

# Lineární algebra

## Teorie a řešené příklady

Robert Mařík

2. listopadu 2005

# Obsah

<b>Hodnost</b>	<b>3</b>
Úloha 1 . . . . .	6
Úloha 2 . . . . .	19
<b>Determinant</b>	<b>31</b>
Úloha 3 . . . . .	33
Úloha 4 . . . . .	34
Úloha 5 . . . . .	37
Úloha 6 . . . . .	40
Úloha 7 . . . . .	43
Úloha 8 . . . . .	53
<b>Inverzní matice</b>	<b>61</b>
Úloha 9 . . . . .	62
Úloha 10 . . . . .	67
Úloha 11 . . . . .	79

<b>Soustavy lineárních rovnic</b>	<b>92</b>
Úloha 12 . . . . .	97
Úloha 13 . . . . .	121
Úloha 14 . . . . .	143
Úloha 15 . . . . .	166
Úloha 16 . . . . .	191
 <b>Shrnutí</b>	 <b>211</b>

# Hodnost

**Definice (hodnost matice):** Buď  $A$  matice. *Hodností matice* rozumíme maximální počet lineárně nezávislých řádků matice. Hodnost matice  $A$  označujeme  $h(A)$ .

**Poznámka 1** (lineární závislost a nezávislost algebraických vektorů).  
Buď  $A$  matice o  $m$  řádcích.

- Je-li  $h(A) = m$ , jsou řádky tvořeny lineárně nezávislými vektory.
- Je-li  $h(A) < m$ , jsou řádky tvořeny lineárně závislými vektory.
- $h(A) > m$  nenastane.

**Definice (schodovitý tvar):** Řekneme, že matice  $A$  je ve *schodovitém tvaru*, jestliže případné nulové řádky jsou uspořádány na konci matice a nenulové jsou uspořádány tak, že každý následující řádek začíná větším počtem nul než řádek předchozí.

**Věta 1 (hodnost matice ve schodovitém tvaru).** Hodnost matice, která je ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.

**Příklad 1.** Matice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  je ve schodovitém tvaru a  $h(A) = 3$ . Matice  $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  není ve schodovitém tvaru a její hodnost na první pohled nepoznáme.

**Věta 2 (operace zachovávající hodnotu matice).** Následující operace nemění hodnotu matice:

- vynechání řádku složeného ze samých nul, nebo vynechání řádku, který je totožný s jiným řádkem, nebo vynechání řádku, který je násobkem jiného řádku
- vynásobení nebo vydělení libovolného řádku nenulovým číslem
- záměna pořadí libovolného počtu řádků
- ponechání jednoho řádku beze změny a opakované přičtení libovolných násobků tohoto řádku k nenulovým násobkům ostatních řádků matice

**Věta 3.** Libovolnou matici lze konečným počtem úprav z Věty 2 převést do schodovitého tvaru.

**Věta 4.** Transponování nemění hodnotu matice.

Najděte hodnotu matice  $A$ .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Najděte hodnotu matice  $A$ .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

- Zvolíme červený řádek jako klíčový.
- Tento řádek zůstává a píšeme ho jako první.



Najděte hodnotu matice  $A$ .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 2 \\ (-3) \\ \cdot 2 \\ \cdot 2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2R_1 - 3R_2 = \dots$$

Najděte hodnotu matice  $A$ .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-3) \\ 2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2R_3 - 3R_2 = \dots$$

Najděte hodnotu matice  $A$ .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$R_4 - R_2 = \dots$$

Najděte hodnotu matice  $A$ .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

První řádek zůstává.

Najděte hodnotu matice  $A$ .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

- Další klíčový řádek bude jeden z červených řádků.
- Protože by vytváření dalších nul bylo složitější, uděláme mezikrok – vytvoříme nejprve jedničku.
- Druhý řádek ponecháme na svém místě.

Najděte hodnotu matice  $A$ .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ \\ \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zvolíme červený řádek jako klíčový a provedeme  $R_2 - R_3 = \dots$

Najděte hodnotu matice  $A$ .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

The second matrix has a blue arrow pointing from the element 5 in the second row, fifth column to the element 5 in the fourth row, fifth column, with the label  $(-1)$  next to it.

Vytvoříme jedničku i v dalším řádku:  $R_2 - R_4 = \dots$

Najděte hodnotu matice  $A$ .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Řádek  $R_3$  je násobkem řádku  $R_4$ .
- Jeden z nich můžeme tedy odstranit.



Najděte hodnotu matice  $A$ .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Odstranili jsme třetí řádek.
- První řádek zůstává.
- Nový klíčový řádek bude řádek s jedničkou. Píšeme jej jako druhý.

Najděte hodnotu matice  $A$ .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

A blue arrow points from the element 5 in the second row, fifth column of the second matrix to the element 0 in the second row, fifth column of the third matrix. A small box with the number 5 is located at the bottom right of the third matrix.

Vytvoříme nulu místo čísla  $-5$ . Provedeme tedy  $5R_3 + R_2 = \dots$

Najděte hodnotu matice  $A$ .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$h(A) = 3$$

- Matice je ve schodovitém tvaru.
- Schodovitý tvar má tři řádky.
- $h(A) = 3$ .

Najděte hodnotu matice  $B$ .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Najděte hodnotu matice  $B$ .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

- Řádek  $R_1$  bude klíčový.
- Zůstane jako první a pomocí něj budeme nulovat zbylá čísla v prvním sloupci.

Najděte hodnotu matice  $B$ .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Vynulujeme prvek  $b_{21}$ . Provedeme  $-3R_1 + R_2$ .

Najděte hodnotu matice  $B$ .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Vynulujeme prvek  $b_{31}$ . Provedeme  $R_1 + R_3$ .

Najděte hodnotu matice  $B$ .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Prvek  $b_{41}$  je nulový a tento řádek tedy stačí pouze opsat.



Najděte hodnotu matice  $B$ .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

- První řádek (původně klíčový) zůstane.
- Červeně označený řádek obsahuje jedničku na začátku a zvolíme jej jako další klíčový řádek. To je nejšikovnější, protože  $b_{42} = 1$ , zatímco  $b_{22} = -5$  a  $b_{23} = 4$ .

