Matematika přednáška

Lenka Přibylová

7. února 2007

Obsah

Základy matematické logiky

Definice: **Výrok** je sdělení o jehož pravdivosti můžeme rozhodnout. **Pravdivostní hodnotou** výroku V je číslo $p(V) = 1$, pokud je výrok V pravdivý a $p(V) = 0$, pokud je výrok V nepravdivý.

Logické spojky umožňují z jednotlivých výroků tvořit složitější.

negace	$\neg A$	není pravda, že A
konjunkce	$A \wedge B$	A a zároveň B
disjunkce	$A \vee B$	A nebo B
implikace	$A \Rightarrow B$	jestliže A, pak B
ekvivalence	$A \Leftrightarrow B$	A právě když B

Tabulka pravdivostních hodnot základních výroků:

$p(A)$	$p(B)$	$p(\neg A)$	$p(A \wedge B)$	$p(A \vee B)$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	0

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \Rightarrow B)$	$p(A \Leftrightarrow B)$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	0	1	1

Definice: **Tautologie** je složený výrok, který má vždy pravdivostní hodnotu 1 bez ohledu na to, jaké jsou pravdivostní hodnoty výroků, z nichž je utvořen.

Věta: Následující výroky jsou tautologie:

$$A \vee \neg A, \qquad A \Leftrightarrow A, \qquad \neg\neg A \Leftrightarrow A, \qquad (A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg A$$

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B), \qquad \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

$$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B), \qquad (A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \Leftrightarrow \neg B)$$

Sdělení "celé číslo x je větší než 1" není výrok, protože nelze rozhodnout o jeho pravdivosti či nepravdivosti. Teprve když za x dosadíme nějakou přípustnou konstantu, dostaneme výrok. Takovéto sdělení se nazývá **výroková forma**.

Je-li $V(x)$ výroková forma, pak její **definiční obor** je množina těch α takových, že $V(\alpha)$ je výrok. **Obor pravdivosti** výrokové formy $V(x)$ je množina těch α z definičního oboru, že $V(\alpha)$ je pravdivý výrok.

Z výrokové formy můžeme vytvořit výrok dosazením konstanty z definičního oboru nebo tzv. kvantifikací proměnných. Kvantifikovaný výrok vytvoříme z výrokové formy tak, že udáme počet objektů, pro něž z výrokové formy utvoříme výrok pomocí **kvantifikátoru** "každý" ($\forall$), "alespoň jeden" ($\exists$), "nejvýše dva", "právě tři" atd.

⇒ **Příklady z logiky** ⇐

Základní množinové pojmy

Množina je soubor nějakých věcí nebo objektů, které nazývme **prvky množiny**. Přitom o každém objektu lze jednoznačně rozhodnout, zda do dané množiny patří. Množiny značíme zpravidla velkými písmeny $A, B, C, \dots$, jejich prvky malými písmeny $a, b, c, x, \dots$. Příslušnost resp. nepříslušnost prvku x do množiny A značíme

$$x \in A, \quad \text{resp.} \quad x \notin A$$

Množiny můžeme popsat např. výčtem prvků

$$A = \{1, 4, 7\}$$

nebo zadáním pravidla, které určí, zda daný prvek do množiny patří nebo ne

$$A = \{x : x \text{ je sudé } \wedge 0 \leq x < 7\} = \{0, 2, 4, 6\}$$

Definice: **Sjednocením množin** A a B nazýváme množinu

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\},$$

průnikem množin A a B nazýváme množinu

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\},$$

rozdílem množin A a B nazýváme množinu

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Prázdná množina je množina, která neobsahuje žádný prvek. Značíme ji $\emptyset$. Množina, která obsahuje konečný počet prvků se nazývá **konečná**. Množina, která obsahuje nekonečný počet prvků se nazývá **nekonečná**.

Základní číselné množiny mají pevně dohodnutá označení:

Definice:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \dots$ množina **přirozených čísel**

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \dots$ množina **celých čísel**

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\} \dots$ množina **racionálních čísel**

$\mathbb{R} = (-\infty, \infty) \dots$ množina **reálných čísel**

$\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q} \dots$ množina **iracionálních čísel**

$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\} \dots$ množina **komplexních čísel**

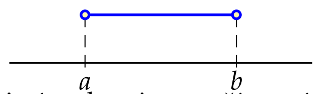
Množina reálných čísel a její podmnožiny

Definice: **Podmnožinou** B množiny A rozumíme libovolnou množinu, jejíž všechny prvky jsou obsaženy v množině A. Tuto vlastnost množiny B zapisujeme takto: $B \subseteq A$

Množinu $\mathbb{R}$ zobrazujeme jako přímku. Typickými podmnožinami množiny $\mathbb{R}$ jsou **intervaly**.

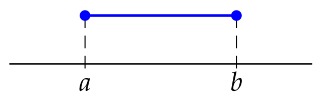
Otevřený interval (a, b) označujeme kulatými závorkami a na přímce úsečkou s prázdnými krajními body.

$a < x < b$

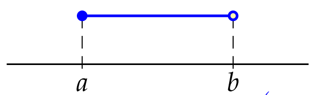


uzavřený interval $\langle a, b\rangle$ označujeme hranatými závorkami a na přímce úsečkou s plnými krajními body.

$a \le x \le b$

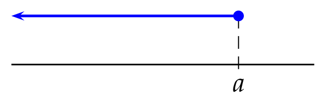


Další možné typy intervalů jsou například tyto:



$\langle a, b)$

$a \le x < b$



$(-\infty, a\rangle$

$-\infty < x \le a$

Funkce

Definice: Nechť jsou dány neprázdné množiny D a H. Pravidlo f, které každému prvku $x \in D$ přiřazuje právě jeden prvek $y \in H$, se nazývá **funkce**. Zapisujeme $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ nebo $\mathbf{f} : \mathbf{x} \to \mathbf{y}$.

Množina $D = D(f)$ se nazývá **definiční obor funkce** f.

Množina všech $y \in H$, pro která existuje $x \in D$ s vlastností $f(x) = y$ se nazývá **obor hodnot funkce** f a označujeme jej $H(f)$.

Pokud jsou $D(f)$ a $H(f)$ podmnožiny $\mathbb{R}$, mluvíme o reálné funkci jedné reálné proměnné.
Operace s funkcemi:
Funkce lze sčítat, odčítat, násobit a dělit. Platí komutativní, asociativní a distributivní zákon.

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

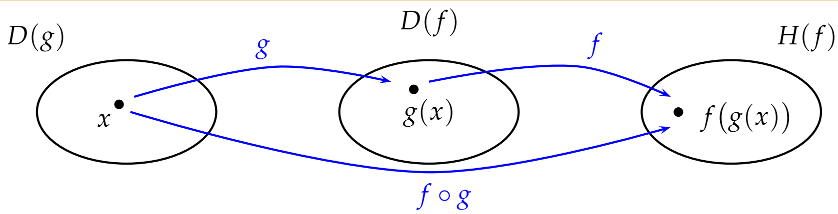
Definiční obor nové funkce je průnikem definičních oborů původních funkcí $D(f) \cap D(g)$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

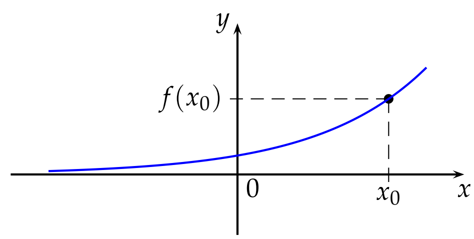
Definiční obor nové funkce je průnikem definičních oborů původních funkcí mimo bodů, kde je jmenovatel nulový: $D(f) \cap D(g) - \{x : g(x) = 0\}$.
Další operací je **skládání funcí**.

Složená funkce

Definice: Nechť $u = g(x)$ je funkce s definičním oborem $D(g)$ a oborem hodnot $H(g)$. Nechť $y = f(u)$ je funkce s definičním oborem $D(f) \supseteq H(g)$. **Složenou funkcí** $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ rozumíme přiřazení, které $\forall x \in D(g)$ přiřazuje $y = f(u) = f(g(x))$. Funkci g nazýváme **vnitřní složkou** a funkci f **vnější složkou** složené funkce.



Definice: **Grafem funkce** rozumíme množinu všech uspořádaných dvojic $[x, f(x)]$, x označujeme jako **nezávislou proměnnou** a y jako **závislou proměnnou**.



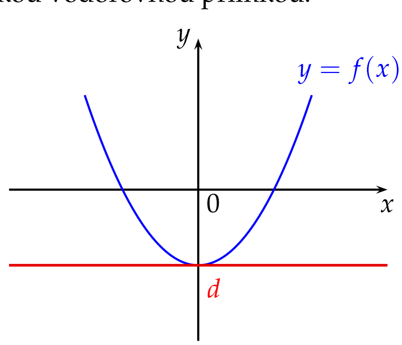
Vlastnosti funkcí

Definice: Nechť f je funkce a $M \subseteq D(f)$ podmnožina definičního oboru funkce f.

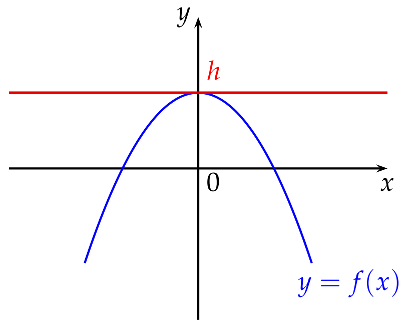
1. Řekneme, že funkce f je na množině M **zdola ohraničená**, jestliže $\exists\ d \in \mathbb{R}$ takové, že pro $\forall x \in M$ platí $d \leq f(x)$.
2. Řekneme, že funkce f je na množině M **shora ohraničená**, jestliže $\exists\ h \in \mathbb{R}$ takové, že pro $\forall x \in M$ platí $f(x) \leq h$.
3. Řekneme, že funkce f je na množině M **ohraničená**, je-li na M ohraničená zdola i shora.

Nespecifikujeme-li množinu M, máme na mysli, že uvedená vlastnost platí na celém definičním oboru funkce f.

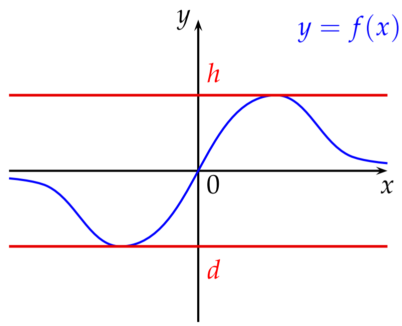
Graf zdola ohraničené funkce leží nad nějakou vodorovnou přímkou:



Graf shora ohraničené funkce leží pod nějakou vodorovnou přímkou:



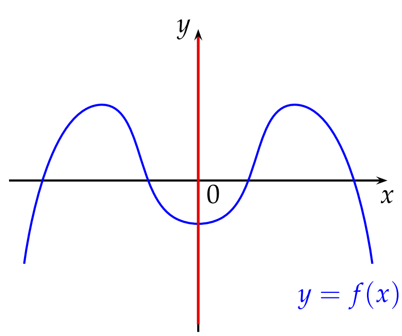
Graf ohraničené funkce leží mezi nějakými dvěma vodorovnými přímkami:



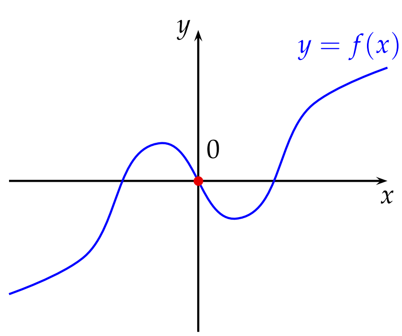
Definice:

1. Řekneme, že funkce f je **sudá**, pokud pro $\forall x \in D(f)$ platí, že
$$-x \in D(f) \quad \wedge \quad f(-x) = f(x).$$
2. Řekneme, že funkce f je **lichá**, pokud pro $\forall x \in D(f)$ platí, že
$$-x \in D(f) \quad \wedge \quad f(-x) = -f(x).$$

Graf sudé funkce je symetrický podle osy y:

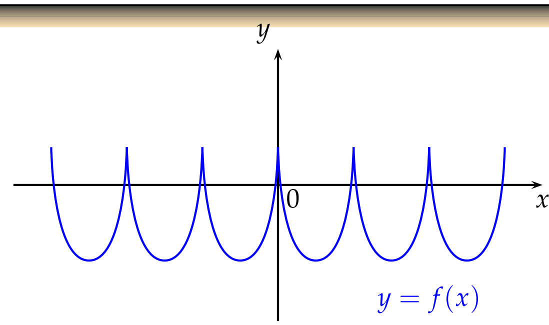


Graf liché funkce je symetrický podle počátku:



Definice: Nechť $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$. Řekneme, že funkce f je **periodická** s periodou p, pokud pro $\forall x \in D(f)$ platí

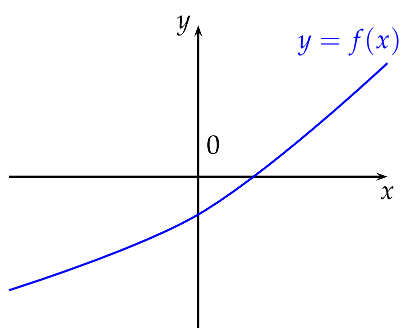
$$x + p \in D(f) \quad \wedge \quad f(x) = f(x+p).$$



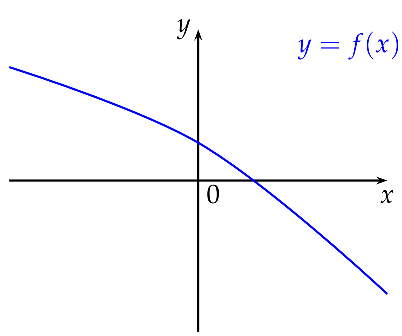
Definice: Nechť f je funkce a $M \subseteq D(f)$ podmnožina definičního oboru funkce f.

