VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

CVIČENÍ Z MATEMATIKY II

Řešené úlohy

(Učební text pro kombinovanou formu studia)

RNDr. JIŘÍ KLAŠKA, Dr.

ÚSTAV MATEMATIKY• FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

BRNO 2002

PŘEDMLUVA

Učební text " Cvičení z matematiky II " je určen jako učební pomůcka pro posluchače a konzultanty kombinovaného studia na FSI VUT Brno. Tematicky navazují cvičení na text " Matematika II ", ve kterém jsou shrnuty všechny nejdůležitější pojmy a tvrzení z vybraných partií matematické analýzy v R^n. Výběr látky je určen současnými osnovami předmětu. " Cvičení z matematiky II " je koncipováno jako malá sbírka řešených úloh. Úlohy jsou rozděleny do třinácti samostatných kapitol. Ke všem úlohám jsou uvedeny výsledky a metodický postup řešení. Text rovněž obsahuje pro větší názornost několik desítek obrázků. Snahou autora bylo do textu zařadit zejména takové příklady, které by svou složitostí odpovídaly náročnosti a požadavkům zkoušky. Sbírka úloh je použitelná rovněž pro studenty magisterské formy studia.

Budu vděčen čtenářům za všechny připomínky, které by přispěly k vylepšení textu, a přeji hodně trpělivosti při řešení úloh.

Brno, září 2002 Autor

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

OBSAH

LEKCE 1. FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH I.

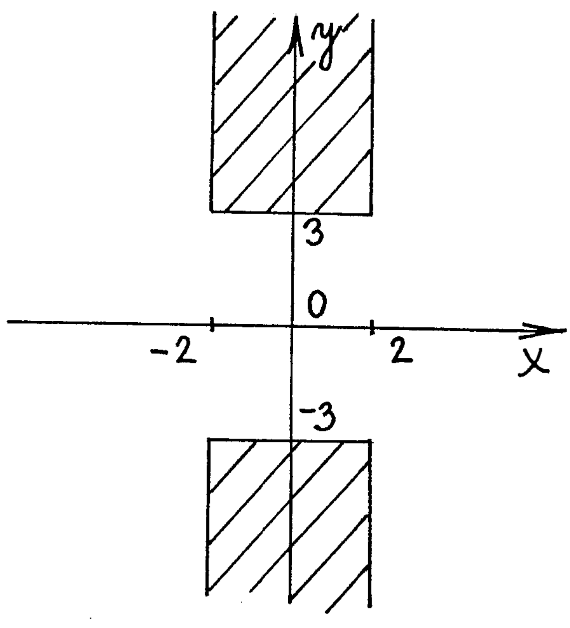
(Definiční obory funkcí dvou proměnných)

Vyšetřete a v kartézském souřadnicovém systému (O, x, y) zakreslete definiční obory následujících funkcí dvou proměnných.

1. $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{y^2 - 9}$.
2. $f(x, y) = \ln(x \ln(y - x))$.
3. $f(x, y) = \sqrt{x \sin y}$.
4. $f(x, y) = \sqrt{(1 - \ln y) \ln(-x)}$.
5. $f(x, y) = \ln(x^2 - y) + \sqrt{x - 2y + 4}$.
6. $f(x, y) = \ln\left(x + \dfrac{y}{2x}\right)$.
7. $f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y)^2}$.
8. $f(x, y) = \sqrt{\sin(\pi(x^2 + y^2))}$.
9. $f(x, y) = \arcsin(2y(1 + x^2) - 1)$.
10. $f(x, y) = \ln(1 + \sqrt{x^2 - y^2 - 9}) + \operatorname{arctg}\sqrt{15 - x^2 - y^2 - 2x}$.

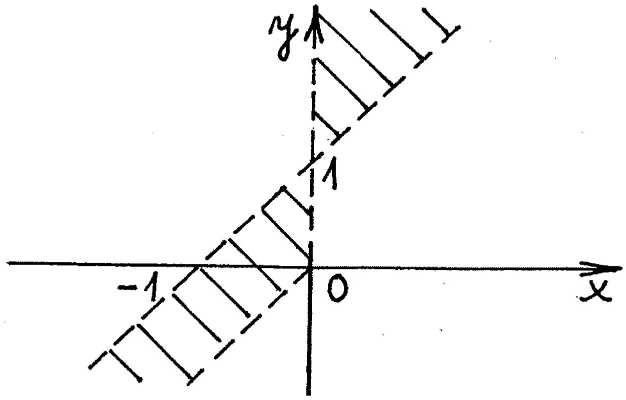
ŘEŠENÍ.

1. $[x, y] \in Df \Leftrightarrow (4 - x^2 \geq 0) \wedge (y^2 - 9 \geq 0) \Leftrightarrow (x^2 \leq 4) \wedge (y^2 \geq 9) \Leftrightarrow (|x| \leq 2) \wedge (|y| \geq 3) \Leftrightarrow x \in \langle -2, 2\rangle \wedge y \in (-\infty, -3\rangle \cup \langle 3, \infty) \Leftrightarrow [x, y] \in \langle -2, 2\rangle \times ((-\infty, -3\rangle \times \langle 3, \infty))$. Tedy $Df = \langle -2, 2\rangle \times ((-\infty, -3\rangle \cup \langle 3, \infty))$. Viz obr. 1.



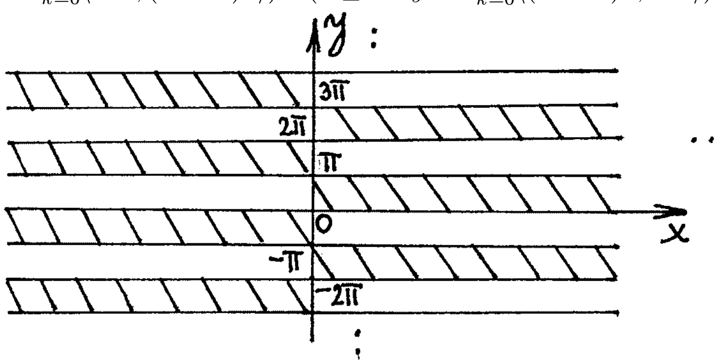
Obr. 1

2. $[x,y]\in Df \Leftrightarrow x\ln(y-x)>0 \Leftrightarrow (x>0\wedge \ln(y-x)>0)\vee(x<0\wedge \ln(y-x)<0)$
$\Leftrightarrow (x>0\wedge y-x>1)\vee(x<0\wedge 0<y-x<1) \Leftrightarrow (x>0\wedge y>x+1)\vee(x<0\wedge y<x+1\wedge y>x)$.



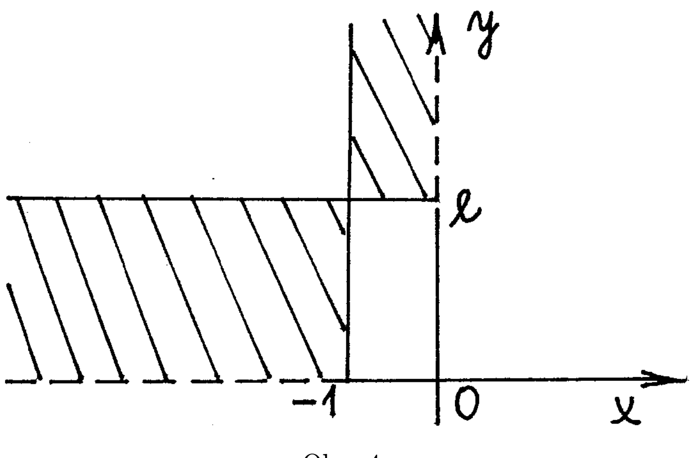
Obr. 2

3. $[x,y]\in Df \Leftrightarrow x\sin y\geq 0 \Leftrightarrow (x\geq 0\wedge \sin y\geq 0)\vee(x\leq 0\wedge \sin y\leq 0) \Leftrightarrow$
$(x\geq 0\wedge y\in \cup_{k=0}^{\infty}\langle 2k\pi,(2k+1)\pi\rangle)\vee(x\leq 0\wedge y\in \cup_{k=0}^{-\infty}\langle(2k-1)\pi,2k\pi\rangle)$.



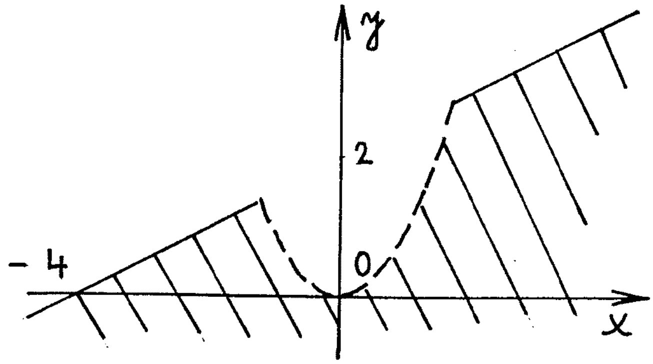
Obr. 3

4. $[x,y]\in Df \Leftrightarrow (1-\ln y)\ln(-x)\geq 0 \Leftrightarrow (1-\ln y\geq 0\wedge \ln(-x)\geq 0)\vee(1-\ln y\leq 0$
$\wedge \ln(-x)\leq 0) \Leftrightarrow (\ln y\leq 1\wedge x\leq -1)\vee(\ln y\geq 1\wedge 0>x\geq -1) \Leftrightarrow (0<y\leq e$
$\wedge x\leq -1)\vee(y\geq e\wedge -1\leq x<0)$.



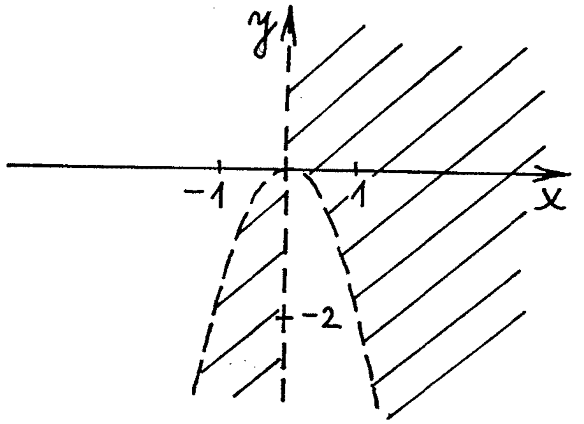
Obr. 4

5. $[x,y] \in Df \Leftrightarrow x^2 - y > 0 \wedge x - 2y + 4 \geq 0 \Leftrightarrow y < x^2 \wedge y \leq \frac{1}{2}x + 2$. Odtud $Df = \{[x,y]; y < x^2 \wedge y \leq \frac{1}{2}x + 2\}$.



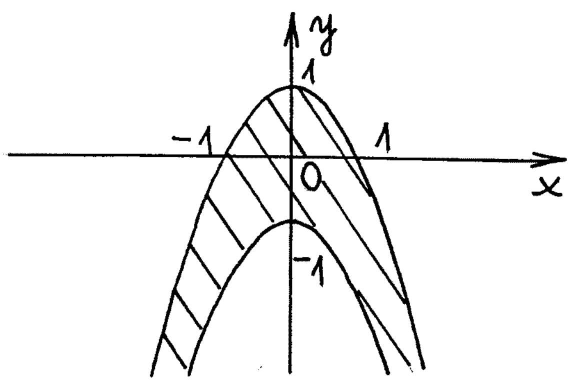
Obr. 5

6. $[x,y] \in Df \Leftrightarrow x + \frac{y}{2x} > 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2+y}{2x} > 0 \Leftrightarrow (2x^2 + y > 0 \wedge 2x > 0) \vee (2x^2 + y < 0 \wedge 2x < 0) \Leftrightarrow (x > 0 \wedge y > -2x^2) \vee (x < 0 \wedge y < -2x^2)$.



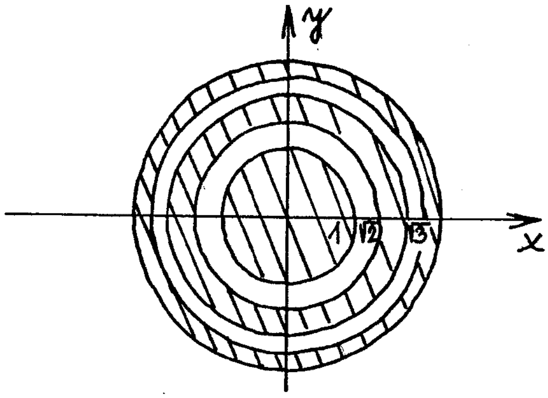
Obr. 6

7. $[x,y] \in Df \Leftrightarrow 1-(x^2+y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x^2+y)^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x^2+y| \leq 1 \Leftrightarrow (x^2+y \leq 0 \wedge -x^2-y \leq 1) \vee (x^2+y \geq 0 \wedge x^2+y \leq 1) \Leftrightarrow 0 \leq x^2+y \leq 1 \vee -1 \leq x^2+y \leq 0 \Leftrightarrow -1-x^2 \leq y \leq 1-x^2$. Tedy $Df = \{[x,y]; -1 - x^2 \leq y \leq 1 - x^2\}$.



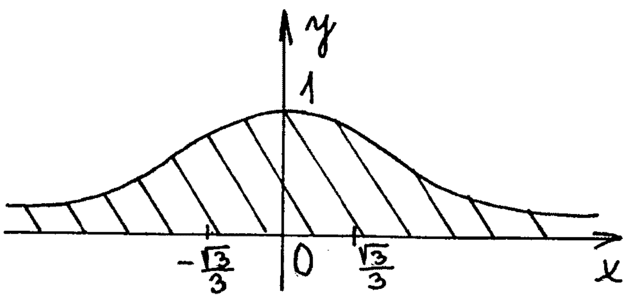
Obr. 7

8. $[x, y] \in Df \Leftrightarrow \sin \pi(x^2 + y^2) \geq 0 \Leftrightarrow 2k\pi \leq \pi(x^2 + y^2) \leq (2k + 1)\pi, k \in Z \Leftrightarrow 2k \leq x^2 + y^2 \leq 2k+1$, kde $k \in Z$. Odtud plyne $Df = \cup_{k=0}^{\infty} \{[x, y]; 2k \leq x^2 + y^2 \leq 2k+1\}$.



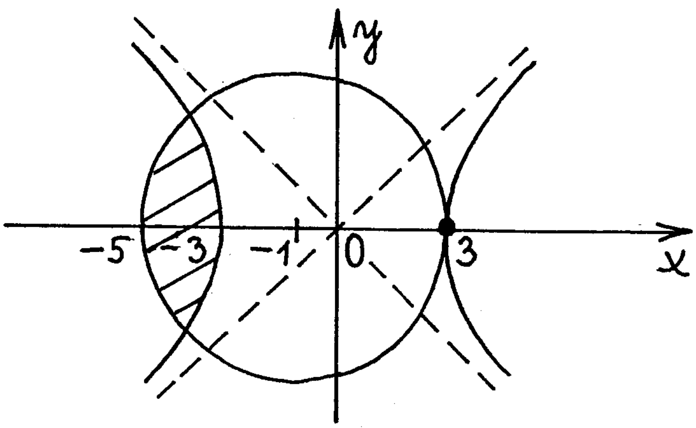
Obr. 8

9. $[x, y] \in Df \Leftrightarrow -1 \leq 2y(1 + x^2) - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2y(1 + x^2) \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \frac{1}{1+x^2}$. Tedy $Df = \{[x, y]; 0 \leq y \leq \frac{1}{1+x^2}\}$. Po vyšetření průběhu funkce $\frac{1}{1+x^2}$ již snadno nakreslíme definiční obor.



Obr. 9

10. $[x, y] \in Df \Leftrightarrow 1 + \sqrt{x^2 - y^2 - 9} > 0 \wedge 15 - x^2 - y^2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 - 9 \geq 0$ $\wedge x^2 + y^2 + 2x \leq 15 \Leftrightarrow x^2 - y^2 \geq 9 \wedge (x + 1)^2 + y^2 \leq 16$.



Obr. 10

LEKCE 2. FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH II.

(Metoda řezů a definiční obory funkcí tří proměnných)

Vyšetřete a nakreslete řezy následujících funkcí.

1. $f(x,y) = \dfrac{x}{y} \cdot \ln(3x-2y)$ rovinou $z=0$.

2. $f(x,y) = x^3 + x^2 - y^2$ rovinou $z=0$.

Pomocí metody řezů nakreslete grafy následujících funkcí dvou proměnných.

3. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

4. $f(x,y) = |x| + |y|$.

5. $f(x,y) = \sqrt{1-(x+y)}$.

6. $f(x,y) = e^{-x^2 - y^2}$.

7. $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$.

Vyšetřete a v kartézském souřadnicovém systému (O,x,y,z) zakreslete definiční obory následujících funkcí tří proměnných.

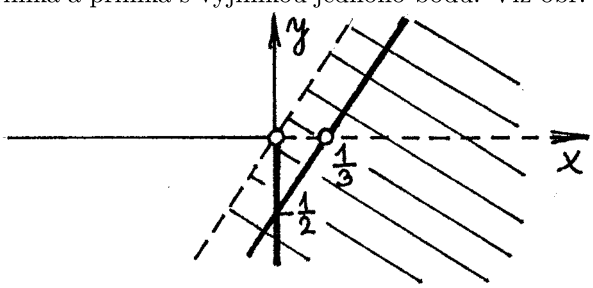
8. $f(x,y,z) = \sqrt{1-\sqrt{x^2+y^2}-z} + \sqrt{1-\sqrt{x^2+y^2}+z}$

9. $f(x,y,z) = \sqrt{z-\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{6-(x^2+y^2+z)}$.

10. $f(x,y,z) = \sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)} + \sqrt{7/5-(x+z)}$.

ŘEŠENÍ.

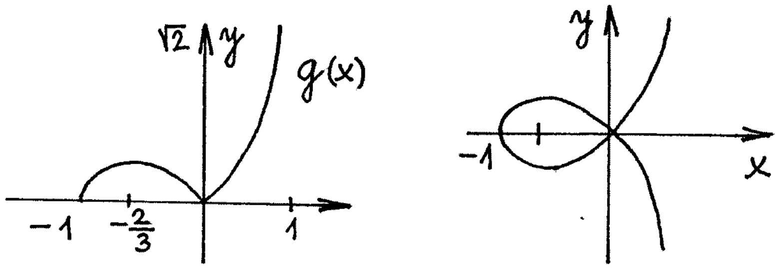
1. Předně vyšetříme definiční obor. Platí $[x,y] \in Df \Leftrightarrow y \neq 0 \wedge 3x-2y > 0$ $\Leftrightarrow y \neq 0 \wedge y < \frac{3}{2}x$. Odtud plyne, že $Df = \{[x,y]; y < \frac{3}{2}x \wedge y \neq 0\}$. Viz obr. 11. Najít řez rovinou $z=0$ znamená řešit rovnici $\frac{x}{y} \cdot \ln(3x-2y) = 0$. Platí $\frac{x}{y} \cdot \ln(3x-2y) = 0 \Leftrightarrow$ $x=0 \vee 3x-2y=1 \Leftrightarrow x=0 \vee y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$. Odtud a z předchozího plyne, že řezem je otevřená polopřímka a přímka s výjimkou jednoho bodu. Viz obr. 11.



Obr. 11

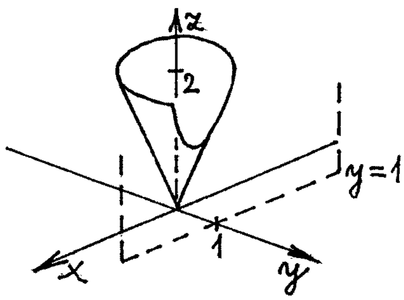
2. Definiční obor funkce $f(x,y) = x^3 + x^2 - y^2$ je celá rovina R^2. Najít řez rovinou $z=0$ znamená vyřešit rovnici $x^3 + x^2 - y^2 = 0$. Platí $y^2 = x^3 + x^2$ a odtud $y = \pm\sqrt{x^3+x^2}$. Odtud plyne, že hledaný řez je symetrický podle osy x. Vyšetříme průběh funkce $g(x) = \pm\sqrt{x^3+x^2}$. Předně $x \in Dg \Leftrightarrow x^2(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$. Tedy $Dg = \langle -1, \infty)$. Určíme první derivaci $g'(x) = \frac{1}{2}\frac{3x^2+2x}{\sqrt{x^3+x^2}} = \frac{1}{2}\frac{x(3x+2)}{\sqrt{x^3+x^2}}$. Definiční obor derivace g' je $Dg' = (-1,\infty) - \{0\}$. Jediný nulový bod je $x = -\frac{2}{3}$. Dosazením vhodných bodů zjistíme signum g' na příslušných intervalech. Na $(-1, -\frac{2}{3})$ je g'

kladná, na $(-\frac{2}{3}, 0)$ záporná a na $(0, \infty)$ kladná. Odtud plyne, že funkce g je na $(-1, -\frac{2}{3})$ rostoucí, na $(-\frac{2}{3}, 0)$ klesající a na $(0, \infty)$ rostoucí. V bodě $x = -\frac{2}{3}$ je maximum $g(-\frac{2}{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{9} \approx 0.38$ a v bodě $x = 0$ je minimum $g(0) = 0$. Druhá derivace po úpravě vychází $g''(x) = \frac{1}{4}\frac{x(3x+4)}{(x+1)\sqrt{x^2(x+1)}}$. Odtud plyne, že na intervalu $(-1, 0)$ je funkce g konkávní a na $(0, \infty)$ konvexní. Bod $x = 0$ není inflexní bod. Asymptoty funkce g nemá. Z těchto informací lze již nakreslit graf funkce g a tím i obrázek celého řezu. Viz obr. 12.



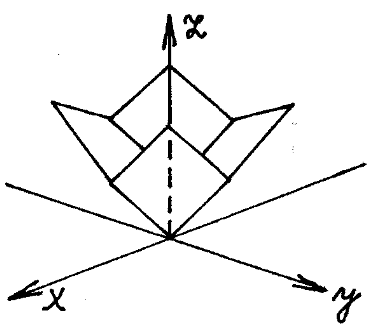
Obr. 12

3. Definiční obor funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$ je celá rovina R^2 a $Hf = \langle 0, \infty)$. Řezy rovinami $z=c$ jsou pro $z>0$ kružnice $x^2+y^2=c^2$, pro $z=0$ bod $[0, 0]$ a pro $c<0$ jsou řezy prázdné množiny. Řezy rovinami $y=c$ jsou tvaru $z=\sqrt{x^2+c^2}$. Po umocnění dostáváme $z^2-x^2=c^2$, $z \geq 0$. Tedy řezy jsou pro $c \neq 0$ ramena rovnoosých hyperbol a pro $c=0$ je řez $z=|x|$. Grafem funkce f je horní část kuželové plochy. Viz obr. 13. V grafu jsou znázorněny řezy rovinami $z=2$ a $y=1$.



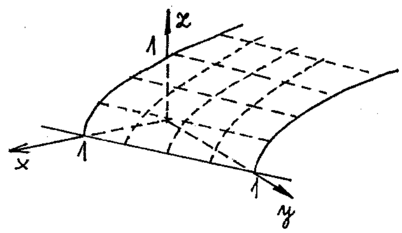
Obr. 13

4. Pro $f(x, y) = |x| + |y|$ platí, že $Df = R^2$ a $Hf = \langle 0, \infty)$. Řezy rovinami $z = c$ jsou pro $z > 0$ tvořeny čtyřmi úsečkami $y = \pm x \pm c$, které tvoří hranici čtverce. Pro $z = 0$ je řez bod $[0, 0]$ a pro $c < 0$ jsou řezy prázdné množiny. Řezy rovinami $y=c$ jsou tvaru $z=|x| + c$. Viz obr. 14.



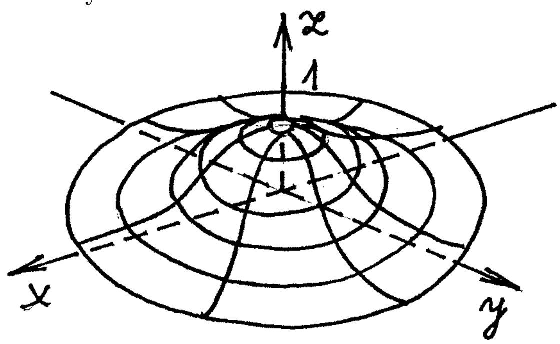
Obr. 14

5. Pro $f(x,y)=\sqrt{1-(x+y)}$ platí, že $[x,y]\in Df \Leftrightarrow 1-(x+y)\geq 0 \Leftrightarrow y\leq 1-x$. Tedy $Df=\{[x,y], y\leq 1-x\}$. Zřejmě $Hf=\langle 0,\infty)$. Řezy rovinami $z=c$ jsou pro $z\geq 0$ přímky $y=1-x-c^2$. Pro $c<0$ jsou řezy prázdné množiny. Řezy rovinami $y=c$ jsou tvaru $x=1-z^2-c$, $z\geq 0$. Tyto řezy jsou poloviny parabol. Graf funkce f je na obr. 15.