Najděte hodnotu matice  $B$ .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{5R_4 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \end{pmatrix}$$

Vynulujeme prvek  $b_{22}$ . Provedeme  $5R_4 + R_2$ .

Najděte hodnotu matice  $B$ .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -4 \\ \end{matrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -18 & 18 & 0 \end{pmatrix}$$

Vynulujeme prvek  $b_{32}$ . Provedeme  $-4R_4 + R_2$ .

Najděte hodnotu matice  $B$ .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -18 & 18 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Poslední řádek můžeme vydělit číslem 18.
- Ostatní řádky zůstanou.

Najděte hodnotu matice  $B$ .

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -18 & 18 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- První dva řádky zůstanou.
- Prvek  $b_{34} = -1$  je šikovnější pro další úpravy, než  $b_{33} = 26$ . Proto jako další klíčový volíme řádek  $R_4$ .

Najděte hodnotu matice  $B$ .

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -18 & 18 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 26 \\ \end{matrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vynulujeme prvek  $b_{33}$ . Provedeme  $26R_4 + R_3$ .

Najděte hodnotu matice  $B$ .

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -18 & 18 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Matice je ve schodovitém tvaru.
- Schodovitý tvar má čtyři řádky. Hodnota je čtyři.

# Determinant



**Definice (determinant):** Buď  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  čtvercová matice řádu  $n$ . *Determinant matice  $A$*  je reálné číslo  $\det A$  přiřazené matici  $A$  následujícím způsobem:

- Je-li  $A$  matice řádu 1, tj.  $A = (a_{11})$ , je  $\det A = a_{11}$ .
- Máme-li definován determinant z matice řádu  $(n - 1)$  označme symbolem  $M_{ij}$  determinant matice řádu  $(n - 1)$ , která vznikne z matice  $A$  vynecháním  $i$ -tého řádku a  $j$ -tého sloupce. Definujme *algebraický doplněk*  $A_{ij}$  prvku  $a_{ij}$  jako součin  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ .
- Konečně, definujme determinant řádu  $n$  následovně: zvolíme libovolný index  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  a definujeme

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}. \quad (1)$$

Píšeme též  $|A|$  a je-li  $A = (a_{ij})$ , píšeme zkráceně  $|a_{ij}|$ .

Najděte následující determinant

$$\begin{vmatrix} a & b \\ i & j \end{vmatrix} = a(-1)^{1+1}|j| + b(-1)^{1+2}|i| = aj - bi$$

Determinant  $2 \times 2$  tedy počítáme tak, že násobíme prvky v hlavní diagonále a odečteme součin prvků ve vedlejší diagonále.

Najděte následující determinant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ i & j & k \\ x & y & z \end{vmatrix} = a(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} j & k \\ y & z \end{vmatrix} + b(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} i & k \\ x & z \end{vmatrix} + c(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} i & j \\ x & y \end{vmatrix}$$
$$= a(jz - ky) - b(iz - kx) + c(iy - jx)$$
$$= ajz - ak y - biz + bkx + ciy - cjx$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ i & j & k \\ x & y & z \\ a & b & c \\ i & j & k \end{vmatrix} = ajz + iyc + xbk - (cjx + kya + zbi)$$

Sarussovo pravidlo

**Definice (regulární a singulární matice):** Buď  $A$  čtvercová matice. Je-li  $\det A = 0$ , říkáme, že matice  $A$  je *singulární*, v opačném případě říkáme, že je *regulární*.

**Věta 5 (determinant matice ve schodovitém tvaru).** Determinant matice, která je ve schodovitém tvaru je roven součinu prvků v hlavní diagonále.

**Věta 6 (operace zachovávající hodnotou determinantu).** Následující operace nemění hodnotu determinantu matice:

- přičtení lineární kombinace ostatních řádků (sloupců) k jinému řádku (sloupci)
- ponechání jednoho řádku (sloupce) beze změny a opakované přičtení libovolných násobků tohoto řádku (sloupce) k ostatním řádkům (sloupcům) matice
- transponování matice

**Věta 7 (další operace s determinanem).** Následující operace mění hodnotu determinantu popsáním způsobem:

- přehozením dvou řádků (sloupců) determinant mění znaménko
- vydělíme-li jeden řádek (sloupec) nenulovým číslem  $a$ , zmenší se hodnota determinantu  $a$ -krát

**Poznámka 2.** Podle předchozí věty, platí

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

**Poznámka 3** (Laplaceova věta pro sloupce).

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj},$$

**Poznámka 4.** Řádek nebo sloupec, podle kterého provádíme rozvoj, je vhodné volit tak, aby obsahoval co nejvíce nulových prvků.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

Rozvoj: **prvek** ·  $(-1)^{\text{řádek+slopec}}$  · (determinant nižšího řádu)

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$
$$= (-2) \cdot (-1) \cdot (-4 + 4 + 0 - (2 + 0 + 8))$$
$$= -20$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$



Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

Vypočteme ten stejný determinant rozvojem podle posledního sloupce.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ + (-4) \cdot (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

Poslední sloupec obsahuje dva nenulové prvky a rozvoj tedy bude obsahovat dva determinanty nižšího řádu.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ + (-4) \cdot (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} \\ = (-2) \cdot [-4 + 0 + 0 - (-2 + 0 + 0)] \\ - 4 \cdot [0 + 4 + 0 - (0 - 2 + 0)] \\ = (-2) \cdot (-2) - 4 \cdot 6 = -20$$

Determinanty třetího řádu dopočítáme Sarussovým pravidlem.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Vypočtete následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Druhý řádek bude klíčový.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 & | & 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & | & (-2)1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 & | & & & & \\ 0 & 3 & -1 & 2 & | & & & & \end{vmatrix}$$

Upravíme první řádek. Pozor! Řádky nepřehazujeme.

Vypočtete následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ - \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Upravíme třetí řádek.

Vypočtete následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Poslední řádek pouze opíšeme.



Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -8 & -9 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

- Vytvoříme Laplaceův rozvoj podle prvního sloupce.
- Červený prvek zůstane, bude vynásoben výrazem  $(-1)^{\text{řádek} + \text{slopec}}$ .
- Vynecháme první sloupec a druhý řádek.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -8 & -9 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= -1 \left[ -8 \cdot 5 \cdot 2 + (-8) \cdot (-1) \cdot 5 + 3 \cdot (-9) \cdot 1 \right. \\ \left. - (5 \cdot 5 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot (-8) + 2 \cdot (-9) \cdot (-8)) \right]$$

$$\begin{vmatrix} -8 & -9 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$\begin{matrix} -8 & -9 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \end{matrix}$$

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -8 & -9 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= -1 \left[ -8 \cdot 5 \cdot 2 + (-8) \cdot (-1) \cdot 5 + 3 \cdot (-9) \cdot 1 \right. \\ \left. - (5 \cdot 5 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot (-8) + 2 \cdot (-9) \cdot (-8)) \right]$$
$$= -1 \left[ -80 + 40 - 27 - (75 + 8 + 144) \right]$$

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -8 & -9 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= -1 \left[ -8 \cdot 5 \cdot 2 + (-8) \cdot (-1) \cdot 5 + 3 \cdot (-9) \cdot 1 \right. \\ \left. - (5 \cdot 5 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot (-8) + 2 \cdot (-9) \cdot (-8)) \right]$$
$$= -1 \left[ -80 + 40 - 27 - (75 + 8 + 144) \right]$$
$$= - \left[ -67 - 227 \right]$$

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -8 & -9 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= -1 \left[ -8 \cdot 5 \cdot 2 + (-8) \cdot (-1) \cdot 5 + 3 \cdot (-9) \cdot 1 \right. \\ \left. - (5 \cdot 5 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot (-8) + 2 \cdot (-9) \cdot (-8)) \right]$$
$$= -1 \left[ -80 + 40 - 27 - (75 + 8 + 144) \right]$$
$$= - \left[ -67 - 227 \right] = 294$$

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

- **Druhý řádek** bude klíčový a budeme vytvářet nuly ve třetím sloupci (obsahuje už jednu nulu a obsahuje nejmenší čísla).
- **První řádek** už nulu ve třetím sloupci má, takže jej jenom opíšeme.
- Dáváme pozor na to, abychom nezaměnili pořadí řádků.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ - \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Vytvoříme nulu z prvku  $a_{33}$ .



Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-2)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

Vytvoříme nulu z prvku  $a_{43}$ .

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

Rozvineme determinant podle třetího sloupce.

**prvek**  $\cdot (-1)^{\text{řádek+slopec}}$   $\cdot$  (determinant nižšího řádu)

Vypočtete následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$
$$= -1 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

Vytkneme číslo 2 ve druhém řádku.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \\ = -1 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \\ = -2 \cdot [-6 - 8 + 0 - (-4 + 0 - 9)]$$

Použijeme Sarusovo pravidlo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \\ = -1 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \\ = -2 \cdot [-6 - 8 + 0 - (-4 + 0 - 9)] = -2 \cdot (-1) = 2$$

# Inverzní matice

**Definice (inverzní matice):** Bud'  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  čtvercová matice řádu  $n$ . Jestliže existuje čtvercová matice  $A^{-1}$  řádu  $n$ , splňující vztahy  $A^{-1}A = I = AA^{-1}$ , nazýváme matici  $A^{-1}$  *inverzní maticí k matici*  $A$ .

**Poznámka 5** (metoda výpočtu). Čtvercovou matici  $A$  převedeme pomocí *řádkových* úprav totožných s úpravami zachovávajícími hodnotu matice na matici jednotkovou. Tytéž úpravy současně provádíme na jednotkové matici a z jednotkové matice takto vznikne matice inverzní  $A^{-1}$ .

**Věta 8 (existence inverzní matice).** Necht' matice  $A$  je čtvercová. Potom inverzní matice  $A^{-1}$  existuje právě tehdy, když je matice  $A$  regulární, tj.  $\det(A) \neq 0$ .

Inverzní matice je “protijed” k maticovému násobení

$$A \cdot X = B$$

Inverzní matice je “protijed” k maticovému násobení

$$A \cdot X = B$$

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$$

Vynásobíme zleva maticí inverzní.



Inverzní matice je “protijed” k maticovému násobení

$$A \cdot X = B$$

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$$

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

Použijeme asociativní zákon pro násobení.

Inverzní matice je “protijed” k maticovému násobení

$$A \cdot X = B$$

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$$

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

Použijeme definici inverzní matice.

Inverzní matice je “protijed” k maticovému násobení

$$A \cdot X = B$$

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$$

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

- Jednotková matice je neutrálním prvkem vzhledem k násobení.
- Teď už vidíme, že pokud bychom násobili inverzní maticí zprava, obdrželi bychom vztah

$$A \cdot X \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1},$$

ze kterého hledané  $X$  nelze tak snadno vyjádřit.

K dané matici  $A$  určete matici inverzní  $A^{-1}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

K dané matici  $A$  určete matici inverzní  $A^{-1}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Zapišeme matici  $A$  a jednotkovou matici vedle sebe.

K dané matici  $A$  určete matici inverzní  $A^{-1}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Druhý řádek volíme jako klíčový, protože číslo  $-1$  je vhodnější pro vytváření nul než čísla  $6$  a  $2$ . Klíčový řádek píšeme jako první.

K dané matici  $A$  určete matici inverzní  $A^{-1}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 & 0 \end{array} \right)$$

Upravíme prvek  $a_{11} = 6$  na nulu.

K dané matici  $A$  určete matici inverzní  $A^{-1}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Upravíme prvek  $a_{31} = 2$  na nulu.



K dané matici  $A$  určete matici inverzní  $A^{-1}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$
$$\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Nový klíčový řádek bude třetí řádek. Napíšeme jej jako druhý v pořadí.

K dané matici  $A$  určete matici inverzní  $A^{-1}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)}$$
$$\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Upravíme prvek  $a_{12} = 1$  na nulu.

K dané matici  $A$  určete matici inverzní  $A^{-1}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-2)}$$
$$\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

Upravíme prvek  $a_{22} = 2$  na nulu.

K dané matici  $A$  určete matici inverzní  $A^{-1}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & | & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} & & & | & & & \\ & & & | & & & \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Nový klíčový řádek bude řádek poslední.

K dané matici  $A$  určete matici inverzní  $A^{-1}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & | & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Druhý řádek zůstane, má nulu na místě  $a_{23}$ .

