *asymptotou* grafu $y = f(x)$ funkce $f$ *v plus nekonečnu* $\{$resp.*v mínus nekonečnu*$\}$ (nebo také krátce *asymptotou se směrnicí.*

Snadno se přesvědčíme, že platí věta:

*Graf $y = f(x)$ funkce $f$ definované v okolí plus nekonečna má asymptotu v plus nekonečnu tehdy a jen tehdy, když existují limity $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ a $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - ax] = b$. Když tyto limity existují, potom asymptotou je přímka $y = ax + b$.*

Zcela analogická věta platí pro asymptotu v mínus nekonečnu, symbol $x \to \infty$ se zamění pouze symbolem $x \to -\infty$.

Dále definujeme: Jestliže funkce $f$ je taková, že v jejím definičním oboru $\mathcal{D}(f)$ leží alespoň jeden z intervalů $(\eta, \alpha)$, $(\alpha, \epsilon)$, kde $\eta, \epsilon$ jsou daná kladná reálná čísla a $\alpha$ je dané libovolné reálné číslo, a jestliže existuje alespoň jedna z limit $\lim\limits_{x\to\alpha+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\alpha-} f(x)$ a je nevlastní, potom říkáme, že přímka $x = \alpha$ je *svislou asymptotou* grafu $y = f(x)$ funkce $f$.

**Spojitost funkce.** Pojem spojitosti funkce patří mezi nejdůležitější pojmy diferenciálního a integrálního počtu. Intervalem $I$ zde a v dalších odstavcích budeme rozumět jakýkoliv interval (otevřený, uzavřený, polouzavřený, ohraničený, neohraničený atd.). Stanovme následující terminologii: Slovy, že nějaká funkce $f$ je *definována v okolí bodu* $\alpha$ rozumíme, že existuje otevřený interval $(\alpha - \eta, \alpha + \eta)$, který celý leží v definičním oboru funkce $f$. Slovy, že nějaká funkce $f$ je definována *zprava od bodu* $\alpha$ rozumíme, že existuje polootevřený interval $I = \langle \alpha, \eta)$ takový, že $I \subset \mathcal{D}(f)$. Analogický význam mají slova, že funkce $f$ je definována *zleva od bodu* $\alpha$.

Definujeme: Nechť $f$ je reálná funkce jedné reálné proměnné definovaná v okolí bodu $\alpha$. Říkáme, že funkce $f$ *je v bodě* $\alpha$ *spojitá*, jestliže existuje limita funkce $f$ v bodě $\alpha$ a platí $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$. Jestliže označíme $x - \alpha = h$, můžeme podmínku zřejmě zapsat ve tvaru $\lim\limits_{h\to 0} f(\alpha + h) = f(\alpha)$.

Jestliže funkce $f$ je spojitá v každém bodě nějaké podmnožiny $\mathcal{A}$ jejího definičního oboru $\mathcal{D}(f)$, potom o ní říkáme, že *je spojitá v* $\mathcal{A}$. Jestliže funkce $f$ je spojitá v $\mathcal{D}(f)$, potom o ní krátce říkáme, že *je spojitá*, nebo také, že *je třídy $C$ nula* a píšeme $f \in C^0$.

Bod $\beta \in \mathcal{D}(f)$, ve kterém funkce $f$ není spojitá, nazýváme *bodem nespojitosti* funkce $f$. Snadno vidíme, že nespojitost v bodě $\beta$ může být "způsobena" třemi důvody:

a) funkce není definována v žádném okolí bodu $\beta$ ,

b) limita funkce $f$ v bodě $\beta$ sice existuje, není však rovna hodnotě funkce $f$ v bodě $\beta$,

c) limita funkce $f$ v bodě $\beta$ neexistuje.

Jestliže v definici spojitosti funkce limitu nahradíme levostrannou nebo pravostrannou limitou, potom hovoříme o *spojitosti zleva* nebo o *spojitosti zprava.* V tomto případě stačí předpokládat, že funkce $f$ je definována pouze zleva nebo zprava od bodu $\alpha$.

Je ihned zřejmé, že platí věta:

*Funkce $f$ je spojitá ve vnitřním bodě intervalu tehdy a jen tehdy, když je v něm spojitá zleva i zprava.*

O funkci $f$ říkáme, že je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, jestliže je spojitá v každém bodě otevřeného intervalu $(a, b)$, spojitá zprava v bodě $a$ a spojitá zleva v bodě $b$. Obdobně definujeme spojitost v intervalech $\langle a, b)$, $(a, b\rangle$.

**Algebra spojitých funkcí.** Zřejmě platí věta:

*Jestliže funkce $f, g$ definované v jednom a témže intervalu $I$ jsou v nějakém bodě $\alpha \in I$ spojité, potom je v tomto bodě spojitý i jejich součet, rozdíl a součin. Za předpokladu, že $g(x) \neq 0$ pro $\forall\ x \in I$, potom i jejich podíl $\frac{f}{g}$ je spojitá funkce v $\alpha$. Obdobná věta platí i pro spojitost zleva nebo zprava.*

**Základní vlastnosti spojitých funkcí.** Spojité funkce mají několik "velmi užitečných" vlastností, které nyní souhrnně uvedeme:

**1.** *Funkce $f$ spojitá a kladná {resp. záporná} v bodě $\alpha$, je kladná {resp. záporná} i v nějakém okolí bodu $\alpha$.*

**2.** *Nechť funkce $f$ je spojitá v intervalu $I$ a nechť $\alpha,\ \beta \in I$ jsou taková čísla, že $f(\alpha)f(\beta) < 0$ (tj. hodnoty $f(\alpha),\ f(\beta)$ mají opačná znaménka). Potom mezi čísly $\alpha,\ \beta$ leží alespoň jeden nulový bod $c$ funkce $f$, tj. takové číslo $c$, že $f(c) = 0$. Jinými slovy, potom rovnice $f(x) = 0$ má v intervalu $(\alpha, \beta)$ alespoň jedno řešení.*

**3.** *Nechť funkce $f$ je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$. Potom funkce $f$ nabývá v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ každou hodnotu ležící mezi čísly $f(\alpha)$ a $f(\beta)$. Této vlastnosti se říká vlastnost Darboux, nebo také Bolzanova mezihodnotová věta.*

**4.** *Nechť funkce $f$ je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$. Potom funkce $f$ je v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ ohraničená.*

**5.** *Nechť funkce $f$ je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$. Potom funkce $f$ nabývá alespoň v jednom bodě $i \in \langle\alpha, \beta\rangle$ svou nejmenší hodnotu a alespoň v jednom bodě $s \in \langle\alpha, \beta\rangle$ svou největší hodnotu, tj. pro všechna čísla $x \in \langle\alpha, \beta\rangle$ platí*

$$f(i) \ \leq \ f(x) \ \leq \ f(s)\ .$$

**6.** *Nechť $f$ je funkce definovaná a spojitá v uzavřeném intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$. Potom jejím oborem hodnot $\mathcal{H}(f)$ je opět uzavřený interval.*

**7.** *Nechť $f$ je funkce definovaná, spojitá a ryze monotonní v intervalu $I$ (interval $I$ nemusí být uzavřený). Potom jejím oborem hodnot $\mathcal{H}(f)$ je opět interval (nemusí být uzavřený a ani ohraničený).*

**Spojitost inverzní funkce.** Pro spojitost inverzní funkce platí následující věta

*Nechť $f$ je spojitá a ryze monotonní funkce v intervalu $I$. Potom inverzní funkce $inv f$ je rovněž ryze monotonní (rostoucí když $f$ je rostoucí, klesající když $f$ je klesající) a spojitá v $\mathcal{H}(f)$.*

**Limita a spojitost složené funkce.** Pro limitu a spojitost složené funkce platí následující věta:

*Nechť $f$ je funkce definovaná a spojitá v intervalu $I$ a nechť $g$ je funkce definovaná na množině $\mathcal{A}$ přičemž obor hodnot funkce $g$ patří do $I$. Nechť $h = f \bullet g$ je složená funkce definovaná v $\mathcal{A}$ vztahem $h(x) = f(g(x))$.*

*a) Jestliže vnitřní složka $g$ má v bodě $\alpha$ limitu $t$ patřící do $I$, potom i složená funkce $h$ má v bodě $\alpha$ limitu a platí*

$$\lim_{x\to\alpha} f(g(x)) \;=\; f\left(\lim_{x\to\alpha} g(x)\right) \ .$$

*b) Jestliže vnitřní funkce $g$ je spojitá v $\mathcal{A}$, potom i složená funkce $h$ je spojitá v $\mathcal{A}$.*

**Limita vektorové funkce.** Nechť $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \ldots, f_m]$ je vektorová funkce definovaná na množině reálných čísel $\mathcal{A}$. Potom definujeme

$$\lim_{x\to\alpha} \mathbf{f}(x) = \left[\lim_{x\to\alpha} f_1(x), \lim_{x\to\alpha} f_2(x), \ldots, \lim_{x\to\alpha} f_m(x)\right] \ ,$$

ovšem za předpokladu, že všechny limity na pravé straně existují.

Přímo z definice lze snadno dokázat následující větu:

*Nechť $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \ldots, f_m]$, $\mathbf{g} = [g_1, g_2, \ldots, g_m]$ jsou dvě $m$-rozměrné reálné vektorové funkce definované v $\mathcal{A} \subset \mathcal{R}$ a nechť $h$ je reálná funkce, rovněž definovaná v $\mathcal{A}$. Nechť v hromadném bodě $\alpha$ množiny $\mathcal{A}$ existují limity $\lim_{x\to\alpha} \mathbf{f}(x)$, $\lim_{x\to\alpha} \mathbf{g}(x)$, $\lim_{x\to\alpha} h(x)$. Potom*

*a) existuje limita součtu a rozdílu funkcí $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ a platí*

$$\lim_{x\to\alpha} (\mathbf{f}(x) \pm \mathbf{g}(x)) \;=\; \lim_{x\to\alpha} \mathbf{f}(x) \pm \lim_{x\to\alpha} \mathbf{g}(x) \ ,$$

*b) existuje limita součinu reálné funkce $h$ a vektorové funkce $\mathbf{f}$ a platí*

$$\lim_{x\to\alpha} (h(x)\mathbf{f}(x)) \;=\; \lim_{x\to\alpha} h(x) \cdot \lim_{x\to\alpha} \mathbf{f}(x) \ ,$$

*c) existuje limita skalárního součinu vektorových funkcí $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ a platí*

$$\lim_{x\to\alpha} (\mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{g}(x)) \;=\; \lim_{x\to\alpha} \mathbf{f}(x) \cdot \lim_{x\to\alpha} \mathbf{g}(x) \ ,$$

*d) existuje limita velikosti $|\mathbf{f}|$ vektorové funkce $\mathbf{f}$ a platí*

$$\lim_{x\to\alpha} |\mathbf{f}(x)| \;=\; \left|\lim_{x\to\alpha} \mathbf{f}(x)\right| \ ,$$

*e) v případě, že vektorové funkce $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ jsou trojrozměrné, existuje limita jejich vektorového součinu a platí*

$$\lim_{x\to\alpha} (\mathbf{f}(x) \times \mathbf{g}(x)) \;=\; \lim_{x\to\alpha} \mathbf{f}(x) \times \lim_{x\to\alpha} \mathbf{g}(x) \ .$$

Analogicky definujeme jednostranné limity vektorové funkce. Výše uvedená věta platí i pro ně.

**11.26. Spojitost vektorové funkce.** Nechť $m$-rozměrná vektorová funkce $\mathbf{f} = [f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_m]$ je definována v okolí bodu $\alpha$. Říkáme, že *je spojitá v bodě $\alpha$*, jestliže v bodě $\alpha$ jsou spojité všechny její složky $f_i$, tj. jestliže platí $\lim_{x\to\alpha} \mathbf{f}(x) \;=\; \mathbf{f}(\alpha)$.