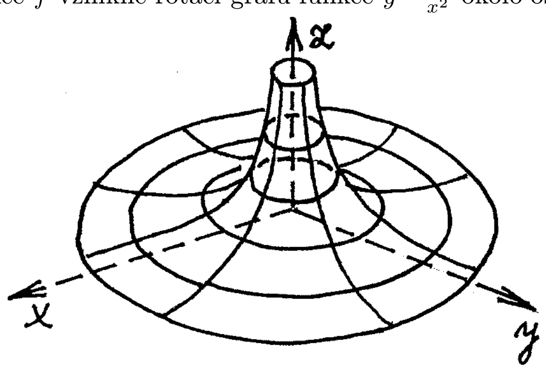
Obr. 15

6. Pro $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$ je $Df=R^2$ a $Hf=\langle 0,1\rangle$. Řezy rovinami $z=c$ jsou pro $z>0$ tvořeny kružnicemi $x^2+y^2=\ln\frac{1}{c}$. Pro $z=1$ je řez bod $[0,0]$ a pro $c\leq 0$ jsou řezy prázdné množiny. Řezy rovinami $y=c$ jsou tvaru $z=e^{-x^2-c^2}$. Jedná se o křivky, jejichž průběh je třeba vyšetřit zvlášť. Graf funkce f vznikne rotací grafu funkce $y=e^{-x^2}$ okolo osy z. Viz obr. 16.



Obr. 16

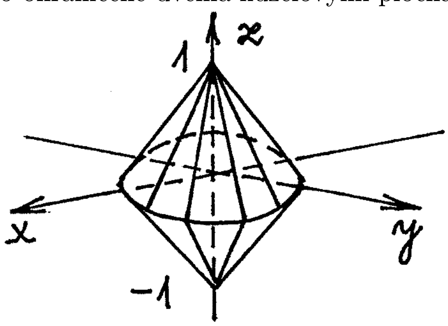
7. Pro $f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$ je $Df=R^2-\{[0,0]\}$ a $Hf=(0,\infty)$. Řezy rovinami $z=c$ jsou pro $z>0$ tvořeny kružnicemi $x^2+y^2=\frac{1}{c}$. Pro $c\leq 0$ jsou řezy prázdné množiny. Řezy rovinami $y=c$ jsou tvaru $z=\frac{1}{x^2+c^2}$. Průběh těchto křivek je zapotřebí vyšetřit zvlášť. Graf funkce f vznikne rotací grafu funkce $y=\frac{1}{x^2}$ okolo osy z. Viz obr. 17.



Obr. 17

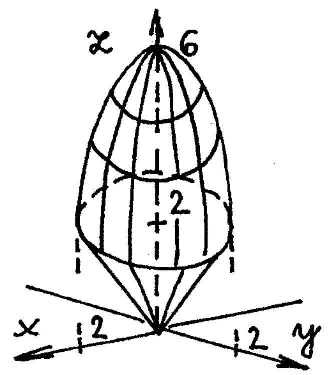
8. Pro $f(x,y,z)=\sqrt{1-\sqrt{x^2+y^2}-z}+\sqrt{1-\sqrt{x^2+y^2}+z}$ platí $[x,y,z]\in Df \Leftrightarrow$

$1-\sqrt{x^2+y^2}-z \ge 0 \wedge 1-\sqrt{x^2+y^2}+z \ge 0 \Leftrightarrow z \le 1-\sqrt{x^2+y^2} \wedge z \ge \sqrt{x^2+y^2}-1$.
$Df = \{[x,y,z], -1 \le x \le 1, -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}, \sqrt{x^2+y^2}-1 \le z \le 1-\sqrt{x^2+y^2}\}$.
Definiční obor je těleso ohraničené dvěma kuželovými plochami. Viz obr. 18.



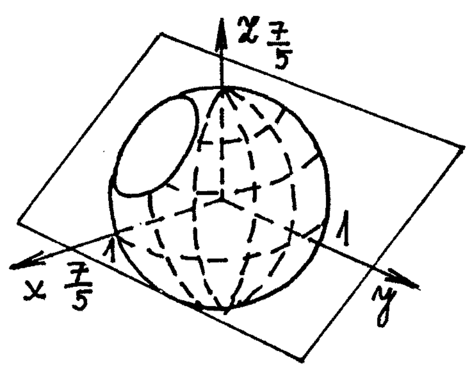
Obr. 18

9. Pro $f(x,y,z) = \sqrt{z-\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{6-(x^2+y^2+z)}$ platí $[x,y,z] \in Df \Leftrightarrow$ $z-\sqrt{x^2+y^2} \ge 0 \wedge 6-(x^2+y^2+z) \ge 0 \Leftrightarrow z \le \sqrt{x^2+y^2} \wedge z \le 6-(x^2+y^2)$.
$Df = \{[x,y,z], -2 \le x \le 2, -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}, \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 6-(x^2+y^2)\}$.
Definiční obor je těleso ohraničené zhora paraboloidem a zdola kuželovou plochou. Průnik paraboloidu a kuželové plochy je kružnice $x^2+y^2=4$. Viz obr. 19.



Obr. 19

10. Pro $f(x,y,z) = \sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)} + \sqrt{7/5-(x+z)}$ platí $[x,y,z] \in Df \Leftrightarrow$ $1-(x^2+y^2+z^2) \ge 0 \wedge \frac{7}{5}-(x+z) \ge 0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \le 1 \wedge z \le \frac{7}{5}-x$. Definiční obor je koule o poloměru 1 se středem v počátku, ze které je rovinou odříznuta její část. Viz obr. 20.



Obr. 20

LEKCE 3. LIMITA A SPOJITOST.

1. Vyšetřete limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x-2y}{3x+y}$.

2. Vyšetřete limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x+y}{x-y}$.

3. Vyšetřete limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x^3y}{x^4+y^4}$.

4. Vyšetřete limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$.

5. Vyšetřete limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

6. Vyšetřete, zda je funkce $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0] \\ 0 & \text{pro } [x,y] = [0,0] \end{cases}$ spojitá v bodě $[0,0]$.

7. Vyšetřete, zda je funkce $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y^2}{x^8+y^4} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0] \\ 0 & \text{pro } [x,y] = [0,0] \end{cases}$ spojitá v bodě $[0,0]$.

8. Spočtěte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$.

9. Spočtěte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[2,2]} \dfrac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$.

10. Spočtěte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$.

Výsledky úloh:

1. Neexistuje. **2.** Neexistuje. **3.** Neexistuje. **4.** Neexistuje. **5.** Neexistuje. **6.** Spojitá. **7.** Nespojitá. **8.** $\frac{1}{2}$. **9.** $\frac{3}{8}$. **10.** 12.

ŘEŠENÍ.

1. K vyšetření limity použijeme metodu postupných limit. Platí

$$L_1 = \lim_{x\to0}\big(\lim_{y\to0} \tfrac{x-2y}{3x+y}\big) = \lim_{x\to0} \tfrac{x}{3x} = \lim_{x\to0} \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{3}.$$

$$L_2 = \lim_{y\to0}\big(\lim_{x\to0} \tfrac{x-2y}{3x+y}\big) = \lim_{y\to0} \tfrac{-2y}{y} = \lim_{x\to0}(-2) = -2.$$

Obě postupné limity L_1, L_2 existují, ale jsou různé. Z věty o jednoznačnosti limity plyne, že daná limita neexistuje.

2. K vyšetření limity použijeme opět metodu postupných limit. Platí

$$L_1 = \lim_{x\to0}\big(\lim_{y\to0} \tfrac{x+y}{x-y}\big) = \lim_{x\to0} \tfrac{x}{x} = \lim_{x\to0} 1 = 1.$$

$$L_2 = \lim_{y\to0}\big(\lim_{x\to0} \tfrac{x+y}{x-y}\big) = \lim_{y\to0} \tfrac{y}{-y} = \lim_{x\to0}(-1) = -1.$$

Obě postupné limity L_1, L_2 existují, ale jsou různé. Z věty o jednoznačnosti limity plyne, že daná limita neexistuje.

3. Metoda postupných limit selhává. K vyšetření limity použijeme metodu svazku přímek. Platí

$$L^* = \lim_{x\to 0, y=kx} \frac{x^3y}{x^4+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3\cdot kx}{x^4+k^4x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^4}{x^4(k^4+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{k}{k^4+1} = \frac{k}{k^4+1}.$$

Protože limita L^* závisí na parametru k, z věty o jednoznačnosti limity plyne, že funkce f v bodě $[0,0]$ nemá limitu.

4. Metoda postupných limit i metoda svazku přímek selhává. K vyšetření limity použijeme metodu svazku parabol. Platí

$$L^{**} = \lim_{x\to 0, y=kx^2} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot kx^2}{x^4+k^2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{k}{k^2+1} = \frac{k}{k^2+1}.$$

Protože limita L^{**} závisí na parametru k, z věty o jednoznačnosti limity plyne, že funkce f v bodě $[0,0]$ nemá limitu.

5. K vyšetření limity použijeme metodu polárních souřadnic. Platí

$$L^{***} = \lim_{\rho\to 0, x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\cos\varphi\rho\sin\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi} = \lim_{\rho\to 0}\cos\varphi\sin\varphi = \cos\varphi\sin\varphi.$$

Protože limita L^{***} závisí na φ, funkce f nemá v bodě $[0,0]$ limitu.

6. Aby byla funkce f spojitá v bodě $[0,0]$, musí mít v tomto bodě limitu rovnu nule. Dokažme, že tomu tak je. Použijeme větu, která tvrdí, že limita součinu funkce jejíž limita je nula a ohraničené funkce je rovna rovněž nula. Zřejmě platí $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} x\cdot \lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{xy}{x^2+y^2}$. Přitom $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} x = 0$. Ukažme nyní že funkce $\frac{xy}{x^2+y^2}$ je ohraničená. Platí $(|x|-|y|)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2|xy| + y^2 \geq 0 \Rightarrow 2|xy| \leq x^2+y^2 \Rightarrow \frac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow |\frac{xy}{x^2+y^2}| \leq \frac{1}{2}$. Tedy funkce $\frac{xy}{x^2+y^2}$ je ohraničená.

7. Aby byla funkce f spojitá v bodě $[0,0]$, musí mít v tomto bodě limitu rovnu nule. Metoda postupných limit, metoda svazku přímek i metoda polárních souřadnic dávají výsledek nula. Metodou svazku parabol ukažme, že limita nula není a tedy zkoumaná funkce je v daném bodě nespojitá.

$$L^{**} = \lim_{x\to 0, y=kx^2} \frac{x^4y^2}{x^8+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4(kx^2)^2}{x^8+(kx^2)^4} = \lim_{x\to 0} \frac{k^2x^8}{(1+k^4)x^8} = \frac{k^2}{1+k^4}.$$

Limita L^{**} závisí na parametru k. Odtud podle věty o jednoznačnosti limity plyne, že funkce f je v $[0,0]$ nespojitá.

8. Do funkce nelze bezprostředně dosadit. Provedeme proto vhodnou algebraickou úpravu. Výraz rozšíříme.

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{(\sqrt{x^2+y^2+1}-1)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)} =$$

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{(x^2+y^2+1-1)}{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

9. Provedeme algebraickou úpravu funkce. Rozložíme čitatele i jmenovatele výrazu a provedeme pokrácení.

$$\lim_{[x,y]\to[2,2]} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4} = \lim_{[x,y]\to[2,2]} \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)} = \lim_{[x,y]\to[2,2]} \frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)(x^2+y^2)} = \frac{4+4+4}{4(4+4)} = \frac{3}{8}.$$

10. Provedeme algebraickou úpravu funkce. Výraz rozšíříme vhodným zlomkem.

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{3(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+4}+2)}{(\sqrt{x^2+y^2+4}-2)(\sqrt{x^2+y^2+4}+2)} =$$

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{3(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+4}+2)}{x^2+y^2+4-4} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} 3(\sqrt{x^2+y^2+4}+2) = 3(2+2) = 12.$$

LEKCE 4. PARCIÁLNÍ A SMĚROVÉ DERIVACE, GRADIENT.

1. Spočtěte parciální derivace prvního řádu funkce f.
(a) $f(x,y)=(x^2y+y)^4$.
(b) $f(x,y)=e^{\frac{x}{y}}+x^y$.
(c) $f(x,y,z)=(\frac{y}{z})^x$.
2. Spočtěte parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě A.
(a) $f(x,y)=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$, $A=[1,2]$.
(b) $f(x,y)=(1+\log_y x)^3$, $A=[e,e]$.
(c) $f(x,y,z)=\operatorname{arctg}\sqrt{x^y}+z^z$, $A=[1,1,2]$.
3. Spočtěte všechny parciální derivace druhého řádu funkce f v bodě A.
(a) $f(x,y)=e^{2y}\sin x$, $A=[0,0]$.
(b) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x-y}{x+y}$, $A=[3,1]$.
(c) $f(x,y)=e^{xe^y}$, $A=[0,0]$.
4. $f(x,y)=x\ln(xy)$. Spočtěte f'''_{xyy}.
5. $f(x,y)=\ln(1+x+y)$. Spočtěte $\dfrac{\partial^{136}}{\partial^{79}x\partial^{57}y}$.
6. Určete bod, ve kterém je gradient funkce $f(x,y)=\ln(x+\frac{1}{y})$ roven vektoru $(1,\frac{-16}{9})$.
7. Určete body, ve kterých se velikost gradientu funkce $f(x,y)=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$ rovná 2.
8. Spočtěte derivaci $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ v bodě $A=[1,1]$ ve směru vektoru $u=(2,1)$.
9. Zjistěte, zda je funkce $f(x,y)=\sqrt{x^3+y}$ v bodě $A=[1,2]$ ve směru vektoru $u=(-3,1)$ rostoucí.
10. Spočtěte derivaci funkce $f(x,y)=\ln(x+y)$ v bodě $A=[1,2]$ ležícím na parabole $y^2=4x$ ve směru jednotkového vektoru tečny k parabole v tomto bodě.

Výsledky úloh:

1. (a) $f'_x=8xy^4(x^2+1)^3$, $f'_y=4y^3(x^2+1)^4$. (b) $f'_x=\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}+yx^{y-1}$, $f'_y=-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}+x^y\ln x$. (c) $f'_x=(\frac{y}{z})^x\ln(\frac{y}{z})$, $f'_y=(\frac{x}{y})(\frac{y}{z})^x$, $f'_z=-(\frac{x}{z})(\frac{y}{z})^x$.
2. (a) $f'_x(A)=\frac{1}{\sqrt5}$, $f'_y(A)=\frac{2}{5+\sqrt5}$. (b) $f'_x(A)=\frac{12}{e}$, $f'_y(A)=-\frac{12}{e}$.
(c) $f'_x(A)=\frac14$, $f'_y(A)=0$, $f'_z(A)=4+\ln 16$. **3.** (a) $f''_{xx}(A)=0$, $f''_{xy}(A)=2$, $f''_{yy}(A)=0$. (b) $f''_{xx}(A)=-\frac{6}{100}$, $f''_{xy}(A)=\frac{8}{100}$, $f''_{yy}(A)=\frac{6}{100}$.
(c) $f''_{xx}(A)=1$, $f''_{xy}(A)=1$, $f''_{yy}(A)=0$. **4.** 0. **5.** $\frac{-135!}{(1+x+y)^{136}}$. **6.** $[-\frac13,\frac34]$, $[\frac73,-\frac34]$.
7. Body leží na kružnici $x^2+y^2=\frac23$. **8.** 1. **9.** Klesající. $f'_u(A)=-\frac{4}{\sqrt3}$. **10.** $\frac{\sqrt2}{3}$.

ŘEŠENÍ.

1. (a) $f(x,y)=(x^2y+y)^4$, $f'_x=4(x^2y+y)^3\cdot 2xy=8xy^4(x^2+1)^3$,
$f'_y=4(x^2y+y)^3\cdot x^2=4y^3(x^2+1)^4$.
(b) $f(x,y)=e^{\frac{x}{y}}+x^y$, $f'_x=e^{\frac{x}{y}}\frac{1}{y}+yx^{y-1}$, $f'_y=e^{\frac{x}{y}}(-\frac{x}{y^2})+\ln x\cdot x^y$.
(c) $f(x,y,z)=(\frac{y}{z})^x$, $f'_x=(\frac{y}{z})^x\ln(\frac{y}{z})$, $f'_y=\frac{1}{z^x}xy^{x-1}=(\frac{x}{y})(\frac{y}{z})^x$,
$f'_z=y^x(-x)z^{-x-1}=-(\frac{x}{z})(\frac{y}{z})^x$.

2. (a) $f'_x = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}(1 + \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_x(A) = \frac{1}{\sqrt{5}}$,
$f'_y = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$, $f'_y(A) = \frac{2}{5+\sqrt{5}}$.

(b) Ze základních vztahů pro logaritmické funkce plyne, že $\log_y x = \frac{\ln x}{\ln y}$. Zadanou funkci f přepíšeme na tvar $f(x,y) = (1+\log_y x)^3 = (1+\frac{\ln x}{\ln y})^3$. Odtud

$$f'_x = 3(1+\log_y x)^2 \frac{1}{x\ln y}, \qquad f_x(A) = 3(1+\log_e e)^2 \frac{1}{e\ln e} = \frac{12}{e},$$
$$f'_y = 3(1+\log_y x)^2 \frac{-\ln x}{y\ln^2 y}, \qquad f_y(A) = 3(1+\log_e e)^2 \frac{-\ln e}{e\ln^2 e} = -\frac{12}{e}.$$

(c) $f(x,y,z) = \operatorname{arctg}\sqrt{x^y} + z^z$, $f'_x = \frac{1}{1+x^y}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^y}}\cdot yx^{y-1}$, $f'_x(A) = \frac{1}{4}$,
$f'_y = \frac{1}{1+x^y}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^y}}\cdot x^y\ln x$, $f'_y(A) = 0$, $f'_z = zz^{z-1} + \ln z\cdot z^z = z^z(\ln z+1)$,
$f'_z(A) = 4+\ln 16$.

3. (a) $f(x,y) = e^{2y}\sin x$, $f'_x = e^{2y}\cos x$, $f'_y = 2e^{2y}\sin x$, $f''_{xx} = -e^{2y}\sin x$,
$f''_{xx}(A) = 0$, $f''_{yy} = 4e^{2y}\sin x$, $f''_{yy}(A) = 0$, $f''_{xy} = 2e^{2y}\cos x$, $f''_{xy}(A) = 2$.

(b) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x-y}{x+y}$, $f'_x = \frac{1}{1+(\frac{x-y}{x+y})^2}\cdot\frac{x+y-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{y}{x^2+y^2}$.
$f'_y = \frac{1}{1+(\frac{x-y}{x+y})^2}\cdot\frac{-1(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{-x}{x^2+y^2}$, $f''_{xx} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $f''_{xx}(A) = \frac{-6}{100}$,
$f''_{yy} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $f''_{yy}(A) = \frac{6}{100}$, $f''_{xy} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $f''_{xy}(A) = \frac{8}{100}$.

(c) $f(x,y) = e^{xe^y}$, $f'_x = e^{xe^y}\cdot e^y$, $f'_y = e^{xe^y}\cdot xe^y$, $f''_{xx} = e^{xe^y}\cdot(e^y)^2$, $f''_{xx}(A) = 1$,
$f''_{yy} = e^{xe^y}\cdot(xe^y)^2 + e^{xe^y}\cdot(xe^y) = e^{xe^y}\cdot xe^y(xe^y+1)$, $f''_{yy}(A) = 0$,
$f''_{xy} = e^{xe^y}\cdot xe^y\cdot e^y + e^{xe^y}\cdot e^y = e^{xe^y}\cdot e^y(xe^y+1)$, $f''_{xy}(A) = 1$.

4. $f(x,y) = x\ln(xy)$, $f'_x = \ln(xy) + x\cdot\frac{1}{xy}\cdot y = \ln(xy)+1$, $f''_{xx} = \frac{1}{xy}\cdot y = \frac{1}{x}$, $f'''_{xxy} = 0$.

5. Funkce $f(x,y) = \ln(1+x+y)$ je symetrická vzhledem k proměnným x a y. Odtud plyne, že u smíšených parciálních derivací nazáleží na tom, podle kterých proměnných derivujeme, ale pouze na řádu derivace. Platí tedy, že

$$\frac{\partial^{136} f(x,y)}{\partial^{79}x\partial^{57}y} = \frac{\partial^{136} f(x,y)}{\partial^{136}x}$$

Pro derivace malých řádů snadno spočteme, že

$$f'_x = \frac{1}{1+x+y},\ f''_{xx} = \frac{-1}{(1+x+y)^2},\ f'''_{xxx} = \frac{2}{(1+x+y)^3},\ f''''_{xxxx} = \frac{-6}{(1+x+y)^4},\ f^{(5)}_{xxxxx} = \frac{24}{(1+x+y)^5}.$$

Z tvaru uvedených derivací se nabízí hypotéza, že

$$\frac{\partial^k f(x,y)}{\partial x^k} = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x+y)^k}.$$

Tuto hypotézu lze dokázat pomocí principu matematické indukce. Speciálně tedy platí

$$\frac{\partial^{136} f(x,y)}{\partial^{79}x\partial^{57}y} = \frac{\partial^{136} f(x,y)}{\partial x^{136}} = \frac{-135!}{(1+x+y)^{136}}.$$

6. Spočítáme gradient funkce $f(x,y)=\ln(x+\frac{1}{y})$. Pro parciální derivace prvního řádu platí

$$f'_x=\frac{1}{x+\frac{1}{y}}=\frac{y}{xy+1},\ f'_y=\frac{1}{x+\frac{1}{y}}\cdot\frac{-1}{y^2}=\frac{-1}{xy^2+y}.$$

Odtud $\mathrm{grad} f=(\frac{y}{xy+1},\frac{-1}{xy^2+y})$. Gradient funkce f porovnáme se zadaným vektorem $(1,-\frac{16}{9})$. Platí $(\frac{y}{xy+1},\frac{-1}{xy^2+y})=(1,-\frac{16}{9})$. Z rovnosti složek vektorů získáme systém rovnic $\frac{y}{xy+1}=1, \frac{-1}{xy^2+y}=-\frac{16}{9}$. Dosazením první rovnice do druhé dostáváme $\frac{1}{y^2}=\frac{16}{9}$. Odtud $y=\pm\frac{3}{4}$. Dopočítáme x. Pro $y=\frac{3}{4}$ je $x=-\frac{1}{3}$, pro $y=-\frac{3}{4}$ je $x=\frac{7}{3}$. Gradient zadané funkce je roven vektoru $(1,-\frac{16}{9})$ v bodech $[-\frac{1}{3},\frac{3}{4}],[\frac{7}{3},-\frac{3}{4}]$.

7. Spočítáme gradient funkce $f(x,y)=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$. Pro parciální derivace prvního řádu platí

$$f'_x=\frac{3}{2}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x=3x\sqrt{x^2+y^2},\ f'_y=\frac{3}{2}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2y=3y\sqrt{x^2+y^2}.$$

Odtud $\mathrm{grad} f=(3x\sqrt{x^2+y^2},3y\sqrt{x^2+y^2})$. Pro velikost gradientu funkce f platí

$$|\mathrm{grad} f|=\sqrt{(f'_x)^2+(f'_y)^2}=\sqrt{9x^2(x^2+y^2)+9y(x^2+y^2)}=\sqrt{9(x^2+y^2)^2}=3(x^2+y^2).$$

Dostáváme rovnici $3(x^2+y^2)=2$. Velikost gradientu funkce $f(x,y)=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$ se rovná 2 v bodech ležících na kružnici $x^2+y^2=\frac{2}{3}$.

8. Nejprve určíme parciální derivace funkce $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ v bodě $A=[1,1]$.

$$f'_x=\frac{2x(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2},\ f'_x(A)=1.$$

$$f'_y=\frac{-2y(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2},\ f'_y(A)=-1.$$

Odtud plyne, že $\mathrm{grad} f(A)=(1,-1)$. Nyní můžeme určit derivaci ve směru. Platí $f'_u(A)=\mathrm{grad} f(A)\circ u=(1,-1)\circ(2,1)=2-1=1$.

9. Spočítáme derivaci funkce $f(x,y)=\sqrt{x^3+y}$ v bodě $A=[1,2]$ ve směru vektoru $u=(-3,1)$. Nejprve určíme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě A.

$$f'_x=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y}},\ f'_x(A)=\frac{3}{2\sqrt{3}},\ f'_y=\frac{1}{2\sqrt{x^3+y}},\ f'_y(A)=\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Odtud plyne, že $\mathrm{grad} f(A)=(\frac{3}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}})$. Nyní určíme derivaci ve směru. Platí

$$f'_u(A)=\mathrm{grad} f(A)\circ u=(\frac{3}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}})\circ(-3,1)=\frac{-9}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}=-\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Protože je derivace $f'_u(A)$ záporná, je funkce f v bodě A ve směru u klesající.

10. Nejprve určíme parciální derivace funkce $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ v bodě $A=[1,2]$.

$$f'_x=\frac{1}{x+y},\ f'_x(A)=\frac{1}{3},\ f'_y=\frac{1}{x+y},\ f'_y(A)=\frac{1}{3}.$$

Odtud plyne, že $\mathrm{grad} f(A)=(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$. Spočteme rovnici tečny k parabole $x=\frac{1}{4}y^2$. Platí $x-x_0=x'(y_0)(y-y_0)$, kde $x_0=1, y_0=2, x'(2)=1$. Rovnice tečny je tvaru $x-y+1=0$ a tečna má směrový vektor $v=(1,1)$. Jeho velikost je $\sqrt{2}$. Jednotkový vektor tečny je tedy $u=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$. Spočítáme derivaci ve směru.

$$f'_u(A)=\mathrm{grad} f(A)\circ u=(\frac{1}{3},\frac{1}{3})\circ(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

LEKCE 5. DIFERENCIÁL A TAYLORŮV POLYNOM.

1. Spočtěte diferenciály funkcí f v daném bodě A.
(a) $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{xy}, A = [3,2]$.
(b) $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, A = [2,1]$.
(c) $f(x,y,z) = \frac{x-y}{\sqrt{z}}, A = [1,2,4]$.

2. Spočtěte druhé diferenciály následujících funkcí.
(a) $f(x,y) = e^{x-y^2}$.
(b) $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$.
(c) $f(x,y) = x \ln \frac{y}{x}$.