1. Řekneme, že funkce f je na množině M **rostoucí**, pokud pro $\forall x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$.
2. Řekneme, že funkce f je na množině M **klesající**, pokud pro $\forall x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) > f(x_2)$.
3. Funkci f nazýváme **ryze monotónní** na množině M , je-li buď rostoucí nebo klesající.

Graf rostoucí funkce:



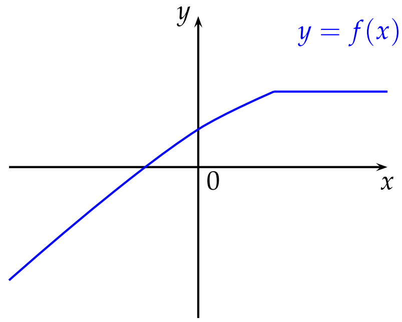
Graf klesající funkce:



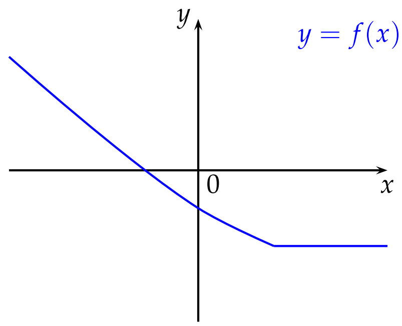
Definice: Nechť f je funkce a $M \subseteq D(f)$ podmnožina definičního oboru funkce f.

1. Řekneme, že funkce f je na množině M **neklesající**, pokud pro $\forall x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$.
2. Řekneme, že funkce f je na množině M **nerostoucí**, pokud pro $\forall x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \geq f(x_2)$.
3. Funkci f nazýváme **monotónní** na množině M , je-li buď nerostoucí nebo neklesající.

Graf neklesající funkce:



Graf nerostoucí funkce:

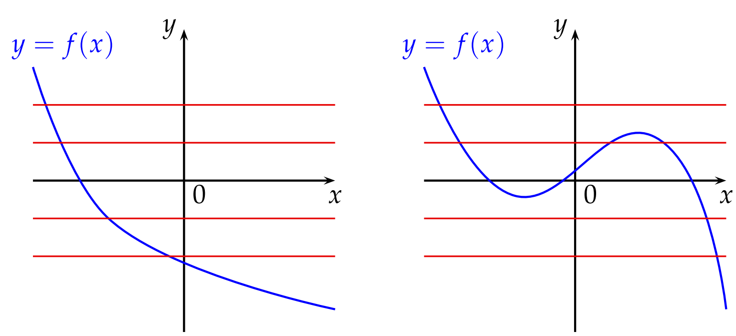


Následující on-line kviz obsahuje také otázky na vlastnosti funkcí, které budou teprve probrány, lze se k němu tedy později vrátit.

$\Rightarrow$ **Interaktivní on-line kvizy na vlastnosti funkcí.** $\Leftarrow$

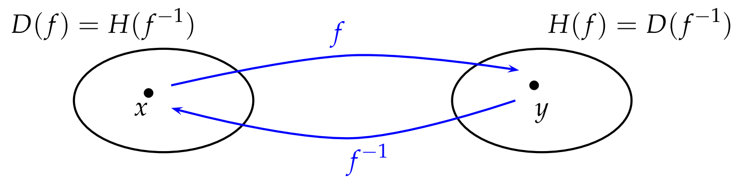
Definice: Nechť f je funkce a $M \subseteq D(f)$ podmnožina definičního oboru funkce f. Řekneme, že funkce f je na množině M **prostá**, pokud pro $\forall x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 \neq x_2$ platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Graf prosté funkce protínají všechny vodorovné přímky nejvýše jednou:

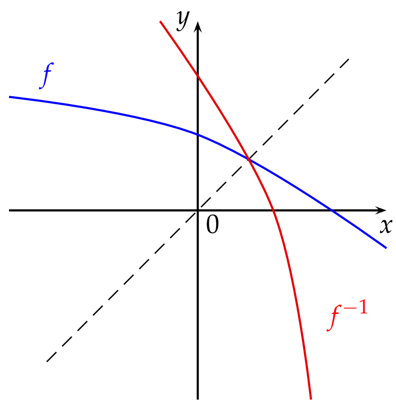


Inverzní funkce

Definice: Nechť f je prostá funkce. Funkci f^{-1}, která každému $y \in H(f)$ přiřazuje právě to $x \in D(f)$, pro které platí $y = f(x)$, nazýváme **inverzní funkcí** k funkci f.



1. $\forall x \in D(f), \forall y \in H(f)$ platí $f^{-1}(f(x)) = x$ a $f(f^{-1}(y)) = y$.
2. Grafy funkcí f a f^{-1} jsou symetrické podle osy prvního kvadrantu:



⇒ **Elementární funkce** ⇐

⇒ **Interaktivní on-line kviz na grafy funkcí v posunutém tvaru.** ⇐

Poznámka 1 (výpočet inverzní funkce)**.** Inverzní funkci k funkci $y = f(x)$ určíme takto: zaměníme formálně v zadání funkce proměnné x a y, máme tedy $x = f(y)$. Z této rovnice vyjádříme proměnnou y (pokud to lze). Protože je funkce f prostá, je toto vyjádření jednoznačné.

⇒ **Příklad na nalezení inverzní funkce** ⇐

U základních elementárních funkcí je inverzní funkce jiná základní elementární funkce:

Vzájemně inverzní elementární funkce:

$y = \sqrt{x}$	$y = x^2, x \geq 0$
$y = \sqrt[3]{x}$	$y = x^3$
$y = e^x$	$y = \ln x$
$y = a^x, a \neq 1$	$y = \log_a x$
$y = \sin x, x \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$	$y = \arcsin x$
$y = \cos x, x \in \langle 0, \pi \rangle$	$y = \arccos x$
$y = \operatorname{tg} x, x \in (-\pi/2, \pi/2)$	$y = \operatorname{arctg} x$
$y = \operatorname{cotg} x, x \in (0, \pi)$	$y = \operatorname{arccotg} x$

Poznámka 2. Platí tedy například:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2} &= x\\ \ln(e^x) &= x\\ e^{\ln x} &= x\\ \arcsin(\sin x) &= x\end{aligned}$$

Příklad . Vypočtěte, pro které x platí $\ln x = 3$.

Použijeme inverzní funkci k logaritmické, kterou je funkce exponenciální a dostaneme:

$$\begin{aligned}\ln x &= 3\\ e^{\ln(x)} &= e^3\\ x &= e^3 \doteq 20.0855\end{aligned}$$

Komplexní čísla

Definice: **Komplexním číslem** rozumíme uspořádanou dvojici reálných čísel a, b zapsanou ve tvaru $z = a + bi$(algebraický tvar komplexního čísla). Číslo $a = \operatorname{Re} z$ nazýváme **reálnou**, číslo $b = \operatorname{Im} z$ **imaginární částí** komplexního čísla z. Číslo $\overline{z} = a - bi$ nazýváme číslem **komplexně sdruženým** s číslem z.

Definujeme operace součet a součin takto:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

Tyto operace vycházejí ze základní definice $i = \sqrt{-1}$. Platí tedy především

$$i^2 = -1.$$

Věta: Pro komplexní čísla z_1, z_2, z_3 platí

- $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
- $z_1 z_2 = z_2 z_1$
- $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
- $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$
- $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

Poznámka 3. Podíl $\frac{z_1}{z_2}$ dvou komplexních čísel z_1, z_2, $z_2 \neq 0$, je komplexní číslo, které vyjádříme v algebraickém tvaru $a + bi$ tak, že zlomek $\frac{z_1}{z_2}$ rozšíříme číslem $\overline{z}_2$

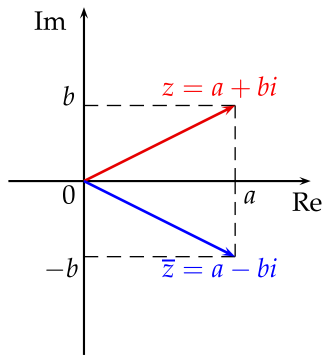
Příklad.

$$\frac{2+5i}{3-4i} = \frac{(2+5i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{-14+23i}{9+16} = -\frac{14}{25} + \frac{23}{25}i$$

Zlomek rozšíříme číslem $3 + 4i$, protože je komplexně sdružené s jmenovatelem $3 - 4i$. Roznásobíme, přitom $5i \cdot 4i = -20$ a ve jmenovateli použijeme vzorec $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, kde $(4i)^2 = -16$. Jmenovatel je tedy nutně reálné číslo. Dostáváme tak vždy výsledek v algebraickém tvaru.

Geometrické znázornění komplexních čísel.

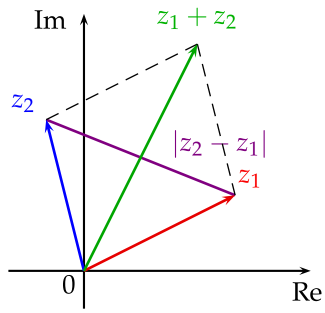
Komplexní číslo $z = a + bi$ znázorňujeme v Gaussově rovině:



Absolutní hodnotou komplexního čísla $z = a + bi$ rozumíme reálné číslo

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

V Gaussově rovině představuje $|z|$ vzdálenost z od počátku. Platí $|z| = \sqrt{z\overline{z}}, \quad |z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.



Goniometrický tvar komplexního čísla.

Každé nenulové komplexní číslo $z = a + bi$ lze jednoznačně zapsat v goniometrickém tvaru

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

kde $r = |z|$ a φ je úhel, který svírá průvodič komplexního čísla z s reálnou osou, platí tedy

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \quad \sin\varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}$$

Číslo φ se nazývá argument (nebo též amplituda) komplexního čísla z a značí se $\varphi = \arg z$.

I když se nebudeme zabývat funkcemi komplexní proměnné, poznamenejme alespoň, že

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Dostáváme takto Eulerův tvar komplexního čísla

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}.$$

Věta: Je-li $z_1 = r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ a $z_2 = r_2(\cos\beta + i\sin\beta)$, pak

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\alpha} \cdot r_2 e^{i\beta} = r_1 r_2 e^{i(\alpha+\beta)} = r_1 r_2(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)).$$

Poznámka 4. Pomocí násobení komplexních čísel lze elegantně odvodit základní goniometrické vzorce pro násobné argumenty, např.

$$\cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha) = e^{i2\alpha} = e^{i(\alpha+\alpha)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\alpha} =$$
$$= (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) \cdot (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) =$$
$$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + i2\sin\alpha\cos\alpha$$

Věta (Moivreova věta)**:** Je-li $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$, pak pro $m \in \mathbb{Z}$ platí

$$z^m = r^m e^{i\varphi m} = r^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi).$$

Věta (Odmocnina z komplexního čísla)**:** n-tá odmocnina z komplexního čísla $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ má n různých hodnot tvaru

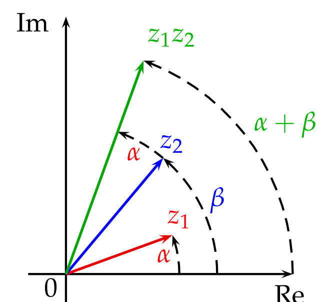
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right),$$

kde $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

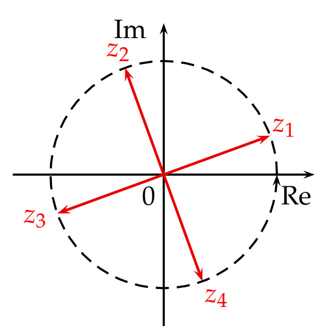
Poznámka 5. Je zřejmé, že umocněním na n-tou dostaneme vždy číslo z, protože funkce sin a cos mají periodu 2π.

