Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta

SEMINÁRNÍ PRÁCE Z MATEMATICKÉ ANALÝZY 3

KONVERGENCE ŘAD

2. přepracované vydání

2002/2003 **Cifrik, M-ZT**

Zadání:

Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jestliže

1. $a_n = \dfrac{1}{n(n+2)}$	6. $a_n = \dfrac{1}{\ln^n(n+1)}$	11. $a_n = \dfrac{3^n n!}{n^n}$	16. $a_n = \dfrac{e^n}{n!}$
2. $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n+1}}$	7. $a_n = \dfrac{n!}{(2n-1)^n}$	12. $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{3^n}}$	17. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$
3. $a_n = \dfrac{3^n - 2^n}{6^n}$	8. $a_n = \dfrac{n!}{2^n}$	13. $a_n = \dfrac{n!}{n^2}$	18. $a_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n(n+2)}$
4. $a_n = \dfrac{5}{3^n} - \dfrac{3}{5^n}$	9. $a_n = \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$	14. $a_n = \dfrac{1}{2^n - 1}$	19. $a_n = \dfrac{3+(-1)^n}{(-3)^n}$
5. $a_n = \dfrac{\cos n}{e^n}$	10. $a_n = \left(\dfrac{n+1}{3n}\right)^n$	15. $a_n = \dfrac{n^3}{e^n}$	20. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\left(2\sqrt{n}+(-1)^n\right)^3}$

Vypracování:

Definice 1: Nekonečná řada čísel

Nechť je dána libovolná posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Výraz $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ se nazývá nekonečná řada reálných čísel a značíme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (čteme: řada a_n pro n od jedné do nekonečna). Čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ nazýváme členy nekonečné řady, číslo a_j j-tý člen nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definice 2: Konvergence a divergence

Nechť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Říkáme, že:

a) řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a má součet s, jestliže $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in R$;

b) řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje k $+\infty$, jestliže $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$;

c) řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje k $-\infty$, jestliže $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$;

d) řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ osciluje, jestliže $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje.

Příklad 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} =$$

$$\left[\begin{array}{c} \dfrac{1}{n(n+2)} = \dfrac{A}{n} + \dfrac{B}{n+2} \\ 1 = An + 2A + Bn \\ \hline A + B = 0 \\ 2A = 1 \\ \hline A = \dfrac{1}{2} \quad B = -\dfrac{1}{2} \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

n-tý částečný součet

$$\forall n \in N : s_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{1}{8} - \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{n+2}.$$

Počítáme

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{4},$$

proto podle definice 2 řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ konverguje a má součet $\frac{3}{4}$.

Věta 1: Nutná podmínka pro konvergenci řady

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Potom $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Poznámka:

Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ nemůžeme o chování příslušné řady nic usoudit.

Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonverguje.

Příklad 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[6]{\frac{n^3}{(n+1)^2}} = +\infty$$

Není splněna nutná podmínka konvergence, proto řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n+1}}$ nekonverguje.

Poznámka: Stupeň čitatele je větší než stupeň jmenovatele.

Věta 2: Abelovo kritérium pro konvergenci nekonečné číselné řady

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Nechť pro posloupnost $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \ldots > 0$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varepsilon_n$ konverguje.

Definice 3: Absolutní a relativní konvergence

a) Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ také konverguje a říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

b) Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně neboli relativně.

Věta 3: Srovnávací (zobecněné srovnávací) kritérium

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy, nechť existuje $k \in N$ takové, že

$$\forall n \geq k : a_n \leq b_n \ \left(\forall n \geq k : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}\right).$$

Potom

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje, jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Příklad 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{6^n}$$

1. jde o řadu s nezápornými členy a platí $a_n = |a_n|$
   (Pojmy konvergence a absolutní konvergence splývají.)
2. $\dfrac{3^n - 2^n}{6^n} = \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{3^n} < \dfrac{1}{2^n}$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{6^n}$ konverguje absolutně.

Další možnost jak vyšetřit stejnou řadu:

1. $a_n = \frac{3^n - 2^n}{6^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{6^n}$ tedy konverguje k $\frac{1}{2}$.

Příklad 4

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{3^n} - \frac{3}{5^n}\right)$

1. jde o řadu s nezápornými členy a platí $a_n = |a_n|$

2. $\forall n \in N : \frac{5}{3^n} - \frac{3}{5^n} = \frac{5^{n+1} - 3^{n+1}}{15^n} < \frac{5^{n+1}}{15^n} = 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^n}$ je konvergentní geometrická řada, a proto podle vety 3 a uvedené nerovnosti konverguje také řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{3^n} - \frac{3}{5^n}\right)$. Z rovnosti $a_n = |a_n|$ plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{3^n} - \frac{3}{5^n}\right)$ konverguje absolutně.