3. Spočtěte rovnici tečné roviny a normály ke grafu funkce f v daném v bodě A.
(a) $f(x,y) = x^4 + 2x^2y - xy + x, A = [1,0]$.
(b) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2), A = [2,1]$.

4. Spočtěte Taylorův polynom $T_1(x,y)$ funkce $f(x,y) = \ln(7x–3y)$ v bodě $A = [1,2]$.

5. Spočtěte Taylorův polynom $T_1(x,y)$ funkce $f(x,y) = \sqrt{e^x + \sin 2x}$ v bodě $A = [0,0]$ a s jeho pomocí určete $\sqrt{\sqrt{e} + \sin 1}$.

6. Spočtěte Taylorův polynom $T_2(x,y)$ funkce $f(x,y) = x^y$ v bodě $A = [1,1]$.

7. Spočtěte Taylorův polynom $T_2(x,y)$ funkce $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ v bodě $A = [3,4]$ a s jeho pomocí určete $\sqrt{(2.98)^2 + (4.05)^2}$.

8. Spočtěte Taylorův polynom $T_3(x,y)$ funkce $f(x,y) = e^{x+y}$. v bodě $A = [1,-1]$.

9. Spočtěte Taylorův polynom $T_3(x,y)$ funkce $f(x,y) = \sin x \cos y$ v bodě $A = [0,0]$.

10. Spočtěte Taylorův polynom $T_3(x,y)$ funkce $f(x,y) = e^x \sin y$. v bodě $A = [0,0]$.

Výsledky úloh:

1. (a) $d_h f(A) = \frac{13}{18}dx - \frac{13}{12}dy$. (b) $d_h f(A) = \frac{1}{5}dx - \frac{2}{5}dy$. (c) $d_h f(A) = \frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}dy + \frac{1}{16}dz$. **2.** (a) $d_h^2 f = e^{x-y^2}dx^2 - 4ye^{x-y^2}dxdy + (4y^2-2)e^{x-y^2}dy^2$. (b) $d_h^2 f = \frac{-4y}{(x+y)^3}dx^2 + \frac{4(x-y)}{(x+y)^3}dxdy + \frac{4x}{(x+y)^3}dy^2$. (c) $d_h^2 f = \frac{-1}{x}dx^2 + \frac{2}{y}dxdy - \frac{x}{y^2}dy^2$. **3.** (a) $5x+y-z-3=0$, $\frac{x-1}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$. (b) $4x+2y = 5z - 5(2-\ln 5) = 0$, $\frac{5(x-2)}{4} = \frac{5(y-1)}{2} = \frac{z-\ln 5}{-1}$. **4.** $T_1(x,y) = 7x - 3y - 1$. **5.** $\frac{7}{4}, T_1(x,y) = 1 + \frac{x}{2} + y$. **6.** $T_2(x,y) = xy - y + 1$. **7.** $5.0282116, T_2 = 5 + \frac{3}{5}(x-3) + \frac{4}{5}(y-4) + \frac{16}{250}(x-3)^2 - \frac{24}{250}(x-3)(x-4) + \frac{9}{250}(y-4)^2$. **8.** $T_3(x,y) = 1 + (x-1) + (x+1) + \frac{1}{2}[(x-1)^2 + 2(x-1)(y+1) + (y+1)^2] + \frac{1}{6}[(x-1)^3 + 3(x-1)^2(y+1) + 3(x-1)(y+1)^2 + (y+1)^3]$. **9.** $T_3(x,y) = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}xy^2$. **10.** $T_3(x,y) = y + xy + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}y^3$.

ŘEŠENÍ.

1. (a) Spočteme parciální derivace funkce $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{xy}$ v bodě $A = [3,2]$. Platí $f'_x = \frac{2x(xy)-(x^2-y^2)y}{x^2y^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2y}$, $f'_x(A) = \frac{13}{18}$, $f'_y(A) = \frac{-2y(xy)-(x^2-y^2)x}{x^2y^2} = -\frac{x^2+y^2}{xy^2}$, $f'_y(A) = -\frac{13}{12}$. Diferenciál je tvaru $d_hf(A) = f'_x(A)dx + f'_y(A)dy$. Dosadíme. Platí

$$d_hf(A) = \tfrac{13}{18}dx - \tfrac{13}{12}dy.$$

(b) Spočteme parciální derivace funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ v bodě $A = [2,1]$. Platí $f'_x = \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2}$, $f'_x(A) = \frac{1}{5}$, $f'_y(A) = \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2} \cdot \frac{-x}{y^2} = \frac{-x}{x^2+y^2}$, $f'_y(A) = -\frac{2}{5}$. Diferenciál je tvaru $d_hf(A) = f'_x(A)dx + f'_y(A)dy$. Provedeme dosazení. Platí

$$d_hf(A) = \tfrac{1}{5}dx - \tfrac{2}{5}dy.$$

(c) Spočteme parciální derivace funkce $f(x,y,z) = \frac{x-y}{\sqrt{z}}$ v bodě $A = [1,2,4]$. Platí $f'_x = \frac{1}{\sqrt{z}}$, $f'_x(A) = \frac{1}{2}$, $f'_y(A) = \frac{-1}{\sqrt{z}}$, $f'_y(A) = -\frac{1}{2}$, $f'_z = -\frac{x-y}{2(\sqrt{z})^3}$, $f'_z(A) = \frac{1}{16}$. Diferenciál je tvaru $d_hf(A) = f'_x(A)dx + f'_y(A)dy + f'_z(A)dz$. Provedeme dosazení. Platí

$$d_hf(A) = \tfrac{1}{2}dx - \tfrac{1}{2}dy + \tfrac{1}{16}dz.$$

2. (a) Spočteme druhé parciální derivace funkce $f(x,y) = e^{x-y^2}$. Platí $f'_x = e^{x-y^2}$, $f'_y = -2ye^{x-y^2}$, $f''_{xx} = e^{x-y^2}$, $f''_{xy} = -2ye^{x-y^2}$, $f''_{yy} = e^{x-y^2}(-2y)(-2y) + e^{x-y^2}(-2) = (4y^2-2)e^{x-y^2}$. Druhý diferenciál je tvaru $d_h^2f = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2$. Provedeme dosazení. Platí

$$d_h^2f = e^{x-y^2}dx^2 - 4ye^{x-y^2}dxdy + (4y^2-2)e^{x-y^2}dy^2.$$

(b) Spočteme druhé parciální derivace funkce $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$. Platí $f'_x = \frac{2y}{(x+y)^2}$, $f'_y = \frac{-2x}{(x+y)^2}$, $f''_{xx} = \frac{-4y}{(x+y)^3}$, $f''_{xy} = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}$, $f''_{yy} = \frac{4x}{(x+y)^3}$. Druhý diferenciál je tvaru $d_h^2f = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2$. Provedeme dosazení. Platí

$$d_h^2f = \tfrac{-4y}{(x+y)^3}dx^2 + \tfrac{4(x-y)}{(x+y)^3}dxdy + \tfrac{4x}{(x+y)^3}dy^2.$$

(c) Spočteme druhé parciální derivace funkce $f(x,y) = x\ln\frac{y}{x}$. Platí $f'_x = \ln yx + x \cdot \frac{1}{\frac{y}{x}} \cdot \frac{-y}{x^2} = \ln\frac{y}{x} - 1$, $f'_y = x \cdot \frac{1}{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{y}$, $f''_{xx} = \frac{1}{\frac{y}{x}} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{-1}{x}$, $f''_{xy} = \frac{1}{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{y}$, $f''_{yy} = \frac{-x}{y^2}$. Druhý diferenciál je tvaru $d_h^2f = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2$. Provedeme dosazení. Platí

$$d_h^2f = \tfrac{-1}{x}dx^2 + \tfrac{2}{y}dxdy - \tfrac{x}{y^2}dy^2.$$

3. (a) Spočteme parciální derivace funkce $f(x,y) = x^4 + 2x^2y - xy + x$ v bodě $A = [1,0]$. Platí $f'_x = 4x^3 + 4xy - y + 1$, $f'_x(A) = 5$, $f'_y(A) = 2x^2 - x$, $f'_y(A) = 1$. Dopočítáme z-ovou souřadnici $z_0 = f(A) = 2$. Rovnice tečné roviny má tvar

$$z - z_0 = f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0), \text{ kde } A = [x_0,y_0].$$

Provedeme dosazení. Platí $z-2 = 5(x-1)+1(y-0)$. Odtud plyne $5x+y-z-3 = 0$. Nyní nalezneme rovnici normály. Její obecná rovnice je tvaru

$$\tfrac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)} = \tfrac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)} = \tfrac{z-z_0}{-1}.$$

Po dosazení dostáváme $\frac{x-1}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$. Úlohu o nalezení normály lze řešit také tak, že z rovnice tečné roviny $5x + y - z - 3 = 0$ napíšeme normálový vektor

$n = (5, 1, -1)$. Pak vektorová rovnice normály v bodě $[1, 0, 2]$ je tvaru $[x, y, z] = [1, 0, 2]+t(5, 1, -1), t \in R$. Tedy parametrické rovnice jsou $x = 1+5t, y = t, z = 2-t$. Vyloučením parametru t a porovnáním dostáváme opět vztah $\frac{x-1}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

(b) Spočteme parciální derivace funkce $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ v bodě $A = [2, 1]$. Platí $f'_x = \frac{2x}{x^2+y^2}, f'_x(A) = \frac{4}{5}, f'_y(A) = \frac{2y}{x^2+y^2}, f'_y(A) = \frac{2}{5}$. Dopočítáme z-ovou souřadnici $z_0 = f(A) = \ln 5$. Provedeme dosazení do rovnice tečné roviny. Platí $z - \ln 5 = \frac{4}{5}(x - 2) + \frac{2}{5}(y - 1)$. Odtud plyne $4x + 2y = 5z - 5(2 - \ln 5) = 0$. Nyní nalezneme rovnici normály. Platí $\frac{5(x-2)}{4} = \frac{5(y-1)}{2} = \frac{z-\ln 5}{-1}$.

4. Určíme potřebné parciální derivace funkce $f(x, y) = \ln(7x - 3y)$ v bodě $A = [1, 2]$. Platí $f'_x = \frac{7}{7x-3y}, f'_x(A) = 7, f'_y = \frac{-3}{7x-3y}, f'_y(A) = -3$. Dále $dx = x-1$ a $dy = y-2$. Diferenciál funkce f v bodě A je tvaru $d_h f(A) = f'_x(A)dx + f'_y(A)dy = 7dx - 3dy = 7(x - 1) - 3(y - 2) = 7x - 3y - 1$. Provedeme dosazení do vzorce pro Taylorův polynom $T_1(x, y) = f(A) + \frac{1}{1!} d_h f(A)$. Platí $f(A) = \ln 1 = 0$. Odtud

$$T_1(x, y) = 7x - 3y - 1.$$

5. Spočteme parciální derivace funkce $f(x, y) = \sqrt{e^x + \sin 2y}$ v bodě $A = [0, 0]$. Platí $f'_x = \frac{1}{2}\frac{e^x}{\sqrt{e^x+\sin 2y}}, f'_x(A) = \frac{1}{2}, f'_y = \frac{1}{2}\frac{2\cos 2y}{\sqrt{e^x+\sin 2y}}, f'_y(A) = 1$. Dále $dx = x$ a $dy = y$. Diferenciál funkce f v bodě A má tvar $d_h f(A) = f'_x(A)dx + f'_y(A)dy = \frac{1}{2}dx + dy = \frac{x}{2} + y$. Dosadíme do vzorce pro Taylorův polynom $T_1(x, y) = f(A) + \frac{1}{1!} d_h f(A)$. Platí $f(A) = \sqrt{e^0 + \sin 0} = 1$. Odtud

$$T_1(x, y) = 1 + \frac{x}{2} + y.$$

Nyní zřejmě $\sqrt{\sqrt{e} + \sin 1} = f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \approx T_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{7}{4}$.

6. Určíme potřebné parciální derivace funkce $f(x, y) = x^y$ v bodě $A = [1, 1]$. Platí $f'_x = yx^{y-1}, f'_x(A) = 1, f'_y = \ln x \cdot x^y, f'_y(A) = 0, f''_{xx} = y(y - 1)x^{y-2}, f''_{xx}(A) = 0, f''_{xy} = x^{y-1} + y \ln x \cdot x^{y-1}, f''_{xy}(A) = 1, f''_{yy} = (\ln x)^2 x^y, f''_{yy}(A) = 0$. Dále $dx = x-1$ a $dy = y-1$. Odtud plyne, že diferenciály potřebné k sestavení Taylorova polynomu mají tvar $d_h f(A) = f'_x(A)dx + f'_y(A)dy = x - 1$, $d_h^2 f(A) = f''_{xx}(A)dx^2 + 2f''_{xy}(A)dxdy + f''_{yy}(A)dy^2 = 2(x-1)(y-1)$. Diferenciály dosadíme do vztahu pro Taylorův polynom $T_2(x, y) = f(A) + \frac{1}{1!} d_h f(A) + \frac{1}{2!} d_h^2 f(A)$ a upravíme. Platí

$$T_2(x, y) = xy - y + 1.$$

7. Určíme potřebné parciální derivace funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ v bodě $A = [3, 4]$. $f'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, f'_x(A) = \frac{3}{5}, f'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, f'_y(A) = \frac{4}{5}, f''_{xx} = \frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, f''_{xx}(A) = \frac{16}{125}$, $f''_{xy} = \frac{-xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, f''_{xy}(A) = -\frac{12}{125}, f''_{yy} = \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, f''_{yy}(A) = \frac{9}{125}$. Dále platí $dx = x-3$ a $dy = y-4$. Odtud plyne, že diferenciály potřebné k sestavení Taylorova polynomu mají tvar $d_h f(A) = f'_x(A)dx + f'_y(A)dy = \frac{3}{5}(x-3) + \frac{4}{5}(y-4)$, $d_h^2 f(A) = f''_{xx}(A)dx^2 + 2f''_{xy}(A)dxdy + f''_{yy}(A)dy^2 = \frac{16}{125}(x-3)^2 - \frac{24}{125}(x-3)(x-4) + \frac{9}{125}(y-4)^2$. Diferenciály dosadíme do vztahu pro Taylorův polynom $T_2(x, y) = f(A) + \frac{1}{1!} d_h f(A) + \frac{1}{2!} d_h^2 f(A)$. Dostáváme

$T_2(x, y) = 5 + \frac{3}{5}(x-3) + \frac{4}{5}(y-4) + \frac{16}{250}(x-3)^2 - \frac{24}{250}(x-3)(x-4) + \frac{9}{250}(y-4)^2$. Dále $\sqrt{2.98^2 + 4.05^2} \approx T_2(2.98, 4.05) = 5 + 0.028 + 0.0002116 = 5.0282116$. Hodnota z kalkulačky je přibližně 5.028210417.

8. Parciální derivace funkce $f(x, y) = e^{x+y}$ potřebné k určení diferenciálů nalezneme snadno. Platí $f = f'_x = f'_y = f''_{xx} = f''_{xy} = f''_{yy} = f'''_{xxx} = f'''_{xxy} = f'''_{xyy} = f'''_{yyy} = e^{x+y}$. $f(A) = f'_x(A) = f'_y(A) = f''_{xx}(A) = f''_{xy}(A) = f''_{yy}(A) = f'''_{xxx}(A) = f'''_{xxy}(A) = f'''_{xyy}(A) = f'''_{yyy}(A) = 1$. Dále platí $dx = x-1$ a $dy = y+1$. Diferenciály mají tvar $d_h f(A) = f'_x(A)dx + f'_y(A)dy = (x-1)+(y+1)$, $d_h^2 f(A) = f''_{xx}(A)dx^2 + 2f''_{xy}(A)dxdy + f''_{yy}(A)dy^2 = (x-1)^2 + 2(x-1)(y+1) + (y+1)^2$, $d_h^3 f(A) = f'''_{xxx}(A)dx^3 + 3f'''_{xxy}(A)dx^2dy + 3f'''_{xyy}(A)dxdy^2 + f'''_{yyy}(A)dy^3 = (x-1)^3 + 3(x-1)^2(y+1) + 3(x-1)(y+1)^2 + (y+1)^3$. Spočtené diferenciály dosadíme do vztahu pro Taylorův polynom

$$T_3(x,y) = f(A) + \tfrac{1}{1!}d_h f(A) + \tfrac{1}{2!}d_h^2 f(A) + \tfrac{1}{3!}d_h^3 f(A).$$

Odtud

$$T_3(x,y) = 1 + (x-1) + (x+1) + \tfrac{1}{2}[(x-1)^2 + 2(x-1)(y+1) + (y+1)^2] + \\ + \tfrac{1}{6}[(x-1)^3 + 3(x-1)^2(y+1) + 3(x-1)(y+1)^2 + (y+1)^3].$$

9. Určíme potřebné parciální derivace funkce $f(x,y) = \sin x \cos y$ v bodě $A = [0,0]$. $f'_x = \cos x \cos y$, $f'_x(A) = 1$, $f'_y = -\sin x \sin y$, $f'_y(A) = 0$, $f''_{xx} = -\sin x \cos y$, $f''_{xx}(A) = 0$, $f''_{xy} = -\cos x \sin y$, $f''_{xy}(A) = 0$, $f''_{yy} = -\sin x \cos y$, $f''_{yy}(A) = 0$, $f'''_{xxx} = -\cos x \cos y$, $f'''_{xxx}(A) = -1$, $f'''_{xxy} = \sin x \sin y$, $f'''_{xxy}(A) = 0$, $f'''_{xyy} = -\cos x \cos y$, $f'''_{xyy}(A) = -1$, $f'''_{yyy} = \sin x \sin y$, $f'''_{yyy}(A) = 0$. Dále platí $dx = x$ a $dy = y$. Diferenciály potřebné k sestavení Taylorova polynomu mají tvar $d_h f(A) = f'_x(A)dx + f'_y(A)dy = 1\cdot x + 0\cdot y = x$, $d_h^2 f(A) = f''_{xx}(A)dx^2 + 2f''_{xy}(A)dxdy + f''_{yy}(A)dy^2 = 0\cdot x^2 + 0\cdot xy + 0\cdot y^2 = 0$, $d_h^3 f(A) = f'''_{xxx}(A)dx^3 + 3f'''_{xxy}(A)dx^2dy + 3f'''_{xyy}(A)dxdy^2 + f'''_{yyy}(A)dy^3 = -1\cdot x^3 + 3\cdot 0\cdot x^2y + 3(-1)xy^2 + 0\cdot y^3 = -x^3 - 3xy^2$. Dosadíme do vztahu pro Taylorův polynom $T_3(x,y) = f(A) + \frac{1}{1!}d_h f(A) + \frac{1}{2!}d_h^2 f(A) + \frac{1}{3!}d_h^3 f(A)$. Platí

$$T_3(x,y) = x - \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{2}xy^2.$$

10. Určíme potřebné parciální derivace funkce $f(x,y) = e^x \sin y$ v bodě $A = [0,0]$. $f'_x = e^x \sin y$, $f'_x(A) = 0$, $f'_y = e^x \cos y$, $f'_y(A) = 1$, $f''_{xx} = e^x \sin y$, $f''_{xx}(A) = 0$, $f''_{xy} = e^x \cos y$, $f''_{xy}(A) = 1$, $f''_{yy} = -e^x \sin y$, $f''_{yy}(A) = 0$, $f'''_{xxx} = e^x \sin y$, $f'''_{xxx}(A) = 0$, $f'''_{xxy} = e^x \cos y$, $f'''_{xxy}(A) = 1$, $f'''_{xyy} = -e^x \sin y$, $f'''_{xyy}(A) = 0$, $f'''_{yyy} = -e^x \cos y$, $f'''_{yyy}(A) = -1$. Dále platí $dx = x$ a $dy = y$. Odtud plyne, že diferenciály potřebné k sestavení Taylorova polynomu mají tvar $d_h f(A) = f'_x(A)dx + f'_y(A)dy = 0\cdot x + 1\cdot y = y$, $d_h^2 f(A) = f''_{xx}(A)dx^2 + 2f''_{xy}(A)dxdy + f''_{yy}(A)dy^2 = 0\cdot x^2 + 2\cdot 1\cdot xy + 0\cdot y^2 = 2xy$, $d_h^3 f(A) = f'''_{xxx}(A)dx^3 + 3f'''_{xxy}(A)dx^2dy + 3f'''_{xyy}(A)dxdy^2 + f'''_{yyy}(A)dy^3 = 0\cdot x^3 + 3\cdot 1\cdot x^2y + 3\cdot 0\cdot xy^2 + (-1)\cdot y^3 = 3x^2y - y^3$. Spočtené diferenciály dosadíme do vztahu pro Taylorův polynom $T_3(x,y) = f(A) + \frac{1}{1!}d_h f(A) + \frac{1}{2!}d_h^2 f(A) + \frac{1}{3!}d_h^3 f(A)$. Platí

$$T_3(x,y) = y + \tfrac{1}{2}(2xy) + \tfrac{1}{6}(3x^2y - y^3) = y + xy + \tfrac{1}{2}x^2y - \tfrac{1}{6}y^3.$$

LEKCE 6. LOKÁLNÍ EXTRÉMY.

Vyšetřete lokální extrémy následujících funkcí více proměnných.

1. $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2 + 5x + 2y$.
2. $f(x,y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + x + y$.
3. $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.
4. $f(x,y) = x^3 + xy^2 - 2xy - 5x$.
5. $f(x,y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 + 1$.
6. $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + \frac{1}{2}z^2 - 3xz - 2y + 2z$.
7. $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$.
8. $f(x,y) = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$.
9. $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$.
10. $f(x,y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$.

Výsledky úloh:

1. Min. $[-\frac{13}{4}, \frac{3}{4}]$. **2.** Max. $[\frac{3}{10}, \frac{4}{10}]$. **3.** Min. $[0,0]$, max. $[-\frac{5}{3}, 0]$. **4.** Min. $[\sqrt{2}, 1]$, max. $[-\sqrt{2}, 1]$. **5.** Min. $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. **6.** Min. $[2,1,4]$. **7.** Min. $[24, -144, -1]$. **8.** Min. $[-2, 0]$. **9.** Neostré max. na $x^2 + y^2 = 1$, min. $[0,0]$. **10.** Min. $[\frac{1}{2}, -1]$.

ŘEŠENÍ.

1. Vyšetříme lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2 + 5x + 2y$. Spočteme parciální derivace a položíme je rovny nule. Vznikne soustava $f'_x = 2x + 2y + 5 = 0$, $f'_y = 2x + 6y + 2 = 0$. Parciální derivace existují pro každé $[x,y] \in R^2$ a proto jedinými kandidáty na lokální extrémy jsou stacionární body, které nalezneme vyřešením vzniklé soustavy rovnic. Soustava je lineární, můžeme tedy použít metod lineární algebry.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{13}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{array}\right].$$

Nalezli jsme stacionární bod $a = [-\frac{13}{4}, \frac{3}{4}]$. Spočteme druhé parciální derivace a sestavíme matici $f''(a)$. Platí $f''_{xx} = 2$, $f''_{xy} = 2$, $f''_{yy} = 6$. Odtud plyne, že $f'' = f''(a) = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{smallmatrix}\right]$. Určíme hlavní minory matice $f''(a)$ a použijeme Sylvestrovo kritérium. Platí $D_1(a) = 2 > 0$ a $D_2(a) = 8 > 0$. Podle kritéria nastává v bodě $a = [-\frac{13}{4}, \frac{3}{4}]$ lokální minimum funkce f.

2. Vyšetříme lokální extrémy funkce $f(x,y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + x + y$. Spočteme parciální derivace a položíme je rovny nule. Vznikne soustava $f'_x = 2y - 6x + 1 = 0$, $f'_y = 2x - 4y + 1 = 0$. Parciální derivace existují pro každé $[x,y] \in R^2$ a proto jedinými kandidáty na lokální extrémy jsou stacionární body, které nalezneme vyřešením vzniklé soustavy rovnic. Soustava má jediné řešení $a = [\frac{3}{10}, \frac{4}{10}]$. Spočteme druhé parciální derivace a sestavíme matici $f''(a)$. Platí $f''_{xx} = -6$, $f''_{xy} = 2$, $f''_{yy} = -4$. Odtud plyne, že $f'' = f''(a) = \left[\begin{smallmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -4 \end{smallmatrix}\right]$. Určíme hlavní minory matice $f''(a)$ a použijeme Sylvestrovo kritérium. Platí $D_1(a) = -6 < 0$ a $D_2(a) = 20 > 0$. Podle kritéria nastává v bodě $a = [\frac{3}{10}, \frac{4}{10}]$ lokální maximum funkce f.