Geometrický význam násobení a odmocňování

Jestliže $z_1 = r1(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ a $z_1 = r1(\cos\beta + i\sin\beta)$ jsou dvě komplexní čísla, které v Gaussově rovině leží ve vzdálenosti r_1, resp. r_2 a jejich průvodiče s reálnou osou svírají úhel α, resp. β, pak jejich součin $z = z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta))$ leží ve vzdálenosti $r_1 \cdot r_2$ a průvodič svírá s reálnou osou úhel $\alpha + \beta$.



Všech n hodnot n-té odmocniny z komplexního čísla $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ leží na kruhu s poloměrem $\sqrt[n]{z}$ a jejich průvodiče rozdělují kruh na n stejných částí. Průvodič první z hodnot svírá s reálnou osou úhel $\frac{\varphi}{n}$.



Polynomy

Definice: Funkci $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, kde $a_n \neq 0$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ nazýváme **polynom stupně** n. Čísla $a_0, \ldots, a_n$ nazýváme **koeficienty** polynomu $P(x)$. Koeficient a_0 se nazývá **absolutní člen**.

Definice: Kořenem polynomu $P(x)$ je číslo $x_0 \in \mathbb{C}$, pro které platí $P(x_0) = 0$.

Definice: Je-li x_0 kořenem polynomu, pak lineární polynom $(x - x_0)$ s proměnnou x nazýváme **kořenový činitel** příslušný kořenu x_0. Číslo x_0 je k-násobným kořenem polynomu P, jestliže $P(x) = (x - x_0)^k G(x)$, kde G je polynom a x_0 již není jeho kořenem.

Věta (Základní věta algebry)**:** Polynom stupně n má právě n komplexních kořenů.

Věta: Kvadratická rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0$$

má právě dva kořeny, a to

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Celočíselné kořeny

Věta (Hornerovo schéma)**:** Nechť

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$g(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$$

jsou polynomy. Je-li $f(x) = (x - \alpha)g(x) + b_{-1}$, pak platí

$$a_n = b_{n-1} \quad \text{a} \quad b_{k-1} = \alpha b_k + a_k, \quad \text{pro } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Hornerovo schéma se používá k vypočtení funkční hodnoty polynomu v daném bodě. V případě, že je funkční hodnota nulová, je dané číslo kořenem polynomu.

Příklad. Nalezněte hodnotu polynomu $P_n(x) = x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 7$ v bodě $x = -3$.

	1	-4	-4	0	7
-3	1	-7	17	-51	**160**

Do záhlavítabulky sepíšeme sestupně všechny koeficienty. Číslo -3 zapíšeme vlevo do záhlaví řádku. Sepíšeme hlavní koeficient. Násobíme záhlaví řádku a poslední číslo v řádku a přičteme následující koeficent: $-3 \cdot 1 - 4 = -7$, $-3 \cdot (-7) - 4 = 17$, $-3 \cdot 17 - 0 = -51$, $-3 \cdot (-51) + 7 = 160$. Na posledním místě v řádku dostaneme hodnotu polynomu $P(-3) = 160$.

Celočíselné kořeny polynomu $P_n(x)$ s celočíselnými koeficienty lze pomocí Hornerova schématu hledat mezi děliteli absolutního členu a_n, jak je vidět z následujícího roznásobení:

$$2(x-2)(x+3)(x^2+5) = 2(x^2+x-6)(x^2+5) = 2x^4 + \ldots -60.$$

Hornerovo schéma je také výhodné pro nalezení rozkladu na kořenové činitele, protože v případě dosazení kořene α (tedy $b_{-1} = 0$) po řádcích dělí polynom příslušným kořenovým činitelem $(x - \alpha)$.

Příklad.
Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0.$
Děliteli čísla 36 jsou ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 9, ± 12, ± 18 a ± 36.

	1	1	-5	-9	-24	-36
1	1	2	-3	-12	-36	-72
-1	1	0	-5	-4	-20	-16
2	1	3	1	-7	-38	$\neq 0$
$\boxed{-2}$	1	-1	-3	-3	-18	$\boxed{0}$
$\boxed{-2}$	1	-3	3	-9	$\boxed{0}$	
-2	1	-5	13	-35		
$\boxed{3}$	1	0	3	$\boxed{0}$		

Vypíšeme dělitele čísla 36 (i záporné). Budeme počítat hodnoty pomocí Hornerova schematu. Připravíme si proto koeficienty polynomu z levé strany rovnice do tabulky.

- Dosadíme $x = 1$. Je-li $P(x)$ polynom z pravé strany rovnice, vidíme, že $P(1) = -72$ a toto číslo $x = 1$ není kořenem.
- Podobně ani $x = -1$ není kořenem. Ani $x = 2$ není kořenem.
- V dalším kroku jsme zjistili, že $x = -2$ je kořenem. Levou stranu rovnice je tedy možno přepsat do tvaru

  $$(x+2)(x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 18) = 0.$$

  Dál zkoumáme jenom polynom, který stojí v tomto součinu jako druhý.
- Dosadíme opět $x = -2$. Opět je toto číslo kořenem a levou stranu rovnice je možno přepsat do tvaru

  $$(x+2)^2(x^3 - 3x^2 + 3x - 9) = 0.$$

- Dosadíme opět $x = -2$. Nyní již se o kořen nejedná. To je vidět i z toho, že na konci polynomu, do kterého nyní dosazujeme, stojí číslo 9, zajímáme se jen o dělitele tohoto čísla.
- Vyškrtneme čísla která nedělí číslo 9 a dosazujeme další na řadě, $x = 3$. Vidíme, že $x = 3$ je kořenem.

Polynom má dvojnásobný kořen $x = -2$ a jednoduchý kořen $x = 3$. Koeficienty $1, 0, 3$ znamenají, že v součinu stojí polynom $x^2 + 0x + 3$, který nemá reálné kořeny. Rozklad na součin je $(x+2)^2(x-3)(x^2+3) = 0$.

Racionální lomená funkce

Definice: Funkce $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, kde P, Q jsou polynomy stupně n, m, je racionální funkce. Je-li $n \geq m$, nazývá se funkce $R(x)$ **neryze lomená**, je-li $n < m$, nazývá se funkce $R(x)$ **ryze lomená**.

Věta: Každou neryze lomenou funkci lze zapsat jako součet polynomu a ryze lomené funkce.

Každou ryze lomenou funkci $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ lze rozepsat na součet parciálních zlomků. V rozkladu na parciální zlomky přísluší každému r-násobému reálnému kořeni polynomu $Q_m(x)$ právě r parciálních zlomků

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(ax+b)^r}.$$

Dvojici s-násobných komplexně sdružených kořenů polynomu $Q_m(x)$ přísluší právě s parciálních zlomků

$$\frac{B_1x+C_1}{ax^2+bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_sx+C_s}{(ax^2+bx+c)^s}.$$

Koeficienty $A_1, A_2, \ldots, A_r, B_1, C_1, B_2, C_2, \ldots, B_s, C_s$ jsou určeny jednoznačně.

⇒ **Příklady na dělení polynomu polynomem** ⇐

⇒ **Příklady na rozklad na parciální zlomky** ⇐

⇒ **On-line kvizy na racionální funkce a dělení polynomů.** ⇐

Číselné vektory

Ve fyzice a technických disciplínách se zkoumají veličiny

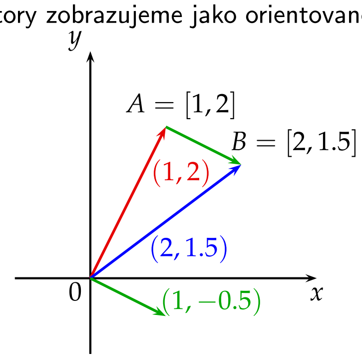
- skalární: představují velikost – hmotnost, čas, teplota, ...
- vektorové: mají více složek, mohou popisovat kromě velikosti také směr a orientaci – síla, okamžitá rychlost, posunutí ..., nebo mohou představovat data – časová řada, barva (RGB), souřadnice pozice ...

Definice: Množinu $\mathbb{R}^n$ uspořádaných n-tic reálných čísel $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ s operacemi sčítání a násobení reálným číslem definovanými

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$
$$k(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (ka_1, ka_2, \ldots, ka_n)$$

pro všechna $k \in \mathbb{R}$ a $(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ nazýváme **lineárním vektorovým prostorem**. Prvky tohoto prostoru, tj. uspořádané n-tice reálných čísel nazýváme **vektory**. Čísla $a_1, \ldots, a_n$ nazýváme **složky vektoru** $\vec{a}$. Číslo n nazýváme **dimenze (rozměr) vektoru** $\vec{a}$. Vektor $(0, 0, \ldots, 0)$ dimenze n nazýváme **nulovým vektorem**.

Poznámka 6. Geometricky 2 a 3-rozměrné vektory zobrazujeme jako orientované průvodiče bodů:



Vektor $\vec{v} = \vec{AB}$ je orientovaná úsečka spojující bod A s bodem B. Složky vektoru $\vec{v}$ jsou dány rozdílem souřadnic $B - A$.

Operace s vektory

$\vec{a} = (1,2,1), \vec{b} = (3,0,-1), \vec{c} = (2,1,0)$

$$\begin{aligned}\vec{a} + 2\cdot\vec{b} - \vec{c} &= (1,2,1) + 2\cdot(3,0,-1) - (2,1,0)\\ &= (1,2,1) + (6,0,-2) - (2,1,0)\\ &= (1+6-2, 2+0-1, 1-2-0)\\ &= (5,1,-1)\end{aligned}$$

$$\vec{a} + \vec{0} = (1,2,1) + (0,0,0) = (1,2,1) = \vec{a}$$

$$0\cdot\vec{a} + 0\cdot\vec{b} + 0\cdot\vec{c} = (0,0,0) = \vec{0}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} - 2\cdot\vec{c} &= (1,2,1) + (3,0,-1) - (4,2,0)\\ &= (0,0,0)\end{aligned}$$

Definice: Vektor $-\vec{a} = -1\cdot\vec{a}$ nazýváme vektorem **opačným** k vektoru $\vec{a}$.

Definice: **Velikostí vektoru** $\vec{a}$ nazveme nezáporné číslo

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

Vektor $\vec{a}$ nazveme **jednotkovým vektorem**, jestliže $|\vec{a}| = 1$.

Velikost vektoru $\vec{a} = (-2,1,4,0,-3)$ je $|\vec{a}| = \sqrt{4+1+16+9} = \sqrt{30}$.

Definice: **Skalárním součinem vektorů** $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ nazýváme číslo

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + \cdots + a_n\cdot b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Skalární součin je možné vyjádřit také jako číslo $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$, kde φ je úhel, který svírají vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$. Naopak tedy pro nenulové vektory platí, že svírají úhel φ, pro který platí

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|},$$

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Úhel, který svírají vektory $\vec{a} = (2, -1, 3, 2)$, $\vec{b} = (1, -2, -2, 1)$ splňuje

$$\cos \varphi = \frac{2 + 2 - 6 + 2}{\sqrt{4 + 1 + 9 + 4}\sqrt{1 + 4 + 4 + 1}} = \frac{0}{\sqrt{18 \cdot 10}} = 0,$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

Vektory jsou kolmé (ortogonální) $\Leftrightarrow$ je jejich skalární součin roven nule.

Lineární kombinace vektorů

Definice: Nechť $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ jsou vektory stejné dimenze a $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$. Vektor

$$\vec{v} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + \cdots + k_n\vec{u}_n = \sum_{i=1}^{n} k_i\vec{u}_i$$

nazýváme **lineární kombinací vektorů** $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$.

$\Rightarrow$ **Příklady na lineární kombinaci vektorů.** $\Leftarrow$

Lineární závislost a nezávislost vektorů.

Definice: Vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ nazýváme **lineárně závislé**, je-li aspoň jeden z vektorů lineární kombinací ostatních. V opačném případě je nazýváme lineárně nezávislé.