K dané matici  $A$  určete matici inverzní  $A^{-1}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & | & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(-1) \\ 3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Upravíme prvek  $a_{13} = 3$  na nulu.

K dané matici  $A$  určete matici inverzní  $A^{-1}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & | & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Matrice vlevo je ve schodovitém tvaru a inverzní matice je tedy napravo.

K dané matici  $A$  najděte matici inverzní  $A^{-1}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$



K dané matici  $A$  najděte matici inverzní  $A^{-1}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Začneme se zadanou maticí a s  $3 \times 3$  jednotkovou maticí.

K dané matici  $A$  najděte matici inverzní  $A^{-1}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$
$$\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

K dané matici  $A$  najděte matici inverzní  $A^{-1}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ \color{red}{1} & \color{red}{-1} & \color{red}{1} & \color{red}{0} & \color{red}{1} & \color{red}{0} \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ \color{blue}{\curvearrowright} \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ \end{matrix}$$
$$\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \color{blue}{0} & \color{blue}{1} & \color{blue}{3} & \color{blue}{1} & \color{blue}{-1} & \color{blue}{0} \end{array} \right)$$

Upravíme  $a_{11} = 1$  na nulu.

K dané matici  $A$  najděte matici inverzní  $A^{-1}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ (-1) \\ \end{matrix}$$
$$\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{array} \right)$$

Upravíme  $a_{31} = 1$  na nulu.

K dané matici  $A$  najděte matici inverzní  $A^{-1}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$
$$\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

K dané matici  $A$  najděte matici inverzní  $A^{-1}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$
$$\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Upravíme  $a_{12} = -1$  na nulu.

K dané matici  $A$  najděte matici inverzní  $A^{-1}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$
$$\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ 0 & 3 & 5 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-3)} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-4} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{array} \right)$$

Upravíme prvek  $a_{32} = 3$  na nulu.

K dané matici  $A$  najděte matici inverzní  $A^{-1}$ .

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \sim & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & | & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \sim & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



K dané matici  $A$  najděte matici inverzní  $A^{-1}$ .

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) & \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} 4 \\ 3 \end{array} \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 4 & 0 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -1 & -1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Upravíme  $a_{23} = 3$  na nulu.

K dané matici  $A$  najděte matici inverzní  $A^{-1}$ .

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & | & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & | & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & | & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Upravíme prvek  $a_{13} = 4$  na nulu.

K dané matici  $A$  najděte matici inverzní  $A^{-1}$ .

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & | & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & | & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & | & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5/4 & 2/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vydělíme.

K dané matici  $A$  najděte matici inverzní  $A^{-1}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$
$$\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right)$$
$$\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -1 & -1 \end{array} \right)$$
$$\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5/4 & 2/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{array} \right) ;$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -8 & 8 & 4 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Inverzní matice vznikla v pravé polovině. Z této matice lze vytknout společný jmenovatel  $\frac{1}{4}$ .

# Soustavy lineárních rovnic

Uvažujme následující tři problémy: Najděte všechna reálná čísla  $x_1$ ,  $x_2$ , splňující:

**Úloha 1 :**

$$\begin{aligned}4x_1 + 5x_2 &= 7 \\ x_1 - 2x_2 &= 4\end{aligned}$$

**Úloha 2 :**

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

**Úloha 3**

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

**Všechny problémy jsou ekvivalentní a jedná se o jiný zápis téhož.**

**Definice (soustava lineárních rovnic):** *Soustavou  $m$  lineárních rovnic o  $n$  neznámých* nazýváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{S}$$

Proměnné  $x_1, x_2, \dots, x_n$  nazýváme *neznámé*. Reálná čísla  $a_{ij}$  nazýváme *koefficienty levých stran*, reálná čísla  $b_j$  *koefficienty pravých stran* soustavy rovnic. *Řešením soustavy rovnic* rozumíme uspořádanou  $n$ -tici reálných čísel  $[t_1, t_2, \dots, t_n]$  po jejichž dosazení za neznámé (v tomto pořadí) do soustavy dostaneme ve všech rovnicích identity.

## Definice (matice soustavy): Matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

nazýváme *maticí soustavy* (**S**). Matici

$$A_r = \left( \begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \quad (3)$$

nazýváme *rozšířenou maticí soustavy* (**S**).

**Poznámka 6** (vektorový zápis soustavy lineárních rovnic).

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{m3} \end{pmatrix} x_3 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

**Poznámka 7** (maticový zápis soustavy lineárních rovnic).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$



**Věta 9 (Frobeniova věta, Kronecker–Capelliho věta).** Soustava (S) je řešitelná právě tehdy, když její matice soustavy (2) a rozšířená matice soustavy (3) mají stejnou hodnost, tj.  $h(A) = h(A_r)$ .

- Soustava nemá řešení, pokud  $h(A) \neq h(A_r)$ .
- Soustava má právě jedno řešení, pokud  $h(A) = h(A_r) = n$ .
- Soustava má nekonečně mnoho řešení, pokud  $h(A) = h(A_r) < n$ .  
Tato řešení lze vyjádřit pomocí  $(n - h(A))$  nezávislých parametrů.

**Definice (homogenní soustava lineárních rovnic):** Platí-li v soustavě (S)  $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ , nazývá se soustava (S) *homogenní*.

**Poznámka 8 (triviální řešení).** Homogenní soustava lineárních rovnic je vždy řešitelná. Po dosazení okamžitě vidíme, že  $n$ -tice  $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$  je řešením. Toto řešení nazýváme *triviální*. U homogenních soustav lineárních rovnic tedy buď existuje pouze triviální řešení, nebo existuje nekonečně mnoho řešení.

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

Řešte soustavu

$$\begin{aligned}6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 &= 0 \\4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 &= -4 \\x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\x_1 + x_3 &= 3\end{aligned}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

Napišeme rozšířenou matici soustavy  $A_r$ .

Řešte soustavu

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 &= -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ & & & & \end{array} \right)$$

- Jako klíčový řádek zvolíme řádek poslední.
- Tento řádek napíšeme jako první.