Platí věta:

*Jestliže vektorové funkce* $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ *a reálná funkce* $h$ *jsou spojité v bodě* $\alpha$*, potom jsou spojité v bodě* $\alpha$ *i funkce* $\mathbf{f} \pm \mathbf{g},\ h\mathbf{f},\ \mathbf{f} \cdot \mathbf{g},\ |\mathbf{f}|,\ \mathbf{f} \times \mathbf{g}$.

## 12. DERIVACE FUNKCE.

**Definice derivace.** Nechť reálná funkce $f$ jedné reálné proměnné $x$ je definována v okolí bodu $\alpha$. Jestliže existuje limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h} ,$$

potom říkáme, že *funkce* $f$ *je derivovatelná v bodě* $\alpha$ a limitu nazýváme *derivací funkce* $f$ *v bodě* $\alpha$. Označujeme ji $f'(\alpha)$, nebo také $Df(\alpha)$.

Jestliže označíme $\alpha + h = x$, potom zřejmě $h \to 0$ tehdy a jen tehdy, když $x \to \alpha$. Platí tedy

$$f'(\alpha) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h} = \lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$$

Jestliže funkce $f$ je derivovatelná v každém bodě $x$ svého definičního oboru $\mathcal{D}(f)$, potom můžeme definovat na $\mathcal{D}(f)$ novou funkci $g$ vztahem $g(x) = f'(x)$. Tuto novou funkci $g$ nazýváme *derivací funkce* $f$ a značíme $f'$, nebo také $(f(x))'$, eventuálně $\frac{\partial}{\partial x}(f(x))$.

**Nutná podmínka derivovatelnosti.** Platí věta

*Jestliže funkce* $f$ *je derivovatelná v bodě* $\alpha$*, potom je v tomto bodě spojitá.*

Spojitost je tedy nutnou podmínkou derivovatelnosti. Není však postačující.

**Geometrická a fyzikální interpretace derivace.** Definujeme: Nechť $y = f(x)$ je rovnice kartézského grafu funkce $f$ definované a spojité v intervalu $I$. Nechť funkce $f$ je derivovatelná v bodě $\alpha$. Potom přímku danou rovnicí

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$$

nazýváme *tečnou* kartézského grafu funkce $f$ v bodě $A = (\alpha, f(\alpha))$ (krátce v $\alpha$) a přímku danou rovnicí

$$y - f(\alpha) = \frac{1}{f'(\alpha)}(x - \alpha) \quad \text{v případě} \quad f'(\alpha) \neq 0 ,$$
$$\text{nebo rovnicí} \quad x = \alpha \quad \text{v případě} \quad f'(\alpha) = 0$$

pak *normálou* v bodě $A = (\alpha, f(\alpha))$ (krátce v $\alpha$).

Podobně, jak nás derivace přivedla ke geometrické interpretaci směrnice tečny, vede nás k následující fyzikální interpretaci:

a) Jestliže se těleso pohybuje přímočaře a jeho dráha $s$ je funkcí času $t$, potom jeho okamžitá rychlost $v$ v čase $t$ je dána vztahem $v(t) = s'(t)$ a okamžité zrychlení $a$ v čase $t$ je dáno vztahem $a(t) = v'(t)$.

b) Jestliže průběh $m$ fyzikální veličiny je funkcí času $t$, potom okamžitá změna $v$ této veličiny v čase $t$ je dána vztahem $v(t) = m'(t)$. Jako příklady lze zde uvést intenzitu elektrického proudu, rychlost rozpadu množství radioaktivní látky, rychlost chemické reakce atd.

**Jednostranné derivace.** Jestliže v definici derivace limitu nahradíme jednostrannou limitou zleva nebo zprava, potom hovoříme o *derivaci zleva* nebo o *derivaci zprava* v bodě $\alpha$ a označujeme je $f'(\alpha-)$ a $f'(\alpha+)$. Platí tedy

$$f'(\alpha-) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} = \lim_{x\to\alpha-} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$$
$$f'(\alpha+) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} = \lim_{x\to\alpha+} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$$

V případě těchto derivací stačí předpokládat, že funkce $f$ je definována pouze zleva, eventuálně zprava od bodu $\alpha$.

O funkci $f$ říkáme, že je derivovatelná v uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$, jestliže je derivovatelná v každém bodě intervalu $(a,b)$ a na koncích existují jednostranné derivace $f'(a+), f'(b-)$. Obdobně definujeme derivovatelnost v intervalech $\langle a,b)\,,(a,b\rangle$.

**Nevlastní derivace.** Jestliže v definici derivace limitu nahradíme nevlastní limitou plus nekonečno nebo nevlastní limitou mínus nekonečno, potom místo o derivaci hovoříme o *nevlastní derivaci* (plus nebo mínus nekonečno).

**Algebra derivací funkcí.** Víme, že limita součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí se rovná součtu. rozdílu, součinu a podílu jejich limit. V případě derivací je však situace složitější. Zde platí věta:

*Jestliže funkce $f$ a $g$ jsou v nějakém bodě $\alpha$ derivovatelné, potom i jejich součet $(f+g)$, rozdíl $(f-g)$ a součin $(fg)$ jsou funkce derivovatelné v $\alpha$ a platí*

$$(f+g)'(\alpha) = f'(\alpha) + g'(\alpha)$$
$$(f-g)'(\alpha) = f'(\alpha) - g'(\alpha)$$
$$(fg)'(\alpha) = f'(\alpha)g(\alpha) + f(\alpha)g'(\alpha)$$

*Podíl $\left(\frac{f}{g}\right)$, za předpokladu, že $g(\alpha)\neq 0$, je také v $\alpha$ derivovatelný a platí*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\alpha) = \frac{f'(\alpha)g(\alpha) - f(\alpha)g'(\alpha)}{g^2(\alpha)}$$

**Derivace složené funkce.** Pro derivaci složené funkce platí následující věta:

*Nechť $s = f \bullet g$ je složená funkce definovaná vztahem $s(x) = f(g(x))$ (jinak zapsáno, $s(x) = f(u)$, kde $u = g(x)$). Jestliže vnitřní složka $g$ je derivovatelná v bodě $\alpha$ a vnější složka $f$ je derivovatelná v bodě $g(\alpha)$, potom i složená funkce $s$ je derivovatelná v bodě $\alpha$ a platí*

$$s'(\alpha) = f'(g(\alpha))\cdot g'(\alpha)$$
$$(\textit{tj.}\quad s'(\alpha) = f'(\beta)\cdot g'(\alpha), \quad \textit{kde}\quad \beta = g(\alpha)\ )$$

**Derivace inverzní funkce.** Pro derivování inverzních funkcí platí následující důležitá věta:

*Nechť $f$ je ryze monotonní a spojitá funkce definovaná na intervalu $J$. Nechť $invf$ je inverzní funkce k funkci $f$ a nechť $\alpha$ je vnitřním bodem jejího definičního oboru (připomínám, že $\mathcal{D}(invf) = \mathcal{H}(f)$). Jestliže funkce $f$ má nenulovou derivaci v bodě $\beta = invf(\alpha)$, potom funkce $invf$ je derivovatelná v bodě $\alpha$ a platí*

$$invf'(\alpha) = \frac{1}{f'(\beta)} \ , \quad kde \quad \beta = invf(\alpha) \ .$$

**Logaritmická derivace.** Nechť funkce $f$ je derivovatelná a různá od nuly v množině $\mathcal{A}$. Ze vzorce pro derivování složené funkce plyne důležitý vzorec $(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$. Výraz na jeho levé straně nazýváme *logaritmickou derivací* funkce $f$.

Ze vzorce ihned plyne tzv. *vzorec pro logaritmické derivování*
$f'(x) = f(x) \cdot (\ln|f(x)|)'$, $\quad x \neq 0$, který nám často zjednoduší výpočet derivace. Výpočet logaritmické derivace funkce bývá totiž v mnohých případech jednodušší než výpočet samotné derivace funkce. V některých případech se dokonce bez vzorce pro logaritmické derivování ani neobejdeme.

**Derivace elementárních funkcí.** V bodech $x$, které splňují uvedené podmínky, platí následující vzorce pro derivování:

$(c)' = 0$, kde $c$ je libovolná reálná konstanta.

$(x^a)' = ax^{a-1}$ pro $\forall\ x > 0$, kde $a$ je libovolné reálné číslo. Tento vzorec zůstává v platnosti i pro $x < 0$, pokud ovšem je mocnina $x^a$ definována.

$(a^x)' = a^x \ln a \qquad x \in (-\infty, \infty)$, kde $a$ je libovolné kladné reálné číslo.

$(e^x)' = e^x, \quad x \in (-\infty, \infty)$

$(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, kde $a$ je libovolné kladné reálné číslo různé od jedné.

$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ , $\quad (\sin x)' = \cos x$ , $\quad (\cos x)' = -\sin x$,

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ , $\quad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , $\quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ , $(arccot\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

**Základní vlastnosti derivovatelných funkcí.** Derivovatelné funkce mají několik velmi "užitečných" vlastností, které jsou v aplikacích často využívány:

**1.** *Jestliže funkce $f$ je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, derivovatelná ve všech vnitřních bodech tohoto intervalu a platí $f(a) = f(b)$, potom v intervalu $(a, b)$ existuje aspoň jedno číslo $\xi$ takové, že $f'(\xi) = 0$.*
Tomuto tvrzení se říká *Rolle'ova věta.*

**2.** *Jestliže funkce $f, g$ jsou spojité v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a derivovatelné v intervalu $(a, b)$, potom v intervalu $(a, b)$ existuje aspoň jedno číslo $\xi$ takové, že*

$$[f(b) - f(a)]g'(\xi) = [g(b) - g(a)]f'(\xi) \ .$$

Tomuto tvrzení se říká *Cauchy'ova věta o střední hodnotě.*

**3.** *Jestliže funkce $f$ je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a derivovatelná v intervalu $(a, b)$, potom v intervalu $(a, b)$ existuje aspoň jedno číslo $\xi$ takové, že*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

Tomuto tvrzení, které je jedním z nejdůležitějších v diferenciálním počtu, se říká *Lagrange'ova věta o střední hodnotě.*

**4.** *Jestliže funkce $f$ je derivovatelná v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a její derivace $f'$ je v $\langle a, b\rangle$ nulová (tj. $f'(a+) = f'(b-) = 0$ a $f'(x) = 0 \ \forall\ x \in (a, b)$), potom funkce $f$ je v intervalu $\langle a, b\rangle$ konstantní.*

**5.** *Jestliže funkce $f$ je derivovatelná v intervalu $(a, b)$ a ve všech bodech $x$ tohoto intervalu platí $f'(x) > 0$ $\{$resp. $f'(x) < 0$, resp. $f'(x) \geq 0$, resp. $f'(x) \leq 0\}$, potom je funkce $f$ na tomto intervalu rostoucí $\{$resp. klesající, resp. neklesající, resp. nerostoucí$\}$.*
Tomuto tvrzení se říká *věta o monotonnii funkce na intervalu.*

**6.** *Nechť $f$ je funkce spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Jestliže v každém bodě intervalu $(a, b)$ je funkce $f$ derivovatelná a její derivace $f'$ je různá od nuly, potom funkce $f$ je ryze monotonní v $\langle a, b\rangle$.*
Tomuto tvrzení budeme říkat *zobecněná věta o monotonnii na uzavřeném intervalu.*

**Vyšší derivace.** Nechť je dána nějaká funkce $f$ s definičním oborem $\mathcal{D}(f)$ a nechť $\mathcal{D}^{(1)}(f) \subset \mathcal{D}(f)$ je množina všech bodů, ve kterých je funkce $f$ derivovatelná. Můžeme tedy na množině $\mathcal{D}^{(1)}(f)$ definovat novou funkci $f^{(1)}$ vztahem
$f^{(1)}(x) = f'(x)$. Podobně, nechť $\mathcal{D}^{(2)}(f) \subset \mathcal{D}^{(1)}(f)$ je množina všech těch bodů $x$, ve kterých je funkce $f^{(1)}$ derivovatelná. Můžeme tedy na množině $\mathcal{D}^{(2)}(f)$ definovat novou funkci $f^{(2)}$ vztahem $f^{(2)}(x) = \left[f^{(1)}(x)\right]' = [f'(x)]'$. Tuto funkci nazýváme *druhou derivací funkce $f$* nebo také *derivací druhého řádu funkce $f$* a značíme $f''$. Obecně definujeme *$n$-tou derivaci $f^{(n)}$ funkce $f$* (nebo také říkáme *derivaci $n$-tého řádu funkce $f$*) vztahem

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]' .$$

Jejím definičním oborem $\mathcal{D}^{(n)}(f)$ je množina všech bodů, ve kterých je derivovatelná funkce $f^{(n-1)}$. Místo $f^{(n)}(x)$ často píšeme $[f(x)]^{(n)}$ a místo $f$, event. $f'$ píšeme $f^{(0)}$, event. $f^{(1)}$.

