

Dvojný integrál

Obsah rovinné oblasti

1. Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_O (6xy^2 - 12x^2y) \, dx \, dy$$

pokud integrační obor O je vymezený přímkami $x = 0$, $x = 1$, $y = 2$, $y = 3$.

2. Zapište pomocí dvojného integrálu a vypočtěte obsah rovinné oblasti vymezené křivkami

$$y^2 = 4 + x, \quad x + 3y = 0 \quad \left[20\frac{5}{6}\right]$$

3. Zapište pomocí dvojného integrálu a vypočtěte obsah rovinné oblasti vymezené křivkami

$$y = \ln x, \quad x - y = 1 \quad \text{a} \quad y = -1.$$

Těžiště rovinné oblasti

1. Určete těžiště obrazce vymezeného křivkami $y = 0$, $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$. $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right]$
2. Určete těžiště obrazce vymezeného křivkami $y = x^2$, $x = 4$, $y = 0$.

Trojný integrál

1. Vypočítejte objem tělesa vymezeného plochami $az = x^2 + y^2$, $2az = a^2 - x^2 - y^2$, kde $a > 0$. $\left[\frac{\pi a^3}{12}, \text{poloměr řezu } r = \frac{a}{\sqrt{3}}\right]$
2. Vypočítejte objem tělesa vymezeného plochami $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $z = 6 - x^2 - y^2$.
3. Určete hmotu jehlanu, který je vymezen rovinami $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, kde $a > 0$, pokud hustota v každém jeho bodě je rovna souřadnici z , tj. $\varrho = z$. $\left[\int_0^a \left(\int_0^{a-x} \left(\int_0^{a-x-y} z \, dz \right) dy \right) dx = \frac{a^4}{24}\right]$
4. Určete těžiště homogenního tělesa, které je vymezeno plochami $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, kde $a > 0$.

5. Určete těžiště homogenního tělesa, které je vymezeno plochami $az = a^2 - x^2 - y^2$,
 $z = 0$, kde $a > 0$. $\left[0, 0, \frac{a}{3}\right]$
6. Určete moment setrvačnosti vzhledem k ose z tělesa o hustotě $\varrho = 1$, které je vymezeno plochami $x = 0$, $y = 0$, $y = a$, $z = 0$ a $x + z = a$, kde $a > 0$.
7. Určete moment setrvačnosti vzhledem k ose z tělesa o hustotě $\varrho = 1$, které je vymezeno plochami $z^2 = 2ax$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = ax$, kde $a > 0$. $\left[\frac{32\sqrt{2}a^5}{135}\right]$