3. Vyšetříme lokální extrémy funkce $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$. Spočteme parciální derivace a položíme je rovny nule. Vznikne soustava $f'_x = 6x^2 + y^2 + 10x = 0$, $f'_y = 2xy + 2y = 0$. Jedinými kandidáty na lokální extrémy jsou stacionární body, které nalezneme vyřešením vzniklé soustavy rovnic. Soustava je nelineární. Ze druhé rovnice plyne $2y(x+1)=0$. Odtud $x=-1 \vee y=0$. Dosazením $x=-1$ do první rovnice dostáváme $6+y^2-10=0$, odkud $y=\pm 2$. Dále dosazením $y=0$ dostáváme $6x^2+10x=0$, odkud $x=0 \vee x=-\frac{5}{3}$. Soustava má čtyři řešení. Nalezli jsme čtyři stacionární body $a_1=[0,0], a_2=[-\frac{5}{3},0], a_3=[-1,2], a_4=[-1,-2]$. Spočteme druhé parciální derivace a sestavíme matice $f''(a_i), i=1,2,3,4$. Platí $f''_{xx}=12x+10, f''_{xy}=2y, f''_{yy}=2x+2$. Odtud plyne, že $f''=\begin{bmatrix} 12x+10 & 2y \\ 2y & 2x+2 \end{bmatrix}$. Po dosazení souřadnic stacionárních bodů dostáváme

$$f''(a_1)=\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad f''(a_2)=\begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}, \quad f''(a_3)=\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad f''(a_4)=\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matic $f''(a_i)$ a použijeme Sylvestrovo kritérium. Platí $D_1(a_1)=10>0$, $D_2(a_1)=20>0$. Podle kritéria nastává v bodě a_1 lokální minimum funkce f. Dále $D_1(a_2)=-10<0$, $D_2(a_2)=\frac{40}{3}>0$. V bodě a_2 nastává lokální maximum funkce f. Dále platí $D_1(a_3)=-2<0$, $D_2(a_3)=-16<0$ a $D_1(a_4)=-2<0$, $D_2(a_4)=-12<0$. Podle kritéria nenastává v bodě a_3 ani v bodě a_4 lokální extrém funkce f.

4. Vyšetříme lokální extrémy funkce $f(x,y)=x^3+xy^2-2xy-5x$. Spočteme parciální derivace a položíme je rovny nule. Vznikne soustava $f'_x=3x^2+y^2-2y-5=0$, $f'_y=2xy-2x=0$. Nalezneme stacionární body. Soustava je nelineární. Ze druhé rovnice plyne $x(y-1)=0$. Odtud $x=0 \vee y=1$. Dosazením $x=0$ do první rovnice dostáváme $y^2-2y-5=0$, odkud $y=1\pm\sqrt{6}$. Dále dosazením $y=1$ dostáváme $3x^2-6=0$, odkud $x=\pm\sqrt{2}$. Soustava má čtyři řešení. Nalezli jsme čtyři stacionární body $a_1=[\sqrt{2},1], a_2=[-\sqrt{2},1], a_3=[0,1+\sqrt{6}], a_4=[0,1-\sqrt{6}]$. Spočteme druhé parciální derivace a sestavíme matice $f''(a_i), i=1,2,3,4$. Platí $f''_{xx}=6x, f''_{xy}=2y-2, f''_{yy}=2x$. Odtud plyne, že $f''=\begin{bmatrix} 6x & 2y-2 \\ 2y-2 & 2x \end{bmatrix}$. Po dosazení souřadnic stacionárních bodů dostáváme

$$f''(a_1)=\begin{bmatrix} 6\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}, f''(a_2)=\begin{bmatrix} -6\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

$$f''(a_3)=\begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} & 0 \end{bmatrix}, f''(a_4)=\begin{bmatrix} 0 & -2\sqrt{6} \\ -2\sqrt{6} & 0 \end{bmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matic $f''(a_i)$ a použijeme Sylvestrovo kritérium. Platí $D_1(a_1)=6\sqrt{2}>0$, $D_2(a_1)=24>0$. Podle kritéria nastává v bodě a_1 lokální minimum funkce f. Dále $D_1(a_2)=-6\sqrt{2}<0$, $D_2(a_2)=24>0$. V bodě a_2 nastává lokální maximum funkce f. Dále platí $D_1(a_3)=0$, $D_2(a_3)=-24<0$ a $D_1(a_4)=0$, $D_2(a_4)=-24<0$. Podle kritéria nelze rozhodnout, zda v bodech a_3, a_4 dochází k lokálním extrémům funkce f. Vyšetříme nejprve podrobně okolí bodu a_3. Zvolme podokolí, které je průnikem libovolného okolí s přímkou $y=1+\sqrt{6}$. Zřejmě platí $f(x,1+\sqrt{6})=x^3+(1+\sqrt{6})^2x-2x(1+\sqrt{6})-5x=x^3$. Je-li $x>0$, pak $f(x,1+\sqrt{6})>0$, Je-li $x<0$, pak $f(x,1+\sqrt{6})<0$. Odtud plyne, že v bodě a_3 není lokální extrém. Podobně postupujeme v případě bodu a_4. Volme podokolí, které je průnikem libovolného okolí s přímkou $y=1-\sqrt{6}$. Zřejmě platí $f(x,1-\sqrt{6})=x^3+(1-\sqrt{6})^2x-2x(1-\sqrt{6})-5x=x^3$. Je-li $x>0$, pak $f(x,1-\sqrt{6})>0$, Je-li $x<0$, pak $f(x,1-\sqrt{6})<0$. Odtud plyne, že ani v bodě a_4 není lokální extrém.

5. Vyšetříme lokální extrémy funkce $f(x,y)=2x^3-3xy+2y^3+1$. Spočteme parciální derivace a položíme je rovny nule. Vznikne soustava $f'_x=6x^2-3y=0$, $f'_y=-3x+6y^2=0$. Nalezneme stacionární body. Soustava je nelineární. Z první rovnice plyne $y=2x^2$. Dosazením do druhé rovnice dostáváme $6(2x^2)^2-3x=0$, odkud $x = 0 \vee x = \frac{1}{2}$. Soustava má dvě řešení. Nalezli jsme dva stacionární body $a_1 = [0, 0], a_2 = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Spočteme druhé parciální derivace a sestavíme matice $f''(a_1)$ a $f''(a_2)$. Platí $f''_{xx} = 12x, f''_{xy} = -3, f''_{yy} = 12y$. Odtud plyne, že $f'' = \begin{bmatrix} 12x & -3 \\ -3 & 12y \end{bmatrix}$. Po dosazení souřadnic stacionárních bodů dostáváme

$$f''(a_1) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad f''(a_2) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix},$$

Určíme hlavní minory matic a použijeme Sylvestrovo kritérium. Platí $D_1(a_1) = 0$, $D_2(a_1) = -9$. Podle kritéria nelze rozhodnout, zda v bodě a_1 nastává extrém funkce f. Dále $D_1(a_2) = 6 > 0$, $D_2(a_2) = 27 > 0$. V bodě a_2 nastává lokální minimum funkce f. Nyní vyšetříme podrobně okolí bodu a_1. Zvolme podokolí, které je průnikem libovolného okolí s osou x, tj. přímkou $y = 0$. Zřejmě platí $f(x, 0) = 2x^3 + 1$. Je-li $x > 0$, pak $f(x, 0) > 1 = f(a_1)$, Je-li $x < 0$, pak $f(x, 0) < 1 = f(a_1)$. Odtud plyne, že v bodě a_2 není lokální extrém.

6. Vyšetříme lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + \frac{1}{2}z^2 - 3xz - 2y + 2z$. Sestavíme soustavu rovnic $f'_x = 3x^2 - 3z = 0$, $f'_y = 2y - 2 = 0$, $f'_z = z - 3x + 2 = 0$. Ze druhé rovnice plyne $y = 1$. Ze třetí plyne $z = 3x - 2$. Dosazením do první rovnice dostáváme $3x^2 - 3(3x - 2) = 0$, odkud $x = 1 \vee x = 2$. Soustava má dvě řešení $a_1 = [1, 1, 1], a_2 = [2, 1, 4]$. Spočteme druhé parciální derivace a sestavíme matice $f''(a_1)$ a $f''(a_2)$. Platí $f''_{xx} = 6x, f''_{yy} = 2, f''_{zz} = 1, f''_{xy} = 0, f''_{xz} = -3, f''_{yz} = 0$. Odtud plyne, že $f'' = \begin{bmatrix} 6x & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Po dosazení souřadnic stacionárních bodů dostáváme

$$f''(a_1) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad f''(a_2) = \begin{bmatrix} 12 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matic a použijeme Sylvestrovo kritérium. Platí $D_1(a_1) = 6 > 0$, $D_2(a_1) = 12 > 0$, $D_3(a_1) = -6 < 0$. Podle kritéria nenastává v bodě a_1 lokální extrém funkce f. Dále $D_1(a_2) = 12 > 0$, $D_2(a_2) = 24 > 0$, $D_3(a_2) = 6 > 0$. V bodě a_2 nastává lokální minimum funkce f.

7. Vyšetříme lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$. Spočteme parciální derivace a položíme je rovny nule. Vznikne soustava $f'_x = 3x^2 + 12y = 0$, $f'_y = 2y + 12x = 0$, $f'_z = 2z + 2 = 0$. Z třetí rovnice plyne $z = -1$. Ze druhé plyne $y = -6x$. Dosazením do první rovnice dostáváme $x^2 - 24x = 0$, odkud $x = 0 \vee x = 24$. Soustava má dvě řešení $a_1 = [0, 0, -1], a_2 = [24, -144, -1]$. Spočteme druhé parciální derivace a sestavíme matice $f''(a_1)$ a $f''(a_2)$. Platí $f''_{xx} = 6x, f''_{yy} = 2, f''_{zz} = 2, f''_{xy} = 12, f''_{xz} = 0, f''_{yz} = 0$. Odtud plyne, že $f'' = \begin{bmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Po dosazení souřadnic stacionárních bodů dostáváme

$$f''(a_1) = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad f''(a_2) = \begin{bmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matic a použijeme Sylvestrovo kritérium. Platí $D_1(a_1) = 0$, $D_2(a_1) = -144 < 0$, $D_3(a_1) = -288 < 0$. Podle kritéria nelze rozhodnout, zda v bodě a_1 nastává lokální extrém funkce f. Dále $D_1(a_2) = 144 > 0$, $D_2(a_2) = 288 > 0$, $D_3(a_2) = 288 > 0$. V bodě a_2 nastává lokální minimum funkce f. Nyní vyšetříme podrobně okolí bodu a_1. Zvolme podokolí, které je průnikem libovolného okolí s přímkou $x = x, y = 0, z = -1$. Zřejmě platí $f(x, 0, -1) = x^3 - 1$. Je-li $x > 0$, pak $f(x, 0, -1) > -1 = f(a_1)$, Je-li $x < 0$, pak $f(x, 0, -1) < -1 = f(a_1)$. Odtud plyne, že v bodě a_1 není lokální extrém.

8. Vyšetříme lokální extrémy funkce $f(x,y) = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$. Spočteme parciální derivace. Vznikne soustava $f'_x = e^{\frac{x}{2}}\frac{1}{2}(x+y^2)+e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}}(\frac{x}{2}+\frac{y^2}{2}+1) = 0$, $f'_y = 2ye^{\frac{x}{2}} = 0$. Nalezneme stacionární body. Ze druhé rovnice plyne $y = 0$. Dosazením do první rovnice dostáváme $\frac{x}{2} + 1 = 0$. Odtud $x = -2$. Soustava má jediné řešení $a = [-2, 0]$. Spočteme druhé parciální derivace a sestavíme matice f'' a $f''(a)$. Platí $f''_{xx} = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(x + y^2 + 4)$, $f''_{xy} = ye^{\frac{x}{2}}$, $f''_{yy} = 2e^{\frac{x}{2}}$. Odtud plyne, že

$$f'' = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(x+y^2+4) & ye^{\frac{x}{2}}, \\ ye^{\frac{x}{2}} & 2e^{\frac{x}{2}} \end{bmatrix}, \quad f''(a) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{bmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matice. Platí $D_1(a) = \frac{1}{2e} > 0$, $D_2(a) = \frac{1}{e^2} > 0$. Podle kritéria nastává v bodě a lokální minimum funkce f.

9. Vyšetříme lokální extrémy funkce $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}(x^2+y^2)$. Spočteme parciální derivace. Vznikne soustava $f'_x = \frac{2x(1-x^2-y^2)}{e^{x^2+y^2}} = 0$, $f'_y = \frac{2y(1-x^2-y^2)}{e^{x^2+y^2}} = 0$. Nalezneme stacionární body. Z první rovnice plyne $x = 0 \vee x^2 + y^2 = 1$ a ze druhé rovnice plyne $y = 0 \vee x^2 + y^2 = 1$. Nalezli jsme stacionární bod $a = [0, 0]$ a body b na kružnici $x^2 + y^2 = 1$. Spočteme druhé parciální derivace a matice f'' a $f''(a)$. Platí $f''_{xx} = \frac{2(1-x^2-y^2)(1-2x^2)-4x^2}{e^{x^2+y^2}}$, $f''_{xy} = \frac{-4xy(2-x^2-y^2)}{e^{x^2+y^2}}$, $f''_{yy} = \frac{2(1-x^2-y^2)(1-2y^2)-4y^2}{e^{x^2+y^2}}$. Odtud plyne, že

$$f'' = \begin{bmatrix} \frac{2(1-x^2-y^2)(1-2x^2)-4x^2}{e^{x^2+y^2}} & \frac{-4xy(2-x^2-y^2)}{e^{x^2+y^2}} \\ \frac{-4xy(2-x^2-y^2)}{e^{x^2+y^2}} & \frac{2(1-x^2-y^2)(1-2y^2)-4y^2}{e^{x^2+y^2}} \end{bmatrix},$$

$$f''(a) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad f''(b) = \begin{bmatrix} -\frac{4x^2}{e} & -\frac{4xy}{e} \\ -\frac{4xy}{e} & -\frac{4y^2}{e} \end{bmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matic. Platí $D_1(a) = 2 > 0$, $D_2(a) = 4 > 0$. Podle kritéria nastává v bodě a lokální minimum funkce f. $D_1(b) = -\frac{4x^2}{e} > 0$, $D_2(b) = 0$. Podle kritéria nelze rozhodnout. Platí však $f(b) = \frac{1}{e} \geq \frac{c}{e^c}$ pro libovolné $c \geq 0$. Odtud plyne, že na $x^2 + y^2 = 1$ nastává neostré maximum f.

10. Vyšetříme lokální extrémy funkce $f(x,y) = e^{2x}(x+y^2+2y)$. Spočteme parciální derivace. Vznikne soustava $f'_x = e^{2x}(2y^2 + 2x + 4y + 1) = 0$, $f'_y = 2e^{2x}(y + 1) = 0$. Nalezneme stacionární body. Ze druhé rovnice plyne $y = -1$. Dosazením do první rovnice dostáváme $x = \frac{1}{2}$. Soustava má jediné řešení $a = [\frac{1}{2}, -1]$. Spočteme druhé parciální derivace a matice f'' a $f''(a)$. Platí $f''_{xx} = 4e^{2x}(x+y^2+2y+1)$, $f''_{xy} = 4e^{2x}(y+1)$, $f''_{yy} = 2e^{2x}$. Odtud plyne, že

$$f'' = \begin{bmatrix} 4e^{2x}(x+y^2+2y+1) & 4e^{2x}(y+1) \\ 4e^{2x}(y+1) & 2e^{2x} \end{bmatrix}, \quad f''(a) = \begin{bmatrix} 2e & 0 \\ 0 & 2e \end{bmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matice. Platí $D_1(a) = 2e > 0$, $D_2(a) = 4e^2 > 0$. Podle kritéria nastává v bodě a lokální minimum funkce f.

LEKCE 7. VÁZANÉ A GLOBÁLNÍ EXTRÉMY.

V následujících úlohách vyšetřete vázané a globální extrémy.

1. $f(x,y) = xy - x + y - 1$ s vazbou $x + y = 1$.
2. $f(x,y) = x + y$ s vazbou $x^2 + y^2 = 288$.
3. $f(x,y) = \ln(xy)$ s vazbou $x^2 + y^2 = 2$.
4. $f(x,y) = 6x + 6y$ s vazbou $x^3 + y^3 = 16$.
5. Určete rozměry pravoúhlé nádrže tvaru kvádru o objemu $V = 32\ m^3$ tak, aby dno a stěny měly co nejmenší povrch.
6. Určete rozměry kvádru tak, aby součet délek jeho hran byl 96 cm a jeho objem byl co největší.
7. Určete rozměry otevřené nádrže tvaru kvádru tak, aby při daném povrchu $P = 108 m^2$ měla co největší objem.
8. Určete rozměry válce o největším objemu, jestliže jeho povrch je $6\pi dm^2$.
9. $f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ na množině Ω ohraničené křivkami $y = x^2$ a $y = 4$.
10. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1$ na množině $\Omega : A = [0,0], B = [3,0], C = [0,5]$.

Výsledky úloh:

1. Max. v $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$. **2.** Min. v $[-12, 12]$, max. v $[12, 12]$. **3.** Max. v bodech $[1,1], [-1,-1]$. **4.** Max. $[2,2]$. **5.** $4 \times 4 \times 2$. **6.** $8 \times 8 \times 8$. **7.** $6 \times 6 \times 3$. **8.** $r = 1, v = 2$. **9.** $\max_{\Omega} f = 32$ v $[-2,4]$, $\min_{\Omega} f = 0$ v $[0,0]$. **10.** $\max_{\Omega} f = 6$ v $[0,5]$, $\min_{\Omega} f = -4$ v $[1,2]$.

ŘEŠENÍ.

1. Z vazby $x + y = 1$ lze jednoznačně vyjádřit y. Platí $y = 1 - x$. Dosadíme tento vztah do zadané funkce $f(x,y) = xy - x + y - 1$. Tím vznikne funkce $F(x) = f(x, 1-x) = -x^2 - x$. Zadanou úlohu jsme tak převedli na ekvivalentní úlohu o nalezení lokálního extrému funkce $F(x) = -x^2 - x$. Platí $F'(x) = -2x - 1$. Derivaci položíme rovnu nule a nalezneme stacionární bod $x = -\frac{1}{2}$. Protože $F''(x) = -2$ má F v bodě $x = -\frac{1}{2}$ lokální maximum. Dopočítáme $y = 1 - (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$. Odtud plyne, že f má v bodě $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ vázané lokální maximum. Hodnota maxima je $\frac{1}{4}$.

Úlohu řešme nyní pomocí Lagrangeovy funkce. Platí $L(x,y) = xy - x + y - 1 + \lambda(x + y - 1)$. Spočteme parciální derivace, položíme je rovny nule a získáme spolu s vazbou soustavu tří rovnic o třech neznámých x, y, λ. Platí $L'_x = y - 1 + \lambda = 0$, $L'_y = x + 1 + \lambda = 0$, $x + y - 1 = 0$. Z prvních dvou rovnic vyjádříme λ. Platí $\lambda = 1 - y, \lambda = -1 - x$. Odtud $x - y + 2 = 0$. Ze třetí rovnice dosadíme za $y = 1 - x$ a snadno dostáváme jediný stacionární bod $a = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ pro $\lambda = -\frac{1}{2}$. Spočteme druhé derivace Lagrangeovy funkce. Platí $L''_{xx} = 0, L''_{xy} = 1, L''_{yy} = 0$. Odtud plyne $L'' = L''(a) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Určíme hlavní minory matice. Platí $D_1(a) = 0$, $D_2(a) = -1$. Podle kritéria nelze rozhodnout. Vyšetříme podrobně okolí bodu a. Zřejmě pro $\lambda = -\frac{1}{2}$ je $L(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = \frac{1}{4}$. Nechť (u,v) je libovolný (tzv. přírůstkový vektor). Spočteme $L([-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] + (u,v)) = uv + \frac{1}{4}$. Je zřejmé, že výraz $uv + \frac{1}{4}$ může nabývat hodnot větších než $\frac{1}{4}$ i menších než $\frac{1}{4}$. Odtud plyne, že Lagrangeova funkce L nemá ve zkomaném bodě lokální extrém. O existenci vázaného extrému nelze z této informace nic usuzovat.

2. Sestavíme Lagrangeovu funkci. Platí $L(x,y) = x+y+\lambda(x^2+y^2-288)$. Spočteme parciální derivace, položíme je rovny nule a získáme spolu s vazbou soustavu tří rovnic o třech neznámých x, y, λ. Platí $L'_x = 1 + 2\lambda x = 0$, $L'_y = 1 + 2\lambda y = 0$, $x^2 + y^2 = 288$. Z prvních dvou rovnic plyne $x = y$ a $\lambda = -\frac{1}{2x}$. Dosazením do vazby dostáváme $x = \pm 12$. Nalezli jsme dva stacionární body Lagrangeovy funkce $a_1 = [12, 12]$ pro $\lambda = -\frac{1}{24}$ a $a_2 = [-12, -12]$ pro $\lambda = \frac{1}{24}$. Spočteme matice $L'', L''(a_1), L''(a_2)$. Platí $L''_{xx} = 2\lambda, L''_{xy} = 0, L''_{yy} = 2\lambda$. Odtud plyne

$$L'' = \begin{bmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{bmatrix}, \quad L''(a_1) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{12} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} \end{bmatrix}, \quad L''(a_2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} \end{bmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matic. Platí $D_1(a_1) = -\frac{1}{12} < 0$, $D_2(a_1) = \frac{1}{144} > 0$. Podle kritéria nastává v bodě a_1 lokální maximum funkce L a tedy vázané maximum funkce f. Dále $D_1(a_2) = \frac{1}{12} > 0$, $D_2(a_2) = \frac{1}{144} > 0$. Podle kritéria nastává v bodě a_2 lokální minimum funkce L a tedy vázané minimum funkce f.

3. Sestavíme Lagrangeovu funkci. Platí $L(x,y) = \ln(xy)+\lambda(x^2+y^2-2)$. Spočteme parciální derivace, položíme je rovny nule a získáme spolu s vazbou soustavu tří rovnic o třech neznámých x, y, λ. Platí $L'_x = \frac{1}{x} + 2\lambda x = 0$, $L'_y = \frac{1}{y} + 2\lambda y = 0$, $x^2 + y^2 = 2$. Z prvních dvou rovnic plyne $\lambda = -\frac{1}{2x^2} = -\frac{1}{2y^2}$. Odtud $x^2 = y^2$ Dosazením do vazby dostáváme $x = \pm 1$. Nalezli jsme čtyři řešení soustavy rovnic $a_1 = [-1, -1], a_2 = [1, 1], a_3 = [-1, 1], a_4 = [1, -1]$ pro $\lambda = -\frac{1}{2}$. Pozor! Body $a_3, a_4 \notin DL = Df$. V dalším vyšetřování se tedy stačí omezit pouze na body a_1, a_2. Spočteme matice $L'', L''(a_1), L''(a_2)$. Platí $L''_{xx} = -\frac{1}{x^2} + 2\lambda, L''_{yy} = -\frac{1}{y^2} + 2\lambda, L''_{xy} = 0$. Odtud plyne

$$L'' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{x^2} + 2\lambda & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} + 2\lambda \end{bmatrix}, \quad L''(a_1) = L''(a_2) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Určíme hlavní minory. Platí $D_1(a_1) = D_1(a_2) = -2 < 0$, $D_2(a_1) = D_2(a_2) = 4 > 0$. Podle kritéria nastává v bodech a_1, a_2 lokální maximum funkce L a tedy vázané maximum funkce f.

4. Sestavíme Lagrangeovu funkci. Platí $L(x,y) = 6x+6y+\lambda(x^3+y^3-16)$. Spočteme parciální derivace, položíme je rovny nule a získáme spolu s vazbou soustavu tří rovnic o třech neznámých x, y, λ. Platí $L'_x = 6 + 3\lambda x^2 = 0$, $L'_y = 6 + 3\lambda y^2 = 0$, $x^3 + y^3 = 16$. Z prvních dvou rovnic plyne $\lambda = -\frac{2}{x^2} = -\frac{2}{y^2}$. Odtud $x^2 = y^2$ a $y = \pm x$. Dosazením $y = x$ do vazby dostáváme $2x^3 = 16$ a tedy $x = 2$. Nalezli jsme stacionární bod $a = [2, 2]$ pro $\lambda = -\frac{1}{2}$. Dosazení $y = -x$ vede k rovnosti $-16 = 0$. Bod a je jediné řešení soustavy. Spočteme matice $L'', L''(a_1), L''(a_2)$. Platí $L''_{xx} = 6\lambda x, L''_{yy} = 6\lambda y, L''_{xy} = 0$. Odtud plyne

$$L'' = \begin{bmatrix} 6\lambda x & 0 \\ 0 & 6\lambda y \end{bmatrix}, \quad L''(a) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Určíme hlavní minory. Platí $D_1(a) = -6 < 0$, $D_2(a) = 36 > 0$. Podle kritéria nastává v bodě a lokální maximum funkce L a tedy vázané maximum funkce f.

5. Označme x, y rozměry dna a z hloubku nádrže. Podle zadání máme minimalizovat povrch nádrže $P(x,y,z)$, je-li předepsán její objem $V(x,y,z) = 32m^3$. Máme tedy nalézt vázané minimum funkce $P(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz$ s vazbou $V(x,y,z) = xyz = 32$. Vazba je jednoznačně řešitelná vzhledem k z. Platí $z = \frac{32}{xy}$. Úlohu na vázaný extrém funkce P převedeme na úlohu o lokálních extrémech funkce $f(x,y) = P(x, y, \frac{32}{xy}) = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$. Spočteme parciální derivace, položíme je rovny nule a získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých x, y. Platí $f'_x = y + \frac{-64}{x^2} = 0$, $f'_y = x + \frac{-64}{y^2} = 0$. Z první rovnice plyne $y = \frac{64}{x^2}$. Dosazením do druhé rovnice dostáváme $x - \frac{x^4}{64} = 0$. Odtud $x = 0 \vee x = 4$. Zřejmě $x = 0$ nevyhovuje zadání úlohy. Nalezli jsme jediný stacionární bod $a = [4, 4]$. Dopočítáme $z = \frac{32}{4 \cdot 4} = 2$. Spočteme matice $f'', f''(a)$. Platí $f''_{xx} = \frac{128}{x^3}, f''_{yy} = \frac{128}{y^3}, f''_{xy} = 1$. Odtud plyne

$$f'' = \begin{bmatrix} \frac{128}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{128}{y^3} \end{bmatrix}, \quad f''(a) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Určíme hlavní minory. Platí $D_1(a) = 2 > 0$, $D_2(a) = 3 > 0$. Podle kritéria nastává v bodě $a = [4, 4]$ lokální minimum funkce f a tedy v bodě $[4, 4, 2]$ vázané minimum funkce P. Rozměry nádrže jsou $4 \times 4 \times 2$.