**Výpočet limit pomocí derivací.** Je poněkud paradoxní, že derivace, která je sama definována jako limita, je velmi silným prostředkem pro výpočet limit. Jedná se o limity tzv. neurčitých výrazů $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, $1^\infty$, $0^0$, $\infty^0$.

**Neurčité výrazy typu $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$.** Vyjdeme z důležité věty, zvané *l'Hospitalovo pravidlo*:

*Nechť $f$ a $g$ jsou funkce derivovatelné v nějakém okolí $\mathcal{U} = (\alpha - \eta, \alpha + \eta)$ bodu $\alpha$ s vyjímkou nanejvýš samotného bodu $\alpha$ a nechť derivace $g'$ je různá od nuly v každém bodě tohoto okolí. Dále nechť existuje limita $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (může být i nevlastní) a nechť*

*a)* $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$ ,

*nebo*

*b)* $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \pm\infty$ *a také* $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \pm\infty$.

*Potom existuje i limita* $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *a platí*

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ .$$

*Věta zůstává v platnosti i tehdy, kdy v ní všude zaměníme symbol* $x\to\alpha$ *kterýmkoliv ze symbolů* $x\to\alpha+$, $x\to\alpha-$, $x\to\infty$, $x\to-\infty$ *a předpoklad o derivovatelnosti v okolí* $\mathcal{U}$ *nahradíme předpokladem o derivovatelnosti v okolí zprava, v okolí zleva, v okolí plus nekonečna (podotýkáme, že okolím nekonečna nazývýme každý interval* $(a,\infty)$*, kde a je libovolné reálné číslo) nebo v okolí mínus nekonečna.*

**Neurčité výrazy typu $0\cdot\infty$ a $\infty-\infty$.** Jde o výpočet limit

a) $\lim\limits_{x\to\alpha}[u(x)v(x)]$, přičemž $\lim\limits_{x\to\alpha}u(x)=0$ a $\lim\limits_{x\to\alpha}v(x)=\infty$ nebo $\lim\limits_{x\to\alpha}v(x)=-\infty$,

b) $\lim\limits_{x\to\alpha}[u(x)-v(x)]$, přičemž $\lim\limits_{x\to\alpha}u(x)=\lim\limits_{x\to\alpha}v(x)=\infty$ nebo $\lim\limits_{x\to\alpha}u(x)=\lim\limits_{x\to\alpha}v(x)=-\infty$.

V obou případech, abychom mohli použít l'Hospitalovo pravidlo, převádíme tyto výrazy na neurčité výrazy typu $\frac{0}{0}$, popř. typu $\frac{\infty}{\infty}$. To vždycky jde. Používáme k tomu např.

v případě a) identitu $u\cdot v=\dfrac{u}{\frac{1}{v}}$ nebo identitu $u\cdot v=\dfrac{v}{\frac{1}{u}}$, a dostaneme tak typ $\frac{0}{0}$ pro $f=u$ a $g=\frac{1}{v}$ nebo typ $\frac{\infty}{\infty}$ pro $f=v$ a $g=\frac{1}{u}$,

v případě b) identitu $u-v=\dfrac{\frac{1}{v}-\frac{1}{u}}{\frac{1}{uv}}$ a dostaneme tak typ $\frac{0}{0}$ pro $f=\frac{1}{v}-\frac{1}{u}$ a $g=\frac{1}{uv}$.

**Neurčité výrazy typu $0^0$, $1^\infty$, $\infty^0$.** Jde o výpočet limity $l=\lim\limits_{x\to\alpha}\left[u(x)^{v(x)}\right]$ v případech, kdy

a) $\lim\limits_{x\to\alpha}u(x)=\lim\limits_{x\to\alpha}v(x)=0$ ,

b) $\lim\limits_{x\to\alpha}u(x)=1$ a $\lim\limits_{x\to\alpha}v(x)=\infty$ ,

c) $\lim\limits_{x\to\alpha}u(x)=\infty$ a $\lim\limits_{x\to\alpha}v(x)=0$ .

Ve všech třech případech využijeme identitu $u(x)^{v(x)}=e^{v(x)\cdot\ln u(x)}$ a použijeme vztah pro výpočet limity složené funkce. Dostáváme

$l=\lim\limits_{x\to\alpha}\left[u(x)^{v(x)}\right]=e^{\lim\limits_{x\to\alpha}[v(x)\ln u(x)]}$, tj.

$l=e^k$, kde $k=\lim\limits_{x\to\alpha}[v(x)\ln u(x)]$.

Při výpočtu limity $k$ se pak ve všech třech případech jedná o neurčitý výraz typu $0\cdot\infty$.

**Křivost kartézského grafu funkce.** Nechť je dána funkce $f$ derivovatelná v intervalu $(a,b)$ , nechť $\alpha$ je libovolné číslo z $(a,b)$ a nechť $n_\alpha$ je normála ke grafu $y=f(x)$ v bodě $A_\alpha=(\alpha,f(\alpha))$. Nechť $h$ je libovolné číslo (kladné nebo záporné) takové, že $\alpha+h\in(a,b)$ a nechť $n_{\alpha+h}$ je normála ke grafu $y=f(x)$ v bodě $A_{\alpha+h}=(\alpha+h,f(\alpha+h))$. Nechť $M=(m_1,m_2)$ je průsečík normál $n_\alpha,n_{\alpha+h}$. Jestliže bod $A_{\alpha+h}$ se blíží k bodu $A_\alpha$ po grafu $y=f(x)$, potom bod $M=(m_1,m_2)$

se blíží (za předpokladu, že $f'(\alpha) \neq 0$) po normále $n_\alpha$ k bodu $S_\alpha = (\xi_\alpha, \eta_\alpha)$, jehož souřadnice $\xi_\alpha, \eta_\alpha$ jsou dány vztahy

$$\xi_\alpha = \alpha - \frac{1 + [f'(\alpha)]^2}{f''(\alpha)} f'(\alpha) \ , \ \eta_\alpha = f(\alpha) + \frac{1 + [f'(\alpha)]^2}{f''(\alpha)} \ .$$

Bod $S_\alpha$ nazýváme *středem křivosti* grafu $y = f(x)$ v bodě $A_\alpha = (\alpha, f(\alpha))$, nebo krátce, v bodě $\alpha$.

Vzdálenost $\rho_\alpha$ bodů $A_\alpha$ a $S_\alpha$, tj. číslo $\rho_\alpha = |A_\alpha S_\alpha| = \frac{\left[1+[f'(\alpha)]^2\right]^{\frac{3}{2}}}{|f''(\alpha)|}$ nazýváme *poloměrem křivosti* a její opačnou hodnotu $\dfrac{1}{\rho_\alpha}$, tj. číslo $\frac{1}{\rho_\alpha} = \frac{|f''(\alpha)|}{\left[1+[f'(\alpha)]^2\right]^{\frac{3}{2}}}$ nazýváme *křivostí* grafu $y = f(x)$ v bodě $A_\alpha = (\alpha, f(\alpha))$ (krátce, v $\alpha$).

Kružnici se středem $S_\alpha = (\xi_\alpha, \eta_\alpha)$ a s poloměrem $\rho_\alpha$ nazýváme *oscilační kružnicí* grafu $y = f(x)$ v bodě $A_\alpha$.

Když bod $A_\alpha = (\alpha, f(\alpha))$ "se pohybuje" po grafu $y = f(x)$, tj. $\alpha$ nabývá postupně všechny hodnoty z intervalu $(a, b)$, potom bod $S_\alpha$ vytváří v kartézské rovině množinu bodů

$$\mathcal{E} = ((x, y) \in \mathcal{R}_2 : \ x = \varphi(\alpha), y = \psi(\alpha), \ \alpha \in (a, b)) \ , \text{ kde}$$
$$\varphi(\alpha) = \alpha - \frac{1 + [f'(\alpha)]^2}{f''(\alpha)} f'(\alpha) \quad , \quad \psi(\alpha) = f(\alpha) + \frac{1 + [f'(\alpha)]^2}{f''(\alpha)} \ .$$

Množina $\mathcal{E}$ se nazývá *evoluta* grafu $y = f(x)$ a rovnice $x = \varphi(\alpha)$, $y = \psi(\alpha)$ *parametrické rovnice evoluty.*

**Parametrické rovnice křivky v rovině.** Množinu bodů, jejichž kartézské souřadnice $x, y$ jsou funkce dané vztahy

$x = \varphi(t) \quad , \quad y = \psi(t) \quad , \quad t \in I$

nazýváme *křivkou v kartézské rovině definovanou parametricky* v intervalu $I$ (nejčastěji $I = \langle a, b \rangle$ nebo $I = (-\infty, \infty)$). Přitom předpokládáme, že funkce $\varphi(t), \psi(t)$ argumentu $t$ mají tyto vlastnosti:

1. Jsou v intervalu $I$ spojité.

2. Mají spojité derivace $\dot\varphi(t), \dot\psi(t)$ vzhledem k proměnné $t$ v celém intervalu $I$ s výjimkou nanejvýš konečného počtu bodů, přičemž nanejvýš s výjimkou konečného počtu bodů platí $\dot\varphi^2 + \dot\psi^2 > 0$ (tj. alespoň jedna z derivací $\dot\varphi, \dot\psi$ je různá od nuly).

Argument $t$ nazýváme *parametrem křivky* a samotným rovnicím říkáme *parametrické rovnice křivky* (v kartézské rovině).

Podobně definujeme parametrickými rovnicemi i křivku v polárních souřadnicích.