Věta: Vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ jsou lineárně nezávislé $\Leftrightarrow$ nulový vektor je právě jen jejich nulovou lineární kombinací, tj.

$$\vec{0} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + \cdots + k_n\vec{u}_n$$

právě pro $k_1, k_2, \ldots, k_n = 0$.

Věta: Platí-li $\vec{0} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + \cdots + k_n\vec{u}_n$ a alespoň jedno k_i je nenulové, jsou vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ lineárně závislé.

Poznámka 7. Vektory jsou jistě závislé, pokud

- je mezi nimi alespoň jeden nulový.
- jsou mezi nimi dva vektory stejné.
- je-li některý vektor násobkem jiného.

Definice: **Báze vektorového prostoru** dimenze n je libovolná lineárně nezávislá soustava n vektorů.

Věta: Libovolný vektor vektorového prostoru je lineární kombinací vektorů báze. Báze tedy generuje celý vektorový prostor.

Matice

Definice: **Maticí typu** $m \times n$ rozumíme uspořádané schema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pro $i = 1, \ldots, m$ a $j = 1, \ldots, n$. Množinu všech matic typu $m \times n$ označujeme symbolem $\mathbb{R}^{m \times n}$. Zkráceně zapisujeme $A_{m \times n} = (a_{ij})$.

Je-li $m = n$ nazývá se matice A čtvercová matice a často říkáme, že je **řádu** n místo typu $n \times n$. Je-li A čtvercová matice, nazýváme prvky tvaru a_{ii}, tj. prvky, jejichž řádkový a sloupcový index jsou stejné, prvky hlavní diagonály.

Definice: Matice $A_{m \times n} = (a_{ij})$, kde $a_{ij} = 0$ pro všechna $i = 1, \ldots, m$ a $j = 1, \ldots, n$ se nazývá **nulová matice**.

Definice: **Jednotková matice** je čtvercová matice, která má na hlavní diagonále jedničky a na ostatních místech nuly. Jednotkovou matici značíme I.

Definice: **Schodovitá (stupňová)** se nazývá matice, jejíž každý řádek začíná větším počte nul než předcházející.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matice A je schodovitá, matice B není schodovitá – druhý a třetí řádek začíná stejným počtem nul.

Definice: Buď $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Matice

$$A^T = (a_{ji}) \in \mathbb{R}^{n \times m},$$

tj. matice, která vznikne záměnou řádků a sloupců matice A, se nazývá **matice transponovaná** k matici A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Operace s maticemi

Definice:

- Nechť $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$. **Součtem matic** A a B rozumíme matici $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, kde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Zapisujeme $C = A + B$.
- $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $k \in \mathbb{R}$. **Součinem** čísla t a matice A rozumíme matici $D = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, kde $d_{ij} = k \cdot a_{ij}$. Zapisujeme $D = kA$.

S maticemi tedy pracujeme stejně jako s čísly, sčítáme a číslem násobíme jednotlivé prvky. Platí proto komutativní, asociativní i distributivní zákon.

Příklad. Sečtěte matice a výslednou matici vynásobte číslem 3.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3 \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -9 & 9 \\ 9 & 6 & 3 \\ 12 & 12 & 6 \end{pmatrix}$$

Definice: $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times p}$ a $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{p \times n}$. **Součinem matic** A a B (v tomto pořadí) rozumíme matici $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, kde

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = a_i \cdot b_j$$

pro všechna $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, tj. prvek na i-tém řádku a j-tém sloupci vznikne jako skalární součin i-tého řádku matice A a j-tého sloupce matice B. Zapisujeme $C = AB$ (v tomto pořadí).

Příklad. Vynásobte matice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) + 2\cdot 3 & 2\cdot 4 - 1\cdot 2 + 2\cdot 1 \\ 3\cdot 2 + 1\cdot(-1) - 2\cdot 3 & 3\cdot 4 + 1\cdot 2 - 2\cdot 1 \\ 2\cdot 2 + 0\cdot(-1) + 1\cdot 3 & 2\cdot 4 + 0\cdot 2 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ -1 & 12 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Na místě ij ve výsledné matici C je skalární součin i-tého řádku matice A a j-tého sloupce matice B. Uvedený maticový součin je tedy možno chápat jako šest skalárních součinů.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{není definováno}$$

Pro matice NEPLATÍ komutativní zákon. Násobíme-li matice v opačném pořadí, neodpovídají dokonce ani počty členů skalárního součinu. Komutativní zákon ale neplatí ani pro čtvercové matice.

Věta: Součin matic je asociativní a distributivní zprava i zleva vzhledem ke sčítání, tj. platí

$$A(BC) = (AB)C \qquad \text{(asociativita)}$$
$$A(B+C) = AB + AC \qquad \text{(levý distributivní zákon)}$$
$$(B+C)A = BA + CA \qquad \text{(pravý distributivní zákon)}$$

vždy, když tyto operace mají smysl. Součin matic není komutativní.

Věta: Buď A matice. Pak platí $IA = A$ a $AI = A$ vždy, když je tento součin definovaný.

Hodnost matice

Definice: Buď A matice. **Hodností matice** rozumíme maximální počet lineárně nezávislých řádků matice. Hodnost matice A označujeme $h(A)$.

Věta: Hodnost matice, která je ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je ve schodovitém tvaru a $h(A) = 3$.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

není ve schodovitém tvaru a její hodnost na první pohled nepoznáme.

Definice: Následující úpravy nazýváme **ekvivalentní**:

- záměna pořadí řádků
- vynásobení libovolného řádku nenulovým číslem
- přičtení jiného řádku (nebo jeho násobku) k druhému
- vynechání řádku složeného ze samých nul

Definice: Dvě matice A, B nazýváme **ekvivalentní**, jestliže lze matici A převést na matici B konečným počtem ekvivalentních úprav. Značíme $A \sim B$.

Věta: Ekvivalentní matice mají stejnou hodnost.

Poznámka 8. Ekvivalentní matice mají stejnou nejen hodnost, ale také řádky matice jako vektory generují stejný vektorový prostor. Matice vznikly původně pro zjednodušený zápis soustav rovnic. Řádek matice odpovídá jedné rovnici soustavy. Ekvivalentní úpravy matice jsou totéž jako úpravy, které provádíme s řádky soustavy při hledání řešení (záměna pořadí řádku – rovnic, vynásobení řádku – rovnice nenulovým číslem, atd.). Matice jsou tedy ekvivalentní ve smyslu zachovávání řešení odpovídající soustavy rovnic.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \qquad \cdot(-2) \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \qquad \text{přičteme k druhé rovnici} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ -5x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Věta: Libovolnou matici lze konečným počtem ekvivalentních úprav převést do schodovitého tvaru.

Věta: Transponování nemění hodnost matice.

⇒ **Příklady na výpočet hodnosti matice.** ⇐

Inverzní matice

Definice: Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ čtvercová matice řádu n. Jestliže existuje čtvercová matice A^{-1} řádu n, splňující vztahy

$$A^{-1}A = I = AA^{-1},$$

nazýváme matici A^{-1} **inverzní maticí** k matici A.

Věta: Nechť matice A je čtvercová. Potom inverzní matice A^{-1} existuje právě tehdy, když je matice A regulární, tj. $\det(A) \neq 0$.

Násobení inverzní maticí je inverzní operací k maticovému násobení:

$$\begin{aligned} A \cdot X &= B \\ A^{-1} \cdot (A \cdot X) &= A^{-1} \cdot B \\ (A^{-1} \cdot A) \cdot X &= A^{-1} \cdot B \\ I \cdot X &= A^{-1} \cdot B \\ X &= A^{-1} \cdot B \end{aligned}$$

- Jednotková matice je neutrálním prvkem vzhledem k násobení.
- Pokud bychom násobili inverzní maticí zprava, obdrželi bychom vztah

  $$A \cdot X \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1},$$

  ze kterého hledané X nelze vyjádřit.

Poznámka 9. Inverzní matici k čtvercové matici A hledáme pomocí řádkovách ekvivalentních úprav totožných s úpravami zachovávajícími hodnost matice na matici jednotkovou. Tytéž úpravy současně provádíme na jednotkové matici a z jednotkové matice takto vznikne matice inverzní A^{-1}.

⇒ **Příklady na výpočet inverzní matice.** ⇐

Determinant matice

Definice: **Permutací** o n-prvcích rozumíme uspořádanou n-tici $k_1, k_2, \ldots, k_n$, která vznikla přeskládáním čísel $1, 2, \ldots, n$. Inverzí rozumíme záměnu i-tého a j-tého prvku v permutaci.

Definice: Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ čtvercová matice řádu n. **Determinant matice** A je reálné číslo

$$\det A = \sum (-1)^p a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n}$$

přes všechny permutace sloupcových indexů. Číslo p je počet inverzí dané permutace. Zapisujeme také $\det A = |A| = |a_{ij}|$.

Poznámka 10. Podle definice je determinant číslo, které vznikne jako součet všech možných součinů prvků ze všech řádků, ale různých sloupců. Tato definice není příliš vhodná pro výpočet determinantu matice vysokého řádu, protože počet sčítanců rychle roste. Pro matici řádu n je počet permutací $n!$. Pro matici řádu 1 a 2 je podle definice výpočet determinantu jednoduchý:

$$\begin{aligned} n = 1: &\quad \det A = a_{11} \\ n = 2: &\quad \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

Pro matici řádu 2 říkáme předpisu pro determinant křížové pravidlo, protože prvky matice násobíme do kříže:

$$\begin{vmatrix} \color{red}{a_{11}} & \color{blue}{a_{12}} \\ \color{blue}{a_{21}} & \color{red}{a_{22}} \end{vmatrix} = \color{red}{a_{11}a_{22}} - \color{blue}{a_{12}a_{21}}$$

Sarussovo pravidlo:

Pro matici řádu 3 platí

$$\begin{array}{|ccc|} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} = \begin{array}{l} \ \ a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} \end{array}$$
$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$

Determinant je číslo, které vznikne jako součet všech součinů prvků v různých řádcích a soupcích a ± 1. Jednoduchý způsob, jak všechny tyto členy najít je tzv. Sarussovo pravidlo, kdy nejprve opíšeme první dva řádky matice pod determinant, sečteme součiny na všech diagonálách a odečteme součiny na protisměrných diagonálách.

Definice: Buď A čtvercová matice. Je-li $\det A = 0$, říkáme, že matice A je **singulární**, v opačném případě říkáme, že je **regulární**.

Věta: Ke čtvercové matici A existuje matice inverzní $\Leftrightarrow$ A je regulární, tj. $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$.

Věta: Determinant matice, která je ve schodovitém tvaru je roven součinu prvků v hlavní diagonále.

Věta: Následující operace nemění hodnotu determinantu matice:

- přičtení lineární kombinace ostatních řádků (sloupců) k jinému řádku (sloupci)
- ponechání jednoho řádku (sloupce) beze změny a opakované přičtení libovolných násobků tohoto řádku (sloupce) k ostatním řádkům (sloupcům) matice
- transponování matice

Věta: Následující operace mění hodnotu determinantu popsaným způsobem:

- přehozením dvou řádků (sloupců) determinant mění znaménko
- vydělíme-li jeden řádek (sloupec) nenulovým číslem a, zmenší se hodnota determinantu a-krát (tj. z řádku nebo sloupce lze vytýkat)

Poznámka 11. Podle předchozí věty, platí

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Definice: Nechť A je čtvercová matice řádu n. Vynecháme-li v matici A i-tý řádek a j-tý sloupec, označujeme determinant vzniklé submatice M_{ij} a nazýváme jej **minor** příslušný prvku a_{ij}. Číslo

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

nazýváme **algebraický doplněk** prvku a_{ij}.

Věta (Laplaceův rozvoj determinantu): Pro libovolný sloupec resp. řádek determinantu A platí

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij},$$

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij},$$

tj. determinant se rovná součtu všech součinů prvku a jeho algebraického doplňku libovolného sloupce nebo řádku.

Poznámka 12. Řádek nebo sloupec, podle kterého provádíme rozvoj, je vhodné volit tak, aby obsahoval co nejvíce nulových prvků.

⇒ **Příklady na výpočet determinantu matice.** ⇐

Soustavy lineárních rovnic

Uvažujme následující tři problémy: Najděte všechna reálná čísla x_1, x_2, splňující:

Úloha 1 :
$$4x_1 + 5x_2 = 7$$
$$x_1 - 2x_2 = 4$$

Úloha 2 :
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Úloha 3
$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Všechny problémy jsou ekvivalentní a jedná se o jiný zápis téhož.