6. Označme x, y, z rozměry kvádru. Podle zadání máme maximalizovat objem $V(x, y, z)$, je-li předepsáno, že $4x + 4y + 4z = 96$, tj. že součet délek hran kvádru je $96cm$. Máme tedy nalézt vázané maximum funkce $V(x, y, z) = xyz$ s vazbou $4x+4y+4z = 96$. Vazba je jednoznačně řešitelná vzhledem k z. Platí $z = 24-x-y$. Úlohu na vázaný extrém funkce V převedeme na úlohu o lokálních extrémech funkce $f(x, y) = V(x, y, 24-x-y) = xy(24-x-y)$. Spočteme parciální derivace, položíme je rovny nule a získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých x, y. Platí $f'_x = y(24-x-y)-xy = 0$, $f'_y = x(24-x-y)-xy = 0$. Triviální řešení, kdy $x = 0 \vee y = 0$ nebudeme uvažovat. Soustavu lze tak převést na tvar $2x + y = 24, x + 2y = 24$. Snadno nalezneme jediné řešení $a = [8, 8]$. Dopočítáme $z = 24-8-8 = 8$. Spočteme matice $f'', f''(a)$. Platí $f''_{xx} = -2y, f''_{yy} = -2x, f''_{xy} = 24 - 2x - 2y$. Odtud plyne

$$f'' = \begin{bmatrix} -2y & 24-2x-2y \\ 24-2x-2y & -2x \end{bmatrix}, \quad f''(a) = \begin{bmatrix} -16 & -8 \\ -8 & -16 \end{bmatrix}.$$

Určíme hlavní minory. Platí $D_1(a) = -16 < 0$, $D_2(a) = 192 > 0$. Podle kritéria nastává v bodě $a = [8, 8]$ lokální maximum funkce f a tedy v bodě $[8, 8, 8]$ vázané maximum funkce V. Rozměry kvádru jsou $8 \times 8 \times 8$.

7. Označme x, y rozměry dna a z hloubku nádrže. Podle zadání máme maximalizovat objem nádrže $V(x, y, z)$, je-li předepsáno, že $xy + 2yz + 2xz = 108$. Máme tedy nalézt vázané maximum funkce $V(x, y, z) = xyz$ s vazbou $xy + 2yz + 2xz = 108$. Vazba je jednoznačně řešitelná vzhledem k z. Platí $z = \frac{108-xy}{2(x+y)}$. Úlohu na vázaný extrém funkce V převedeme na úlohu o lokálních extrémech funkce $f(x, y) = V(x, y, \frac{108-xy}{2(x+y)}) = \frac{xy(108-xy)}{2(x+y)}$ Spočteme parciální derivace, položíme je rovny nule a získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých x, y. Platí $f'_x = \frac{-y^2(x^2+2xy-108)}{2(x+y)^2} = 0$, $f'_y = \frac{-x^2(y^2+2xy-108)}{2(x+y)^2} = 0$. Triviální řešení, kdy $x = 0 \vee y = 0$ nebudeme uvažovat. Soustavu lze tak převést na tvar $x^2 + 2xy = 108, y^2 + 2xy = 108$. Odtud plyne, že $x = y$ a $3x^2 = 108$. Tedy $x = 6$. Nalezli jsme jediný stacionární bod $a = [6, 6]$. Dopočítáme $z = \frac{108-36}{2 \cdot 12} = 3$. Spočteme matice $f'', f''(a)$. Platí $f''_{xx} = \frac{-y^4-108y^2}{(x+y)^3}, f''_{yy} = \frac{-x^4-108x^2}{(x+y)^3}, f''_{xy} = \frac{108xy-x^3y-3x^2y^2-xy^3}{(x+y)^3}$. Odtud plyne

$$f'' = \begin{bmatrix} \frac{-y^4-108y^2}{(x+y)^3} & \frac{108xy-x^3y-3x^2y^2-xy^3}{(x+y)^3} \\ \frac{108xy-x^3y-3x^2y^2-xy^3}{(x+y)^3} & \frac{-x^4-108x^2}{(x+y)^3} \end{bmatrix}, \quad f''(a) = \begin{bmatrix} -3 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -3 \end{bmatrix}.$$

Určíme hlavní minory. Platí $D_1(a) = -3 < 0$, $D_2(a) = \frac{27}{4} > 0$. Podle kritéria nastává v bodě $a = [6, 6]$ lokální maximum funkce f a tedy v bodě $[6, 6, 3]$ vázané maximum funkce V. Rozměry nádrže jsou $6 \times 6 \times 3$.

8. Označme r, v poloměr a výšku válce. Podle zadání máme maximalizovat jeho objem $V(r, v)$, je-li předepsáno, že povrch válce je $P(r, v) = 6\pi dm^2$. Máme tedy nalézt vázané maximum funkce $V(r, v) = \pi r^2 v$ s vazbou $P(r, v) = 2\pi rv + 2\pi r^2 = 6\pi$. Po úpravě má vazba tvar $rv + r^2 = 3$. Vazba je jednoznačně řešitelná vzhledem k v. Platí $v = \frac{3-r^2}{r}$. Úlohu na vázaný extrém funkce V převedeme na úlohu o lokálních extrémech funkce $f(r) = V(r, \frac{3-r^2}{r}) = \pi r(3-r^2)$. Spočteme $f'(r) = \pi(3-r^2) - 2\pi r^2 = 3\pi - 3\pi r^2$. Derivaci položíme rovnu nule a získáme rovnici $3 - 3r^2 = 0$. Odtud plyne $r = \pm 1$. Zřejmě řešení $r = -1$ nevyhovuje. Jediný stacionární bod je $r = 1$. Z vazby dopočítáme $v = 2$. Spočteme $f''(r) = -6\pi r$ a $f''(1) = -6\pi < 0$. Odtud plyne, že v bodě $r = 1$ nastává lokální maximum funkce f a tedy v bodě $[1,2]$ vázané maximum funkce V. Rozměry válce jsou $r = 1, v = 2$.

9. Nejprve nalezneme lokální extrémy funkce $f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$. Spočteme parciální derivace $f'_x = 6x^2 + 8x - 2y = 0$ a $f_y = 2y - 2x = 0$ a nalezneme stacionární body. Ze druhé rovnice plyne $y = x$. Po dosazení do první rovnice dostáváme $x(x+1) = 0$. Odtud plyne $a_1 = [0,0], a_2 = [-1,-1]$. Přitom $a_1 \in h(\Omega)$ a $a_2 \notin \Omega$. Funkce f tedy nemá uvnitř Ω lokální extrém. Hranice množiny Ω je tvořena dvěma křivkami. Vyšetření hranice $h(\Omega)$ se tedy rozpadá na vyřešení dvou úloh na vázané extrémy s funkcí f a vazbami $V_1 : y = 4$, $V_2 : y = x^2$. Je zapotřebí zvlášť vyšetřit body $A = [-2,4], B = [2,4]$, které jsou průniky vazeb V_1 a V_2. Úlohy f, V_1 a f, V_2 převedeme na ekvivalentní úlohy nalezení lokálních extrémů funkcí jedné proměnné. Úloha f, V_1 je ekvivalentní úloze nalézt lokální extrémy funkce $F_1(x) = f(x,4) = 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$. Platí $F_1'(x) = 6x^2 + 8x - 8 = 6(x+2)(x - \frac{2}{3})$. Stacionární body jsou $x = -2$ a $x = \frac{2}{3}$. Dále $F_1''(x) = 12x + 8$. Odtud $F_1''(-2) = -16$. Tedy v $x = -2$ je maximum funkce F_1 a v $A = [-2,4]$ vázané maximum f. Podobně spočteme, že v bodě $a = [\frac{2}{3}, 4]$ dochází k vázanému minimu f. Úloha f, V_2 je ekvivalentní úloze nalézt lokální extrémy funkce $F_2(x) = f(x, x^2) = x^4 + 4x^2$. Snadno se zjistí, že úloha f, V_2 má vázané minimum v bodě $b = [0,0]$. Spočteme funkční hodnoty v nalezených bodech. Platí $f(a) = \frac{352}{27}, f(b) = 0, f(A) = 32, f(B) = 16$. Odtud $M = \{0, \frac{352}{27}, 16, 32\}$. Tedy $\max f(\Omega) = \max M = 32$ a nastává v bodě A a $\min f(\Omega) = \min M = 0$ a nastává v bodě b.

10. Nalezneme lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1$. Spočteme parciální derivace $f'_x = 2x - 2$ a $f_y = 2y - 4$ a nalezneme stacionární bod $a = [1,2]$. Matice druhé derivace je rovna $f'' = f''(a) = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$. Hlavní minory této matice jsou kladné a proto v bodě a nastává lokální minimum funkce f. Platí $f(a) = -4$. Tedy $\mathbb{A} = \{-4\}$. Hranice množiny Ω je tvořena třemi úsečkami. Vyšetření hranice $h(\Omega)$ se tedy rozpadá na vyřešení tří úloh na vázané extrémy s funkcí f a vazbami $V_1 : y = 0$, $V_2 : 5x + 3y = 15$, $V_3 : x = 0$. Zvlášť vyšetříme body A, B, C, které jsou průniky různých vazeb. Úlohy f, V_i, kde $i = 1,2,3$ převedeme na ekvivalentní úlohy nalezení lokálních extrémů funkcí F_i, kde $F_1(x) = f(x,0) = x^2 - 2x + 1$, $F_2(x) = f(x, \frac{15-5x}{3}) = \frac{34}{9}x^2 - 12x + 6$, $F_3(y) = f(0,y) = y^2 - 4y + 1$. Snadno se zjistí, že úloha f, V_1 má vázané minimum v bodě $a_1 = [1,0]$; f, V_2 má vázané minimum v $a_2 = [0,2]$; f, V_3 má vázané minimum v $a_3 = [\frac{27}{17}, \frac{40}{17}]$. Spočteme funkční hodnoty v nalezených bodech. Platí $f(a_1) = 0, f(a_2) = -3, f(a_3) = -\frac{60}{17}, f(A) = 1, f(B) = 4, f(C) = 6$. Odtud $\mathbb{B} = \{0, -3, -\frac{60}{17}, 1, 4, 6\}$. $M = \{-4, 0, -3, -\frac{60}{17}, 1, 4, 6\}$. Odtud $\max f(\Omega) = \max M = 6$ v bodě C. Dále $\min f(\Omega) = \min M = -4$ v bodě a.

LEKCE 8. IMPLICITNÍ FUNKCE.

1. Spočtěte y' a y'', je-li $x^2 - 2xy + y^3 = 0$.
2. Spočtěte y' a y'', je-li $x + y - e^{x-y} = 0$.
3. Spočtěte y' a y'', je-li $xy + y^2 - xe^x = 0$.
4. Spočtěte a upravte y''', je-li $x^2 - y^2 - 1 = 0$.
5. Určete, zda je funkce daná implicitně rovnicí $2^{xy}+y^2-5=0$ rostoucí v bodě $[0,-2]$.
6. Spočtěte rovnici tečny ke grafu funkce dané implicitně rovnicí $x^5 + y^5 - 2xy = 0$ v bodě $[1, 1]$.
7. Spočtěte rovnici tečny ke grafu funkce dané implicitně rovnicí $e^{xy} + \sin y + y^2 = 1$ v bodě $[2, 0]$.
8. Spočtěte rovnici normály ke grafu funkce dané implicitně rovnicí $xy+\ln y-1=0$ v bodě $[1, 1]$.
9. Rozhodněte, zda je funkce daná implicitně rovnicí $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ konvexní nebo konkávní v bodě $[1, 1]$.
10. Nalezněte lokální extrémy funkce dané implicitně rovnicí $\ln\sqrt{x^2+y^2}-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=0$.

Výsledky úloh:

1. $y' = \frac{2y-2x}{3y^2-2x}, y'' = \frac{4y'-2-6y(y')^2}{3y^3-2x}$. **2.** $y' = \frac{e^{x-y}-1}{e^{x-y}+1}, y'' = \frac{e^{x-y}(1-y')^2}{e^{x-y}+1}$.
3. $y' = \frac{e^x+xe^x-y}{2y+x}, y'' = \frac{2e^x+xe^x-2y'-2(y')^2}{2y+x}$. **4.** $y''' = -\frac{6y'y''}{y} = \frac{6x(x^2-y^2)}{y^5}$.
5. Klesající. $y'(0) = -\frac{1}{2}\ln 2$. **6.** $x + y - 2 = 0$. **7.** $y = 0$. **8.** $2x - y - 1 = 0$.
9. Konkávní. $y''(1)=-16$. **10.** Maximum v bodě $-\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$ a minimum v bodě $\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$.

ŘEŠENÍ.

1. První derivaci y' určíme oběma možnými metodami. Nejprve podle vzorce $y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$. Pro parciální derivace funkce $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^3$ platí $f'_x = 2x - 2y$ a $f'_y = -2x + 3y^2$. Po dosazení do vzorce dostáváme $y' = \frac{2y-2x}{3y^2-2x}$. Druhá možnost výpočtu spočívá ve zderivování dané rovnice $x^2 - 2xy + y^3 = 0$ podle x, přičemž y považujeme za funkci proměnné x. Platí $2x - 2y - 2xy' + 3y^2y' = 0$. Vypočítáme y' a opět dostáváme $y' = \frac{2y-2x}{3y^2-2x}$. Nyní přistupme k výpočtu druhé derivace y''. Tu podle vzorce určovat nebudeme. Pro výpočet druhé derivace budeme vždy používat metodu derivování rovnice podle x. Vztah $2x - 2y - 2xy' + 3y^2y' = 0$ znovu zderivujeme podle x. Platí $2 - 2y' - 2y' - 2xy'' + 6yy'y' + 3y^2y'' = 0$. Rovnici upravíme a vypočteme y''. Dostáváme $y'' = \dfrac{4y' - 2 - 6y(y')^2}{3y^3 - 2x}$.

2. Vzorec pro výpočet y' je vhodné použít, pokud nemusíme určovat derivace vyšších řádů. Použijeme tedy k výpočtu druhé metody. Rovnici $x + y - e^{x-y} = 0$ zderivujeme podle x. Platí $1 + y' - e^{x-y}(1 - y') = 0$. Odtud po úpravě plyne $y' = \dfrac{e^{x-y} - 1}{e^{x-y} + 1}$. Druhou derivaci y'' funkce dané implicitně získáme dalším derivováním vztahu $1+y'-e^{x-y}(1-y')=0$. Platí $y''-e^{x-y}(1-y')^2-e^{x-y}(-y'')=0$. Z poslední rovnice již vypočítáme y''. Dostáváme $y'' = \dfrac{e^{x-y}(1 - y')^2}{e^{x-y} + 1}$.

3. Postupujme jako v předchozí úloze. První derivací rovnice $xy + y^2 - xe^x = 0$ dostáváme $y + xy' + 2yy' - e^x - xe^x = 0$. Odtud plyne $y' = \frac{e^x+xe^x-y}{2y+x}$. Druhým zderivováním dostaneme $y' + y' + xy'' + 2y'y' + 2yy'' - e^x - e^x - xe^x = 0$. Vztah upravíme a vypočítáme y''. Platí $y'' = \dfrac{2e^x + xe^x - 2y' - 2(y')^2}{2y + x}$.

4. Rovnici $x^2 - y^2 - 1 = 0$ třikrát zderivujeme podle x. Pro první derivaci platí $2x-2yy'=0$. Odtud $y'=\frac{x}{y}$. Druhou derivací rovnice dostáváme $2-2y'y'-2yy''=0$. Odtud $y''=\frac{1-(y')^2}{y}$. Ze třetí derivací rovnice dostáváme $-4y'y''-2y'y''-2yy'''=0$. Odtud $y''' = -\dfrac{6y'y''}{y}$. Po dosazení za y' a y'' a krátké úpravě $y''' = \dfrac{6x(x^2 - y^2)}{y^5}$.

5. Rovnici $2^{xy}+y^2-5 = 0$ zderivujeme podle x. Platí $\ln 2\cdot 2^{xy}(y+xy')+2yy' = 0$. Odtud $y'=-\frac{\ln 2\cdot y\cdot 2^{xy}}{2y+\ln 2\cdot x\cdot 2^{xy}}$. Nyní dosadíme souřadnice zadaného bodu $[0, -2]$ do y'. $y'(0) = -\frac{\ln 2(-2)2^0}{2(-2)+\ln 2\cdot 0\cdot 2^0} = -\frac{1}{2}\ln 2$. Protože je derivace ve vyšetřovaném bodě záporná, je funkce daná implicitně v tomto bodě klesající.

6. Předně rovnice tečny ke grafu funkce $y = y(x)$ v bodě $[x_0, y_0]$ je dána vztahem $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$. Ze zadání úlohy plyne $x_0 = 1$ a $y_0 = 1$. K vyřešení úlohy tedy stačí určit hodnotu derivace $y'(1)$. Rovnici $x^5 + y^5 - 2xy = 0$ zderivujeme podle x. Platí $5x^4+5y^4y'-2y-2xy' = 0$. Odtud $y' = \frac{2y-5x^4}{5y^4-2x}$ a $y'(1) = \frac{2-5}{5-2} = -1$. Dosadíme do rovnice tečny. Platí $y–1=-1(x–1)$. Po úpravě dostáváme $x+y–2=0$.

7. Postupujeme analogicky jako v předchozím příkladu. Ze zadání úlohy plyne $x_0 = 2$ a $y_0 = 0$. Určíme hodnotu derivace $y'(2)$. Rovnici $e^{xy} + \sin y + y^2 = 1$ zderivujeme podle x. Platí $e^{xy}(y + xy') + \cos y \cdot y' + 2yy' = 0$. Odtud $y' = \frac{ye^{xy}}{2y+\cos y+xe^{xy}}$ a $y'(2) = 0$. Po dosazení dostáváme, že rovnice tečny je $y = 0$.

8. Předně rovnice normály ke grafu funkce $y = y(x)$ v bodě $[x_0, y_0]$ je dána vztahem $y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$. Ze zadání úlohy plyne $x_0 = 1$ a $y_0 = 1$. K vyřešení úlohy tedy opět stačí určit hodnotu derivace $y'(1)$. Rovnici $xy+\ln y - 1 = 0$ zderivujeme podle x. Platí $y + xy' + \frac{1}{y}y' = 0$. Odtud $y' = \frac{-y^2}{1+xy}$ a $y'(1) = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$. Dosadíme do rovnice normály. Platí $y-1=\frac{-1}{-\frac{1}{2}}(x-1)$. Po úpravě dostáváme $2x-y-1=0$.

9. Abychom rozhodli, zda je funkce daná implicitně rovnicí $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ konvexní nebo konkávní v bodě $[1,1]$, musíme spočítat hodnotu derivace $y''(1)$. Zadanou rovnici zderivujeme podle x. Platí

$$3x^2 + 3y^2y' - 2y - 2xy' = 0.$$

Odtud $y' = \dfrac{2y-3x^2}{3y^2-2x}$ a tedy $y'(1) = \frac{2-3}{3-2} = -1$. Z tohoto výsledku lze usoudit, že funkce je v bodě $x_0 = 1$ klesající. Nyní zderivujeme zadanou rovnici podruhé. Platí

$$6x + 6yy'y' + 3y^2y'' - 2y' - 2y' - 2xy'' = 0.$$

Odtud

$$y'' = \frac{4y' - 6x - 6y(y')^2}{3y^2 - 2x}, \qquad y''(1) = \frac{4(-1) - 6\cdot 1 - 6\cdot 1\cdot(-1)^2}{3\cdot 1^2 - 2\cdot 1} = -16.$$

Protože je druhá derivace záporná, leží graf funkce v okolí bodu $[1,1]$ pod tečnou a tedy funkce je v bodě $x_0 = 1$ konkávní.

10. Nejprve vypočteme y'. Rovnici $\ln\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = 0$ zderivujeme podle x. Platí $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot (2x + 2yy') - \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}\right) = 0$. Vztah upravíme. $\frac{x+yy'}{x^2+y^2} - \frac{xy'-y}{x^2+y^2} = 0$ a tedy $\frac{x+y+yy'-xy'}{x^2+y^2} = 0$. Odtud plyne $x + y + yy' - xy' = 0$ a $y' = \frac{x+y}{x-y}$. Podobně dojdeme k výsledku podle vzorce $y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$.

$$y' = -\frac{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot \dfrac{-y}{x^2}}{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot \dfrac{1}{x}} = -\frac{\dfrac{x}{x^2+y^2} + \dfrac{y}{x^2+y^2}}{\dfrac{y}{x^2+y^2} - \dfrac{x}{x^2+y^2}} = \frac{x+y}{x-y}.$$

Ve druhém kroku nalezneme stacionární body, tj. body, pro které platí $y' = 0$. Z předchozího výpočtu ale plyne, že $y' = 0$ právě když $x + y = 0$, tj. $y = -x$. Dosazením do zadané rovnice dostaneme $\ln\sqrt{2x^2} - \operatorname{arctg}(-1) = 0$. Odtud plyne $\ln\sqrt{2}|x| + \frac{\pi}{4} = 0$. Odlogaritmováním získáme $\sqrt{2}|x| = e^{-\frac{\pi}{4}}$ a $|x| = \frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$. Nalezli jsme dva stacionární body

$$s_1 = -\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \text{ a } s_2 = \frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}.$$

Ve třetím kroku určíme druhou derivaci y''. Rovnici $x + y + y'y - y'x = 0$ znovu zderivujeme podle x. Platí $1 + y' + y''y + (y')^2 - y''x - y' = 0$. Odtud plyne, že $y'' = \dfrac{(y')^2+1}{x-y} = \dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$. Poslední rovnost vznikla dosazením $y' = \frac{x+y}{x-y}$. V závěrečném kroku pomocí druhé derivace rozhodneme, zda v bodech S_1 a S_2 dochází k lokálním extrémům. Pro bod s_1 platí $y''(s_1) = \dfrac{2s_1^2}{(s_1-(-s_1))^3} = \dfrac{1}{2s_1} < 0$.

Podobně pro bod s_2 platí $y''(s_2) = \dfrac{1}{2s_2} > 0$. Tedy v bodě s_1 dochází k lokálnímu maximu a v bodě s_2 k lokálnímu minimu implicitní funkce.

LEKCE 9. DVOJROZMĚRNÉ INTEGRÁLY I.

(Fubiniho věta)

1. Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} x^y\, dxdy$, kde $\Omega = \langle 0,1\rangle \times \langle 1,2\rangle$.

2. Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} x^2 y e^{xy}\, dxdy$, kde $\Omega = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$.

3. Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} xy^2\, dxdy$, kde Ω je určena vztahy $x^2+y^2-1 \le 0, x+y-1 \ge 0$.

4. Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} y\, dxdy$, kde Ω je určena vztahy $x^2-y+2=0, x+y-4=0$.

5. Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} xy\, dxdy$, kde Ω je určena vztahy $xy=1, 2x+2y-5=0$.

6. Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} e^{\frac{x}{y}}\, dxdy$, kde Ω je určena vztahy $x=0, y=1, y=2, y^2=x$.

7. Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} \frac{x}{y^2}\, dxdy$, kde Ω je určena vztahy $1 \le x \le y \le 3$.

8. Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} \frac{x^2}{y^2}\, dxdy$, kde Ω je určena vztahy $x=2, y=x, xy=1$.

9. Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} dxdy$, kde Ω je určena vztahy $x+y=4, x+y=12, y^2=2x$.

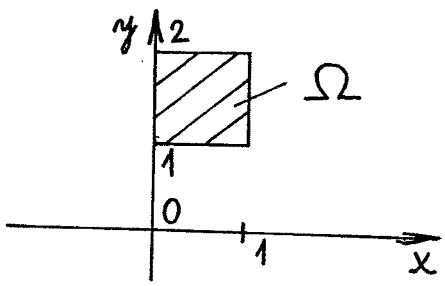
10. Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} \sin y^2\, dxdy$, kde Ω je určena body $A=[0,0], B=[9,3], C=[1,3]$.

Výsledky úloh:

1. $\ln\frac{3}{2}$. **2.** 2. **3.** $\frac{1}{20}$. **4.** $\frac{81}{5}$. **5.** $\frac{165}{128}-\ln 2$. **6.** $e^2-\frac{3}{2}$. **7.** $\frac{2}{3}$. **8.** $\frac{9}{4}$. **9.** 62. **10.** $\frac{4}{3}\sin 9$.

ŘEŠENÍ.

1. Integrační obor Ω je čtverec, tj. dvojrozměrný interval $\langle 0,1\rangle\times\langle 1,2\rangle$. Viz obr. 21. Aplikujeme Fubiniho větu. Oblast Ω budeme uvažovat jako oblast typu (y,x).

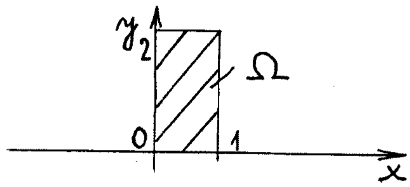


Obr. 21

$$\iint\limits_{\Omega} x^y dxdy = \int_1^2 \left(\int_0^1 x^y dx\right) dy = \int_1^2 \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1 dy = \int_1^2 \frac{1}{y+1} dy = \Big[\ln|y+1|\Big]_1^2 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}.$$

V případě, že oblast Ω budeme chápat jako oblast typu (x,y), narazíme při výpočtu na integrál $\int_0^1 \frac{x^2-x}{\ln x} dx$, který nelze vyřešit v množině elementárních funkcí.