**Tečna a normála k rovinné křivce dané parametricky.** Tečna a normála v bodě $A = (\varphi(t_A), \psi(t_A))$ jsou dány rovnicemi

$$\text{tečna :} \qquad \dot\psi(t_A)(x - \varphi(t_A)) - \dot\varphi(t_A)(y - \psi(t_A)) = 0$$
$$\text{normála :} \qquad \dot\varphi(t_A)(x - \varphi(t_A)) + \dot\psi(t_A)(y - \psi(t_A)) = 0$$

**Příklady technických křivek.**

**1.** Cykloida. Je to trajektorie bodu $P$ majícího fixovanou polohu vzhledem ke kružnici otáčející se po pevné (nepohybující se) přímce. Její parametrické rovnice v případě, kdy kružnice se středem $S$ a s poloměrem $r$ se otáčí po ose $O_x$ a bod $P$ leží na polopřímce $SA$, kde $A$ je pevný bod na obvodu kružnice jsou (vzdálenost bodů $S$ a $P$ označme $c$)

$$x = rt - c\sin t \quad , \quad y = r - c\cos t \; .$$

Odtud, pro tzv. *obyčejnou cykloidu ($c = r$)*, platí

$$x = r(t - \sin t) \quad , \quad y = r(1 - \cos t) \; .$$

**2.** Evolventa kružnice. Je to trajektorie bodu $P$ fixovaného na přímce $p$ otáčející se po obvodu pevné (nepohybující se) kručnice $k$ o poloměru $r$. Její parametrické rovnice v případě, kdy střed kružnice $k$ splývá s počátkem kartézské soustavy souřadnic a kdy přímka $p$ se dotýká v určitém čase obvodu kružnice v bodě $M$ jsou

$$x = r(\cos t + t\sin t) \quad , \quad y = r(\sin t - t\cos t) \; .$$

**3.** Spirály. V technických problémech se vyskytují tři křivky dané následujícími polárními grafy ( $c$ a $\lambda$ jsou kladné konstanty)

| | |
|---|---|
| $r = c\theta$ | Archimedova spirála |
| $r = \dfrac{c}{\theta}$ | hyperbolická spirála |
| $r = ce^{\lambda\theta}$ | logaritmická spirála |

**Derivace vektorové funkce.** Nechť v okolí bodu $\alpha$ je definována $m$-rozměrná vektorová funkce $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \ldots, f_m]$. Jestliže všechny funkce $f_i$ jsou derivovatelné v bodě $\alpha$, potom o vektorové funkci $\mathbf{f}$ říkáme, že je *derivovatelná* v bodě $\alpha$ a vektor $\mathbf{f}'(\alpha) = [f_1'(\alpha), f_2'(\alpha), \cdots, f_m'(\alpha)]$ nazýváme její *derivací v $\alpha$*.

Přímo z definice lze snadno dokázat následující větu

*Nechť $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \ldots, f_m]$, $\mathbf{g} = [g_1, g_2, \ldots, g_m]$ jsou dvě $m$-rozměrné vektorové funkce jedné reálné proměnné definované v okolí $\mathcal{U}_\alpha$ bodu $\alpha$ a nechť $q$ je reálná funkce jedné reálné proměnné, rovněž definovaná v okolí $\mathcal{U}_\alpha$. Nechť funkce $\mathbf{f}, \mathbf{g}, q$ jsou derivovatelné v bodě $\alpha$. Potom*

*a) součet a rozdíl funkcí $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ je derivovatelný v $\alpha$ a platí*

$$(\mathbf{f} \pm \mathbf{g})'(\alpha) = \mathbf{f}'(\alpha) \pm \mathbf{g}'(\alpha) \; ,$$

*b) součin reálné funkce $q$ a vektorové funkce $\mathbf{f}$ je derivovatelný v $\alpha$ a platí*

$$(q\mathbf{f})'(\alpha) = q'(\alpha)\mathbf{f}(\alpha) + q(\alpha)\mathbf{f}'(\alpha) \; ,$$

*c) skalární součin vektorových funkcí $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ je derivovatelný v $\alpha$ a platí*

$$(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})'(\alpha) = \mathbf{f}'(\alpha) \cdot \mathbf{g}(\alpha) + \mathbf{f}(\alpha) \cdot \mathbf{g}'(\alpha) \; ,$$

*d) jestliže navíc $\mathbf{f}(\alpha) \neq \mathbf{o}$, potom i velikost $|\mathbf{f}|$ vektorové funkce $\mathbf{f}$ je derivovatelná v $\alpha$ a platí*

$$|\mathbf{f}|'(\alpha) = \frac{\mathbf{f}'(\alpha) \cdot \mathbf{f}(\alpha)}{|\mathbf{f}(\alpha)|} \ ,$$

*e) v případě, že vektorové funkce $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ jsou trojrozměrné, je i jejich vektorový součin derivovatelný v $\alpha$ a platí*

$$(\mathbf{f} \times \mathbf{g})'(\alpha) = \mathbf{f}'(\alpha) \times \mathbf{g}(\alpha) + \mathbf{f}(\alpha) \times \mathbf{g}'(\alpha) \ .$$

## 13. TAYLOROVA VĚTA A APLIKACE.

**Taylorova věta s Lagrange'ovým zbytkem.** Platí věta:

*Nechť funkce $f$ má v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ derivace až do $n$-tého řádu včetně ($n$ je pevně zvolené celé nezáporné číslo) a všechny tyto derivace jsou v $\langle a, b\rangle$ spojité. Nechť všude uvnitř tohoto intervalu existuje $n+1$-ní derivace $f^{(n+1)}$ funkce $f$. Nechť body $\alpha, \alpha + h$ ($h \neq 0$, číslo $h$ může být i záporné) patří do $\langle a, b\rangle$. Potom existuje kladné číslo $\theta$ menší než jedna ($0 < \theta < 1$) takové, že platí*

$$f(\alpha + h) = T_{n,\alpha}(h) + e_n(h) \ , \tag{13.1}$$

*kde $T_{n,\alpha}(h)$ je polynom $n$-tého stupně v proměnné $h$ (tzv. Taylorův polynom) definovaný vztahem*

$$T_{n,\alpha}(h) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1\,!}h + \frac{f''(\alpha)}{2\,!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n\,!}h^n \tag{13.2}$$

*a výraz $e_n(h)$ (tzv. Lagrange'ův zbytek) je dán vztahem*

$$e_n(h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)\,!} f^{(n+1)}(\alpha + \theta h) \ . \tag{13.3}$$

Podotkněme, že pro chybu $e_n(h)$ byly odvozeny i jiné vztahy (např. Peánův zbytek, Cauchyův zbytek).

Vzorec (1) se nazývá *Taylorovým rozvojem $n$–tého stupně v bodě $\alpha$.*

**Maclaurinův rozvoj.** Označíme-li ve vzorcích (1) –(3) $\alpha + h = x$, tj. $h = x - \alpha$, potom dostaneme často používaný tvar Taylorova rozvoje

$$\begin{aligned} f(x) = f(\alpha) &+ \frac{f'(\alpha)}{1\,!}(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2\,!}(x-\alpha)^2 + \cdots \\ &+ \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n\,!}(x-\alpha)^n + \frac{f^{(n+1)}(\alpha + \theta(x-\alpha))}{(n+1)\,!}(x-\alpha)^{n+1} \end{aligned}$$

V případě $\alpha = 0$ odtud dostáváme

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1\,!}x + \frac{f''(0)}{2\,!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)\,!}x^{n+1} \ .$$

a to je tzv. *Maclaurin'ův rozvoj* $n$-tého stupně funkce $f$ s Lagrange'ovým zbytkem.

**Diferenciály funkce.** Výrazy $f'(\alpha)\cdot h$, $f''(\alpha)\cdot h^2, \dots\; f^{(n)}(\alpha)\cdot h^n$ v Taylorově polynomu (2) se nazývají *prvním*, *druhým*, ..., *n-tým diferenciálem* funkce $f$ v bodě $\alpha$ a označují se $d^1 f(\alpha)$, $d^2 f(\alpha), \dots\; d^n f(\alpha)$.
Platí tedy $d^1 f(\alpha) = f'(\alpha)\cdot h$ , $d^2 f(\alpha) = f''(\alpha)\cdot h^2$ a obecně $d^n f(\alpha) = f^{(n)}(\alpha)\cdot h^n$.

První diferenciál většinou označujeme $df(\alpha)$ místo $d^1 f(\alpha)$ a nazýváme jej *diferenciálem* (bez přívlastku první). Zdůrazněme, že diferenciály v bodě $\alpha$ jsou funkcemi nové proměnné $h$. Samozřejmě závisí i na bodu $\alpha$.

Obecně tedy platí $df(x) = f'(x)\cdot h$, což se často krátce zapisuje $df = f'(x)\cdot h$ . Pro funkci $f(x) = x$ tedy dostáváme $df = dx = h$.
Zde je důvod, proč místo písmene $h$ se velmi často používá dvojpísmeno $dx$, tj. proč vzorec $df = f'(x)\cdot h$ se píše ve tvaru

$$df = f'(x)\cdot dx \quad \text{nebo také} \quad f'(x) = \frac{df}{dx}$$

a proč se v technických oborech derivace často zapisuje jako podíl diferenciálů a místo derivovatelnosti se hovoří o diferencovatelnosti.

Při práci s diferenciály je tedy třeba rozlišovat, zda proměnná $x$ je nebo není závislá na jiné proměnné, např. $t$. V prvním případě symbol $dx$ představuje diferenciál funkce, tj. $dx = x'(t)dt$. Ve druhém případě pak je novou nezávisle proměnnou.

**Algebra diferenciálů funkcí.** Ze vzorců udávajících vztah pro derivování součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí ihned plyne věta

*Jestliže funkce $f$ a $g$ jsou diferencovatelné (tj. derivovatelné) v intervalu $I$, potom i jejich součet $(f+g)$, rozdíl $(f-g)$ a součin $(fg)$ jsou funkce diferencovatelné v $I$ a platí*

$$d(f+g) = df + dg\ ,\ d(f-g) = df - dg\ ,\ d(f\cdot g) = g\cdot df + f\cdot dg\ .$$

*Podíl $\left(\frac{f}{g}\right)$ je také diferencovatelný všude tam, kde $g(x) = 0$ a platí*

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\cdot df - f\cdot dg}{g^2}\ .$$

*Vzorce platí i pro diferenciály v jednotlivých bodech.*

**Lokální extrémy funkcí.** Říkáme, že funkce $f$ definovaná v okolí $\mathcal{U}_\alpha$ bodu $\alpha$ má v bodě $\alpha$ *lokální maximum* {resp.*lokální minimum*}, jestliže existuje takové okolí $(\alpha-\delta, \alpha+\delta) \subset \mathcal{U}_\alpha$ bodu $\alpha$, že platí

$$\begin{array}{rlll} & f(\alpha) \geq f(x) & \text{pro} & |x-\alpha| < \delta \\ \{\text{resp.} & f(\alpha) \leq f(x) & \text{pro} & |x-\alpha| < \delta\}\ . \end{array}$$

Jestliže v nerovnostech znaménko rovnosti platí pouze pro $x = \alpha$, potom říkáme, že lokální maximum {resp. lokální minimum} *je ostré*.

Jestliže funkce $f$ nabývá v bodě $\alpha$ lokální maximum nebo lokální minimum, potom říkáme krátce, že v něm nabývá *lokální extrém.* O samotném bodu $\alpha$ pak říkáme, že je *bodem lokálního extrému* (lokálního maxima nebo lokálního minima) *funkce $f$.*

Platí důležitá věta.

*Jestliže funkce $f$ je v bodě $\alpha$ derivovatelná a nabývá v něm lokální extrém, potom nutně $f'(\alpha) = 0$ .*

Body $\alpha$ ve kterých je funkce $f$ derivovatelná a její derivace je nulová nazýváme *stacionárními body* funkce.

