

Základní vlastnosti funkce více proměnných

Příklad 1. Určete, které z daných bodových posloupností $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou konvergentní, a najděte jejich limitu.

- (a) $\mathbf{x}_n = \left[\frac{2n}{n-0,3}, \sin \frac{3n}{2n^2-1}, e^{-\frac{n}{2}} \right]$, [konvergentní, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = [2, 0, 0]$]
(b) $\mathbf{x}_n = [4 \cos n, 4 \sin n, \sqrt{n+1}]$. [divergentní]

Příklad 2. Určete (a geometricky znázorněte) maximální definiční obory funkcí, určených následujícími předpisy

- (a) $f = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $[D(f) \subset \mathbb{R}^2 : \text{uzavřený kruh } x^2 + y^2 \leq a^2]$
(b) $f = \ln(y^2 - 4x + 8)$, $[D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 > 4(x-2)\}]$
(c) $f = \arcsin \frac{y-1}{x}$, $[D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - |x| \leq y \leq 1 + |x|, x \neq 0\}]$
(d) $f = \sqrt{\arctg \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 2}}$, $[D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 2, |y| \leq |x|\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2, |y| \geq |x|\}]$
(e) $f = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2} + \frac{1}{\ln(x^2 + y^2 + z^2 - 1)}$, $[D(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \in (2, 9)\}]$
(f) $f = \ln(x, y, z)$, $[D(f) \text{ je sjednocení všech otevřených oktantů } 1, 3, 6 \text{ a } 8]$
(g) $f = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. $[D(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 > z^2\}; x^2 + y^2 - z^2 = 0$
 $\text{je rovnice kuželové plochy s vrcholem v počátku}]$

Příklad 3. Určete definiční obor zobrazení

- (a) $f = [x(1 - \cos y), 1 + xy]$, $[D(f) = \mathbb{R}^2]$
(b) $f = [x^2 - \sin x, \arcsin \sqrt{x}]$, $[D(f) = \langle 0, 1 \rangle]$
(c) $f = \left[\arcsin(1 + e^{x+y}), \frac{x^y}{1-x-y} \right]$, $[D(f) = \emptyset]$
(d) $f = \left[1 + \frac{x}{y+z}, \ln(x+y-z)^2, \arctg \frac{y}{xz} \right]$. $[D(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+y \neq 0, x+y-z \neq 0, x \neq 0, z \neq 0\}]$

Příklad 4. Vyšetřete rovnice hladin následujících funkcí a znázorněte je graficky

- (a) $f = x + y + 3z$, [systém rovnoběžných rovin $x + y + 3z = C$]
(b) $f = x^2 + y^2 + z^2$, [systém kulových ploch se středem v počátku]
(c) $f = x^2 - y^2 + z^2$, $[x^2 - y^2 + z^2 = C : C = 0 \text{ kuželová plocha, } C > 0 \text{ systém jednodílných hyperboloidů, } C < 0 \text{ systém dvoudílných hyperboloidů}]$
(d) $f = \frac{x^2 + y^2}{2z}$, [systém rotačních paraboloidů $x^2 + y^2 = 2cz, z \neq 0$]
(e) $f = x^2 - y^2$, [systém hyperbol $y = \pm x$]
(f) $f = |x-1| + |y-2|$. [systém kosočtverců]