Řešte soustavu

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 &= -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \end{array} \right)$$

$$R_3 - R_4 = \dots$$

Řešte soustavu

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 &= -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{(-4)} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -7 & 5 & -16 \end{array} \right)$$

$$R_2 - 4R_4 = \dots$$

Řešte soustavu

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 &= -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -7 & 5 & -16 \\ 0 & 2 & -7 & 7 & -18 \end{array} \right)$$

(-6)

$$R_1 - 6R_4 = \dots$$

Řešte soustavu

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 &= -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -7 & 5 & -16 \\ 0 & 2 & -7 & 7 & -18 \end{array} \right) \sim$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \end{array} \right)$$

První řádek zůstane a druhý řádek bude novým klíčovým řádkem.



Řešte soustavu

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 &= -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -7 & 5 & -16 \\ 0 & 2 & -7 & 7 & -18 \end{array} \right) \xrightarrow{(-2)}$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \end{array} \right)$$

$$-2R_2 + R_3 = \dots$$

Řešte soustavu

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 &= -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -7 & 5 & -16 \\ 0 & 2 & -7 & 7 & -18 \end{array} \right) \begin{array}{l} (-2) \\ \downarrow \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & -12 \end{array} \right)$$

$$-2R_2 + R_4 = \dots$$

Řešte soustavu

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 &= -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -7 & 5 & -16 \\ 0 & 2 & -7 & 7 & -18 \end{array} \right) \sim$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & -12 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \end{array} \right)$$

- První dva řádky zůstanou.
- Třetí řádek bude novým klíčovým řádkem a zůstane také.

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -7 & 5 & -16 \\ 0 & 2 & -7 & 7 & -18 \end{array} \right) \sim$$
$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & -12 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$-R_3 + R_4 = \dots$$

Řešte soustavu

$$\begin{aligned}6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 &= 0 \\4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 &= -4 \\x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\x_1 + x_3 &= 3\end{aligned}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

Rozšířená matice soustavy je řádkově ekvivalentní modré matici, která je ve schodovitém tvaru.

Řešte soustavu

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 &= -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$2x_4 = -2$

- Soustava má řešení, neboť  $h(A) = h(A_r) = 4$ . Navíc  $n = 4$  (počet neznámých) a soustava má tedy jediné řešení (nula parametrů).
- Začneme dopočítávat neznámé. Napíšeme rovnici odpovídající poslednímu řádku ...

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$2x_4 = -2$$

$$x_4 = -1$$

a řešíme vzhledem k  $x_4$ .

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$-3x_3 + 7x_4 = -10$$

$$2x_4 = -2$$

$$x_4 = -1$$

Napišeme rovnici odpovídající předposlednímu řádku.



Řešte soustavu

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 &= -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$2x_4 = -2$$

$$x_4 = -1$$

$$-3x_3 + 7x_4 = -10$$

$$-3x_3 - 7 = -10$$

Dosadíme  $x_4 = -1 \dots$

Řešte soustavu

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 &= -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$2x_4 = -2$$

$$x_4 = -1$$

$$-3x_3 + 7x_4 = -10$$

$$-3x_3 - 7 = -10$$

$$x_3 = 1$$

a řešíme vzhledem k  $x_3$ .

Řešte soustavu

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 &= -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} 2x_4 &= -2 \\ x_4 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3x_3 + 7x_4 &= -10 \\ -3x_3 - 7 &= -10 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$x_2 - 2x_3 - x_4 = -3$$

Napišeme rovnici odpovídající druhému řádku.

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$2x_4 = -2$$

$$x_4 = -1$$

$$-3x_3 + 7x_4 = -10$$

$$-3x_3 - 7 = -10$$

$$x_3 = 1$$

$$x_2 - 2x_3 - x_4 = -3$$

$$x_2 - 2 + 1 = -3$$

Dosadíme  $x_4 = -1$  a  $x_3 = 1$  ...

Řešte soustavu

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 &= -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$2x_4 = -2$$

$$x_4 = -1$$

$$-3x_3 + 7x_4 = -10$$

$$-3x_3 - 7 = -10$$

$$x_3 = 1$$

$$x_2 - 2x_3 - x_4 = -3$$

$$x_2 - 2 + 1 = -3$$

$$x_2 = -2$$

a vyřešíme vzhledem k  $x_2$ .

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$2x_4 = -2$$

$$x_4 = -1$$

$$-3x_3 + 7x_4 = -10$$

$$-3x_3 - 7 = -10$$

$$x_3 = 1$$

$$x_2 - 2x_3 - x_4 = -3$$

$$x_2 - 2 + 1 = -3$$

$$x_2 = -2$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

Napišeme rovnici odpovídající prvnímu řádku.

Řešte soustavu

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 &= -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$2x_4 = -2$$

$$x_4 = -1$$

$$-3x_3 + 7x_4 = -10$$

$$-3x_3 - 7 = -10$$

$$x_3 = 1$$

$$x_2 - 2x_3 - x_4 = -3$$

$$x_2 - 2 + 1 = -3$$

$$x_2 = -2$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$x_1 + 1 = 3$$

Dosadíme  $x_3 = 1$ .

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$2x_4 = -2$$

$$x_4 = -1$$

$$-3x_3 + 7x_4 = -10$$

$$-3x_3 - 7 = -10$$

$$x_3 = 1$$

$$x_2 - 2x_3 - x_4 = -3$$

$$x_2 - 2 + 1 = -3$$

$$x_2 = -2$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$x_1 + 1 = 3$$

$$x_1 = 2$$

Najdeme  $x_1 = 2$ .



Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$2x_4 = -2$$

$$x_4 = -1$$

$$-3x_3 + 7x_4 = -10$$

$$-3x_3 - 7 = -10$$

$$x_3 = 1$$

$$x_2 - 2x_3 - x_4 = -3$$

$$x_2 - 2 + 1 = -3$$

$$x_2 = -2$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$x_1 + 1 = 3$$

$$x_1 = 2$$

Jediné řešení je  $[x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 1, x_4 = -1]$ .

Vypočítali jsme všechny neznámé.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array} \right)$$

Napišeme rozšířenou matici soustavy.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array} \right) \sim$$
$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

Druhý řádek bude klíčový a opíšeme jej na první místo.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{(-3)}$$
$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4 \end{array} \right)$$

Spravíme první řádek.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} (-1) \\ \downarrow \\ \sim \end{array}$$
$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \end{array} \right)$$

Spravíme třetí řádek.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ (-2) \\ \end{array}$$
$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -6 & 0 & 4 & -8 & -1 \end{array} \right)$$

Spravíme poslední řádek.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array} \right) \sim$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -6 & 0 & 4 & -8 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \end{array} \right)$$

- První řádek zůstane.
- Červený řádek bude nový klíčový řádek a napíšeme jej jako druhý.



Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array} \right) \sim$$
$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -6 & 0 & 4 & -8 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -12 & -6 \end{array} \right)$$

Spravíme druhý řádek.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array} \right) \sim$$
$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -6 & 0 & 4 & -8 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -14 & -7 \end{array} \right)$$

Spravíme poslední řádek.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -6 & 0 & 4 & -8 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -14 & -7 \end{array} \right) \begin{array}{l} \div 6 \\ \div 7 \end{array} \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

Zelené řádky můžeme vydělit čísly 6 a 7.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array} \right) \sim$$
$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -6 & 0 & 4 & -8 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -14 & -7 \end{array} \right) \sim$$
$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

Poslední dva řádky jsou stejné a stačí dále pracovat jenom s jedním z nich.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

- Rozšířená matice soustavy má hodnost 3, matice soustavy také. Systém proto má řešení.
- Počet parametrů je

$$\text{neznámé} - \text{hodnost} = 5 - 3 = 2.$$

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

$$x_4 - 2x_5 = -1$$

Napíšeme rovnici příslušnou poslednímu řádku.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

$$x_4 - 2x_5 = -1$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = 2t - 1$$

- Jsou zde dvě neznámé, ale jenom jedna rovnice. Jednu z neznámých volíme rovnu parametru.
- Buď tedy  $x_5 = t$ , kde  $t$  je libovolné reálné číslo. Vypočteme  $x_4$ .

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$x_4 - 2x_5 = -1$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = 2t - 1$$

$$2x_2 + x_4 - 2x_5 = -2$$

Napišeme rovnici odpovídající dalšímu řádku.



Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

$$x_4 - 2x_5 = -1$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = 2t - 1$$

$$2x_2 + x_4 - 2x_5 = -2$$

$$2x_2 + (2t - 1) - 2t = -2$$

Dosadíme za  $x_4$  a  $x_5$ . Zůstává pouze neznámá  $x_2$ .

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

$$x_4 - 2x_5 = -1$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = 2t - 1$$

$$2x_2 + x_4 - 2x_5 = -2$$

$$2x_2 + (2t - 1) - 2t = -2$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}$$

Nalezneme  $x_2$ . Dostáváme  $2x_2 = -2 - 2t + 1 + 2t$  a odsud určíme  $x_2$ .

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

$$x_4 - 2x_5 = -1$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = 2t - 1$$

$$2x_2 + x_4 - 2x_5 = -2$$

$$2x_2 + (2t - 1) - 2t = -2$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

Napišeme rovnici odpovídající prvnímu řádku.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

$$x_4 - 2x_5 = -1$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = 2t - 1$$

$$2x_2 + x_4 - 2x_5 = -2$$

$$2x_2 + (2t - 1) - 2t = -2$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_3 - (2t - 1) + 2t = 3$$

$$x_3 = u$$

- Dosadíme. Po dosazení zůstanou neznámé  $x_1$  a  $x_3$ . Jedna z těchto neznámých musí být parametr.
- Volme např.  $x_3 = u$ , kde  $u$  je libovolné reálné číslo.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

$$x_4 - 2x_5 = -1$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = 2t - 1$$

$$2x_2 + x_4 - 2x_5 = -2$$

$$2x_2 + (2t - 1) - 2t = -2$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_3 - (2t - 1) + 2t = 3$$

$$x_3 = u$$

$$x_1 + 2u - (2t - 1) + 2t = 3$$

Vypočteme  $x_1$ .

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

$$x_4 - 2x_5 = -1$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = 2t - 1$$

$$2x_2 + x_4 - 2x_5 = -2$$

$$2x_2 + (2t - 1) - 2t = -2$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_3 - (2t - 1) + 2t = 3$$

$$x_3 = u$$

$$x_1 + 2u - (2t - 1) + 2t = 3$$

$$x_1 = 2 - 2u$$

Řešení je  $[2 - 2u, -\frac{1}{2}, u, 2t - 1, t]$ , kde  $t$  a  $u$  jsou parametry.

Vyřešeno! Jsme šikovni.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

$$x_4 - 2x_5 = -1$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = 2t - 1$$

$$2x_2 + x_4 - 2x_5 = -2$$

$$2x_2 + (2t - 1) - 2t = -2$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_3 - (2t - 1) + 2t = 3$$

$$x_3 = u$$

$$x_1 + 2u - (2t - 1) + 2t = 3$$

$$x_1 = 2 - 2u$$

Řešení je  $[2 - 2u, -\frac{1}{2}, u, 2t - 1, t]$ , kde  $t$  a  $u$  jsou parametry.

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$



Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array} \right)$$

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

Druhý řádek bude klíčový, protože  $a_{21} = 1$ .

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{(-2)} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1 \end{array} \right)$$

$$(-2)R_2 + R_1$$

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{(-3)} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2 \end{array} \right)$$

$$(-3)R_2 + R_3$$

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)R_1} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

$$(-1)R_2 + R_4$$

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

Dalším klíčovým řádkem bude poslední řádek, protože  $a_{42} = 1$  je lepší než  $a_{22} = a_{23} = -2$ .

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{array} \right)$$

$$2R_4 + R_2$$

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim$$
  
$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \end{array} \right)$$

$$2R_4 + R_3$$



Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim$$
$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \end{array} \right)$$

První dva řádky zůstanou.

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim$$
$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \end{array} \right) \begin{array}{l} \div 5 \\ \div 8 \end{array} \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Poslední řádky můžeme vydělit.

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim$$
$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Poslední dva řádky jsou stejné a stačí uvažovat pouze jeden z nich.  
Vynecháme tedy poslední řádek.

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

- Rozšířená matice soustavy je ve schodovitém tvaru.
- $h(A) = 3, h(A_r) = 3, n = 4$
- Soustava má nekonečně mnoho řešení s jedním parametrem.

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow x_4 = 1$$

Napíšeme rovnici odpovídající poslednímu řádku. Tím známe  $x_4$ .