Z výše uvedené věty tedy plyne závěr

*Funkce $f$ definovaná v intervalu $I$ může nabývat lokální extrém pouze v těch vnitřních bodech intervalu $I$, které jsou buďto stacionární anebo funkce $f$ v nich není derivovatelná.*

**Postačující podmínka pro existenci lokálního extrému.** V případě, že funkce $f$ je derivovatelná v bodě $\alpha$ podmínka stacionárnosti je podmínkou nutnou pro existenci lokálního extrému. Není však podmínkou postačující. Platí však věta

*Podmínka stacionárnosti se stane i postačující podmínkou pro existenci lokálního extrému v bodě $\alpha$, jestliže funkce $f$ je derivovatelná v nějakém okolí $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ bodu $\alpha$ a derivace $f'$ je v tomto okolí kladná z jedné a záporná ze druhé strany bodu $\alpha$ (říkáme, že derivace mění v bodě $\alpha$ znamánko).*

**Test s druhou derivací.** Víme, že podmínka stacionárnosti je pouze podmínkou nutnou pro existenci lokálního extrému v bodě $\alpha$, nikoli postačující. Postačující se stane, když derivace $f'$ mění v bodě $\alpha$ znaménko. Ověření této skutečnosti však není v některých případech snadné. Proto se někdy používá jiná postačující podmínka, nazývaná *test s druhou derivací*:

*Jestliže funkce $f$ má spojitou derivaci $f'$ v nějakém okolí bodu $\alpha$ a v samotném bodě $\alpha$ existuje i druhá derivace $f''(\alpha)$ přičemž platí $f'(\alpha) = 0$ a $f''(\alpha) \neq 0$, potom funkce $f$ nabývá v bodě $\alpha$ ostrý lokální extrém a to maximum v případě $f''(\alpha) < 0$ a minimum v případě $f''(\alpha) > 0$.*

**Globální extrémy.** Nechť funkce $f$ je definována v intervalu $I$. Říkáme, že funkce $f$ nabývá v bodě $\alpha \in I$ *globální maximum* {resp. *globální minimum*}, jestliže platí

$$f(\alpha) \geq f(x) \quad \{\text{resp. } f(\alpha) \leq f(x)\} \quad \text{pro } \forall\, x \in I \ .$$

Jestliže funkce $f$ nabývá v bodě $\alpha$ globální maximum nebo globální minimum, potom říkáme, že v něm nabývá *globální extrém.* O samotném bodu $\alpha$ pak říkáme, že je *bodem globálního extrému (globálního maxima* nebo *globálního minima)* funkce $f$.

Z definice je zřejmé, že leží-li bod globálního extrému uvnitř intervalu $I$, potom je i bodem lokálního extrému. Odtud plyne závěr:

*Funkce $f$ definovaná v intervalu $I$ může nabýt svou maximální i minimální hodnotu pouze v následujících bodech:*

*a) v krajních bodech intervalu $I$ a to pouze v těch, ve kterých je definována,*

*b) ve vnitřních bodech intervalu $I$ v nichž není funkce derivovatelná,*

*c) ve stacionárních bodech.*

Všechny výše uvedené body nazveme *testovacími body.* Většinou jich nebývá mnoho.

**Konkávnost a konvexnost. Inflexní bod.** Říkáme, že funkce $f$ definovaná v okolí $\mathcal{U}_\alpha$ bodu $\alpha$ je v bodě $\alpha$ *konvexní* {resp. *konkávní*}, jestliže existuje takové okolí $(\alpha-\delta,\alpha+\delta)\subset\mathcal{U}_\alpha$ bodu $\alpha$, že část grafu funkce $f$ odpovídající bodům $x$ z tohoto okolí leží nad {resp. pod} tečnou v bodě $\alpha$. Přechází-li graf v bodě $\alpha$ z jedné strany tečny na druhou, potom říkáme, že *funkce $f$ má v bodě $\alpha$ inflexní bod.*

Z rovnice tečny v bodě $\alpha$ ihned dostáváme

*Funkce $f$ je v bodě $\alpha$ konvexní {resp. konkávní} jestliže platí*

$$\begin{gathered} f(x)\ge f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)\quad \textit{pro } |x-\alpha|<\delta \\ \{\textit{resp. } f(x)\le f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)\quad \textit{pro } |x-\alpha|<\delta\} \end{gathered}$$

Jestliže v nerovnostech znaménko rovnosti platí pouze pro $x=\alpha$, potom říkáme, že funkce $f$ je v bodě $\alpha$ *ryze konvexní* {resp. *ryze konkávní* }.

Je-li funkce $f$ konvexní v každém bodě intervalu $I$, potom říkáme, že je *konvexní v intervalu $I$*. Obdobně definujeme ryze konvexní, konkávní a ryze konkávní funkci v intervalu $I$.

Z Taylorovy věty (viz (1)) ihned dostáváme následující postačující podmínku pro konvexnost a konkávnost:

*Jestliže funkce $f$ má spojitou derivaci $f'$ v nějakém okolí bodu $\alpha$ a v samotném bodě $\alpha$ existuje i druhá derivace $f''(\alpha)$, přičemž $f''(\alpha)\neq 0$, potom funkce $f$ je v bodě $\alpha$ ryze konvexní (v případě, kdy $f''(\alpha)>0$) nebo ryze konkávní (v případě, kdy $f''(\alpha)<0$).*

Z věty ihned plynou dva důsledky:

*1. Jestliže $f''(\alpha)\neq 0$, potom funkce $f$ nemůže mít v $\alpha$ inflexní bod. Existuje-li tedy druhá derivace $f''(\alpha)$ a funkce $f$ má v bodě $\alpha$ inflexní bod, potom platí*

$$f''(\alpha)=0\ . \tag{13.4}$$

*2. Je-li $f''(x)>0$ {resp. $f''(x)<0$} všude v intervalu $I$, potom je funkce $f$ v intervalu $I$ ryze konvexní {resp. ryze konkávní}.*

**Postačující podmínka pro existenci inflexního bodu.** Podmínka (4) je podmínkou nutnou k tomu, aby funkce $f$ měla v bodě $\alpha$ inflexní bod. Není podmínkou postačující. Platí však věta.

*Podmínka (4) se stane i postačující podmínkou k tomu, aby funkce $f$ měla v bodě $\alpha$ inflexní bod, jestliže funkce $f'$ je derivovatelná v nějakém okolí $(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$ bodu $\alpha$ a derivace $f''$ je v tomto okolí kladná z jedné a záporná ze druhé strany bodu $\alpha$ ( říkáme, že druhá derivace funkce $f$ mění v bodě $\alpha$ znaménko).*

**Průběh funkce.** Věty o derivování a věty této kapitoly nám umožňují určovat charakteristické vlastnosti (říkáme také *průběh*) funkce. Shrňme, co zjišťujeme při určování průběhu dané funkce.

**1.** Přirozený obor definice funkce.

**2.** Zda funkce je sudá, lichá nebo periodická. Sudost nebo lichost nám umožňuje omezit se na studium vlastností funkce pouze pro kladné hodnoty nezávisle proměnné, periodicita pak dokonce pro hodnoty nezávisle proměnné tvořící pouze libovolný interval jehož délka se rovná periodě.

**3.** Všechny body nespojitosti funkce, limity a jednostranné limity v těchto bodech a intervaly v nichž je funkce spojitá.

**4.** Všechny intervaly v nichž je funkce kladná nebo záporná a všechny nulové body funkce. Nulové body se nám podaří analyticky nalézt málokdy. Musíme většinou použít přibližné (numerické) metody. Zmíníme se o nich v následujícím odstavci.

**5.** Všechny intervaly, kde je funkce rostoucí, klesající, nerostoucí anebo neklesající.

**6.** Všechny lokální i globální extrémy funkce.

**7.** Všechny intervaly, kde je funkce konvexní nebo konkávní.

**8.** Všechny inflexní body funkce.

**9.** Všechny asymptoty grafu funkce.

**10.** Další vlastnosti, jako např. body ve kterých funkce není derivovatelná a jednostranné derivace v těchto bodech, body nespojitosti derivace atd.

Na základě všech těchto zjištění pak načrtneme graf dané funkce.

# E. INTEGRÁLNÍ POČET FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ.

## 14. PRIMITIVNÍ FUNKCE.

**Definice primitivní funkce.** Nechť v intervalu $I$ je definována funkce $f$. Každou funkci $g$ definovanou a derivovatelnou v témže intervalu $I$ takovou, že platí

$$g'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in I$$

nazýváme *primitivní funkcí k funkci $f$ v intervalu $I$* a označujeme ji $f^*$ nebo také $[f(x)]^*$. Leibniz zavedl pro označení primitivní funkce k funkci $f$ symbol $\int f(x)dx$ a primitivní funkci nazval *neurčitým integrálem funkce $f$*. Hledání primitivní funkce $\int f(x)dx$ k funkci $f$ nazýváme *integrováním* funkce $f$ a samotnou funkci $f$ *integrandem.*

Víme, že nutnou podmínkou diferencovatelnosti funkce je její spojitost. Odtud ihned dospíváme k důležitému závěru: *Jestliže $g$ je primitivní funkce k funkci $f$ v intervalu $I$, potom je spojitá v intervalu $I$ (nezávisle na tom, zda je nebo není spojitá funkce $f$).*

**Existence primitivní funkce.** Funkce, ke kterým existují primitivní funkce, nazýváme *integrovatelnými funkcemi.* Ne každá funkce $f$ je integrovatelná. Platí však věta:

*Každá funkce $f$ spojitá v intervalu $I$ je v tomto intervalu integrovatelná.*

**Mnohoznačnost primitivní funkce.** Platí následující věta

*a) Jestliže $g$ je primitivní funkce k funkci $f$ v intervalu $I$, potom i každá funkce $h$ definovaná v intervalu $I$ vztahem $h(x) = g(x) + C \quad \forall \quad x \in I$, kde $C$ je libovolné reálné číslo, je primitivní funkce k funkci $f$.*

*b) Jestliže $g, h$ jsou primitivní funkce k jedné a téže funkci $f$ v intervalu $I$, potom se v celém tomto intervalu liší o konstantu.*

Vidíme, že úloha "nalézt funkci $g$ primitivní k dané funkci $f$ v intervalu $I$" není jednoznačná. Známe-li však jednu konkretní (partikulární) primitivní funkci $g$, dostaneme všechny ostatní primitivní funkce připočtením libovolné reálné konstanty $C$ (nazýváme ji *integrační konstantou*).

**Stanovení integrační konstanty.** Odpověď na otázku, jak v konkretní úloze vybrat z nekonečně mnoha primitivních funkcí tu jedinou, která řeší danou úlohu, tj., jak stanovit hodnotu integrační konstanty, dává následující věta

*Nechť $\alpha, \beta$ jsou libovolně zadaná reálná čísla, přičemž $\alpha \in I$. Potom ke každé funkci $f$ integrovatelné v intervalu $I$ existuje právě jedna primitivní funkce $g$ taková, že $g(\alpha) = \beta$. Tato funkce je definována vztahem*

$$g(x) = h(x) + \beta - h(\alpha) \ ,$$

*kde $h(x)$ je libovolně zvolená partikulární primitivní funkce k funkci $f$.*

**Integrování součtu, rozdílu a součinu s konstantou.** Přímo z definice primitivní funkce a ze vzorců pro derivování plyne následující věta:

*Nechť $f, g$ jsou integrovatelné funkce v intervalu $I$ a nechť $k$ je libovolná konstanta. Potom i funkce $f+g, f-g, kf$ jsou integrovatelné v $I$ a platí*

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx \overset{\text{ad}}{=} \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

$$\int [f(x) - g(x)]\, dx \overset{\text{ad}}{=} \int f(x)\, dx - \int g(x)\, dx$$

$$\int kf(x)\, dx \overset{\text{ad}}{=} k \int f(x)\, dx$$

Ve vzorcích symbol "ad" nad rovnítkem znamená, že levá a pravá strana se mohou lišit o konstantu.