Definice: **Soustavou** m lineárních rovnic o n neznámých nazýváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

Proměnné $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazýváme neznámé. Reálná čísla a_{ij} nazýváme koeficienty levých stran, reálná čísla b_j koeficienty pravých stran soustavy rovnic. Řešením soustavy rovnic rozumíme uspořádanou n-tici reálných čísel $[t_1, t_2, \ldots, t_n]$ po jejichž dosazení za neznámé (v tomto pořadí) do soustavy dostaneme ve všech rovnicích identity.

Definice: Matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazýváme **maticí soustavy**. Matici

$$A_r = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

nazýváme rozšířenou maticí soustavy.

Poznámka 13 (maticový zápis soustavy lineárních rovnic)**.**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$Ax = b.$$

Definice: Platí-li v soustavě $Ax = b$

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0,$$

tedy $Ax = 0$, nazývá se soustava **homogenní**.

Poznámka 14. Homogenní soustava lineárních rovnic $Ax = 0$ je vždy řešitelná. Po dosazení okamžitě vidíme, že n-tice $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_n = 0$ je řešením. Toto řešení nazýváme triviální. U homogenních soustav lineárních rovnic tedy buď existuje pouze triviální řešení, nebo existuje nekonečně mnoho řešení.

Věta (Frobeniova věta)**:** Soustava lineárních rovnic $Ax = b$ je řešitelná právě tehdy, když matice soustavy A a rozšířená matice soustavy $A_r = (A|b)$ mají stejnou hodnost, tj. $h(A) = h(A_r)$.

- Soustava nemá řešení, pokud $h(A) \neq h(A_r)$.
- Soustava má právě jedno řešení, pokud $h(A) = h(A_r) = n$.
- Soustava má nekonečně mnoho řešení, pokud $h(A) = h(A_r) < n$. Tato řešení lze vyjádřit pomocí $(n - h(A))$ nezávislých parametrů.

Gaussova eliminační metoda

Převedením rozšířené matice soustavy na schodovitý tvar zjistíme, zda je soustava rovnic řešitelná (Frobeniova věta). V případě, že $h(A) = h(A_r)$, řešíme soustavu tzv. Gaussovou eliminační metodou, kdy neznámé vyjadřujeme z rovnic odpovídajících řádkům matice ve schodovitém tvaru, které jsou ekvivalentní původním rovnicím. Vyjadřování provádíme odspodu soustavy.

⇒ **Příklady na Gaussovou eliminační metodou.** ⇐

Cramerovo pravidlo

Věta (Cramerovo pravidlo)**:** Je-li matice A čtvercová a regulární, má soustava $Ax = b$ jediné řešení a pro i-tou složku x_i tohoto řešení platí:

$$x_i = \frac{D_i}{D},$$

kde $D = \det A$ a D_i je determinant matice, která vznikne z matice A výměnou i-tého sloupce za sloupec b.

⇒ **Příklady na Cramerovo pravidlo.** ⇐

Analytická geometrie v rovině

Věta: Libovolnou přímku p v rovině lze vyjádřit rovnicí

$$ax + by + c = 0,$$

kde a, b, c jsou konstanty, přičemž a, b nejsou současně rovny nule. Vektor $n = (a, b)$ je kolmý k přímce p. Naopak každá rovnice tvaru $ax + by + c = 0$, kde $a^2 + b^2 > 0$, představuje přímku p v rovině kolmou k vektoru $n = (a, b)$.

Definice: Rovnice

$$ax + by + c = 0$$

se nazývá **obecná rovnice přímky**, vektor $n = (a, b)$ se nazývá **normálový vektor přímky**. Každý nenulový vektor, který je k normálovému vektoru kolmý se nazývá **směrový vektor přímky**.

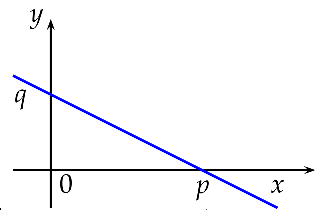
Jedním ze směrových vektorů je např. vektor $s = (-b, a)$, protože skalární součin vektorů s a n je roven nule.

Definice: **Směrnicí přímky** p o rovnici $ax + by + c = 0$, která není rovnoběžná s osou y, tj. $b \neq 0$, rozumíme podíl $k = -\frac{a}{b}$.

Směrnice $k = \operatorname{tg}\alpha$, kde α je úhel, který přímka svírá s osou x. V případě, že $b \neq 0$, tj. přímka je rovnoběžná s osou y, řekneme, že přímka p nemá směrnici. Přímku p se směrnicí k je možné vyjádřit ve směrnicovém tvaru $y = kx + q$. Přímku, která protíná souřadné osy v bodech různých od počátku souřadnic, lze vyjádřit také rovnicí v tzv. **úsekovém tvaru**

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1,$$

kde $p \neq 0$ je úsek vyťatý přímkou na ose x, $q \neq 0$ je úsek vyťatý přímkou na ose y.



Přímku p, která prochází bodem $A = [x_0, y_0]$ se směrovým vektorem $s = (s_1, s_2)$ má parametrické rovnice

$$x = x_0 + s_1 t, \quad y = y_0 + s_2 t,$$

kde $t \in (-\infty, \infty)$ je parametr.

Věta: Přímka určená body $A = [x_1, y_1]$ a $B = [x_2, y_2]$ má obecnou rovnici

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Je-li $x_1 \neq x_2$, má přímka směrnici a lze ji zapsat ve tvaru

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Přímka určená bodem $A = [x_1, y_1]$ a směrovým vektorem $s = (s_2, s_2)$ má obecnou rovnici

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Definice: **Vzdálenost** bodů $A = [x_1, y_1]$ a $B = [x_2, y_2]$ v rovinném kartézském souřadném systému je délka úsečky AB a je dána vztahem

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Pro vzdálenost d bodu $A = [x_0, y_0]$ od přímky p o rovnici $ax + by + c = 0$ platí

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Dvě přímky o rovnicích $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ a $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ svírají úhly φ a $\pi - \varphi$, přičemž platí

$$\cos\varphi = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Dvě přímky o rovnicích $y = k_1 x + q_1$ a $y = k_2 x + q_2$ svírají úhly φ a $\pi - \varphi$, přičemž platí

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}, \qquad \text{pro } k_1 k_2 + 1 \neq 0,$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{pro } k_1 k_2 + 1 = 0.$$

Často je třeba rozhodnout o vzájemné poloze dvou přímek p, q o rovnicích $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ a $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

$$p \| q \quad \text{právě tehdy když} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$p \equiv q \quad \text{právě tehdy když} \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \quad \text{má hodnost 1.}$$

Je-li p přímka $ax + by + c = 0$ a q přímka daná bodem A a směrovým vektorem (s_1, s_2), pak

$$p \| q \quad \text{právě tehdy když} \quad as_1 + bs_2 = 0.$$

Je-li p přímka daná bodem A a směrovým vektorem (s_1, s_2) a q přímka daná bodem B a směrovým vektorem (u_1, u_2), pak

$$p \| q \quad \text{právě tehdy když} \quad \begin{vmatrix} s_1 & s_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Poznámka 15. Rovnoběžné přímky (resp. jejich směrové vektory) nazýváme **kolineární**. Směrové vektory kolineárních přímek jsou **lineárně závislé**.

Kuželosečky

Definice: **Kružnice** je množina bodů v rovině, které mají od pevného bodu S (středu kružnice) konstantní vzdálenost r, nazývanou poloměr kružnice.

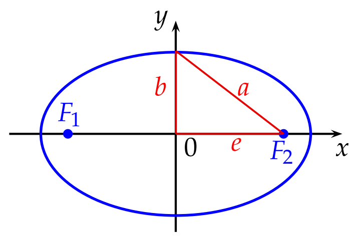
Věta: Kružnice o středu v bodě $[x_0, y_0]$ a poloměru r má obecnou rovnici

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Definice: **Elipsa** je množina bodů v rovině, které mají od dvou pevných bodů F_1, F_2 (ohnisek) konstantní součet vzdáleností $(2a)$.

Věta: Elipsa ve středové poloze, při níž ohniska leží v bodech $F_1 = [-e, 0]$ a $F_2 = [e, 0]$ o poloosách délky a, b, má rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{kde} \quad b^2 = a^2 - e^2.$$



Elipsa se středem v bodě $[x_0, y_0]$, jejíž osy jsou rovnoběžné s osami souřadného systému má obecnou rovnici

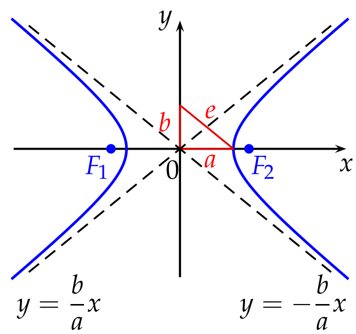
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Poznámka 16. Číslo a se nazývá hlavní poloosa elipsy, b vedlejší poloosa elipsy a e excentricita elipsy (výstřednost elipsy).

Definice: **Hyperbola** je množina bodů v rovině, které mají od dvou pevných bodů F_1, F_2 (ohnisek) konstantní rozdíl vzdáleností ($2a$).

Věta: Hyperbola ve středové poloze, při níž ohniska leží v bodech $F_1 = [-e, 0]$ a $F_2 = [e, 0]$ má rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{kde} \quad b^2 = e^2 - a^2.$$



Hyperbola se středem v bodě $[x_0, y_0]$, jejíž osy jsou rovnoběžné s osami souřadného systému má obecnou rovnici

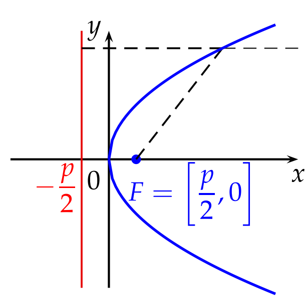
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Definice: **Parabola** je množina bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od pevného bodu F (ohniska) a pevné přímky d (řídící přímky), neprocházející bodem F.

Věta: Parabola s ohniskem $F = \left[\frac{p}{2}, 0\right]$ a s řídící přímkou $x = -\frac{p}{2}$ má rovnici

$$y^2 = 2px,$$

kde $2p$ se nazývá parametr paraboly.



Parabola s vrcholem v bodě $[x_0, y_0]$ a osou $y = y_0$ má obecnou rovnici

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0).$$

Parabola s vrcholem v bodě $[x_0, y_0]$ a osou $x = x_0$ má obecnou rovnici

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0).$$

Analytická geometrie v prostoru

Věta: Libovolnou rovinu ρ v prostoru lze vyjádřit rovnicí

$$ax + by + cz + d = 0,$$

kde a, b, c, d jsou konstanty, přičemž a, b, c nejsou současně rovny nule. Vektor $n = (a, b, c)$ je kolmý k rovině ρ. Naopak každá rovnice tvaru $ax + by + cz + d = 0$, kde $a^2 + b^2 + c^2 > 0$, představuje rovinu ρ kolmou k vektoru $n = (a, b, c)$.

Definice: Rovnice

$$ax + by + cz + d = 0$$

se nazývá **obecná rovnice roviny**, vektor $n = (a, b, c)$ se nazývá **normálový vektor roviny**.

Rovinu, která protíná souřadné osy v bodech různých od počátku souřadnic, lze vyjádřit také rovnicí v tzv. **úsekovém tvaru**

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1,$$

kde $p \neq 0$ je úsek vyťatý přímkou na ose x, $q \neq 0$ je úsek vyťatý přímkou na ose y a $r \neq 0$ je úsek vyťatý přímkou na ose z.

$\Rightarrow$ **Animace roviny.** $\Leftarrow$

Rovina ρ určená bodem $A = [x_0, y_0, z_0]$ a dvěma nekolineárními vektory $u = (u_1, u_2, u_3)$ a $v = (v_1, v_2, v_3)$ má parametrické rovice

$$x = x_0 + u_1 s + v_1 t, \quad y = y_0 + u_2 s + v_2 t, \quad z = z_0 + u_3 s + v_3 t$$

kde $s, t \in (-\infty, \infty)$ jsou parametry.