Věta 4: Cauchyovo nelimitní odmocninové kritérium

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy. Potom

a) existuje-li $q \in R, 0 < q < 1$, a $k \in N$ tak, že pro $\forall n \in N, n \geq k$, je $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,

b) jestliže pro nekonečně mnoho $n \in N$ je $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje k $+\infty$.

Věta 5: Cauchyovo nelimitní odmocninové kritérium

a) Nechť existuje $q \in R, 0 < q < 1$, a nechť existuje $k \in N$ takové, že pro všechna $n \geq k$ platí $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

b) Nechť pro nekonečně mnoho $n \in N$ je $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonverguje.

Příklad 5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{e^n}$$

$$\forall n \in N : \sqrt[n]{\left|\frac{\cos n}{e^n}\right|} = \frac{\sqrt[n]{|\cos n|}}{e} \leq \frac{1}{e} < 1$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{e^n}$ konverguje absolutně (věta 5).

Věta 6: D'Alembertovo nelimitní podílové kritérium

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy. Potom

a) existuje-li $q \in R, 0 < q < 1$, a $k \in N$ tak, že pro $\forall n \in N, n \geq k$, je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,

b) jestliže existuje $k \in N$ takové, že $n \in N$, $n \geq k$ je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje k $+\infty$.

Věta 7: D'Alembertovo nelimitní podílové kritérium

a) Nechť existuje $q \in R, 0 < q < 1$, a nechť existuje $k \in N$ takové, že pro všechna $n \geq k$ platí $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

b) Nechť existuje $k \in N$ takové, že $n \in N$, $n \geq k$ platí $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonverguje.

Věta 8: Cauchyovo limitní odmocninové kritérium

a) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Potom

1) je-li $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,

2) je-li $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

b) Nechť $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

c) Nechť $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonverguje.

Poznámka: Účinné užití této věty je založeno na existenci $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, která není rovna jedné.

Příklad 6

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n (n+1)}$$

1. $a_n = |a_n|$ (Pojmy konvergence a absolutní konvergence splývají.)
2. $0 < \dfrac{1}{\sqrt[n]{\ln^n (n+1)}} = \dfrac{1}{\ln(n+1)} \overset{n\geq 2}{<} 1$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n (n+1)}$ konverguje absolutně. Náš závěr vyplynul z věty 5. Abychom nemuseli udávat podmínku $n \geq 2$ je v tomto případě vhodnější použít větu 8, tedy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n (n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1$$

Příklad 7

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n-1)^n}$$

1. $a_n = |a_n|$ (Pojmy konvergence a absolutní konvergence splývají.)
2. Protože platí

$$0 \leq \sqrt[n]{\frac{n!}{(2n-1)^n}} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{2n-1} \leq \frac{\sqrt[n]{n^n}}{2n-1} = \frac{n}{2n-1}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}$$

je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{2n-1} < \frac{1}{2} < 1.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n-1)^n}$ je absolutně konvergentní.

Příklad 8

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{2} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$ nekonverguje (věta 8).

Poznámka: Není splněna nutná podmínka konvergence (věta 1).

Příklad 9

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$$

1. $a_n = |a_n|$
2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ konverguje absolutně.

Příklad 10

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n}\right)^n$$

1. $a_n = |a_n|$
2. $\forall n \in N : \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{3n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{3} = \frac{1}{3} < 1$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n}\right)^n$ konverguje absolutně.

Příklad 11

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n n!}{n^n}} = 3 \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{3}{e} > 1$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ diverguje (věta 8).

Věta 9: D'Alembertovo limitní podílové kritérium

a) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy. Potom

1) je-li $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní,

2) je-li $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

b) Nechť $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

c) Nechť $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonverguje.

Poznámka: Účinné užití této věty je založeno na existenci $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, která není rovna jedné.

Příklad 12

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{3^n}}$$

1. $a_n = |a_n|$ (Pojmy konvergence a absolutní konvergence splývají.)

2. $$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{\sqrt{3^{n+1}}}}{\frac{n}{\sqrt{3^n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt{3^n}\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3^n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} < 1,$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{3^n}}$ konverguje absolutně.

Příklad 13

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^2}}{\frac{n!}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n!}{(n+1)^2} \frac{n^2}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} = +\infty$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2}$ nekonverguje.

Příklad 14

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$$

1. $a_n = |a_n|$

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^{n+1}-1}}{\frac{1}{2^n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^{n+1} - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{2 - \frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ konverguje absolutně.

Příklad 15

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$$

3. $a_n = |a_n|$

4. $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{e^{n+1}}}{\frac{n^3}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{en^3} = \frac{1}{e} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{e} < 1$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$ konverguje absolutně.

Příklad 16

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$$

1. $a_n = |a_n|$

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{e^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{e^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{n+1} = 0$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$ konverguje absolutně.

Definice 4: Alternující řada

Nechť $a_n > 0$ pro všechna $n \in N$. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ nazýváme alternující řadou neboli řadou se střídavými znaménky.