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$x_4 = 1$$

$$x_2 + 2x_3 = 3$$

Napíšeme rovnici odpovídající prostřednímu řádku.

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$x_4 = 1$$

$$x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_3 = t$$

- Ze dvou neznámých bude jedna rovna parametru.
- Necht' například  $x_3 = t$ , kde  $t$  je libovolné reálné číslo.

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$x_4 = 1$$

$$x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_3 = t$$

$$x_2 = 3 - 2t$$

Nalezneme  $x_2$ .



Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$x_4 = 1$$

$$x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_3 = t$$

$$x_2 = 3 - 2t$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

Pokračujeme k další rovnici.

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$x_4 = 1$$

$$x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_3 = t$$

$$x_2 = 3 - 2t$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$x_1 + 2(3 - 2t) + t - 2 \cdot 1 = 1$$

Dosadíme za  $x_2$ ,  $x_3$  a  $x_4$ .

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$x_4 = 1$$

$$x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_3 = t$$

$$x_2 = 3 - 2t$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$x_1 + 2(3 - 2t) + t - 2 \cdot 1 = 1$$

$$x_1 - 4t + t + 4 = 1$$

Upravíme.

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$x_4 = 1$$

$$x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_3 = t$$

$$x_2 = 3 - 2t$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$x_1 + 2(3 - 2t) + t - 2 \cdot 1 = 1$$

$$x_1 - 4t + t + 4 = 1$$

$$x_1 - 3t = -3$$

Upravíme.

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$x_4 = 1$$

$$x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_3 = t$$

$$x_2 = 3 - 2t$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$x_1 + 2(3 - 2t) + t - 2 \cdot 1 = 1$$

$$x_1 - 4t + t + 4 = 1$$

$$x_1 - 3t = -3$$

$$x_1 = 3t - 3$$

Nalezneme  $x_1$ .

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$x_4 = 1$$

$$x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_3 = t$$

$$x_2 = 3 - 2t$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$x_1 + 2(3 - 2t) + t - 2 \cdot 1 = 1$$

$$x_1 - 4t + t + 4 = 1$$

$$x_1 - 3t = -3$$

$$x_1 = 3t - 3$$

$t \in \mathbb{R}$ .

Řešení je

$$x_1 = -3 + 3t$$

$$x_2 = 3 - 2t$$

$$x_3 = t$$

$$x_4 = 1$$

kde

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right)$$

Napišeme rozšířenou matici soustavy.



Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Zvolíme klíčový řádek (s jedničkou na začátku a nejnižšími čísly na dalších pozicích). Tento řádek opíšeme jako první.

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-1} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right)$$

Vynulujeme prvek  $a_{11}$ .

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-5} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 & 0 \end{array} \right)$$

Vynulujeme prvek  $a_{31}$ .

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ \color{red}{1} & \color{red}{1} & \color{red}{0} & \color{red}{-1} & \color{red}{-1} & \color{red}{0} \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ \color{green}{1} & \color{green}{-1} & \color{green}{-2} & \color{green}{1} & \color{green}{-5} & \color{green}{0} \end{array} \right) \begin{array}{l} \color{blue}{-1} \\ \color{blue}{-1} \\ \color{blue}{-1} \\ \color{blue}{-1} \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 & 0 \end{array} \right)$$

Vynulujeme prvek  $a_{41}$ .

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \sim \\ \div 4 \\ \div 2 \end{array}$$
$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

První dva řádky opišeme, poslední dva vydělíme společným dělitelem všech čísel v řádku.

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

První řádek opišme, druhý řádek bude klíčový a opišme jej také.

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

Nulujeme  $a_{32}$ .

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 & 0 \end{array} \right) \sim$$
  
$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

Annotation: A blue arrow points from the value -1 in the second row, sixth column of the second matrix to the value -1 in the fifth row, sixth column of the first matrix. The value -1 in the first matrix is enclosed in a white box.

Nulujeme  $a_{42}$ .



Řešte soustavu

$$\begin{aligned}x_1 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\x_1 + x_2 - x_4 - x_5 &= 0 \\5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 &= 0 \\x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & | & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & | & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & | & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & | & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 & | & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 & | & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \div 2 \\ \div 3 \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Vydělíme poslední dva řádky společným dělitelem všech čísel v řádku.

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Poslední dva řádky jsou shodné a stačí uvažovat pouze jeden z nich. Tím je matice převedena do schodovitého tvaru.

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$h(A) = 3 = h(A_r)$$

$$n = 5, \quad 2 \text{ parametry}$$

Řešte soustavu

$$\begin{aligned}x_1 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\x_1 + x_2 - x_4 - x_5 &= 0 \\5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 &= 0 \\x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0\end{aligned}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Uvažujeme matici ve schodvitém tvaru.

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$-x_4 - x_5 = 0$$

Přepíšeme poslední řádek jako klasickou rovnici.

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} -x_4 - x_5 &= 0 \\ x_5 &= t \end{aligned}$$

Protože neznámé v jedné rovnici jsou dvě, musí se jedna z nich rovnat parametru. Nechť například  $x_5$  je parametr.

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$-x_4 - x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$-x_4 - t = 0$$

$$x_4 = -t$$

Dosadíme parametr a vypočteme  $x_4$ .

Řešte soustavu

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 - x_5 &= 0 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$-x_4 - x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$-x_4 - t = 0$$

$$x_4 = -t$$

$$-x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 0$$

Přepíšeme další řádek do tvaru rovnice.



Řešte soustavu

$$\begin{aligned}x_1 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\x_1 + x_2 - x_4 - x_5 &= 0 \\5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 &= 0 \\x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0\end{aligned}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$-x_4 - x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$-x_4 - t = 0$$

$$x_4 = -t$$

$$-x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 0$$

$$-x_2 - x_3 + 4(-t) + t = 0$$

Dosadíme všechno co jsme vypočetli dříve.

Řešte soustavu

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 - x_5 &= 0 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$-x_4 - x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$-x_4 - t = 0$$

$$x_4 = -t$$

$$-x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 0$$

$$-x_2 - x_3 + 4(-t) + t = 0$$

$$x_3 = s$$

Zůstaly dvě neznámé, jedna z nich musí být parametr.