**Základní vzorce pro integrování.** Přímo z definice primitivní funkce bezprostředně plynou dva následující vzorce

$$\left( \int f(x)\, dx \right)' = f(x) \quad , \quad \int f'(x)\, dx = f(x) + C$$

Ze vzorců pro derivování ihned dostáváme základní vzorce pro integrování (symbol "ad" vynecháváme, integrování se vztahuje na ty intervaly, ve kterých jsou definovány integrandy).

$$\int 0 \cdot dx = 0 \qquad\qquad \alpha \int x^{\alpha-1}\, dx = x^{\alpha}$$

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} \qquad\qquad \int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x|$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$$

Dále se snadno přesvědčíme, že platí

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), -\infty < x < \infty$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = -\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right), x \geq 1$$

**Substituční metoda integrování.** Nechť
a) $f$ je funkce definovaná a spojitá v intervalu $L$,
b) $\varphi$ je funkce definovaná v intervalu $K$ a má v něm spojitou derivaci $\varphi'$,
c) platí $\mathcal{H}(\varphi) = L$.
Substituční metoda integrování vycházející ze známé věty o derivování složené funkce se opírá o následující vzorce

$$\int f(\underbrace{\varphi(x)}_{u}) \cdot \underbrace{\varphi'(x)\,dx}_{du} \overset{\text{ad}}{=} \int f(u)\,du\Big|_{u=\varphi(x)}, \quad x \in K$$

$$\int f(x)\,dx \overset{\text{ad}}{=} \int f(\underbrace{\varphi(u)}_{x}) \cdot \underbrace{\varphi'(u)\,du}_{dx}\Big|_{u=\varphi^{-1}(x)}, \quad x \in L$$

**Metoda per partes.** Předpokládejme, že funkce $f$ a $g$ jsou definovány a spojité v intervalu $I$ a že funkce $f$ má spojitou derivaci v tomto intervalu. Metoda per partes pro integrování vycházející ze známé věty o derivování součinu dvou funkcí se opírá o následující vzorec

$$\int f(x)g(x)\,dx \overset{\text{ad}}{=} f(x)g^*(x) - \int f'(x)g^*(x)\,dx\ .$$

**Rekurentní vzorce pro integrování.** Snadno, s použitím metody per partes, lze odvodit, že pro libovolná reálná čísla $a \neq 0$, $c \neq 0$, $\alpha \neq -1$, $\beta \neq 0$ a pro libovolné přirozené číslo $n$ platí

$$\int \left(ax^2+c\right)^{\alpha}\,dx = -\frac{x\left(ax^2+c\right)^{\alpha+1}}{2c(\alpha+1)} + \frac{3+2\alpha}{2c(\alpha+1)}\int \left(ax^2+c\right)^{\alpha+1}\,dx$$
$$\beta \int \sin^{\beta} x\,dx = -\sin^{\beta-1} x \cos x + (\beta-1)\int \sin^{\beta-2} x\,dx$$

$$\beta \int \cos^{\beta} x\,dx \;=\; \cos^{\beta-1} x \sin x + (\beta-1) \int \cos^{\beta-2} x\,dx$$

$$\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}\,dx = -\frac{x}{2(1-n)\left(1+x^2\right)^{n-1}} + \frac{3-2n}{2(1-n)} \int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^{n-1}}\,dx\ ,\ n \geq 2$$

**Integrování parciálních zlomků.** Víme, že parciální zlomky jsou funkce tvaru $\frac{\alpha}{(x-a)^n}$ nebo $\frac{\alpha x+\beta}{(x^2+px+q)^n}$, kde $n$ je libovolné přirozené číslo a $\alpha\,,\,\beta\,,\,a\,,\,p\,,\,q$ jsou libovolná reálná čísla, přičemž $\Delta \;=\; q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 \;>\; 0$.

Zlomky prvního tvaru integrujeme substitucí $x - a \;=\; u$. Dostaneme

$$\int \frac{\alpha}{(x-a)^n}\,dx \;=\; \begin{cases} \frac{\alpha}{1-n}(x-a)^{1-n} & \text{pro} \quad n \neq 1 \\ \alpha \ln|x-a| & \text{pro} \quad n = 1 \end{cases}$$

Integrování zlomků druhého druhu provádíme ve dvou krocích.

1. krok.

Výraz $\alpha x+\beta$ upravíme do tvaru $\alpha x + \beta \;=\; b(2x+p)+c$, kde $b \;=\; \frac{\alpha}{2}\,,\ c \;=\; \beta - \frac{\alpha p}{2}$.
Dostaneme

$$\underbrace{\int \frac{\alpha x+\beta}{\left(x^2+px+q\right)^n}\,dx}_{A(x)} \;=\; \frac{\alpha}{2}\underbrace{\int \frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^n}\,dx}_{A_1(x)} + \left(\beta - \frac{\alpha p}{2}\right)\underbrace{\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^n}}_{A_2(x)}$$

Výpočet primitivní funkce $A_1(x)$ provedeme substitucí $x^2+px+q \;=\; u$ . Dostaneme

$$A_1(x) \;=\; \int \frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^n}\,dx \;=\; \begin{cases} \frac{1}{1-n}\left(x^2+px+q\right)^{1-n} & \text{pro} \quad n \neq 1 \\ \ln\left(x^2+px+q\right) & \text{pro} \quad n = 1 \end{cases}$$

2. krok.

Počítáme primitivní funkci $A_2(x)$ substitucí $x \;=\; \sqrt{\Delta}u - \frac{p}{2}$. Dostaneme tak

$$A_2(x) \;=\; \frac{\sqrt{\Delta}}{\Delta^n} \int \frac{1}{\left(u^2+1\right)^n}\,du$$

Pro výpočet integrálu $\int \frac{1}{(u^2+1)^n}\,du$ pak použijeme známý rekurentní vzorec

$$\int \frac{du}{\left(u^2+1\right)^n} \;=\; -\frac{u}{2(1-n)\left(u^2+1\right)^{n-1}} + \frac{3-2n}{2(1-n)} \int \frac{du}{\left(u^2+1\right)^{n-1}}\ ,\ n \geq 2$$

**Integrování racionálních funkcí.** Víme, že racionální funkce $R(x)$ je definována jako podíl dvou reálných polynomů $P(x)\,,\ Q(x)$. Jestliže polynom ve jmenovateli $Q(x)$ je vyššího stupně než polynom v čitateli $P(x)$, potom funkci $R(x)$ nazýváme ryze racionální. V opačném případě můžeme polynom $P(x)$ dělit polynomem $Q(x)$. Dostaneme tak polynom a zbytek, který je již ryze racionální funkcí, tj. dostaneme $R(x) \;=\; V(x) + \frac{Z(x)}{Q(x)}$, kde obě funkce $V(x)$ a $Z(x)$ jsou polynomy a funkce

$\frac{Z(x)}{Q(x)}$ je ryze racionální. Rozložíme-li tuto ryze racionální funkci na parciální zlomky, dostaneme

$$R(x) = V(x) + \text{součet parciálních zlomků}$$

a jak polynom, tak i parciální zlomky již umíme integrovat.

Při integrování řady různých funkcí se používají substituce, které vedou na integrování racionálních funkcí.

**Neelementární primitivní funkce.** Výpočet primitivních funkcí není obecně snadnou záležitostí.

Oprávněně tušíme, že existují jednoduché funkce, jejichž primitivní funkce sice existují, nelze je však vyjádřit pomocí nám známých elementárních funkcí. Mnohé z nich jsou vyjádřeny právě ve tvaru primitivních funkcí. Jsou to například funkce:

a) Gaussova funkce $\int e^{-x^2}\,dx$,
b) integrální logaritmus $lit = \int \frac{e^x}{x}\,dx$,
c) integrální sinus $Six = \int \frac{\sin x}{x}\,dx$,
d) integrální kosinus $Cix = \int \frac{\cos x}{x}\,dx$,
e) Fresnelovy funkce $\int \sin x^2\,dx$, $\int \cos x^2\,dx$.

Mezi neelementární funkce patří také velmi důležité tzv. Legendre'ovy eliptické integrály a hypereliptický integrál. Jsou definovány následovně:

a) eliptický integrál prvního druhu $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\lambda^2x^2)}}$,
b) eliptický integrál druhého druhu $\int \sqrt{\frac{1-\lambda^2x^2}{1-x^2}}\,dx$,
c) eliptický integrál třetího druhu $\int \frac{dx}{(x^2-\mu)\sqrt{(1-x^2)(1-\lambda^2x^2)}}$,
d) hypereliptický integrál $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^5}}$.

Ve všech těchto případech jsou $\lambda$, $\mu$ libovolná reálná čísla, přičemž $0 < \lambda < 1$.

Ruský matematik P.L.Čebyšev dokázal, že i tzv. binomické integrály $\int x^m\,(a+bx^n)^p\,dx$ s výjimkou několika případů patří mezi neelementární funkce.

## 15. RIEMANNŮV INTEGRÁL.

**Normální posloupnost dělení intervalu.** Nechť $\langle a, b\rangle$ je libovolný uzavřený interval (a tedy ohraničený). Pro $n = 1, 2, \cdots$ rozdělme interval $\langle a, b\rangle$ na $n$ částí pomocí dělících bodů $x_0^n, x_1^n, x_2^n, \cdots, x_{n-1}^n, x_n^n$ takových, že

$$a = x_0^n < x_1^n < x_2^n < \cdots < x_{n-1}^n < x_n^n = b$$

Dostaneme tak posloupnost $\{\Delta^n\}$ dělení intervalu $\langle a, b\rangle$:

$$\Delta^1 = \{x_0^1, x_1^1\} \text{ přičemž } a = x_0^1 < x_1^1 = b$$
$$\Delta^2 = \{x_0^2, x_1^2, x_2^2\} \text{ přičemž } a = x_0^2 < x_1^2 < x_2^2 = b$$
$$\Delta^3 = \{x_0^3, x_1^3, x_2^3, x_3^3\} \text{ přičemž } a = x_0^3 < x_1^3 < x_2^3 < x_3^3 = b$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Délku největšího z intervalů $\langle x_{i-1}^n, x_i^n\rangle$ nazýváme *normou* dělení $\Delta^n$ a označujeme $\delta_n$, tj. $\delta_n = \max\limits_{i=1,2,\cdots,n} \left(x_i^n - x_{i-1}^n\right)$. O posloupnosti $\{\Delta^n\}$ říkáme, že je *normální posloupností dělení intervalu*, jestliže $\delta_n \to 0$ když $n \to \infty$.

**Definice Riemannova integrálu.** Nechť $f$ je libovolná funkce (nemusí být nezáporná) definovaná v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $\{\Delta^n\}$ je libovolná normální posloupnost dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Pro každé dělení $\Delta^n$ vytvořme součet

$$\rho_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k^n\right)\left(x_k^n - x_{k-1}^n\right) ,$$

kde $\xi_k^n$ je libovolně vybraný bod v intervalu $\left\langle x_{k-1}^n, x_k^n\right\rangle$. Jestliže posloupnost čísel $\{\rho_n\}$ konverguje a to vždy k jednomu a témuž číslu $g$ , bez ohledu na konkrétní výběr normální posloupnosti $\{\Delta^n\}$ dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ a bez ohledu na konkretní výběr bodů $\xi_k^n$, potom toto číslo $g$ nazýváme *Riemannovým integrálem* funkce $f$ v intervalu $\langle a, b\rangle$ a označujeme je symbolem $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Funkci $f$ nazýváme *integrandem*, čísla $a, b$ *dolní* a *horní mezí*. Součet $\rho_n$ nazýváme *n-tým Riemannovým součtem*. Jestliže Riemannův integrál funkce $f$ v intervalu $\langle a, b\rangle$ existuje, potom o funkci $f$ říkáme, že je v $\langle a, b\rangle$ *integrovatelná ve smyslu Riemanna*, nebo také, že je *R-integrovatelná* v $\langle a, b\rangle$. V české literatuře se někdy místo termínu Riemannův integrál používá termín *určitý integrál*.