Věta 10: Leibnizovo kritérium pro alternující řady

Nechť pro všechna $n \in N$ platí $a_n \geq a_{n+1} > 0$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konverguje tehdy a jen tehdy, je-li $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Příklad 17

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$$

Ověřme podmínku Leibnizova kritéria pro alternující řady:

$$\forall n \in N : a_n \geq a_{n+1} > 0$$

$$\forall n \in N : \ln(n+1) < \ln(n+2) \Leftrightarrow \frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{\ln(n+2)},$$

podmínka je tedy splněna. Abychom mohli rozhodnout o konvergenci, zbývá ještě určit, zda je $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0,$$

řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$ tedy konverguje. Má-li tato řada konvergovat absolutně, musí konvergovat i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$. Ta ovšem diverguje neboť podle srovnávacího kritéria platí:

$$\frac{1}{\ln(n+1)} \geq \frac{1}{n+1},$$

a protože $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ je „posunutou“ harmonickou řadou ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$; harmonická řada diverguje), diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$ konverguje neabsolutně (relativně).

Příklad 18

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n(n+2)}$$

Ověřme podmínku Leibnizova kritéria pro alternující řady:

$$\forall n\in N: a_n \geq a_{n+1} > 0$$

$$\forall n\in N: \quad \begin{aligned} \frac{n^2+3n+3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} &> 0 \\ \frac{(n+1)^2(n+3)-n(n+2)^2}{n(n+1)(n+2)(n+3)} &> 0 \\ \frac{n+1}{n(n+2)}-\frac{n+2}{(n+1)(n+3)} &> 0 \\ \frac{n+1}{n(n+2)} &> \frac{n+2}{(n+1)(n+3)} \\ a_n &> a_{n+1} \end{aligned},$$

podmínka je tedy splněna. Abychom mohli rozhodnout o konvergenci, zbývá ještě určit, zda je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{n(n+2)} \leq \frac{n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} \\ \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n(n+2)} = 0 \end{aligned},$$

řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n(n+2)}$ tedy konverguje. Vyšetřeme ještě, jak se chová řada

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$: $\frac{n+1}{n(n+2)} \geq \frac{n}{n(n+2)} = \frac{1}{n+2}$ – zřejmě diverguje.

Proto řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n(n+2)}$ konverguje neabsolutně (relativně).

Příklad 19

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{(-3)^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{(-3)^n} = 3\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 3\cdot\frac{-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = -\frac{3}{4}+\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{(-3)^n}$ konverguje absolutně k $-\frac{1}{4}$.

Příklad 20

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\left(2\sqrt{n}+(-1)^n\right)^3}$$

Ověřme podmínku Leibnizova kritéria pro alternující řady:

$\forall n \in N : a_n \geq a_{n+1} > 0$

$\forall n \in N :$

$$\frac{1}{\left(2\sqrt{n}+(-1)^n\right)^3} \geq^{?} \frac{1}{\left(2\sqrt{n+1}+(-1)^{n+1}\right)^3}$$

$$\frac{1}{8\sqrt{n^3}+12n(-1)^n+6\sqrt{n}(-1)^{2n}+(-1)^{3n}} \geq^{?} \frac{1}{8\sqrt{(n+1)^3}+12(n+1)(-1)^n+6\sqrt{n+1}(-1)^{2n}+(-1)^{3n}}$$

$$8\sqrt{n^3}+12n(-1)^n+6\sqrt{n}(-1)^{2n}+(-1)^{3n} < 8\sqrt{(n+1)^3}+12(n+1)(-1)^n+6\sqrt{n+1}(-1)^{2n}+(-1)^{3n}$$

$$a_n > a_{n+1}$$

podmínka je tedy splněna. Abychom mohli rozhodnout o konvergenci, zbývá určit, zda je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(2\sqrt{n}+(-1)^n\right)^3} = 0,$$

protože stupeň čitatele je menší než stupeň jmenovatele. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\left(2\sqrt{n}+(-1)^n\right)^3}$ tedy konverguje. Otázku absolutní konvergence vyšetříme zkoumáním řady $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(2\sqrt{n}+(-1)^n\right)^3}$. Podle srovnávacího kritéria:

$$\frac{1}{\left(2n^{1/2}+(-1)^n\right)^3} \leq \frac{1}{\left(2n^{1/2}-1\right)^3} = \frac{1}{8n^{3/2}-12n+6n^{1/2}-1} < \frac{1}{n^{3/2}}$$

je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(2n^{1/2}+(-1)^n\right)^3}$ konvergentní a proto řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\left(2n^{1/2}+(-1)^n\right)^3}$ konverguje absolutně.

Obsah

Literatura:

KUBÍNOVÁ, M. – NOVOTNÁ, J.: Posloupnosti a řady. Karolinum, Praha 1997.