Věta: Rovina určená body $A = [x_1, y_1, z_1]$, $B = [x_2, y_2, z_2]$ a $C = [x_3, y_3, z_3]$ má obecnou rovnici

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Rovina určená bodem $A = [x_1, y_1, z_1]$ a nekolineárními vektory $u = (u_1, u_2, u_3)$ a $v = (v_1, v_2, v_3)$ má obecnou rovnici

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Definice: **Vzdálenost** bodů $A = [x_1, y_1, z_1]$ a $B = [x_2, y_2, z_2]$ v 3-rozměrném kartézském souřadném systému je délka úsečky AB a je dána vztahem

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Pro vzdálenost d bodu $A = [x_0, y_0, z_0]$ od roviny ρ o rovnici $ax + by + cz + d = 0$ platí

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Dvě roviny o rovnicích $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ a $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ svírají úhly φ a $\pi - \varphi$, přičemž platí

$$\cos\varphi = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Věta: Přímka p, která prochází bodem $A = [x_0, y_0, z_0]$ rovnoběžně s nenulovým vektorem $s = (s_1, s_2, s_3)$ má parametrické rovnice

$$x = x_0 + ts_1, \quad y = y_0 + ts_2, \quad z = z_0 + ts_3$$

kde $t \in (-\infty, \infty)$ je parametr. Vektor s je **směrový vektor** přímky p.

Věta: Průsečnicí dvou různoběžných rovin daných rovnicemi

$$a_1x + b_1y + c_1 + d_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 + d_2 = 0$$

je přímka, jejíž směrový vektor je dán tzv. **vektorovým součinem** normálových vektorů těchto rovin, tedy

$$s = (a_1, b_1, c_1) \times (a_2, b_2, c_2) = (b_1c_2 - c_1b_2, c_1a_2 - a_1c_2, a_1b_2 - b_1a_2).$$

Vektorový součin vektorů $u = (u_1, u_2, u_3)$ a $v = (v_1, v_2, v_3)$ můžeme symbolicky psát takto:

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Poznámka 17. Platí

$$|u \times v| = |u| \cdot |v| \cdot \sin\varphi,$$

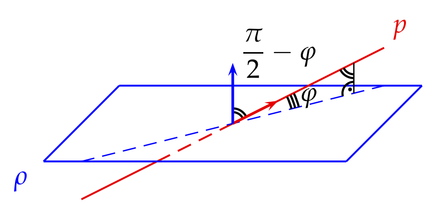
kde φ je úhel, který svírají vektory u a v, tj. vektorový součin má velikost rovnu obsahu rovnoběžníku určeného těmito vektory a směrový vektor je k nim kolmý.

Věta: Buď dána rovina $\rho: \ ax + by + cz + d = 0$ a přímka p se směrovým vektorem $s = (s_1, s_2, s_3)$.

$p \parallel \rho$ právě tehdy, když normálový vektor roviny je kolmý ke směrovému vektoru přímky, tj. $n \cdot s = as_1 + bs_2 + cs_3 = 0$,

$p \perp \rho$ právě tehdy, když jsou vektory s a n kolineární, tj. $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{pmatrix}$ má hodnost 1.

Definice: **Úhlem**, který svírá přímka p s rovinou ρ, rozumíme úhel $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, který svírá přímka p se svým pravoúhlým průmětem do roviny ρ.



Významné plochy v prostoru

Koule se středem v bodě $S = [x_0, y_0, z_0]$ a poloměru r má rovnici

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

Elipsoid se středem v počátku souřadnic a s poloosami a, b, c má rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Eliptický hyperboloid se středem v počátku souřadnic má rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Eliptický paraboloid s vrcholem v počátku souřadnic má rovnici

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z,$$

kde $p \cdot q > 0$.

Hyperbolický paraboloid s vrcholem v počátku souřadnic má rovnici

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z,$$

kde $p \cdot q > 0$.

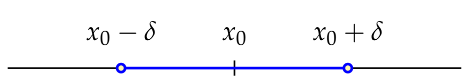
Kužel s vrcholem v počátku souřadnic má rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

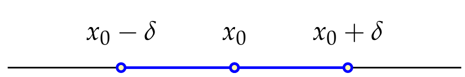
Diferenciální počet funkcí jedné proměnné

Definice: **Okolím bodu** $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumíme libovolný otevřený interval I, který tento bod obsahuje.

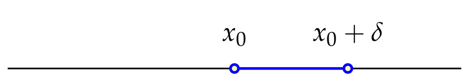
Nejčastěji se používá interval, jehož je bod x_0 středem.



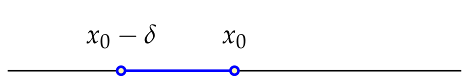
Takovýto interval nazýváme δ-okolím bodu x_0 a označujeme $O_\delta(x_0)$. Jestliže z δ-okolí bodu x_0 vyjmeme bod x_0, mluvíme o ryzím δ-okolí bodu x_0 a budeme jej značit $\hat{O}_\delta(x_0)$.



Pravým ryzím δ-okolím bodu x_0 rozumíme otevřený interval $\hat{O}^+_\delta(x_0) = (x_0, x_0 + \delta)$



a levým ryzím δ-okolím bodu x_0 rozumíme otevřený interval $\hat{O}^-_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0)$.

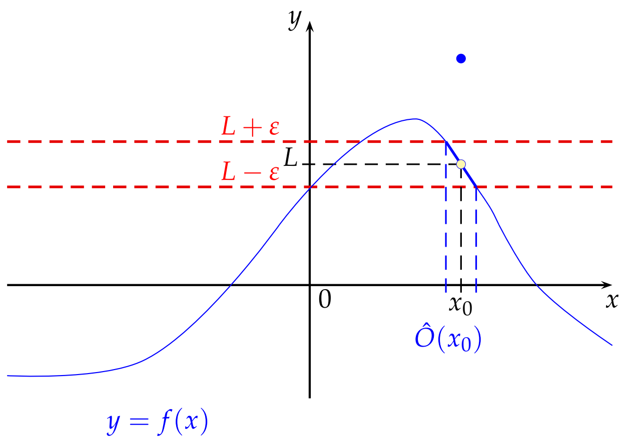


Limita funkce

Definice: Nechť $x_0, L \in \mathbb{R}$ a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce f definovaná v nějakém ryzím okolí bodu x_0.

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 **limitu** rovnu číslu L, jestliže $\forall \varepsilon > 0$ existuje $\exists \delta > 0$ takové, že pro $x \in \hat{O}_\delta(x_0)$ platí $f(x) \in O_\varepsilon(L)$. Píšeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$



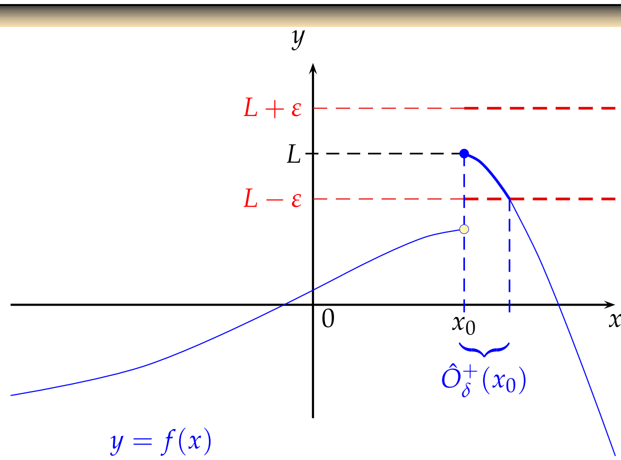
Jednostranná limita

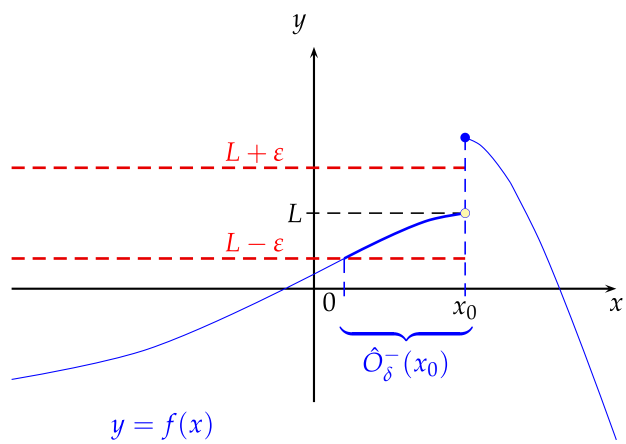
Definice: Nechť $x_0, L \in \mathbb{R}$ a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dále nechť je funkce f definovaná v nějakém pravém ryzím okolí bodu x_0.

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 **limitu zprava** rovnu číslu L, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro $\forall x \in \hat{O}^+_\delta(x_0)$ platí $f(x) \in O_\varepsilon(L)$.

Píšeme $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

Analogicky definujeme limitu zleva.





Věta: Funkce má v každém bodě **nejvýše jednu limitu** (limitu zprava, limitu zleva).

Věta: Funkce má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu právě tehdy když

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x).$$

Nevlastní body

Definice: **Rozšířenou množinou reálných čísel** $\mathbb{R}^*$ rozumíme množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ rozšířenou o body $\pm\infty$. Označujeme

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$$

Prvky $\pm\infty$ nazýváme **nevlastní body**, body množiny $\mathbb{R}$ nazýváme **vlastní body**.

Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme:

$$a + \infty = \infty, \qquad a - \infty = -\infty, \qquad \infty + \infty = \infty, \qquad -\infty - \infty = -\infty$$
$$\infty \cdot \infty = -\infty.(-\infty) = \infty, \qquad \infty.(-\infty) = -\infty, \qquad \frac{a}{\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0$$
$$-\infty < a < \infty, \qquad |\pm\infty| = \infty,$$

Je-li $a > 0$ definujeme

$$a \cdot \infty = \infty \qquad a \cdot (-\infty) = -\infty,$$

a je-li $a < 0$ definujeme

$$a \cdot \infty = -\infty \qquad a \cdot (-\infty) = \infty.$$

Poznámka 18. Nejsou tedy **definovány operace**:

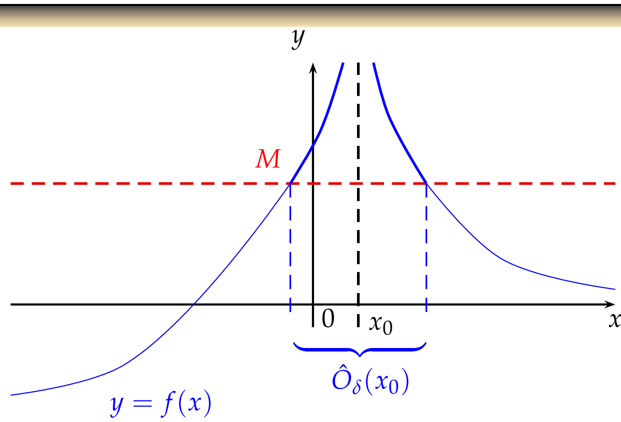
$$\infty - \infty, \qquad \pm\infty.0 \qquad \text{a} \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Takovýmto výrazům říkáme **neurčité výrazy**. Poznamenejme, že samozřejmě není definováno dělení nulou.

Nevlastní limita

Definice: Říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 **nevlastní limitu** $+\infty$ $(-\infty)$, jestliže pro $\forall M > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro $\forall x \in \hat{O}_\delta(x_0)$ platí $f(x) > M$ (resp. $f(x) < -M$).

Píšeme $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty(-\infty.)$

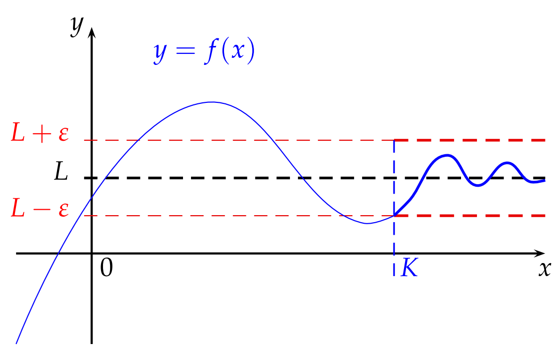


Poznámka 19. Aby existovala limita v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, nemusí být funkce f v bodě x_0 definována. Například limita funkce $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ existuje, i když tato funkce není definována v bodě 0. Funkce naopak musí být definována v nějakém ryzím okolí (nebo jednostranném ryzím okolí, v případě jednostranné limity) bodu a. Není tedy definována například $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{1-3x^2}$, nebo $\lim\limits_{x\to 0^-} \ln(x)$.

⇒ **Příklad na numerický výpočet limity** ⇐

Limita v nevlastním bodě

Definice: Říkáme, že funkce $f(x)$ má **limitu L v nevlastním bodě** $+\infty$ **($-\infty$)**, jestliže pro $\forall \varepsilon > 0$ existuje $K > 0$ takové, že pro $\forall x > K$ (resp. $\forall x < -K$) platí $f(x) \in O_\varepsilon(L)$.