**Nutná podmínka R-integrovatelnosti.** Platí věta

*Jestliže funkce $f$ je R-integrovatelná v intervalu $\langle a, b\rangle$, potom je v tomto intervalu ohraničená.*

**Věty o R-integrovatelnosti.** Platí věty:

*a) Jestliže funkce $f$ je R-integrovatelná v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, potom je R-integrovatelná v každém jeho uzavřeném podintervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$, kde $a \le \alpha < \beta \le b$.*

*b) Každá monotonní funkce v uzavřeném intervalu $a, b$ je v něm R-integrovatelná.*

*c) Jestliže funkce $f$ a $g$ splňují v každých dvou bodech $\alpha, \beta$ uzavřeného intervalu $\langle a, b\rangle$ nerovnost $|f(\alpha)-f(\beta)| \le |g(\alpha)-g(\beta)|$ a funkce $g$ je R-integrovatelná v $\langle a, b\rangle$, potom je v $\langle a, b\rangle$ R-integrovatelná i funkce $f$.*

*d) Jestliže funkce $h$ je R-integrovatelná v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, potom i její absolutní hodnota $|h|$ je R-integrovatelná v $\langle a, b\rangle$.*

**R-integrovatelnost spojité funkce.** Lze snadno dokázat platnost následující velmi důležité věty

*Každá funkce $f$ spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ je v tomto intervalu R-integrovatelná.*

Poznamenejme, že větu lze zobecnit takto

*Ohraničená funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$, jejíž množina bodů nespojitosti je konečná (anebo nekonečná, avšak dá se pokrýt konečným počtem intervalů o celkové libovolně malé délce) je R-integrovatelná.*

**Riemanův integrál ze součtu a součinu funkcí.** Platí věta

*Jestliže funkce $f$ a $g$ jsou v intervalu $\langle a, b\rangle$ R-integrovatelné a $K$ je libovolná reálná konstanta, potom i funkce a) $f+g$ , b) $Kf$ , c) $fg$ jsou v $\langle a, b\rangle$ R-integrovatelné* *a platí*

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b K f(x)\,dx = K\int_a^b f(x)\,dx$$

Z věty plyne důsledek

*Nechť funkce $f(x)$ je R-integrovatelná v $\langle a,b\rangle$ a nechť funkce $g(x)$ definovaná v $\langle a,b\rangle$ se liší od funkce $f(x)$ nanejvýš v konečném počtu bodů $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Potom i funkce $g(x)$ je R-integrovatelná v $\langle a,b\rangle$ a platí $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.*

**Aditivnost a ohraničenost Riemannova integrálu.** Snadno lze dokázat větu, která je velmi důležitá, zejména v aplikacích:

*Nechť $f$ je funkce R-integrovatelná v uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$ a nechť $c$ je libovolné číslo takové, že $a < c < b$. Potom platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\ , \tag{15.1}$$

$$(b-a)\inf_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) \le \int_a^b f(x)\,dx \le (b-a)\sup_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)\ . \tag{15.2}$$

Vlastnost (1) nazýváme *aditivností Riemannova integrálu*, vlastnost (2) pak *ohraničeností Riemannova integrálu.*

Z věty ihned plyne následující důsledek:

*Jestliže funkce $f$ je R-integrovatelná v $\langle a,b\rangle$, potom platí*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

**Střední hodnota funkce.** Nechť $f$ je R-integrovatelná funkce v uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$. Číslo $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ nazýváme *střední hodnotou funkce $f$ v intervalu* $\langle a,b\rangle$. Pro spojité funkce $f$ platí následující věta:

*Jestliže $f$ je spojitá funkce v uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$, potom v tomto intervalu existuje takový bod $\xi$, že střední hodnota funkce $f$ v $\langle a,b\rangle$ je rovna hodnotě funkce $f$ v bodě $\xi$, tj.*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\ .$$

**Integrační meze.** V definici Riemannova integrálu $\int_a^b f(x)\,dx$ jsme předpokládali, že $a < b$. Definici rozšíříme i na případy, kdy $b < a$ nebo $b = a$ a to tak, že definujeme

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad , \quad \int_a^a f(x)\,dx = 0 \; .$$

V Riemannově integrálu $\int_a^b f(x)\,dx$ číslo $a$ nazýváme *dolní mezí*, číslo $b$ *horní mezí* a to nezávisle na tom, zda $a \le b$ nebo $a > b$.

Snadno se můžeme přesvědčit, že vzorec (1) (aditivnost) zůstává v platnosti při libovolné poloze čísel $a, b, c$, pokud ovšem všechna leží v uzavřeném intervalu v němž je funkce $f$ R-integrovatelná.

**Vztah mezi Riemannovým integrálem a derivací funkce.** Uvedeme nyní jednu z nejdůležitějších vět integrálního počtu. Její důležitost spočívá v tom, že ukazuje na velmi úzkou souvislost mezi Riemannovým integrálem a derivací funkce:

*Nechť $f$ je R-integrovatelná funkce v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom funkce $G$ definovaná vztahem*

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad pro \quad a \le x \le b$$

*a) je spojitá v $\langle a, b\rangle$,*

*b) je derivovatelná v každém bodě $\alpha \in \langle a, b\rangle$ v němž je spojitá funkce $f$ a platí $G'(\alpha) = f(\alpha)$.*

Z věty ihned plyne následující důsledek

*Ke každé funkci $f$ spojité v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ existuje primitivní funkce.*

**Fundamentální věta integrálního počtu.** Z věty uvedené v předcházejícím odstavci plyne tzv. *fundamentální věta integrálního počtu* nazývaná též *Newton - Leibnizova věta:*

*Jestliže funkce $f$ je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, potom*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a) \; , \tag{15.3}$$

*kde $\Phi$ je libovolná primitivní funkce k funkci $f$.*

Vzorec (3) je jedním z nejdůležitějších vzorců integrálního počtu. Umožňuje nám vypočítat Riemannův integrál, když známe primitivní funkci.

**Výpočet Riemannova integrálu metodou per partes.** Z věty o integrování součinu dvou funkcí a z Newton - Leibnizovy věty dostáváme *vzorec pro výpočet Riemannova integrálu metodou per partes*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(b)g^*(b) - f(a)g^*(a) - \int_a^b f'(x)g^*(x)\,dx \; .$$

**Substituční metoda výpočtu Riemannova integrálu.** Z věty o integrování složené funkce plyne následující věta

*Jestliže funkce $f$ je spojitá v oboru hodnot $\mathcal{H}(\varphi)$ funkce $\varphi$ spojité a mající spojitou derivaci v intervalu $\langle\alpha,\beta\rangle$, potom platí*

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(s)\,ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt\ .$$

Vzorec nazýváme *vzorcem pro výpočet Riemannova integrálu substituční metodou.* Lze jej samozřejmě použít jak pro výpočet Riemannova integrálu na levé straně, tak i Riemannova integrálu na pravé straně.

**Singulární body funkce.** V definici Riemannova integrálu funkce $f$ je podstatné, že interval $\langle a,b\rangle$ je uzavřený a tedy i omezený. Z definice také plyne, že má - li být funkce $f$ R-integrovatelná, musí být nutně ohraničená. Ukazuje se, že někdy lze pojem Riemannova integrálu rozšířit i na případy, kdy jedna nebo obě podmínky nejsou splněny. Za tím účelem definujeme:

a) Nechť $s$ je vlastním hromadným bodem definičního oboru $\mathcal{D}(f)$ funkce $f$. Jestliže existuje posloupnost $\{x_n\}$ bodů $x_n \in \mathcal{D}(f)$ konvergující k $s$ taková, že posloupnost $f(x_n)$ diverguje (k plus nebo k mínus nekonečnu), potom o funkci $f$ říkáme, že je *neohraničená v bodě $s$.*

b) O funkci $f(x)$ říkáme, že *má singularitu (je singulární)* v bodě $s$, jestliže $s$ je buďto nevlastním hromadným bodem (plus nebo mínus nekonečno) jeho definičního oboru $\mathcal{D}(f)$ anebo funkce $f$ je neohraničená v bodě $s$.

Rozšířením pojmu Riemannova integrálu se zabýváme v případech, kdy funkce $f$ definovaná v intervalu $I$ má na jednom nebo na obou koncích intervalu singularitu. Dále se zabýváme případem, kdy funkce $f$ je definována v intervalu $I$ nanejvýš s výjímkou vnitřního bodu $c \in I$ v němž má singularitu. Ve všech těchto případech nás snaha rozšířit pojem Riemannova integrálu vede k pojmu *nevlastní integrál.*

**Definice nevlastního integrálu v intervalu s jedním singulárním bodem.** Definujeme

a) Nechť funkce $f$ je definována v intervalu $I = \langle a,b)$ ($b$ může být i plus nekonečno) z pravé strany otevřeném a nechť je R-integrovatelná v každém uzavřeném intervalu $\langle a,x\rangle$, kde $x < b$. Jestliže funkce $f(x)$ je singulární v bodě $b$ a jestliže existuje vlastní (konečná) limita

$$\lim_{x\to b-}\int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt \quad ,$$

potom tuto limitu nazýváme *nevlastním integrálem* v intervalu $\langle a,b)$ . O integrálu pak říkáme, že *existuje* anebo také, že *konverguje.* V opačném případě říkáme, že *neexistuje* anebo také, že *nekonverguje.*

b) Analogicky definujeme nevlastní integrál v intervalu $(a,b\rangle$ v případě, kdy funkce $f(x)$ je singulární v bodě $a$. Je to tedy $\lim\limits_{x\to a+}\int\limits_{x}^{b} f(t)\,dt$ .

c) Nechť funkce $f(x)$ je definována v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ s výjímkou bodu $c \in (a, b)$, v němž může, ale také nemusí být definována. Jestliže funkce $f$ je singulární v bodě $c$ a existují nevlastní integrály v intervalech $\langle a, c)$ , $(c, \rangle\, b$, potom jejich součet nazýváme *nevlastním integrálem v intervalu $\langle a, b\rangle$ se singularitou v $c$.*

**Definice nevlastního integrálu v otevřeném intervalu.** Nechť funkce $f(x)$ je definována v otevřeném intervalu $I = (a, b)$ ($a$ může být mínus nekonečno, $b$ může být plus nekonečno). Jestliže funkce $f(x)$ je singulární v bodech $a$ i $b$ a jestliže existují nevlastní Riemannovy integrály v intervalech $(a, c)$ , $(c, b)$ pro každé číslo $c$ z intervalu $(a, b)$, potom jejich součet nazýváme *nevlastním integrálem v otevřeném intervalu* $(a, b)$.

Korektnost definice samozřejmě vyžaduje, aby součet nezávisel na výběru čísla $c$. Ten však skutečně nezávisí.

**Výpočet nevlastních integrálů.** Dovedeme-li nalézt k integrované funkci primitivní funkci, pak již zpravidla můžeme rozhodnout o konvergenci nevlastního integrálu a vypočítat jeho hodnotu. Určení primitivní funkce však často činí potíže. Nevlastní integrál se pak snažíme vypočítat numericky (přibližně). K tomu je však nutné předem vědět, zda daný integrál existuje nebo nikoliv. O tom můžeme rozhodnout na základě kriterií, která dále uvedeme. Uvedeme je pouze v případě, kdy funkce $f$ je definována v intervalu $\langle a, b)$, je singulární v bodě $b$ a je integrovatelná v každém intervalu $\langle a, x\rangle$ , $a < x < b$. Ostatní případy jsou zcela analogické. Abychom zdůraznili, že funkce $f$ je singulární v bodě $b$, budeme často místo $\langle a, b)$ psát $\langle a, B)$.

**Absolutní konvergence nevlastního integrálu.** Platí věta:

*a) Je-li* $\int_a^B |f(x)|\,dx$ *konvergentní, je i* $\int_a^B f(x)\,dx$ *konvergentní. O integrálu* $\int_a^B f(x)\,dx$ *v tomto případě říkáme, že je absolutně konvergentní.*

*b) Jestliže* $\int_a^B f(x)\,dx$ *nekonverguje, potom ani nekonverguje* $\int_a^B |f(x)|\,dx$.

**Porovnávací kriterium konvergence nevlastního integrálu.** Platí věta

*Nechť* $0 \le \varphi(x) \le \psi(x)$ *pro* $\forall\, x \in \langle a, B)$. *Konverguje-li integrál* $(n)\int_a^B \psi(t)\,dt$, *potom také konverguje integrál* $(n)\int_a^B \varphi(t)\,dt$.