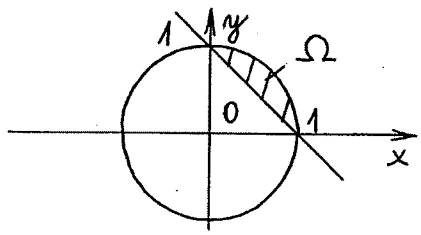
2. Integrační obor Ω je obdélník $\langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$. Postupujeme analogicky jako v předchozím příkladu. Aplikujeme Fubiniho větu. Oblast Ω budeme uvažovat jako oblast typu (x, y).



Obr. 22

$$\iint\limits_{\Omega} x^2ye^{xy}dxdy = \int_0^1(\int_0^2 x^2ye^{xy}dy)dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^2y, & u'_y = x^2 \\ v'_y = e^{xy}, & v = \frac{1}{x}e^{xy} \end{array} \right| = \int_0^1(\Big[xye^{xy}\Big]_0^2 - x\int_0^2 e^{xy}dy)dx = \int_0^1 \Big[(xy-1)e^{xy}\Big]_0^2 dx = \int_0^1 (2x-1)e^{2x}+1\;dx = \int_0^1 2xe^{2x}\;dx + \int_0^1 e^{2x}\;dx + \int_0^1\;dx = \Big[xe^{2x} - e^{2x} - x\Big]_0^1 = 2.$$

3. Integrační obor Ω je ohraničen přímkou a kružnicí. Viz obr. 23. Oblast Ω je typu (x, y) i (y, x). Zvolme typ (x, y). Platí $\Omega = \{[x, y]; 0 \leq x \leq 1, 1 - x \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$. K výpočtu použijeme Fubiniho větu.



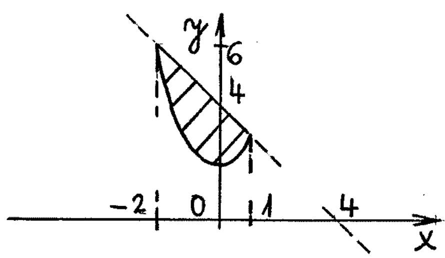
Obr. 23

$$\iint\limits_{\Omega} xy^2dxdy = \int_0^1(\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} xy^2dy)dx = \int_0^1 \Big[\frac{1}{3}xy^3\Big]_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{x}{3}(\sqrt{(1-x^2)^3} - (1-x)^3)dx = \frac{1}{20}.$$

Zvolíme-li typ (y, x), pak $\Omega = \{[x, y]; 0 \leq y \leq 1, 1 - y \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}$. V tomto případě vede výpočet na jednodušší integrál.

$$\iint\limits_{\Omega} xy^2dxdy = \int_0^1(\int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} xy^2dx)dy = \int_0^1 \Big[\frac{1}{2}x^2y^2\Big]_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} dx = \int_0^1 (y^3 - y^4)dy = \frac{1}{20}.$$

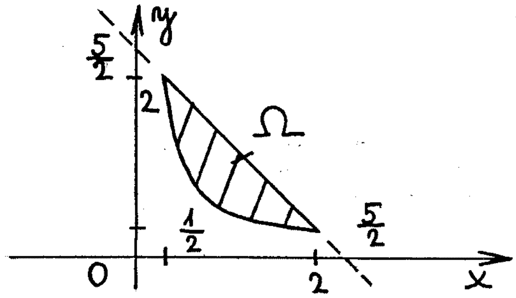
4. Integrační obor Ω je ohraničen přímkou a parabolou. Viz obr. 24. Popišme obor Ω jako oblast typu (x, y). Krajní meze x-ové souřadnice oblasti získáme jako x-ové souřadnice průsečíků přímky a paraboly. Řešíme $x^2 + 2 = 4 - x$. Odtud $x^2 + x - 2 = 0$ a $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Platí $\Omega = \{[x, y]; -2 \leq x \leq 1, x^2 + 2 \leq y \leq 4 - x\}$.



Obr. 24

$$\iint\limits_{\Omega} y\;dxdy = \int_{-2}^1(\int_{x^2+2}^{4-x} y\;dy)dx = \int_{-2}^1 \Big[\frac{1}{2}y^2\Big]_{x^2+2}^{4-x} dx = \int_{-2}^1 \frac{1}{2}((4-x)^2 - (x^2+2)^2)dx = \frac{81}{5}.$$

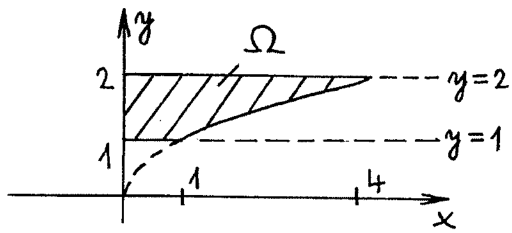
5. Integrační obor Ω je ohraničen přímkou a hyperbolou. Viz obr. 25. Popišme obor Ω jako oblast typu (x, y). Krajní meze x-ové souřadnice oblasti získáme jako x-ové souřadnice průsečíků přímky a hyperboly. Řešíme $x(\frac{5}{2} - x) = 1$. Odtud $2x^2 - 5x + 2 = 0$ a $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$. Platí $\Omega = \{[x,y]; \frac{1}{2} \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{5}{2} - x\}$.



Obr. 25

$$\iint_\Omega xy\,dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \Big(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} xy\,dy\Big)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \Big[\tfrac{1}{2}xy^2\Big]_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} dx = \tfrac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2} \big(x(\tfrac{5}{2}-x) - \tfrac{1}{x}\big)dx = \tfrac{165}{128} - \ln 2.$$

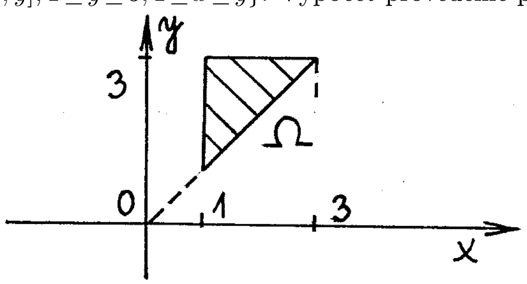
6. Integrační obor Ω je ohraničen přímkou a parabolou. Viz obr. 26. Popišme obor Ω jako oblast typu (y, x). Platí $\Omega = \{[x,y]; 1 \leq y \leq 2, 0 \leq y \leq y^2\}$.



Obr. 26

$$\iint_\Omega e^{\frac{x}{y}}\,dxdy = \int_1^2 \Big(\int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\,dx\Big)dy = \int_1^2 \Big[ye^{\frac{x}{y}}\Big]_0^{y^2} dy = \int_1^2 (ye^y - y)dy = \Big[ye^y - e^y - \tfrac{1}{2}y^2\Big]_1^2 = e^2 - \tfrac{3}{2}.$$

7. Integrační obor Ω je ohraničen třemi přímkami. Viz obr. 27. Popišme obor Ω jako oblast obou typů. Pro typ (x, y) platí $\Omega = \{[x,y]; 1 \leq x \leq 3, x \leq y \leq 3\}$ a pro typ (y, x) platí $\Omega = \{[x,y]; 1 \leq y \leq 3, 1 \leq x \leq y\}$. Výpočet provedeme pro oba typy.

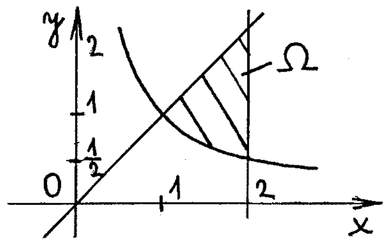


Obr. 27

$$\iint_\Omega \frac{x}{y^2}\,dxdy = \int_1^3 \Big(\int_x^3 \frac{x}{y^2}\,dy\Big)dx = \int_1^3 \Big[-\frac{x}{y}\Big]_x^3 dx = \int_1^3 (1 - \tfrac{x}{3})dx = \Big[x - \frac{x^2}{6}\Big]_1^3 = \tfrac{2}{3}.$$

$$\iint_\Omega \frac{x}{y^2}\,dxdy = \int_1^3 \Big(\int_1^y \frac{x}{y^2}\,dx\Big)dy = \int_1^3 \Big[\frac{x^2}{2y^2}\Big]_1^y dy = \tfrac{1}{2}\int_1^3 (1 - \tfrac{1}{y^2})dy = \tfrac{1}{2}\Big[y + \frac{1}{y}\Big]_1^3 = \tfrac{2}{3}.$$

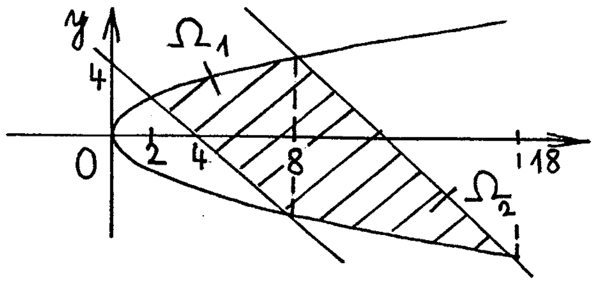
8. Integrační obor Ω je ohraničen dvěma přímkami a hyperbolou. Viz obr. 28. Popišme obor Ω jako oblast typu (x, y). Platí $\Omega = \{[x, y]; 1 \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq x\}$.



Obr. 28

$\iint\limits_{\Omega} \frac{x^2}{y^2} dx dy = \int_1^2 (\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy) dx = \int_1^2 \left[-\frac{x^2}{y}\right]_{\frac{1}{x}}^{x} dx = \int_1^2 (x^3 - x) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = \frac{9}{4}.$

9. Integrační obor Ω je ohraničen dvěma přímkami a parabolou. Viz obr. 29. Je zřejmé, že obor Ω je nutné rozdělit na dvě části Ω_1 a Ω_2 tak, že $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Oblasti Ω_1, Ω_2 popíšeme jako oblasti typu (x, y). Platí $\Omega_1 = \{[x, y]; 0 \leq x \leq 8, 4 - x \leq y \leq \sqrt{2x}\}$ a $\Omega_2 = \{[x, y]; 8 \leq x \leq 18, -\sqrt{2x} \leq y \leq 12 - x\}$.

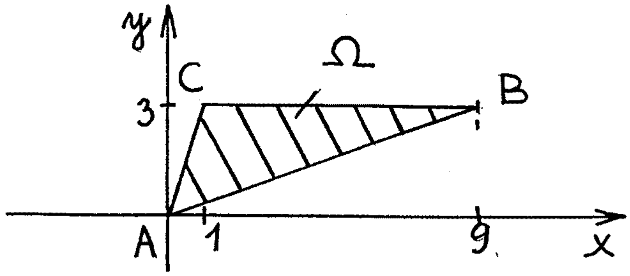


Obr. 29

$\iint\limits_{\Omega} dx dy = \iint\limits_{\Omega_1} dx dy + \iint\limits_{\Omega_2} dx dy = \int_0^8 (\int_{4-x}^{\sqrt{2x}} dy) dx + \int_8^{18} (\int_{-\sqrt{2x}}^{12-x} dy) dx =$

$= \int_0^8 (\sqrt{2x} + x - 4) dx + \int_8^{18} (\sqrt{2x} - x + 12) dx = \frac{64}{3} + \frac{122}{3} = 62.$

10. Integrační obor Ω je ohraničen přímkami. Viz obr. 30. Obor Ω popíšeme jako oblast typu (y, x). Platí $\Omega = \{[x, y]; 0 \leq y \leq 3, \frac{1}{3}y \leq x \leq 3y\}$. Volba typu (x, y) vede k rozdělení oblasti na dvě části a navíc k integálu $\int \sin y^2 \, dy$. Tento integrál nelze vyřešit nad množinou elementárních funkcí.



Obr. 30

$\iint\limits_{\Omega} \cos y^2 dx dy = \int_0^3 (\int_{\frac{y}{3}}^{3y} \cos y^2 dx) dy = \int_0^3 \left[x \cos y^2\right]_{\frac{y}{3}}^{3y} dy = \frac{4}{3} \int_0^3 2y \cos y^2 dy = \left| \begin{array}{c} t = y^2 \\ 0 \to 0, 3 \to 9 \end{array} \right|$

$= \frac{4}{3} \int_0^9 \cos t dt = \frac{4}{3} \left[\sin t\right]_0^9 = \frac{4}{3} \sin 9.$

LEKCE 10. TROJROZMĚRNÉ INTEGRÁLY I.

(FUBINIHO VĚTA)

1. Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} x+y\;dxdydz$, kde $\Omega = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle \times \langle 0,3\rangle$.

2. Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} x^2 dxdydz$, kde Ω je čtyřstěn $A=[0,0,0], B=[1,3,0], C=[0,3,0], D=[1,3,2]$.

3. Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} xy+z\;dxdydz$, kde $\Omega: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x, x+2y+z=2$.

4. Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} \dfrac{x+y}{z+4} dxdydz$, kde $\Omega: x=0, y=0, 0\le z\le 4, x+y=3$.

5. Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} z\;dxdydz$, kde $\Omega: z=1, z=\sqrt{x^2+y^2}$.

6. Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} dxdydz$, kde $\Omega: z=0, z=1-x^2-y^2$.

7. Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} x^2\;dxdydz$, kde $\Omega: z=0, z=2, x^2+y^2=1$.

8. Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} z\;dxdydz$, kde $\Omega: y=4, z=0, z=3, x^2-y=0$.

9. Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} xy\;dxdydz$, kde $\Omega: x,y,z\ge 0, x^2+y^2=4, z=\sqrt{x^2+y^2}$.

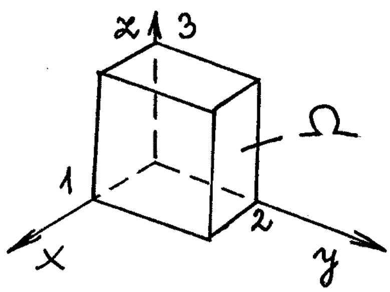
10. Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega}\; dxdydz$, kde $\Omega: x,y,z\ge 0, x=2, y=2, xy=1, z=3$.

Výsledky úloh:

1. 9. **2.** $\frac{3}{10}$. **3.** $\frac{13}{40}$. **4.** $9\ln 2$. **5.** $\frac{\pi}{4}$. **6.** $\frac{\pi}{2}$. **7.** $\frac{\pi}{2}$. **8.** 24. **9.** $\frac{16}{5}$. **10.** $3+6\ln 2$.

ŘEŠENÍ.

1. Integrační obor $\Omega = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle \times \langle 0,3\rangle$ je trojrozměrný interval (kvádr). Viz obr. 31. K výpočtu použijeme Dirichletovu větu. Speciální verzi věty ale nelze použít, protože integrand není ve tvaru součinu.

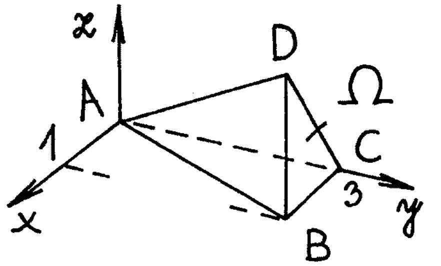


Obr. 31

$\iiint\limits_{\Omega} x+y\;dxdydz = \int_0^1 (\int_0^2 (\int_0^3 x+y\;dz)dy)dx = \int_0^1 (\int_0^2 \Big[xz+yz\Big]_0^3 dy)dx =$

$3\int_0^1 (\int_0^2 x+y\;dy)dx = 3\int_0^1 \Big[xy+\frac{1}{2}y^2\Big]_0^2 dx = 3\int_0^1 2x+2\;dx = 6\Big[\frac{1}{2}x^2+x\Big]_0^1 = 9.$

2. Integrační obor Ω je čtyřstěn $ABCD$. Viz obr. 32. Nejprve musíme čtyřstěn zapsat pomocí nerovností jako oblast nějakého typu. Oblast Ω je libovolného typu. Lze zvolit tedy typ (x, y, z). Platí $\Omega = \{[x, y, z]; 0 \le x \le 1, 3x \le y \le 3, 0 \le z \le 2x\}$. K výpočtu použijeme Fubiniho větu.

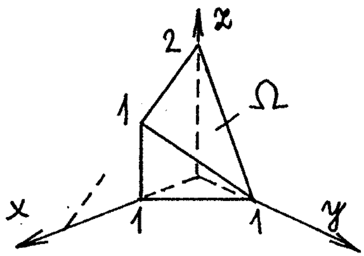


Obr. 32

$$\iiint_\Omega x^2 dxdydz = \int_0^1\Big(\int_{3x}^3\Big(\int_0^{2x} x^2 dz\Big)dy\Big)dx = \int_0^1\Big(\int_{3x}^3 \Big[x^2 z\Big]_0^{2x} dy\Big)dx =$$

$$2\int_0^1\Big(\int_{3x}^3 x^3 dy\Big)dx = 2\int_0^1 \Big[x^3 y\Big]_{3x}^3 dx = 6\int_0^1 (x^3 - x^4)\, dx = 6\Big[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{5}x^5\Big]_0^1 = \tfrac{3}{10}.$$

3. Integrační obor Ω je jehlan. Viz obr. 33. Oblast Ω je libovolného typu. Lze zvolit tedy typ (x, y, z). Platí $\Omega = \{[x, y, z]; 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x, 0 \le z \le 2-x-2y\}$. K výpočtu použijeme Fubiniho větu.

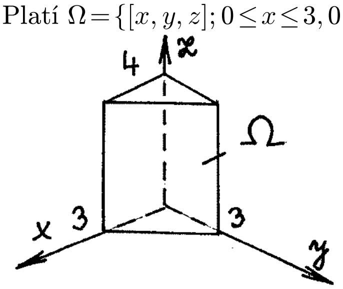


Obr. 33

$$\iiint_\Omega xy + z\ dxdydz = \int_0^1\Big(\int_0^{1-x}\Big(\int_0^{2-x-2y} xy + z\ dz\Big)dy\Big)dx = \int_0^1\Big(\int_0^{1-x}\Big[xyz + \tfrac{z^2}{2}\Big]_0^{2-x-2y} dy\Big)dx$$

$$= \int_0^1\Big(\int_0^{1-x} xy(2-x-2y) + \tfrac{1}{2}(2-x-2y)^2 dy\Big)dx = \int_0^1 \Big(\tfrac{1}{6}x^4 - \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{2}{3}x + \tfrac{2}{3}\Big)\, dx = \tfrac{13}{40}.$$

4. Integrační obor Ω je hranol. Viz obr. 34. Obor Ω zapíšeme pomocí nerovností jako oblast typu (x, y, z). Platí $\Omega = \{[x, y, z]; 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 3 - x, 0 \le z \le 4\}$.

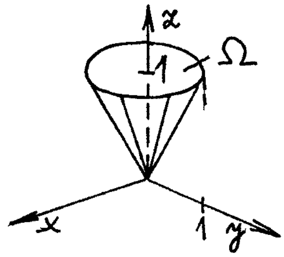


Obr. 34

$$\iiint_\Omega \tfrac{x+y}{z+4} dxdydz = \int_0^3\Big(\int_0^{3-x}\Big(\int_0^4 \tfrac{x+y}{z+4} dz\Big)dy\Big)dx = \int_0^3\Big(\int_0^{3-x}\Big[(x+y)\ln|z+4|\Big]_0^4 dy\Big)dx =$$

$$\ln 2 \int_0^3\Big(\int_0^{3-x}(x+y)dy\Big)dx = \ln 2\int_0^3 \Big[xy + \tfrac{1}{2}y^2\Big]_0^{3-x} dx = \ln 2 \int_0^3 x(3-x) + \tfrac{1}{2}(3-x)^2 dx = 9\ln 2.$$

5. Integrační obor Ω je kužel. Viz obr. 35. Obor Ω zapíšeme jako oblast typu (x,y,z). Platí $\Omega=\{[x,y,z];\, -1\le x\le 1, -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}, \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1\}$.



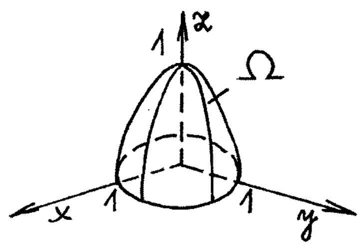
Obr. 35

$$\iiint\limits_\Omega z\,dxdydz = \int_{-1}^1\Big(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\Big(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 z\,dz\Big)dy\Big)dx = \int_{-1}^1\Big(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left[\frac{z^2}{2}\right]_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dy\Big)dx$$

$$=\frac12\int_{-1}^1\Big(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2-y^2)dy\Big)dx = \frac12\int_{-1}^1\left[y(1-x^2)-\frac13y^3\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$=\frac23\int_{-1}^1\sqrt{(1-x^2)^3}dx = \left|\begin{matrix} x=\sin t \\ -1\to-\frac12\pi, 1\to\frac12\pi\end{matrix}\right| = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt = \frac23\cdot\frac38\pi = \frac14\pi.$$

6. Integrační obor Ω je ohraničen paraboloidem a rovinou. Viz obr. 36. Obor Ω zapíšeme jako oblast typu (x,y,z) : $\Omega=\{[x,y,z];\, -1\le x\le 1, -\sqrt{1-x^2}\le y\le \sqrt{1-x^2}, 0\le z\le 1-x^2-y^2\}$.

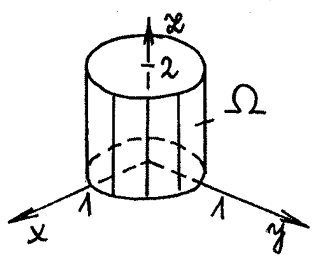


Obr. 36

$$\iiint\limits_\Omega dxdydz = \int_{-1}^1\Big(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\Big(\int_0^{1-x^2-y^2} dz\Big)dy\Big)dx = \int_{-1}^1\left[y(1-x^2)-\frac13y^3\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$=\frac43\int_{-1}^1\sqrt{(1-x^2)^3}dx = \frac43\cdot\frac38\pi = \frac12\pi.$$

7. Integrační obor Ω je válec. Viz obr. 37. Obor Ω zapíšeme jako oblast typu (x,y,z). Platí $\Omega=\{[x,y,z];\, -1\le x\le 1, -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}, 0\le z\le 2\}$.

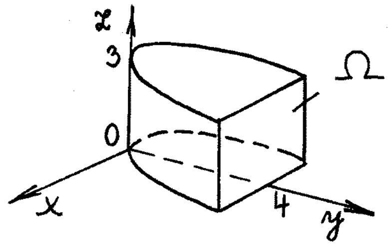


Obr. 37

$$\iiint\limits_\Omega x^2dxdydz = \int_{-1}^1\Big(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\Big(\int_0^2 x^2dz\Big)dy\Big)dx = \int_{-1}^1\Big(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left[x^2z\right]_0^2 dy\Big)dx =$$

$$=2\int_{-1}^1\left[x^2y\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dx = 4\int_{-1}^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx = 4\cdot\frac18\pi = \frac12\pi.$$

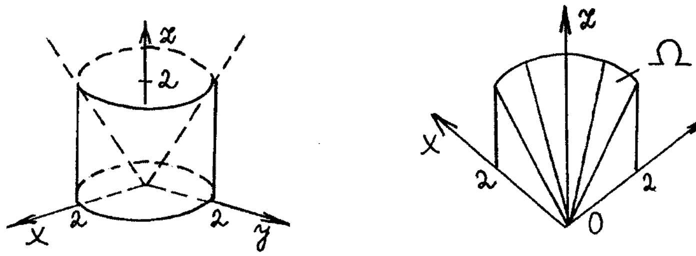
8. Integrační obor Ω je ohraničen parabolickou válcovou plochou a třemi rovinami. Viz obr. 38. Obor Ω zapíšeme pomocí nerovností jako oblast typu (x, y, z). Platí $\Omega = \{[x, y, z]; -2 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^2, 0 \leq z \leq 3\}$.



Obr. 38

$$\iiint\limits_{\Omega} z\ dxdydz = \int_{-2}^{2}\Big(\int_0^{x^2}\Big(\int_0^3 z\ dz\Big)dy\Big)dx = \int_{-2}^{2}\Big(\int_0^{x^2}\Big[\tfrac{1}{2}z^2\Big]_0^3 dy\Big)dx = \tfrac{9}{2}\int_{-2}^{2}\Big(\int_0^{x^2} dy\Big)dx =$$
$$\tfrac{9}{2}\int_{-2}^{2}\Big[y\Big]_0^{x^2} dx = \tfrac{9}{2}\int_{-2}^{2} x^2 dx = \tfrac{9}{2}\Big[\tfrac{1}{3}x^3\Big]_{-2}^{2} = 24.$$

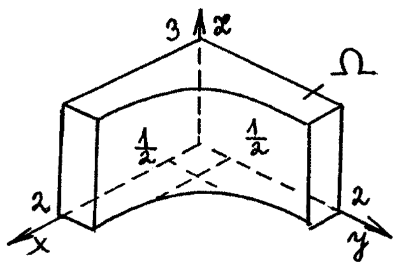
9. Integrační obor Ω je ohraničen válcovou plochou, kuželovou plochou a rovinou. Viz obr. 39. Obor Ω zapíšeme pomocí nerovností jako oblast typu (x, y, z). Platí $\Omega = \{[x, y, z]; 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$.



Obr. 39

$$\iiint\limits_{\Omega} xy\ dxdydz = \int_0^2\Big(\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\Big(\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} xy\ dz\Big)dy\Big)dx = \int_0^2\Big(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy\sqrt{x^2+y^2}dy\Big)dx =$$
$$\int_0^2\Big[\tfrac{1}{3}x(\sqrt{x^2+y^2})^3\Big]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx = \tfrac{1}{3}\int_0^2 (8x - x^4)dx = \tfrac{16}{5}.$$

10. Integrační obor Ω je ohraničen válcovou plochou $xy = 1$ a šesti rovinami. Viz obr. 40. Obor Ω rozdělíme na dvě části Ω_1 a Ω_2 tak, že $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Přitom $\Omega_1 = \{[x, y, z]; 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$, $\Omega_2 = \{[x, y, z]; \frac{1}{2} \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}, 0 \leq z \leq 3\}$.