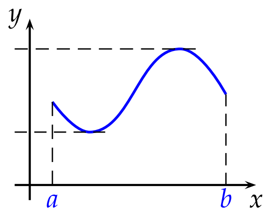
Spojitost funkce

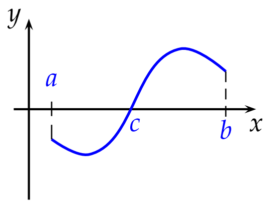
Definice: Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je **spojitá** v bodě x_0, jestliže $x_0 \in D(f)$ a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je **spojitá zprava (spojitá zleva)** v bodě x_0, jestliže $x_0 \in D(f)$ a $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ ($\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$).

Definice: Řekneme, že funkce je **spojitá na intervalu** (a, b), $\langle a, b)$ $(a, b\rangle$ $\langle a, b\rangle$, je-li spojitá v každém jeho vnitřním bodě a v krajních bodech (pokud tam patří) je spojitá zprava resp. zleva.

Věta: Spojitá funkce nabývá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ své nejvyšší a nejnižší hodnoty a také všech hodnot mezi nimi.





Věta: Nechť $f(x)$ je spojitá funkce v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a platí $f(a) \cdot f(b) < 0$. Pak existuje alespoň jedno číslo $c \in (a, b)$ takové, že $f(c) = 0$.

Pravidla pro počítání s limitami

Věta: Buď $a \in \mathbb{R}^*$, $k \in \mathbb{R}$, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Jestliže mají f a g v bodě a limitu, pak platí

$$\lim_{x\to a} k = k$$
$$\lim_{x\to a} \big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$
$$\lim_{x\to a} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$
$$\lim_{x\to a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x\to a} f(x)$$
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \quad \text{pro} \quad \lim_{x\to a} g(x) \neq 0.$$

Zobecněním základních pravidel dostáváme linearitu limity:

$$\lim_{x\to a} \big(k_1 f_1(x) + \dots + k_n f_n(x)\big) = k_1 \lim_{x\to a} f_1(x) + \dots + k_n \lim_{x\to a} f_n(x)$$

S využitím předchozí věty lze počítat následující limity

1. $\lim_{x\to\infty}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$
2. $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}\cos x = -\infty \cdot 1 = -\infty$
3. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{xe^x} = \frac{1}{\infty\cdot\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$

Větu nelze použít pro výpočet limity

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} + \ln x\right),$$

protože bychom obdrželi neurčitý výraz $\|\infty - \infty\|$.

Věta: Je-li funkce g je spojitá, platí

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x\to x_0} f(x)).$$

Totéž platí i pro jednotlivé jednostranné limity.

Dále tedy platí např.

$$\lim_{x\to a}|f(x)| = |\lim_{x\to a} f(x)|$$
$$\lim_{x\to a}(f(x))^n = (\lim_{x\to a} f(x))^n$$
$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$
$$\lim_{x\to a} b^{f(x)} = b^{\lim_{x\to a} f(x)}$$
$$\lim_{x\to a}(\log_b f(x)) = \log_b(\lim_{x\to a} f(x))$$

Příklad . Uvedenou větu lze použít pro výpočet následujících limit:

1. $\lim_{x\to 0^+}\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \|\ln\infty\| = \infty$
2. $\lim_{x\to -\infty}\operatorname{arctg}(e^{-x}) = \|\operatorname{arctg}\infty\| = \frac{\pi}{2}$
3. $\lim_{x\to 0^+}\ln(\sin x) = \|\ln(0+)\| = -\infty$

Výpočet limity funkce

- V bodě, ve kterém je funkce **definovaná a spojitá** vypočteme limitu **přímým dosazením**.
- V bodě, ve kterém funkce není definovaná nebo není spojitá mohou dosazením vznikat výrazy typu
  - $\left\|\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{0}}\right\|$, které vedou k nevlastní limitě,
  - $\left\|\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\right\|$ **a** $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$, což jsou neurčité výrazy, které lze řešit většinou pomocí L´Hospitalova pravidla nebo pomocí úprav.

⇒ **Interaktivní on-line kvizy na limity elementárních funkcí** ⇐

⇒ **Interaktivní on-line kvizy na základních operace s limitami** ⇐

⇒ **Příklady na výpočet limit** ⇐

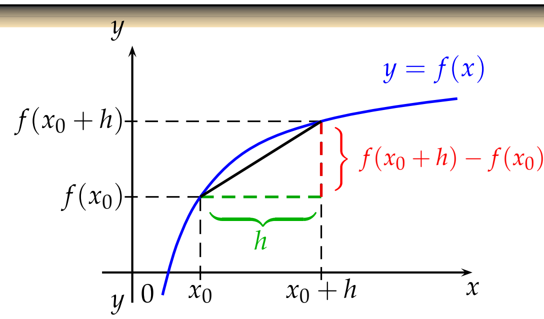
⇒ **Interaktivní on-line kvizy na výpočet limit** ⇐

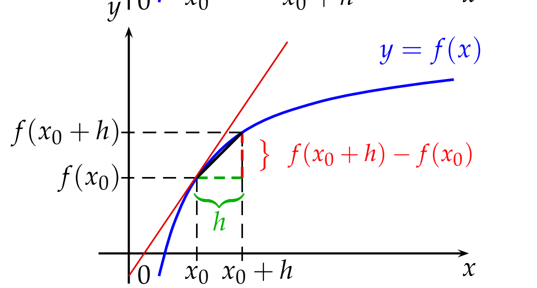
Derivace funkce

Definice: Nechť $x_0 \in D(f)$. Řekneme, že funkce f má **v bodě** x_0 **derivaci** rovnu $\mathbf{f'(x_0)}$, jestliže existuje konečná limita

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Neexistuje-li tato limita, říkáme, že funkce $f(x)$ nemá v bodě x_0 derivaci.



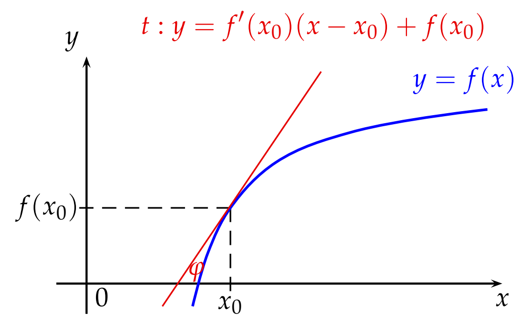


Poznámka 20. Geometrický význam derivace:

Sečna ke grafu funkce f procházející body $[x_0, f(x_0)]$ a $[x_0 + h, f(x_0 + h)]$ má směrnici $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. Jestliže se s bodem $(x_0 + h)$ blížíme k bodu x_0 (tj. provádíme-li limitní přechod $\lim\limits_{h \to 0}$), přejde sečna v tečnu v bodě $[x_0, f(x_0)]$. Limitní hodnota, tj. **směrnice tečny**, je potom rovna derivaci $f'(x_0)$.

Poznámka 21. Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, je **rovnice tečny ke grafu funkce** v bodě $[x_0, f(x_0)]$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$



Definice: Nechť má funkce f derivaci v každém bodě otevřeného intervalu I. Předpisem, který každému bodu x z intervalu I přiřadí derivaci funkce f v bodě x je na I definována funkce, kterou nazýváme **derivací funkce** f na intervalu I a označujeme $\mathbf{f'}$.

Často označujeme derivaci mimo f' také jako y' nebo $\frac{dy}{dx}$.

Funkci, která má v bodě x_0 resp. na intervalu I derivaci, nazýváme **diferencovatelnou** v bodě x_0 resp. na intervalu I.

Příklad . Vypočtěte $f'(x)$ funkce $f(x) = x$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'(x) = (x)' = 1.$$

Vzorce a pravidla pro derivování

Věta: Nechť f, g jsou funkce a $c \in \mathbb{R}$ konstanta. Platí

$$\begin{aligned}
[cf(x)]' &= cf'(x)\\
[f(x) \pm g(x)]' &= f'(x) \pm g'(x)\\
[f(x)g(x)]' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\\
\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)},\ g(x) \neq 0.
\end{aligned}$$

Derivace elementárních funkcí jsou dány následujícími vztahy a jsou definovány pro všechna x z definičního oboru elementární funkce:

$$\begin{aligned}
k' &= 0 & (\cos x)' &= -\sin x\\
(x^n)' &= nx^{n-1} & (\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}\\
(e^x)' &= e^x & (\operatorname{cotg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}\\
(a^x)' &= a^x \ln a & (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\
(\ln x)' &= \frac{1}{x} & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\
(\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a} & (\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2}\\
(\sin x)' &= \cos x & (\operatorname{arccotg} x)' &= -\frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

⇒ **Příklady na základní vzorce pro derivování.** ⇐

Věta: Pro složenou funkci platí

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x),$$

kde existence derivace vlevo plyne z existence derivací vpravo.

Poznámka 22. Výraz $f'(g(x))$ v předchozí větě znamená derivaci funkce f vypočtenou v bodě $g(x)$.

⇒ **Příklady na derivování složené funkce.** ⇐

⇒ **Interaktivní on-line kvizy na metodu derivování.** ⇐

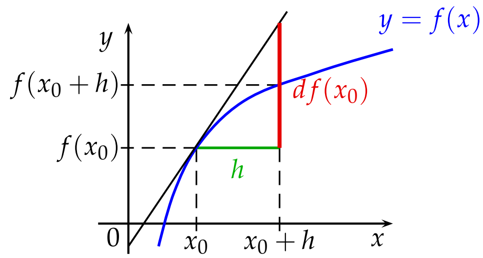
⇒ **On-line příklady na výpočet derivace funkce.** ⇐

⇒ **Další interaktivní on-line příklady na výpočet derivace funkce.** ⇐

Diferenciál funkce

Definice: Nechť funkce $f(x)$ je spojitá v nějakém okolí $O(x_0)$ bodu x_0 a nechť existuje derivace $f'(x_0)$. Nechť $x_0 + h \in O(x_0)$. **Diferenciálem funkce** $f(x)$ v bodě x_0 rozumíme výraz

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot h.$$



Poznámka 23. Pro různé hodnoty h dostáváme různé hodnoty diferenciálu $df(x_0)$. Diferenciál $df(x_0)$ je tedy funkcí proměnné h (evidentně funkcí lineární). Pokud budeme uvažovat obecný bod x, v němž existuje derivace $f'(x)$, bude diferenciál $df(x)$ funkcí dvou proměnných x a h. Protože pro funkci $f(x) = x$ platí $df(x) = dx = 1 \cdot h$, můžeme použít vztahu $h = dx$ pro obvyklý historický zápis diferenciálu a derivace funkce $y = f(x)$:

$$df(x) = dy = f'(x)dx, \quad \text{tj.}$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Derivace vyšších řádů

Derivací 2.řádu (druhou derivací) funkce $f(x)$ nazýváme funkci $(f')'$, tj. derivaci první derivace funkce $y = f(x)$. Podobně derivaci 3.řádu definujeme jako derivaci 2. derivace.

Definice: **Derivací n-tého řádu** funkce $f(x)$ definujeme jako derivaci derivace řádu $n-1$, tj. $f^{(n)} = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'$.

Vyšší derivace označujeme takto:

$$f'', f''', f^{(4)}, f^{(5)}, \dots, f^{(n)}$$

nebo

$$y'', y''', y^{(4)}, y^{(5)}, \dots, y^{(n)}$$

nebo

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}.$$

⇒ **Příklady na derivace vyšších řádů.** ⇐

Užití derivací k výpočtu limit

Věta: l'Hospitalovo pravidlo:
Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a nechť funkce f a g jsou definovány v nějakém ryzím okolí bodu a a mají zde derivaci. Nechť dále platí buď

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad \text{nebo}$$

$$\lim_{x\to a} |g(x)| = \infty.$$

Pak platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

pokud limita na pravé straně rovnosti existuje. Totéž platí i pro obě jednostranné limity.

Poznámka 24. Předchozí větu lze použít na všechny neurčité výrazy. Lze je převést na výrazy typu $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ nebo $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$ takto:

$$\|0\cdot\infty\| = \left\|\frac{0}{1/\infty}\right\| = \left\|\frac{0}{0}\right\| \quad \text{nebo} \quad \|0\cdot\infty\| = \left\|\frac{\infty}{1/0}\right\| = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$$

$$\|\infty-\infty\| \quad \text{lze převést na spol. jmenovatel do tvaru } \left\|\frac{0}{0}\right\| \text{ nebo} \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$$

$$\|1^\infty\| = \|e^{\ln 1^\infty}\| = \|e^{\infty\cdot\ln 1}\| = e^{\|\infty\cdot 0\|}$$

a stejný trik lze použít na výrazy typu $\|0^0\|$ a $\|\infty^0\|$.