**Limitní kriterium konvergence nevlastního integrálu v intervalu $\langle a, \infty)$.**. Platí věta

*Nechť funkce $f(x)$ je R-integrovatelná v každém intervalu $\langle a, c\rangle$, kde $c > a$ je libovolné reálné číslo. Potom*

*a) integrál* $K = \int_a^\infty f(t)\,dt$ *konverguje, a to absolutně, jestliže pro nějaké číslo* $p > 1$ *existuje (konečná) limita*

$$L = \lim_{x\to\infty} [x^p f(x)] \ ,$$

*b) integrál $K$ nekonverguje, jestliže pro nějaké číslo $p \leq 1$ platí*

$$\text{buď} \quad \lim_{x\to\infty} [x^p f(x)] = L \neq 0 \ , \ \text{nebo} \quad L = \pm\infty \ .$$

**Limitní kriterium konvergence nevlastního integrálu z neohraničené funkce.** Platí věta

*Nechť funkce $f(x)$ je neohraničená v bodě $b$ . Potom integrál $(n) \int_a^b f(t)\, dt$*

*a) konverguje, a to absolutně, jestliže pro nějaké číslo $p < 1$ existuje konečná limita*

$$L = \lim_{x\to b-} [(b-x)^p f(x)] \ ,$$

*b) nekonverguje, jestliže pro nějaké číslo $p \geq 1$*

$$\text{buď} \quad \lim_{x\to b-} [(b-x)^p f(x)] = L \neq 0 \ , \text{nebo} \quad L = \pm\infty \ .$$

## 16. APLIKACE RIEMANNOVA INTEGRÁLU.

**Zobecněná ohraničenost.** Riemannův integrál $\int_u^v f(x)\, dx$ funkce $f$ spojité v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, kde $a \leq u \leq v \leq b$, lze zřejmě považovat za veličinu (funkci) $V(u,v)$ závisející na $u, v$ (a samozřejmě také na $f$). Víme, že veličina $V(u,v)$ má pro $a \leq u \leq v \leq b$ dvě následující vlastnosti

$$V(a,u) + V(u,v) = V(a,v) \tag{16.1}$$

$$(v-u) \min_{x\in\langle u,v\rangle} f(x) \leq V(u,v) \leq (v-u) \max_{x\in\langle u,v\rangle} f(x) \tag{16.2}$$

Vlastnost (1) nazýváme *aditivitou* a vlastnost (2) *ohraničeností vzhledem k $f$.*

Ve vztahu (2) jsme nahradili infimum minimem a supremum maximem, neboť funkce $f$ je podle předpokladu spojitá.

Jestliže má tedy Riemannův integrál matematicky modelovat nějakou geometrickou nebo fysikální veličinu (obsah, objem, práci, moment setrvačnosti atd.), potom tato veličina musí mít pochopitelně zmíněné vlastnosti (1) a (2).

Vzniká přirozeně otázka, zda platí i opak, tj. zda každá geometrická nebo fysikální veličina obdařená vlastnostmi (1), (2) musí být již nutně vyjádřena Riemannovým integrálem. Jak uvidíme později, odpověď je kladná.

Ověřování vlastnosti (2) bývá někdy komplikované. Uvedeme zde jinou vlastnost, která se ověřuje většinou snadněji a přitom stačí k tomu, aby veličina $V(u,v)$ musela být vyjádřena Riemannovým integrálem. Definujeme:

Nechť $V(u,v)$ je veličina (funkce) závisející na dvou proměnných $u, v$ takových, že $a \leq u \leq v \leq b$ a nechť $f$ je spojitá funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$. Jestliže existují funkce $\eta(u,v)$ a $\zeta(u,v)$ , $a \leq u \leq v \leq b$ takové, že

$$\left.\begin{aligned} \lim_{v\to u+} \eta(u,v) &= \lim_{v\to u+} \zeta(u,v) = f(u) \\ \lim_{u\to v-} \eta(u,v) &= \lim_{u\to v-} \zeta(u,v) = f(v) \end{aligned}\right\} \tag{16.3}$$

a jestliže

$$(v-u)\eta(u,v) \;\le\; V(u,v) \;\le\; (v-u)\zeta(u,v)\;, \tag{16.4}$$

potom říkáme, že *veličina* $V(u,v)$ *má vlastnost zobecněné ohraničenosti vzhledem k funkci* $f$.

Položíme-li $\eta(u,v) \;=\; \min\limits_{x\in\langle u,v\rangle} f(x)$ a $\zeta(u,v) \;=\; \max\limits_{x\in\langle u,v\rangle} f(x)$, potom ze spojitosti funkce $f$ zřejmě plyne (3). Odtud ihned dostáváme větu:

*Jestliže veličina* $V(u,v)$ *má vlastnost ohraničenosti* (2)*, potom má i vlastnost zobecněné ohraničenosti* (4)*.*

**Základní věta o aplikaci Riemannova integrálu.** Platí následující důležitá věta:

*Nechť* $f$ *je spojitá funkce v uzavřeném intervalu* $\langle a,b\rangle$ *a nechť veličina* $V(u,v)$, $a\le u\le v\le b$ *má vlastnosti aditivity* (1) *a zobecněné ohraničenosti* (4) *vzhledem k funkci* $f$*. Potom*

$$V(a,b) \;=\; \int\limits_a^b f(x)\,dx\;.$$

Dále platí věta:

*Nechť* $f$ *a* $g$ *jsou spojité funkce v intervalu* $\langle a,b\rangle$ *takové, že* $f(x)\ge g(x)$, $a\le x\le b$*. Nechť funkce* $V(u,v)$, $a\le u\le v\le b$ *má vlastnost aditivity* (1) *a nechť pro* $a\le u\le v\le b$ *platí*

$$(v-u)\left(\min_{x\in\langle u,v\rangle} f(x)-\max_{x\in\langle u,v\rangle} g(x)\right)\le V(u,v)\le (v-u)\left(\max_{x\in\langle u,v\rangle} f(x)-\min_{x\in\langle u,v\rangle} g(x)\right)\;.$$

*Potom*

$$V(a,b) \;=\; \int\limits_a^b [f(x)-g(x)]\;dx\;.$$

**Plošný obsah množiny mezi dvěma kartézskými grafy.** Nechť $f$ a $g$ jsou dvě funkce spojité v intervalu $\langle a,b\rangle$ takové, že $f(x)\ge g(x)$, $a\le x\le b$. Chceme definovat plošný obsah $|\mathcal{A}|$ množiny $\mathcal{A}$ mezi kartézskými grafy funkcí $f$ a $g$ a mezi přímkami $x = a$ a $x = ab$, tj. množiny definované vztahem

$$\mathcal{A} \;=\; \{(x,y)\,\in\,\mathcal{R}_2\,,\; a\le x\le b\,,\; g(x)\le y\le f(x)\} \tag{16.5}$$

Platí:

*Nechť* $f$ *a* $g$ *jsou spojité funkce v intervalu* $\langle a,b\rangle$ *takové, že* $f(x)\ge g(x)\,\forall\,x\in\langle a,b\rangle$*. Nechť* $\mathcal{A}$ *je množina bodů* $(x,y)$ *v rovině* $\mathcal{R}_2$ *definovaná vztahem* (5)*. Potom obsahem množiny* $\mathcal{A}$ *nazýváme číslo* $|\mathcal{A}|$ *definované vztahem*

$$|\mathcal{A}| \;=\; \int\limits_a^b [f(x)-g(x)]\,dx\;.$$

**Plošný obsah výseče pod polárním grafem.** Nechť $f$ je spojitá funkce v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Chceme definovat a vypočítat plošný obsah množiny $\mathcal{A}$ vymezené polárním grafem $r = f(\theta)$ a polopřímkami $\theta = \alpha$ a $\theta = \beta$. Shodně se základní větou o aplikaci Riemannova integrálu definujeme

*Nechť $f$ je spojitá funkce v uzavřeném intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Nechť $\mathcal{A}$ je množina bodů $(r, \theta)$ v polární rovině definovaná vztahem*

$$\mathcal{A} = \{\alpha \le \theta \le \beta \, , \, 0 \le r \le f(\theta)\} \; .$$

*Potom plošným obsahem množiny $\mathcal{A}$ nazýváme číslo $|\mathcal{A}|$ definované vztahem*

$$|\mathcal{A}| = \frac{1}{2} \int\limits_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) \, d\theta \; .$$

**Práce.** Základní věta o aplikaci Riemannova integrálu nás vede k následující definici:

*Práce $W$ vykonaná spojitě se měnící silou $f(x)$ v intervalu $\langle a, b \rangle$ je dána vztahem*

$$W = \int\limits_{a}^{b} f(x) \, dx \; .$$

**Délka kartézského grafu funkce.** Základní věta o aplikaci Riemannova integrálu nás vede k následující definici:

*Délkou $l$ hladkého oblouku generovaného funkcí $f$ v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ nazýváme číslo dané vztahem*

$$l = \int\limits_{a}^{b} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx \; .$$

**Délka křivky zadané parametricky.** Základní věta o aplikaci Riemannova integrálu nás vede k následující definici:

*Délka $l$ hladkého oblouku zadaného parametrickými rovnicemi*

$$x = \varphi(t) \; , \; y = \psi(t) \; , \; z = \chi(t) \; , \; \alpha \le t \le \beta$$

*je dána vztahem*

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t) + \dot{\chi}^2(t)} \, dt \; .$$

**Délka rovinného oblouku zadaného polárně.** Nechť $f$ je spojitá funkce zároveň se svou první derivací $f'$ v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Ve vzorci pro výpočet délky křivky zadané parametricky položíme

$x = \varphi(t) = f(t)\cos t\,,\ y = \psi(t) = f(t)\sin t\,,\ \alpha \le t \le \beta$ , což je parametrické vyjádření křivky $r = f(\theta)$. Dostaneme

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f^2(\theta) + [f'(\theta)]^2}\, d\theta\ .$$

**Objem rotačního tělesa.** Základní věta o aplikaci Riemannova integrálu nás vede k následujícím definicím:

a) *Nechť $f$ je nezáporná spojitá funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$. Objemem $|\mathcal{V}|$ tělesa $V$ vzniklého rotací rovinné oblasti $\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathcal{R}_2\ ;\ a \le x \le b\ ,\ 0 \le y \le f(x)\}$ kolem osy $O_x$ nazýváme číslo definované vztahem*

$$|\mathcal{V}| = \pi \int\limits_{a}^{b} f^2(x)\, dx\ .$$

b) *Nechť $g(y)\,,\ f(y)$ jsou spojité funkce definované v intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$ , $\alpha \ge 0$ takové, že $g(y) \le f(y)\,\forall\, y \in \langle \alpha, \beta\rangle$. Objemem $|\mathcal{V}|$ tělesa $\mathcal{V}$ vzniklého rotací kolem osy $O_x$ rovinné oblasti $\mathcal{B} = \{(x,y) \in \mathcal{R}_2\ ,\ g(y) \le x \le f(y)\ ,\ \alpha \le y \le \beta\}$ nazýváme číslo definované vztahem*

$$|\mathcal{V}| = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} y[f(y) - g(y)]\, dy\ .$$

**Obsah rotační plochy.** Základní věta o aplikaci Riemannova integrálu nás vede k následujícím definicím:

a) *Nechť nezáporná funkce $f(x)$ je spojitá zároveň se svou derivací $f'(x)$ v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Obsah $|\mathcal{S}|$ plochy $\mathcal{S}$ vzniklé rotací kolem osy $O_x$ grafu $y = f(x)\,,\ a \le x \le b$ funkce $f$ je definován vztahem*

$$|\mathcal{S}| = 2\pi \int\limits_{a}^{b} f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx\ .$$

b *Nechť funkce $g(y)$ je spojitá zároveň se svou derivací $g'(y)$ v uzavřeném intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$, kde $\alpha \ge 0$. Obsah $|\mathcal{S}|$ plochy $\mathcal{S}$ vzniklé rotací kolem osy $O_x$ grafu $x = g(y)\,,\ \alpha \le y \le \beta$ je definován vztahem*

$$|\mathcal{S}| = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} y\sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy\ .$$

OBSAH