Obr. 40

$$\iiint\limits_{\Omega} dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_1} dxdydz + \iiint\limits_{\Omega_2} dxdydz = \int_0^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^2\Big(\int_0^3 dz\Big)dy\Big)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2}\Big(\int_0^{\frac{1}{x}}\Big(\int_0^3 dz\Big)dy\Big)dx =$$
$$3\int_0^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^2 dy\Big)dx + 3\int_{\frac{1}{2}}^{2}\Big(\int_0^{\frac{1}{x}} dy\Big)dx = 6\int_0^{\frac{1}{2}} dx + 3\int_{\frac{1}{2}}^{2} \tfrac{1}{x}\ dx = 3 + 6\ln 2.$$

LEKCE 11. DVOJROZMĚRNÉ INTEGRÁLY II.

(Transformace integrálů)

1. Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} dxdy$, kde Ω je určena vztahem $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 \leq 1$.

2. Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} dxdy$, kde Ω je určena vztahem $x^2 + y^2 \leq 2ax, a > 0$.

3. Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} dxdy$, kde Ω je ohraničena $y = x+1, y = x+2, y = 1-x, y = 4-x$.

4. Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} dxdy$, kde Ω je ohraničena $y = 2x, y = 2x-7, x = 4y-7, x = 4y-14$.

5. Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} dxdy$, kde Ω je ohraničena $y = x^2, y = 2x^2, x = y^2, x = 2y^2$.

6. Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} dxdy$, kde Ω: $x > 0$, $\frac{\sqrt{3}}{3}x \leq y \leq \sqrt{3}x$, $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$.

7. Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} \dfrac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2} dxdy$, kde Ω je určena vztahem $1 \leq x^2 + y^2 \leq e$.

8. Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} x^2 + y^2 \; dxdy$, kde Ω je určena vztahy $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, $|x| \leq y$.

9. Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} x^2 dxdy$, kde Ω je určena vztahy $0 \leq 2y \leq x$, $x^2 + 4y^2 \leq 4$.

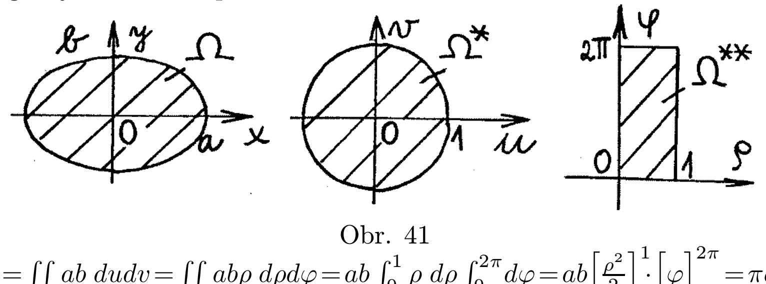
10. Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{4x^2 + y^2} dxdy$, kde Ω je určena vztahy $y = 2x, y = 0, 2x = 1$.

Výsledky úloh:

1. πab. **2.** πa^2. **3.**$\frac{3}{2}$. **4.**7. **5.** $\frac{1}{12}$. **6.** $\frac{\pi^2}{6}$. **7.**$\frac{\pi}{2}$. **8.** $\frac{15}{8}\pi$. **9.** $\frac{\pi+2}{4}$. **10.** $\frac{1}{12}(\sqrt{2} + \ln \operatorname{tg}\frac{3\pi}{8})$.

ŘEŠENÍ.

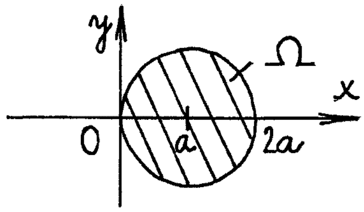
1. Integrační obor Ω určený vztahem $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 \leq 1$ je vnitřek elipsy. Viz obr. 41. Nejprve provedeme transformaci, která oblast Ω ztransformuje v kruh $\Omega^* = \{[u,v]; u^2 + v^2 \leq 1\}$, který má střed v počátku a poloměr 1. Stačí položit $x = au, y = bv$. Jakobián této transformace je $J = \left|\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right| = ab$. Pak provedeme transformaci do polárních souřadnic, která oblast Ω^* ztransformuje v obdélník, tj. dvojrozměrný interval $\Omega^{**} = \{[\rho,\varphi]; \rho \in \langle 0,1\rangle, \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$. Pomocí Dirichletovy věty integrál již snadno dopočítáme.



Obr. 41

$$\iint\limits_{\Omega} dxdy = \iint\limits_{\Omega^*} ab\; dudv = \iint\limits_{\Omega^{**}} ab\rho\; d\rho d\varphi = ab\int_0^1 \rho\; d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = ab\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 \cdot \left[\varphi\right]_0^{2\pi} = \pi ab.$$

2. Rovnici $x^2 + y^2 = 2ax$ upravíme na tvar $(x-a)^2 + y^2 = a^2$. Odtud plyne, že integrační obor je kruh se středem v bodě $[a, 0]$ a poloměru a . Viz obr. 42. Nejprve provedeme transformaci, která posune střed kruhu do počátku souřadnicového systému. Stačí položit $x = u + a, y = v$. Jakobián této transformace je $J = \left|\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right| = ab$. Vznikne oblast $\Omega^* = \{[u,v]; u^2 + v^2 \leq a^2\}$. Pak provedeme transformaci do polárních souřadnic, která oblast Ω^* ztransformuje v obdélník, $\Omega^{**} = \{[\rho,\varphi]; \rho \in \langle 0, a\rangle, \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$. Integrál dopočítáme pomocí Dirichletovy věty.



Obr. 42

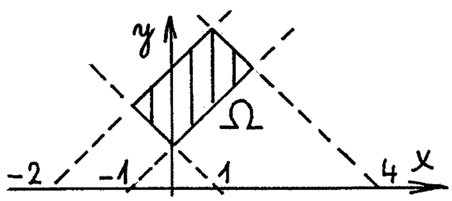
$\iint\limits_{\Omega} dxdy = \iint\limits_{\Omega^*} dudv = \iint\limits_{\Omega^{**}} \rho\, d\rho d\varphi = ab \int_0^a \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^a \cdot \left[\varphi\right]_0^{2\pi} = \pi a^2.$

Integrál lze řešit i bez transformace, která posune střed kružnice. V tomto případě, jak dále uvidíme, nelze použít Dirichletovu větu. Rovnice $x^2 + y^2 = 2ax$ má po transformaci do polárních souřadnic tvar $\rho = 2a\cos\varphi$. Kruh Ω se ztransformuje v $\Omega^\star = \{[\rho, \varphi]; -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \rho \le 2a\cos\varphi\}$.

$\iint\limits_{\Omega} dxdy = \iint\limits_{\Omega^\star} \rho\, d\rho d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\int_0^{2a\cos\varphi} \rho\, d\rho) d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{2a\cos\varphi} d\varphi = 2a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi$

$= 2a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)\, d\varphi = 2a^2 \left[\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi a^2.$

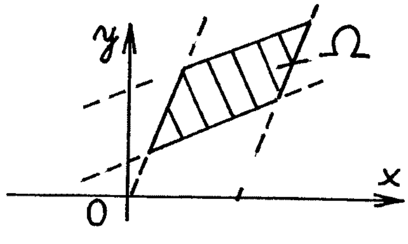
3. Integrační obor Ω je ohraničen přímkami. Viz obr. 43. Zřejmě Ω je obdélník, který není dvojrozměrným intervalem. Transformaci provedeme tak, aby přímky tvořící hranici obrazce byly rovnoběžné s osami. Nové souřadnice u, v zavedeme vztahy $u = y - x, v = y + x$. Odtud po krátké úpravě plyne $x = -\frac{1}{2}(u - v), y = \frac{1}{2}(u + v)$. Jakobián této transformace je $J = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$. Oblast Ω se ztransformuje v dvojrozměrný interval $\Omega^* = \{[u, v]; u \in \langle 1, 2\rangle, v \in \langle 1, 4\rangle\}$.



Obr. 43

$\iint\limits_{\Omega} dxdy = \iint\limits_{\Omega^*} \frac{1}{2} dudv = \frac{1}{2}\int_1^2 du \cdot \int_1^4 dv = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = \frac{3}{2}.$

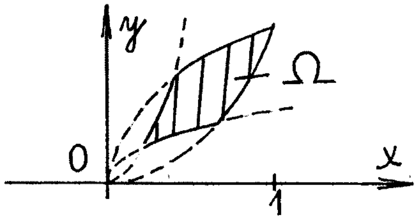
4. Integrační obor je rovnoběžník. Viz obr. 44. Transformaci provedeme tak, aby úsečky tvořící hranici obrazce byly rovnoběžné se souřadnicovými osami. Nové souřadnice u, v zavedeme vztahy $u = y - 2x, v = 4y - x$. Odtud po krátké úpravě plyne $x = \frac{1}{7}(-4u + v), y = \frac{1}{7}(-u + 2v)$. Jakobián této transformace je $J = \begin{vmatrix} -\frac{4}{7}, & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7}, & \frac{2}{7} \end{vmatrix} = -\frac{1}{7}$. Oblast Ω se ztransformuje v $\Omega^* = \{[u, v]; u \in \langle 7, 0\rangle, v \in \langle 7, 14\rangle\}$.



Obr. 44

$\iint\limits_{\Omega} dxdy = \iint\limits_{\Omega^*} \frac{1}{7} dudv = \frac{1}{7}\int_{-7}^0 du \cdot \int_7^{14} dv = \frac{1}{3} \cdot 7 \cdot 7 = 7.$

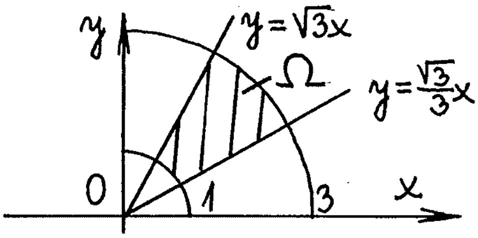
5. Integrační obor je ohraničen parabolami. Viz obr. 45. Transformaci provedeme tak, aby parabolické oblouky tvořící hranici obrazce byly obrazy úseček. Nové souřadnice u, v zavedeme vztahy $y^2 = ux, x^2 = vy$. Odtud po krátké úpravě plyne $x = \sqrt[3]{uv^2}, y = \sqrt[3]{u^2v}$. Jakobián této transformace je $J = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{2}{3}}, & \frac{2}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}}, & \frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$. Oblast Ω se ztransformuje v $\Omega^* = \{[u, v]; u \in \langle \frac{1}{2}, 1\rangle, v \in \langle \frac{1}{2}, 1\rangle\}$. Zřejmě $|\Omega^*| = \frac{1}{4}$.



Obr. 45

$$\iint\limits_{\Omega} dxdy = \iint\limits_{\Omega^*} \tfrac{1}{3}dudv = \tfrac{1}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1} du \cdot \int_{\frac{1}{2}}^{1} dv = \tfrac{1}{3}|\Omega^*| = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{12}.$$

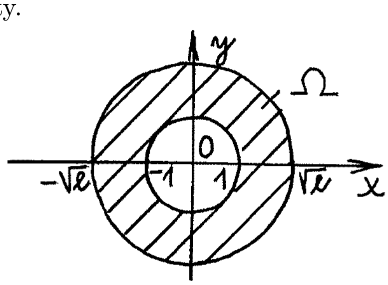
6. Integrační obor Ω je část mezikruží se středem v počátku a poloměry kružnic 1 a 3 . Viz obr. 46. Provedeme transformaci do polárních souřadnic, která oblast Ω ztransformuje v obdélník $\Omega^* = \{[\rho, \varphi]; \rho \in \langle 1, 3\rangle, \varphi \in \langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\rangle\}$.



Obr. 46

$$\iint\limits_{\Omega} \operatorname{arctg}\tfrac{y}{x}dxdy = \iint\limits_{\Omega^*} \operatorname{arctg}\tfrac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi}\cdot\rho\, d\rho d\varphi = \iint\limits_{\Omega^*} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi)\cdot\rho\, d\rho d\varphi = \iint\limits_{\Omega^*} \varphi\cdot\rho\, d\rho d\varphi =$$
$$= \int_1^3 \rho d\rho\cdot\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \varphi d\varphi = \left[\tfrac{\rho^2}{2}\right]_1^3\cdot\left[\varphi^2\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \tfrac{\pi^2}{6}.$$

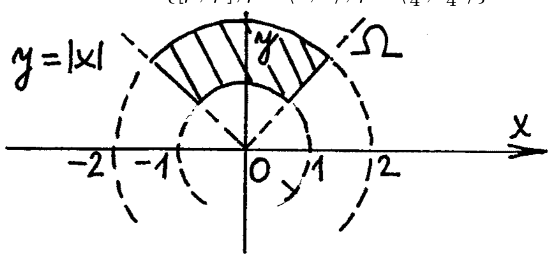
7. Integrační obor Ω je mezikruží se středem v počátku s poloměry kružnic 1 a $\sqrt{e}$. Viz obr. 47. Provedeme transformaci do polárních souřadnic, která oblast Ω ztransformuje v obdélník, $\Omega^* = \{[\rho, \varphi]; \rho \in \langle 1, \sqrt{e}\rangle, \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$. Integrál dopočítáme pomocí Dirichletovy věty.



Obr. 47

$$\iint\limits_{\Omega} \tfrac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy = \iint\limits_{\Omega^*} \tfrac{\ln(\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi)}{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}\rho d\rho d\varphi = \iint\limits_{\Omega^*} \tfrac{\ln\rho^2}{\rho}\, d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{\sqrt{e}} \tfrac{\ln\rho^2}{\rho}\, d\rho$$
$$= \left| \begin{matrix} t = \ln\rho^2 \\ dt = \frac{2d\rho}{\rho} \\ 1\to 0, \sqrt{e}\to 1 \end{matrix} \right| = 2\pi\int_0^1 \tfrac{t}{2}\, dt = \tfrac{\pi}{2}.$$

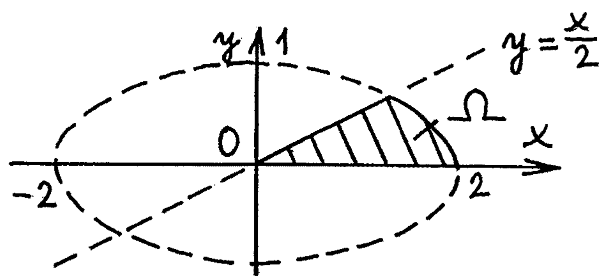
8. Integrační obor Ω je část mezikruží se středem v počátku a poloměry kružnic 1 a 2 . Viz obr. 48. Provedeme transformaci do polárních souřadnic, která oblast Ω ztransformuje v obdélník $\Omega^* = \{[\rho,\varphi]; \rho\in\langle 1,2\rangle, \varphi\in\langle \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\rangle\}$.



Obr. 48

$$\iint\limits_{\Omega} x^2+y^2 dxdy = \iint\limits_{\Omega^*} (\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi)\rho\, d\rho d\varphi = \int_1^2 \rho^3 d\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_1^2 = \frac{15\pi}{8}.$$

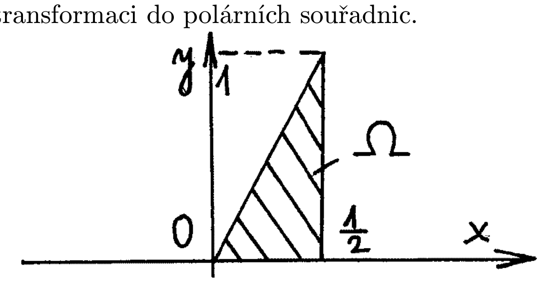
9. Integrační obor Ω je ohraničen elipsou $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ a dvěma přímkami. Viz obr. 49. Nejprve provedeme transformaci, která elipsu ztransformuje v kruh. Stačí položit $x = 2u, y = v$. Jakobián této transformace je $J = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$. Pak provedeme transformaci do polárních souřadnic, která oblast Ω^* ztransformuje v obdélník $\Omega^{**} = \{[\rho,\varphi]; \rho\in\langle 0,1\rangle, \varphi\in\langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle\}$.



Obr. 49

$$\iint\limits_{\Omega} x^2 dxdy = \iint\limits_{\Omega^*} 4u^2\cdot 2\, dudv = 8\iint\limits_{\Omega^{**}} \rho^2\cos^2\varphi\cdot\rho\, d\rho d\varphi = 8\int_0^1 \rho^3\, d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\varphi d\varphi =$$
$$= 8\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \cdot \left[\frac{1}{2}(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi+2}{4}.$$

10. Integrační obor Ω je trojúhelník. Viz obr. 50. Ke zjednodušení integrandu použijeme transformaci $x = \frac{u}{2}, y = v$. Jakobián této transformace je $J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$. Pak provedeme transformaci do polárních souřadnic.



Obr. 50

$$\iint\limits_{\Omega} \sqrt{4x^2+y^2} dxdy = \iint\limits_{\Omega^*} \frac{1}{2}\sqrt{u^2+v^2}\, dudv = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega^{**}} \rho^2 d\rho d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} \rho^2 d\rho) d\varphi =$$
$$= \frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3\varphi} d\varphi = \frac{1}{6}\left[\frac{\sin\varphi}{2\cos^2\varphi} + \frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{12}(\sqrt{2} + \ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}).$$

LEKCE 12. TROJROZMĚRNÉ INTEGRÁLY II.

(Transformace integrálů)

1. Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} x^2 + y^2 dxdydz$, kde $\Omega: 1 \le z \le 2, x^2 + y^2 \le 1$.

2. Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} dxdydz$, kde $\Omega: -1 \le x \le 1, z \ge 0, y^2 + z^2 \le 1$.

3. Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dxdydz$, kde $\Omega: x^2 + y^2 \le z \le 1$.

4. Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} z\, dxdydz$, kde $\Omega: 0 \le z \le 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$.

5. Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2 + y^2}; dxdydz$, kde $\Omega: z = 0, z = 3, y \ge 0, x^2 + y^2 - 2x = 0$.

6. Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} x^2 z\, dxdydz$, kde $\Omega: z \ge 0, x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$.

7. Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz$, kde $\Omega: x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, x^2+y^2+z^2 \le 1$.

8. Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} \dfrac{dxdydz}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$, kde $\Omega: 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4$.

9. Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} dxdydz$, kde $\Omega: x^2 + 4y^2 + z^2 \le 4$.

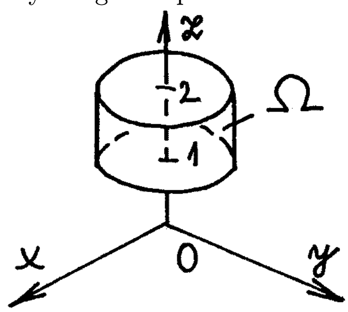
10. Spočtěte $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdydz$, kde $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \le z$.

Výsledky úloh:

1. $\frac{1}{2}\pi$. **2.** π. **3.** $\frac{4}{15}\pi$. **4.** $\frac{16}{3}\pi$. **5.** 8. **6.** $\frac{1}{24}\pi a^6$. **7.** $\frac{\pi}{8}$. **8.** $\frac{7}{12}\pi$. **9.** $\frac{16}{3}\pi$. **10.** $\frac{1}{64}\pi^2$.

ŘEŠENÍ.

1. Integrační obor Ω určený vztahy $1 \le z \le 2, x^2 + y^2 \le 1$ je válec. Viz obr. 51. Provedeme transformaci do válcových souřadnic, kde $\rho \in \langle 0, 1\rangle, \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle, z \in \langle 1, 2\rangle$. Pak pomocí Dirichletovy věty integrál dopočítáme.

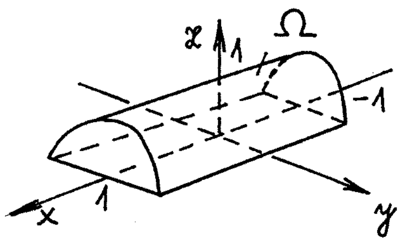


Obr. 51

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2 + y^2\, dxdydz = \iiint\limits_{\Omega^*} (\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi) \cdot \rho\, d\rho d\varphi dz = \iiint\limits_{\Omega^*} \rho^3\, d\rho d\varphi dz =$$

$$= \int_0^1 \rho^3\, d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_1^2 dz = \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \cdot \left[\varphi\right]_0^{2\pi} \cdot \left[z\right]_1^2 = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 1 = \frac{\pi}{2}.$$

2. Vztahy $-1 \leq x \leq 1, z \geq 0, y^2 + z^2 \leq 1$ definují horní polovinu válce, jehož osa splývá s osou x. Viz obr. 52.

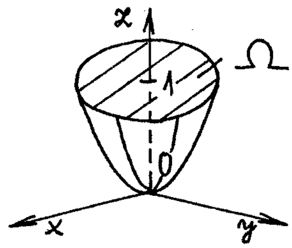


Obr. 52

Provedeme transformaci do "válcových souřadnic". Transformační rovnice jsou tvaru $x=x, y=\rho\cos\varphi, z=\rho\sin\varphi$. Jakobián transformace je $J=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix}=\rho$.

$$\iiint_{\Omega} dxdydz=\iiint_{\Omega^*} \rho\; dxd\rho d\varphi=\int_{-1}^{1} dx\cdot\int_0^1 \rho\; d\rho\cdot\int_0^{\pi} d\varphi=\Big[x\Big]_{-1}^{1}\cdot\Big[\frac{\rho^2}{2}\Big]_0^1\cdot\Big[\varphi\Big]_0^{\pi}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi=\pi.$$

3. Oblast Ω je těleso, které je zdola ohraničeno paraboloidem $z = x^2 + y^2$ a zhora rovinou $z = 1$. Viz obr. 53.



Obr. 53

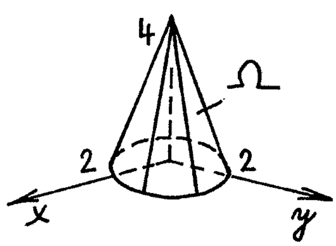
Provedeme transformaci do válcových souřadnic, kde $\rho\in\langle 0,1\rangle, \varphi\in\langle 0,2\pi\rangle, z\in\langle\rho^2,1\rangle$.

$$\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\;\; dxdydz = \iiint_{\Omega^*} \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}\cdot\rho\;\; d\rho d\varphi dz = \iiint_{\Omega^*} \rho^2\;\; d\rho d\varphi dz =$$

$$\int_0^1\Big(\int_0^{2\pi}\Big(\int_{\rho^2}^1 \;\rho^2\;\; dz\Big)d\varphi\Big)d\rho = \int_0^1\Big(\int_0^{2\pi}\rho^2\Big[z\Big]_{\rho^2}^{1}\;\; d\varphi\Big)d\rho = \int_0^1\Big(\int_0^{2\pi}\rho^2(1-\rho^2)\;\; d\varphi\Big)d\rho =$$

$$\int_0^1 \rho^2(1-\rho^2)\Big[\varphi\Big]_0^{2\pi}\; d\rho=2\pi\Big[\frac{1}{3}\rho^3-\frac{1}{5}\rho^5\Big]_0^1 = 2\pi\cdot\frac{2}{15} = \frac{4}{15}\pi.$$

4. Oblast Ω je těleso, které je zdola ohraničeno rovinou $z = 0$ a zhora kuželovou plochou $z = 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}$. Viz obr. 54.



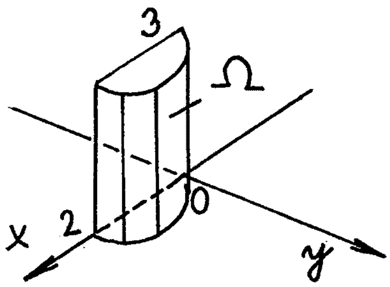
Obr. 54

Provedeme transformaci do válcových souřadnic: $\rho\in\langle 0,2\rangle, \varphi\in\langle 0,2\pi\rangle, z\in\langle 0,4-2\rho\rangle$.

$$\iiint_{\Omega} z\; dxdydz=\iiint_{\Omega^*} z\rho\; d\rho d\varphi dz=\int_0^2\Big(\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{4-2\rho} z\rho\; dz\Big)d\varphi\Big)d\rho=\int_0^1\Big(\int_0^{2\pi}\Big[\frac{z^2}{2}\Big]_0^{4-2\rho}\rho\; d\varphi\Big)d\rho$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\Big(\int_0^{2\pi}(4-2\rho)^2\rho\; d\varphi\Big)d\rho=\pi\int_0^2(4-2\rho)^2\rho\; d\rho=\frac{16}{3}\pi.$$

5. Vztah $x^2+y^2=2x$ upravíme na tvar $(x-1)^2+y^2=1$. Odtud a ze vztahů $z=0, z=3, y\le 0$ plyne, že Ω je polovina válce. Viz obr. 55. Provedeme transformaci do válcových souřadnic, kde $\rho\in\langle 0,2\cos\varphi\rangle, \varphi\in\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle, z\in\langle 0,3\rangle$.