Řešte soustavu

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 - x_5 &= 0 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$-x_4 - x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$-x_4 - t = 0$$

$$x_4 = -t$$

$$-x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 0$$

$$-x_2 - x_3 + 4(-t) + t = 0$$

$$x_3 = s$$

$$-x_2 - s - 3t = 0$$

Dosadíme parametr.

Řešte soustavu

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 - x_5 &= 0 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$-x_4 - x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$-x_4 - t = 0$$

$$x_4 = -t$$

$$-x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 0$$

$$-x_2 - x_3 + 4(-t) + t = 0$$

$$x_3 = s$$

$$-x_2 - s - 3t = 0$$

$$x_2 = -s - 3t$$

Vypočteme  $x_2$ .

Řešte soustavu

$$\begin{aligned}x_1 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\x_1 + x_2 - x_4 - x_5 &= 0 \\5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 &= 0 \\x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0\end{aligned}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$-x_4 - x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$-x_4 - t = 0$$

$$x_4 = -t$$

$$-x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 0$$

$$-x_2 - x_3 + 4(-t) + t = 0$$

$$x_3 = s$$

$$-x_2 - s - 3t = 0$$

$$x_2 = -s - 3t$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

Prepíšeme zbývající řádek do tvaru rovnice.

Řešte soustavu

$$\begin{aligned}x_1 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\x_1 + x_2 - x_4 - x_5 &= 0 \\5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 &= 0 \\x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0\end{aligned}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$-x_4 - x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$-x_4 - t = 0$$

$$x_4 = -t$$

$$-x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 0$$

$$-x_2 - x_3 + 4(-t) + t = 0$$

$$x_3 = s$$

$$-x_2 - s - 3t = 0$$

$$x_2 = -s - 3t$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$x_1 + (-s - 3t) - (-t) - t = 0$$

$$x_1 = s + 3t$$

Dosadíme vypočtené hodnoty a vyjádříme  $x_1$ .

Řešte soustavu

$$\begin{aligned}x_1 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\x_1 + x_2 - x_4 - x_5 &= 0 \\5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 &= 0 \\x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0\end{aligned}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$-x_4 - x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$-x_4 - t = 0$$

$$x_4 = -t$$

$$-x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 0$$

$$-x_2 - x_3 + 4(-t) + t = 0$$

$$x_3 = s$$

$$-x_2 - s - 3t = 0$$

$$x_2 = -s - 3t$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$x_1 + (-s - 3t) - (-t) - t = 0$$

$$x_1 = s + 3t$$

Soustava je vyřešena (viz. červené vztahy)

Řešte soustavu

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0$$

$$x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0$$



Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

První řádek bude klíčový řádek.

Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Druhý řádek zůstává, má už nulu na začátku.

Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

Čtvrtý řádek zůstává, má už nulu na začátku.

Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

Poslední řádek zůstává, má už nulu na začátku.

Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

První řádek zůstane a druhý řádek bude nový klíčový řádek.

Řešte soustavu  $\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{array} \right.$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)} \sim$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$



Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)}$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

Poslední řádek již má dvě nuly na začátku a ponecháme jej tedy beze změny.

Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Poslední dva řádky jsou stejné a jeden z nich lze vynechat. První tři řádky zůstanou a třetí z nich bude nový klíčový řádek.

Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

Matice je ve schodovitém tvaru,  $h(A) = h(A_r) = 4$  a soustava má nekonečně mnoho řešení závislých na  $(5 - 4) = 1$  parametru.

Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

$$4x_4 + 4x_5 = 0$$

$$x_4 + x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = -t$$

Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

$$4x_4 + 4x_5 = 0$$

$$x_4 + x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = -t$$

$$x_3 - 2x_4 - x_5 = 0$$

$$x_3 - 2(-t) - t = 0$$

$$x_3 = -t$$



Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

$$4x_4 + 4x_5 = 0$$

$$x_4 + x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = -t$$

$$x_3 - 2x_4 - x_5 = 0$$

$$x_3 - 2(-t) - t = 0$$

$$x_3 = -t$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

$$x_2 + (-t) + (-t) + t = 0$$

$$x_2 = t$$

Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

$$4x_4 + 4x_5 = 0$$

$$x_4 + x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = -t$$

$$x_3 - 2x_4 - x_5 = 0$$

$$x_3 - 2(-t) - t = 0$$

$$x_3 = -t$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

$$x_2 + (-t) + (-t) + t = 0$$

$$x_2 = t$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 + t + (-t) + (-t) = 0$$

Řešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

$$4x_4 + 4x_5 = 0$$

$$x_4 + x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = -t$$

$$x_3 - 2x_4 - x_5 = 0$$

$$x_3 - 2(-t) - t = 0$$

$$x_3 = -t$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

$$x_2 + (-t) + (-t) + t = 0$$

$$x_2 = t$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 + t + (-t) + (-t) = 0$$

# Shrnutí

**Věta 10.** Buď  $A$  čtvercová matice řádu  $n$ . Následující výroky jsou ekvivalentní:

- Řádky matice jsou tvořeny lineárně nezávislými vektory z  $\mathbb{R}^n$ .
- Sloupce matice jsou tvořeny lineárně nezávislými vektory z  $\mathbb{R}^n$ .
- Hodnota matice  $A$  je rovna  $n$ , tj.  $h(A) = n$
- Matice  $A$  je invertibilní, tj. existuje matice  $A^{-1}$  k ní inverzní.
- Matice  $A$  je regulární, tj.  $\det A \neq 0$ .
- Soustava lineárních rovnic, jejíž matice soustavy je matice  $A$ , má pro libovolnou volbu koeficientů na pravých stranách rovnic jediné řešení.
- Homogenní soustava lineárních rovnic, jejíž matice soustavy je matice  $A$ , má pouze triviální řešení.
- Každý algebraický vektor z  $\mathbb{R}^n$  lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů tvořených řádky (slupci) matice  $A$ , a to jednoznačně, až na pořadí.

**Věta 11.** Uvažujme soustavu lineárních rovnic v maticovém tvaru  $A\vec{x} = \vec{b}$ . Předpokládejme, že k matici  $A$  existuje inverzní matice  $A^{-1}$ . Potom má soustava jediné řešení, jehož jednotlivé složky jsou prvky sloupcového vektoru  $A^{-1} \cdot \vec{b}$ , kde uvedený součin chápeme v maticovém smyslu.

KONEC