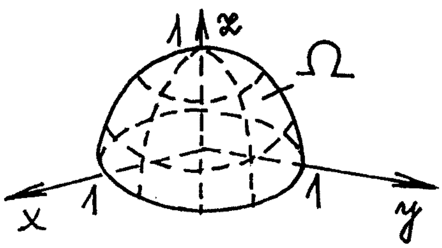


Obr. 55

$$\iiint_\Omega z\sqrt{x^2+y^2}\;dxdydz=\iiint_{\Omega^*} z\rho^2\;d\rho d\varphi dz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\int_0^{2\cos\varphi}(\int_0^3 z\rho^2\;dz)d\rho)d\varphi=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\int_0^{2\cos\varphi}\left[\tfrac{1}{2}z^2\right]_0^3\rho^2\;d\rho)d\varphi=\tfrac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\tfrac{\rho^3}{3}\right]_0^{2\cos\varphi}d\varphi=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\;d\varphi=8.$$

6. Integrační obor Ω je horní polovina koule. Viz obr. 56. Provedeme transformaci do sférických souřadnic, kde $\rho\in\langle 0,a\rangle, \varphi\in\langle 0,2\pi\rangle, \theta\in\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle$.



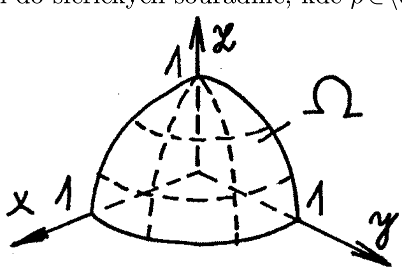
Obr. 56

$$\iiint_\Omega x^2z\;dxdydz=\iiint_{\Omega^*}(\rho\cos\varphi\sin\theta)^2(\rho\cos\theta)(\rho^2\sin\theta)d\rho d\varphi d\theta=$$

$$\iiint_{\Omega^*}\rho^5\cos^2\varphi\sin^3\theta\cos\theta\;d\rho d\varphi d\theta=\int_0^a\rho^5d\rho\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\;d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos\theta d\theta=$$

$$=\left|\begin{array}{c} t=\sin\theta\\ dt=\cos\theta d\theta\\ 0\to 0,\frac{\pi}{2}\to 1\end{array}\right|=\tfrac{1}{6}a^6\cdot\left[\tfrac{1}{2}\varphi+\tfrac{1}{4}\sin 2\varphi\right]_0^{2\pi}\cdot\int_0^1 t^3dt=\tfrac{1}{6}a^6\cdot\pi\cdot\tfrac{1}{4}=\tfrac{1}{24}\pi a^6.$$

7. Integrační obor Ω je osmina koule ležící v prvním oktantu. Viz obr. 57. Provedeme transformaci do sférických souřadnic, kde $\rho\in\langle 0,1\rangle, \varphi\in\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle, \theta\in\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle$.

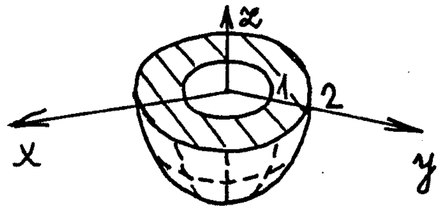


Obr. 57

$$\iiint_\Omega\sqrt{x^2+y^2+z^2}\;dxdydz=\iiint_{\Omega^*}\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta+\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+\rho^2\cos^2\theta}\cdot\rho^2\sin\theta\;d\rho d\varphi d\theta$$

$$=\int_0^1(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\rho^3\sin\theta\;d\theta)d\varphi)d\rho=\int_0^1\rho^3d\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\;d\theta=\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{\pi}{2}\cdot 1=\tfrac{\pi}{8}.$$

8. Oblast Ω je ohraničena poloprostorem $z \leq 0$ a dvěma sférami. Viz obr. 58. Provedeme transformaci do sférických souřadnic, kde $\rho \in \langle 1, 2\rangle, \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle, \theta \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi\rangle$.

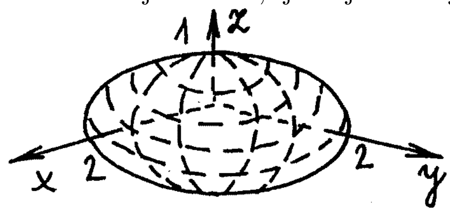


Obr. 58

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^3} = \iiint\limits_{\Omega^*} \frac{\rho^2 \sin\theta \cdot d\rho d\varphi d\theta}{(\rho^2)^3} = \iiint\limits_{\Omega^*} \frac{1}{\rho^4} \sin\theta \, d\rho d\varphi d\theta = \int_1^2 \frac{d\rho}{\rho^4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta =$$

$$= \left[\frac{-1}{3\rho^3}\right]_1^2 \cdot \left[\varphi\right]_0^{2\pi} \cdot \left[-\cos\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{7}{24} \cdot 2\pi \cdot 1 = \frac{7}{12}\pi.$$

9. Vztah $x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 4$ upravíme na tvar $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{4} \leq 1$. Odtud plyne, že Ω je elipsoid. Elipsoid ztransformuje v kouli. Stačí položit $x = 2u, y = v, z = 2w$. Jakobián této transformace je $J = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$. Provedeme transformaci do sférických souřadnic, která kouli ztransformuje v kvádr, tj. trojrozměrný interval. Viz obr.59.

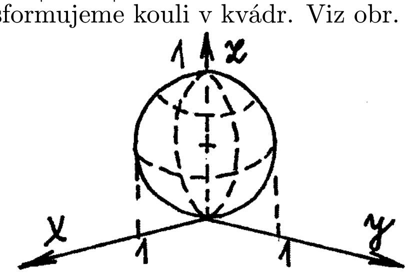


Obr. 59

$$\iiint\limits_{\Omega} dxdydz = \iiint\limits_{\Omega^*} 4 \, dudvdw = 4 \iiint\limits_{\Omega^{**}} \rho^2 \sin\theta \, d\rho d\varphi d\theta = 4 \int_0^1 \rho^2 d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta$$

$$= 4\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 \cdot \left[\varphi\right]_0^{2\pi} \cdot \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{16}{3}\pi.$$

10. Vztah $x^2 + y^2 + z^2 \leq z$ upravíme na tvar $x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}$. Odtud plyne, že Ω je koule se středem v bodě $[0, 0, \frac{1}{2}]$ a poloměrem $\frac{1}{2}$. Provedeme transformaci, která posune střed koule do počátku. Stačí položit $x = u, y = v, z = w + \frac{1}{2}$. Jakobián této transformace je $J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Dále provedeme transformaci do sférických souřadnic, která ztransformujeme kouli v kvádr. Viz obr. 60.



Obr. 60

$$\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dxdydz = \iiint\limits_{\Omega^*} \sqrt{u^2 + v^2} \, dudvdw = \iiint\limits_{\Omega^{**}} \rho \sin\theta \cdot \rho^2 \sin\theta \, d\rho d\varphi d\theta =$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \rho^3 d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin^2\theta \, d\theta = \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\varphi\right]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi} = \frac{1}{64} \cdot 2\pi \cdot \frac{12}{\pi} = \frac{1}{64}\pi^2.$$

LEKCE 13. APLIKACE VÍCEROZMĚRNÝCH INTEGRÁLŮ.

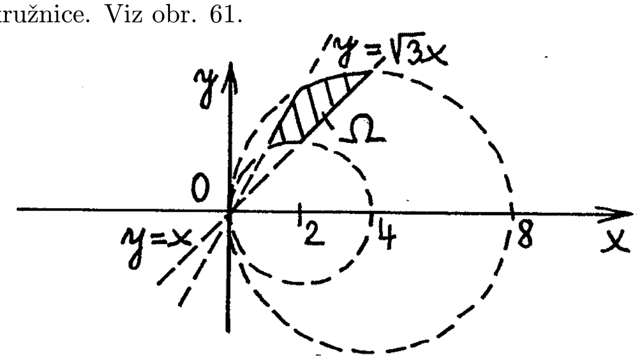
1. Spočtěte obsah rovinného obrazce Ω ohraničeného přímkami $y = x$, $y = \sqrt{3}x$ a křivkami $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$.
2. Spočtěte objem tělesa Ω určeného vztahy $x^2+y^2 \le z^2$, $1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4$, $z \ge 0$.
3. Spočtěte objem tělesa Ω určeného vztahem $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 6 - (x^2 + y^2)$.
4. Spočtěte velikost povrchu části paraboloidu $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, kde $f(x, y) \ge 0$.
5. Spočtěte velikost povrchu tak zvaného Vivianova oka, které vznikne jako průnik polokoule $x^2+y^2+z^2 = 4a^2$, $z \ge 0$ s válcovou plochou $x^2+y^2 = 2ax$, kde $a > 0$.
6. Určete hmotnost krychle o straně $2a$. Hustota krychle je přímo úměrná čtverci vzdálenosti od průsečíku tělesových úhlopříček a ve vrcholech je rovna 1.
7. Určete hmotnost koule o poloměru a. Hustota koule je přímo úměrná vzdálenosti od středu koule a na povrchu je rovna 1.
8. Určete těžiště rovinného obrazce Ω, který je ohraničen křivkami $y = x^2$, $x+y = 2$. Hustota obrazce je konstantní a je rovna 1.
9. Určete těžiště tělesa $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ s konstantní hustotou, kde $\Omega_1 = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 2\rangle$ a $\Omega_2 = \langle 0, 1\rangle \times \langle 1, 2\rangle \times \langle 0, 1\rangle$.
10. Určete moment setrvačnosti elipsoidu $\Omega : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$ vzhledem k ose y.

Výsledky úloh:

1. $\pi + 3\sqrt{3} - 6$. **2.** $\frac{7}{3}\pi(2 - \sqrt{2})$. **3.** $\frac{32}{3}\pi$. **4.** $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$. **5.** $4a^2(\pi - 2)$. **6.** $\frac{8}{3}a^3$. **7.** πa^3.
8. $T = [-\frac{1}{2}, \frac{8}{5}]$. **9.** $T = [\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}]$. **10.** $\frac{4}{15}\pi abc(a^2 + c^2)$.

ŘEŠENÍ.

1. Nejprve provedeme úpravu rovnice $x^2 + y^2 = 4x$ na tvar $(x - 2)^2 + y^2 = 4$. Podobně $x^2 + y^2 = 8x$ upravíme na tvar $(x - 4)^2 + y^2 = 16$. Odtud plyne, že zadané křivky jsou kružnice. Viz obr. 61.



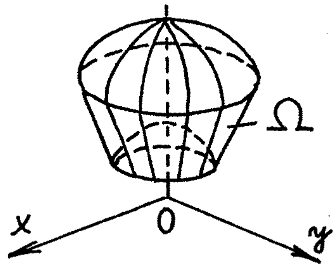
Obr. 61

Obsah obrazce Ω určíme ze vztahu $|\Omega| = \iint_\Omega dxdy$. Protože Ω je částí kruhu, provedeme transformaci do polárních souřadnic. Transformováním jednotlivých rovnic získáme, že $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$ a $4\cos\varphi \le \rho \le 8\cos\varphi$. Platí

$$\iint_\Omega dxdy = \iint_{\Omega^*} \rho\, d\rho d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} \rho\, d\rho\right) d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\rho^2\right]_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} d\varphi = 24\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\varphi\, d\varphi =$$

$$24\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)\, d\varphi = 12\left[\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \pi + 3\sqrt{3} - 6.$$

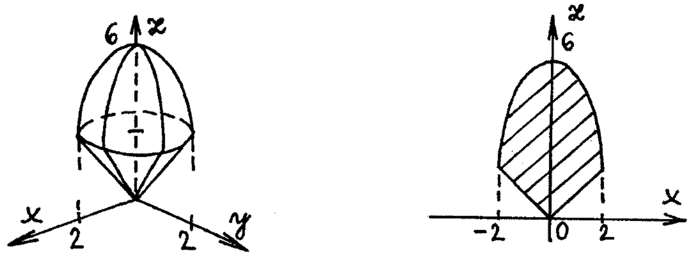
2. Oblast Ω je ohraničena kuželovou plochou $z=\sqrt{x^2+y^2}$ a dvěma kulovými plochami. Viz obr. 62. Provedeme transformaci do sférických souřadnic, kde $\rho\in\langle 1,2\rangle, \varphi\in\langle 0,2\pi\rangle, \theta\in\langle 0,\frac{\pi}{4}\rangle$. Objem tělesa Ω určíme ze vztahu $|\Omega|=\iiint\limits_{\Omega} dxdydz$.



Obr. 62

$$\iiint\limits_{\Omega} dxdydz=\iiint\limits_{\Omega^*}\rho^2\sin\theta\, d\rho d\varphi d\theta=\int_1^2\rho^2\, d\rho\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\, d\theta=$$
$$=\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_1^2\cdot\left[\varphi\right]_0^{2\pi}\cdot\left[-\cos\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{7}{3}\cdot 2\pi\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2}=\frac{7}{3}\pi(2-\sqrt{2}).$$

3. Oblast Ω je ohraničena zhora paraboloidem $z=6-(x^2+y^2)$ a zdola kuželovou plochou $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Viz obr. 63. Musíme zjistit, v jaké výšce se paraboloid s kuželem protnou. Vyřešíme rovnici $\sqrt{x^2+y^2}=6-(x^2+y^2)$. Máme $x^2+y^2+\sqrt{x^2+y^2}-6=0$. Zavedeme substituci $z=x^2+y^2$. Odtud $z^2+z-6=0$ a $(z-2)(z+3)=0$. Řešení $z=-3$ nevyhovuje. Platí tedy $z=2$. Ve výšce $z=2$ protne paraboloid kužel v kružnicim $x^2+y^2=4$. Provedeme transformaci do válcových souřadnic. Z předchozího plyne, že $\rho\in\langle 0,2\rangle, \varphi\in\langle 0,2\pi\rangle, z\in\langle\rho,6-\rho^2\rangle$. Objem tělesa Ω určíme opět ze vztahu $|\Omega|=\iiint\limits_{\Omega} dxdydz$.



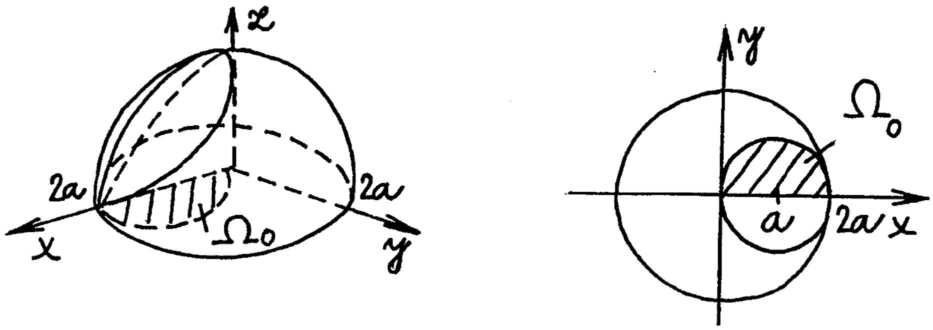
Obr. 63

$$\iiint\limits_{\Omega} dxdydz=\iiint\limits_{\Omega^*}\rho\, d\rho d\varphi dz=\int_0^2\Big(\int_0^{2\pi}\Big(\int_\rho^{6-\rho^2}\rho\, dz\Big)d\varphi\Big)d\rho=\int_0^2\Big(\int_0^{2\pi}\Big[z\rho\Big]_\rho^{6-\rho^2}d\varphi\Big)d\rho=$$
$$=2\pi\int_0^2(6\rho-\rho^2-\rho^3)d\rho=2\pi\Big[3\rho^2-\frac{1}{3}\rho^3-\frac{1}{4}\rho^4\Big]_0^2=\frac{32}{3}\pi.$$

4. Velikost povrchu S paraboloidu určíme ze vztahu $S=\iint_\Omega\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}\, dxdy$, kde Ω je kruh $x^2+y^2\leq 1$. Spočteme parciální derivace. Platí $f'_x=-2x, f'_y=-2y$. Dosadíme do výše uvedeného vztahu a pak provedeme transformaci do polárních souřadnic, kde $\rho\in\langle 0,1\rangle, \varphi\in\langle 0,2\pi\rangle$. Platí

$$\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dxdy=\iint\limits_{\Omega^*}\rho\sqrt{1+4\rho^2}d\rho d\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot\int_0^1\rho\sqrt{1+4\rho^2}\, d\rho=$$
$$=2\pi\int_0^1\rho\sqrt{1+4\rho^2}\, d\rho=\left|\begin{array}{c} t=1+4\rho^2\\ \rho d\rho=\frac{1}{8}dt\\ 0\to 1, 1\to 5\end{array}\right|=\frac{\pi}{4}\int_1^5\sqrt{t}dt=\frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right]_1^5=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$$

5. Velikost povrchu S určíme opět ze vztahu $S=\iint_\Omega \sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}\ dxdy$, kde Ω je kruh $x^2+y^2 \leq 2ax$, tj. $(x-a)^2+y^2=a^2$. Spočteme parciální derivace. Platí $f'_x = \frac{-x}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}$, $f'_y = \frac{-y}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}$. Dosadíme do výše uvedeného vztahu a pak provedeme transformaci do polárních souřadnic. Pro usnadnění výpočtu budeme integrovat pouze přes polovinu oblasti Ω, kterou označíme Ω_0. Korektnost tohoto zjednodušení plyne ze symetrie Vivianova oka. Viz obr. 64. Po transformaci Ω_0 do polárních souřadnic platí, že $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, $\rho \in \langle 0, 2a\cos\varphi\rangle$.



Obr. 64

$$\iint\limits_\Omega \sqrt{1+\frac{x^2}{4a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{4a^2-x^2-y^2}}\ dxdy = \iint\limits_\Omega \sqrt{\frac{4a^2}{4a^2-x^2-y^2}}\ dxdy = 2\iint\limits_{\Omega_0} \frac{2a\ dxdy}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}$$

$$= 4a\iint\limits_{\Omega^*} \frac{\rho\ d\rho d\varphi}{\sqrt{4a^2-\rho^2}} = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^{2a\cos\varphi} \frac{\rho}{\sqrt{4a^2-\rho^2}}\ d\rho\Big)d\varphi = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[-\sqrt{4a^2-\rho^2}\Big]_0^{2a\cos\varphi} d\varphi$$

$$= 8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\varphi)\ d\varphi = 8a^2\Big[\varphi+\cos\varphi\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4a^2(\pi-2).$$

6. Střed krychle Ω umístíme do počátku systému souřadnic. Tedy $\Omega = \langle -a, a\rangle^3$. Dále nalezneme funkci hustoty $\rho(x,y,z)$. Vzdálenost bodu $a=[x,y,z]$ od počátku je dán vztahem $d(a,o)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Odtud plyne $\rho(x,y,z)=k(x^2+y^2+z^2)$. Konstantu přímé úměrnosti určíme dosazením souřadnic některého vrcholu. Platí $\rho(a,a,a)=k(a^2+a^2+a^2)$. Tedy $k=\frac{1}{3a^2}$. Celkem $\rho(x,y,z)=\frac{1}{3a^2}(x^2+y^2+z^2)$. Vzhledem k symetrii tělesa i funkce lze integrovat pouze přes první oktant Ω_1. Konečně hmotnost tělesa Ω určíme ze vztahu $|m(\Omega)| = \iiint\limits_\Omega \rho(x,y,z)\ dxdydz$. Platí

$$m(\Omega) = \iiint\limits_\Omega \frac{1}{3a^2}(x^2+y^2+z^2)dxdydz = \frac{8}{3a^2}\iiint\limits_{\Omega_1} x^2+y^2+z^2\ dxdydz =$$

$$= \frac{8}{3a^2}\int_0^a\Big(\int_0^a\Big(\int_0^a x^2+y^2+z^2)dz\Big)dy\Big)dx = \frac{8}{3a^2}\int_0^a\Big(\int_0^a\Big[x^2z+y^2z+\frac{1}{3}z^3\Big]_0^a dy\Big)dx =$$

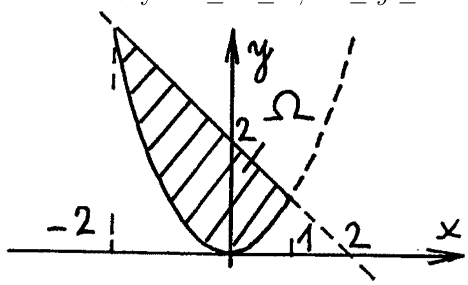
$$= \frac{8}{3a}\int_0^a\Big(\int_0^a(x^2+y^2+\frac{1}{3}a^2)dy\Big)dx = \frac{8}{3}\int_0^a(x^2+\frac{2}{3}a^2)\ dx = \frac{8}{3}a^3.$$

7. Střed koule Ω umístíme do počátku systému souřadnic. Nalezneme funkci hustoty $\rho(x,y,z)$. Platí $\rho(x,y,z)=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Konstantu přímé úměrnosti určíme dosazením souřadnic některého bodu na povrchu koule. Například bodu $[a,0,0]$. Platí $\rho(a,0,0)=ka$. Odtud $k=\frac{1}{a}$. Celkem $\rho(x,y,z)=\frac{1}{a}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Hmotnost tělesa Ω určíme opět ze vztahu $m(\Omega)=\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\ dxdydz$. Je výhodné provést transformaci do sférických souřadnic. Platí

$$m(\Omega) = \iiint\limits_\Omega \frac{1}{a}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz = \frac{1}{a}\iiint\limits_{\Omega_*} \rho^3\sin\theta\ d\rho d\varphi d\theta =$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^a \rho^3 d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^\pi \sin\theta\ d\theta = \frac{1}{a}\Big[\frac{1}{4}\rho\Big]_0^a \cdot \Big[\varphi\Big]_0^{2\pi} \cdot \Big[-\cos\theta\Big]_0^\pi = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{4}a^4\cdot 2\pi\cdot 2 = \pi a^3.$$

8. Těžiště T rovinného obrazce Ω určíme ze vztahu $T = [\frac{S_x(\Omega)}{m(\Omega)}, \frac{S_y(\Omega)}{m(\Omega)}]$. Obrazec zapíšeme jako oblast typu (x, y). Řešením rovnice $x^2 = 2-x$ dostáváme $(x-1)(x+2) = 0$ a odtud $x = -2, x = 1$. Platí tedy $-2 \le x \le 1$, $x^2 \le y \le 2 - x$. Viz obr. 65.



Obr. 65

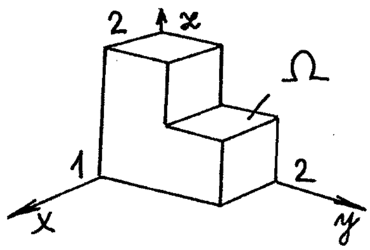
$m(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} dxdy = \int_{-2}^{1}(\int_{x^2}^{2-x} dy)dx = \int_{-2}^{1}(2 - x - x^2)\, dx = \Big[2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\Big]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}$.

$S_x(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} ydxdy = \int_{-2}^{1}(\int_{x^2}^{2-x} y\, dy)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{1}(2-x)^2 - x^4 dx = \Big[2x - x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{10}x^5\Big]_{-2}^{1} = \frac{36}{5}$.

$S_y(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} x\, dxdy = \int_{-2}^{1}(\int_{x^2}^{2-x} x\, dy)dx = \int_{-2}^{1} x(2 - x - x^2)dx = \Big[x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\Big]_{-2}^{1} = -\frac{9}{4}$.

Odtud plyne, že $T = [-\frac{1}{2}, \frac{8}{5}]$.

9. Těžiště T tělesa Ω určíme ze vztahu $T = [\frac{S_{yz}(\Omega)}{m(\Omega)}, \frac{S_{xz}(\Omega)}{m(\Omega)}, \frac{S_{xz}(\Omega)}{m(\Omega)}]$. Viz obr. 66. Je-li hustota $\rho(x, y, z) = c$, pak zřejmě $m(\Omega) = 3c$.



Obr. 66

$S_{xy}(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega_1} czdxdydz + \iiint\limits_{\Omega_2} czdxdydz = c\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^2 zdz + c\int_0^1 dx \int_1^2 dy \int_0^1 zdz = \frac{5}{2}c$.

$S_{xz}(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega_1} cydxdydz + \iiint\limits_{\Omega_2} cydxdydz = c\int_0^1 dx \int_0^1 ydy \int_0^2 dz + c\int_0^1 dx \int_1^2 ydy \int_0^1 dz = \frac{5}{2}c$.

$S_{yz}(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega_1} cxdxdydz + \iiint\limits_{\Omega_2} cxdxdydz = c\int_0^1 xdx \int_0^1 dy \int_0^2 dz + c\int_0^1 xdx \int_1^2 dy \int_0^1 dz = \frac{3}{2}c$.

Odtud plyne, že $T = [\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}]$.

10. Moment setrvačnosti tělesa Ω vzhledem k ose y určíme ze vztahu $I_y(\Omega) = \iiint_{\Omega} x^2 + z^2 dxdydz$. Provedeme transformaci do zobecněných sférických souřadnic, kde $x = a\rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = b\rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = c\rho\cos\theta$. Jakobián transformace je $J = -abc\rho^2\sin\theta$. Přitom $\rho \in \langle 0, 1\rangle, \varphi \in \langle 0, \pi\rangle, \theta \in \langle 0, \pi\rangle$.

$\iiint\limits_{\Omega} x^2 + z^2 dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} x^2 dxdydz + \iiint\limits_{\Omega} z^2 dxdydz = a^3bc \iiint\limits_{\Omega^*} \rho^4 \cos^2\varphi \sin^3\theta\, d\rho d\varphi d\theta +$
$+ abc^3 \iiint\limits_{\Omega^*} \rho^4 \cos^2\theta \sin\theta\, d\rho d\varphi d\theta = a^3bc \int_0^1 \rho^4 d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi \int_0^{\pi} \sin^2\theta d\theta +$
$+ abc^3 \int_0^1 \rho^4 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta d\theta = \frac{4}{15}\pi a^3bc + \frac{4}{15}\pi abc^3 = \frac{4}{15}\pi abc(a^2 + c^2)$.