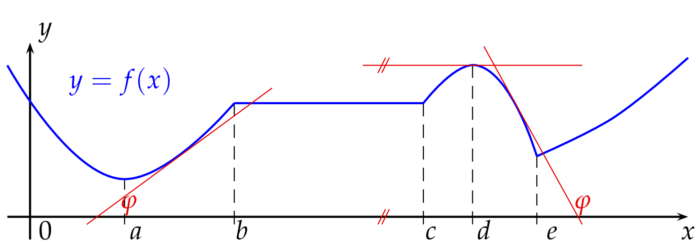
⇒ **Příklady na užití l'Hospitalova pravidla.** ⇐

Monotónnost funkce. Lokální extrémy.

Věta: Nechť $f(x)$ je na $\langle a,b\rangle$ spojitá a má derivaci v každém jeho vnitřním bodě. Pak platí:

- Funkce $f(x)$ je na $\langle a,b\rangle$ konstantní $\Leftrightarrow \forall x \in (a,b)$ platí $f'(x) = 0$.
- Funkce $f(x)$ je na $\langle a,b\rangle$ rostoucí $\Leftrightarrow \forall x \in (a,b)$ platí $f'(x) > 0$.
- Funkce $f(x)$ je na $\langle a,b\rangle$ klesající $\Leftrightarrow \forall x \in (a,b)$ platí $f'(x) < 0$.

Definice: Řekneme, že $f(x)$ má v bodě x_0 **lokální maximum (minimum)**, resp. lokální extrém, jestliže $\forall x$ z nějakého okolí x_0 platí $f(x) \le f(x_0)$ $\big(f(x) \ge f(x_0)\big)$. Pokud pro $x \ne x_0$ platí ostré nerovnosti, nazýváme lok. extrém ostrým.



Věta: Má-li funkce f v x_0 lokální extrém, pak $f'(x_0) = 0$ nebo derivace $f'(x_0)$ neexistuje.

Věta: Nechť $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) \neq 0$. Pak má $f(x)$ v x_0 lokální extrém, a to

- lokální maximum, je-li $f''(x_0) \leq 0$,
- lokální minimum, je-li $f''(x_0) \geq 0$.

Definice: Je-li $f'(x_0) = 0$, pak bod $[x_0, f(x_0)]$ nazýváme **stacionárním bodem**.

⇒ On-line příklady na výpočet lokálních extrémů. ⇐

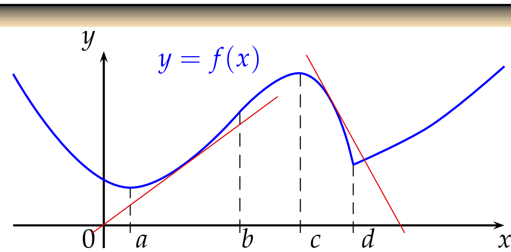
Konvexnost a konkávnost. Inflexní body.

Definice: Funkci nazveme **konvexní (konkávní) v bodě** x_0, jestliže její graf leží v okolí x_0 nad (pod) tečnou v tomto bodě.

Funkci nazveme **konvexní (konkávní) na intervalu** I, je-li konvexní (konkávní) v každém jeho bodě.

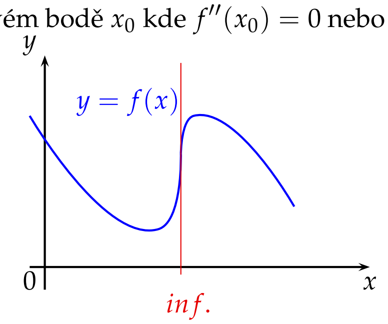
Věta: Nechť $f'(x)$ je diferencovatelná na (a, b). Pak

- jestliže $\forall x \in (a, b)$ platí $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ je konvexní na (a, b),
- jestliže $\forall x \in (a, b)$ platí $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ je konkávní na (a, b).



Definice: Funkce f má v bodě x_0 **inflexní bod**, jestliže má v x_0 tečnu a $f''(x)$ zde mění znaménko (graf funkce přechází z konvexity do konkávity nebo naopak).

Důsledek:
Funkce $f(x)$ může mít inflexní bod v takovém bodě x_0 kde $f''(x_0) = 0$ nebo kde $f''(x_0)$ neexistuje.



⇒ Příklad na výpočet inflexních bodů, konvexnosti a konkávnosti. ⇐

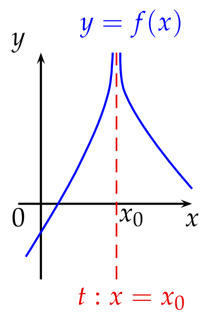
Asymptoty funkce

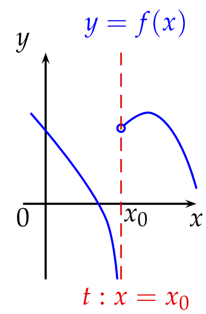
Definice: **Asymptota** je přímka, která je tečnou ke grafu funkce v některém nevlastním bodě.

Věta: Funkce má

- asymptotu bez směrnice $x = x_0 \Leftrightarrow$ má f v bodě x_0 nevlastní limitu zleva nebo zprava.
- asymptotu se směrnicí $y = kx + q$ pro $x \to \pm\infty \Leftrightarrow$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R} \text{ a } q = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) \in \mathbb{R}$$





$\Rightarrow$ **Příklad na výpočet asymptot.** $\Leftarrow$

Průběh funkce

Postup při vyšetřování průběhu funkce:

1. Určíme $D(f)$, sudost, resp. lichost, periodičnost funkce a průsečíky grafu funkce se souřadnými osami. Najdeme intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná.
2. Vyšetříme chování funkce v nevlastních bodech a najdeme asymptoty.
3. Vypočteme f', najdeme stacionární body, intervaly monotónnosti a nalezneme lokální extrémy.
4. Vypočteme f'', najdeme kritické body, intervaly konvexnosti a konkávnosti a nalezneme inflexní body.
5. Načrtneme graf.

$\Rightarrow$ **Příklady na průběh funkce.** $\Leftarrow$

Taylorův polynom

Funkční hodnotu dovedeme přesně vypočítat pouze u polynomů a racionálních lomených funkcí s racionálními koeficienty. U ostatních funkcí je třeba použít pro výpočet numerické hodnoty některou z aproximačních metod. Základní aproximační metodou je použití Taylorova polynomu příslušného dané funkci.

Definice: Nechť funkce f má v okolí bodu x_0 spojité derivace až do řádu $n+1$. **Taylorovým polynomem** n-tého stupně příslušným funkci $f(x)$ v bodě x_0 rozumíme polynom

$$\begin{aligned} T_n(x) = & f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \\ & \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \end{aligned}$$

Poznámka 25. Taylorův polynom stupně n má v bodě x_0 stejnou funkční hodnotu a také všechny derivace až do řádu n jako funkce f, tj.

$$\begin{aligned} T_n(x_0) &= f(x_0), \\ T_n'(x_0) &= f'(x_0), \\ &\vdots \\ T_n^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0). \end{aligned}$$

⇒ On-line animace Taylorova polynomu. ⇐

Věta (Taylorova věta)**:** Nechť funkce f má v okolí $O(x_0)$ bodu x_0 spojité derivace až do řádu $n+1$. Pak existuje vhodné číslo c, které leží mezi x_0 a x takové, že $\forall x \in O(x_0)$ platí

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x),$$

kde $T_n(x)$ je Taylorův polynom a $R_{n+1}(x)$ je polynom stupně alespoň $n+1$ v proměnné $(x-x_0)$, který nazýváme zbytkem. Zbytek může být např. tvaru

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

⇒ Příklady na výpočet Taylorova polynomu. ⇐

⇒ Jak být lepší než kalkulačka... ⇐

Integrální počet funkcí jedné proměnné

Definice: Buď I otevřený interval, f a F funkce definované na I. Jestliže platí

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pro } \forall x \in I,$$

nazývá se funkce F **primitivní funkcí k funkci** f, nebo též **neurčitý integrál funkce** f na intervalu I. Zapisujeme

$$\int \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

Poznámka 26. Z existence derivace primitivní funkce $F(x)$ vyplývá, že je vždy spojitá na I.

Věta (postačující podmínka existence neurčitého integrálu): Ke každé spojité funkci existuje neurčitý integrál.

Věta (jednoznačnost primitivní funkce): Primitivní funkce je na daném intervalu k dané funkci určena jednoznačně, až na libovolnou aditivní konstantu. Přesněji, platí následující:

1. Je-li F primitivní funkcí k funkci f na intervalu I, platí totéž i pro funkci $G(x) = F(x) + c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta nezávislá na x.
2. Jsou-li F a G primitivní funkce k téže funkci f na intervalu I, liší se obě funkce na intervalu I nejvýše o aditivní konstantu, tj. existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$F(x) = G(x) + c \qquad \text{pro všechna } x \in I.$$

Základní vzorce a pravidla

Věta: Nechť f, g jsou funkce integrovatelné na I, c nechť je reálné číslo. Pak na intervalu I platí

$$\int f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Základní vzorce pro nalezení primitivní funkce vyplývají ze vztahů pro derivace elementárních funkcí a jsou dány následujícími vztahy. Primitivní funkce jsou definovány pro všechna x z definičního oboru integrované funkce:

$$\int 0\,\mathrm{d}x = c \qquad \int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + c$$

$$\int 1\,\mathrm{d}x = x + c \qquad \int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c,\ 1 \neq a > 0$$

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad \int \frac{1}{x^2 + A^2} = \frac{1}{A}\operatorname{arctg}\frac{x}{A} + c$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c \qquad \int \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{A} + c$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm B}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm B}| + c$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c \qquad \int \frac{1}{A^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2A}\ln\left|\frac{A+x}{A-x}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + c \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + c$$

Věta (speciální případ složené funkce)**:** Nechť f je funkce integrovatelná na I. Pak

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b),$$

kde F je funkce primitivní k funkci f na intervalu I. Platí pro ta x, pro která je $ax + b \in I$.

⇒ **Příklady na přímou metodu integrace.** ⇐

Metoda per partes

umožnuje derivovat některé součiny. Vychází z pravidla pro derivaci součinu:

$$\begin{aligned} (u\cdot v)' &= u'v + uv' \\ \int (u\cdot v)'\,\mathrm{d}x &= \int u'v\,\mathrm{d}x + \int uv'\,\mathrm{d}x \\ uv &= \int u'v\,\mathrm{d}x + \int uv'\,\mathrm{d}x \\ \int uv'\,\mathrm{d}x &= uv - \int u'v\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Poznámka 27 (integrály typické pro výpočet metodou per-partés)**.** Buď $P(x)$ polynom. Metodou per-partés integrujeme například integrály následujících typů

$$\int P(x)e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x, \int P(x)\sin(\alpha x)\,\mathrm{d}x, \int P(x)\cos(\alpha x)\,\mathrm{d}x,$$

a

$$\int P(x)\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x, \int P(x)\ln^m x\,\mathrm{d}x.$$

U první skupiny integrálů postupujeme tak, že polynom derivujeme, čímž snížíme jeho stupeň, a v případě potřeby tento postup opakujeme. U druhé skupiny integrálů naopak derivujeme funkce $\operatorname{arctg} x$ a $\ln x$.

⇒ **Příklady na metodu per partes.** ⇐

Substituční metoda

Věta: Nechť $f(t)$ je funkce spojitá na intervalu I, nechť funkce $\varphi(x)$ má derivaci na intervalu J a platí $\varphi(J) = I$. Potom na intervalu J platí

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t,$$

dosadíme-li napravo $t = \varphi(x)$

Poznámka 28. Formálně substituci provádíme tak, že píšeme v integrálu vpravo t místo $\varphi(x)$ a $\mathrm{d}t$ místo $\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$.

Věta: Nechť $f(x)$ je funkce spojitá na intervalu I, nechť funkce $\varphi(t)$ má nenulovou derivaci na intervalu J a platí $\varphi(J) = I$. Potom na intervalu I platí

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

dosadíme-li napravo $t = \varphi^{-1}(x)$, kde $\varphi^{-1}(x)$ je funkce inverzní k funkci $\varphi(x)$.

Poznámka 29. Formálně substituci provádíme tak, že píšeme v integrálu vpravo $\varphi(t)$ místo x a $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ místo $\mathrm{d}x$.

Existence inverzní funkce φ^{-1} plyne z nenulovosti derivace funkce φ. Výraz napravo sice vypadá komplikovaněji, v praxi však substituci volíme vždy tak, aby po úpravě vpravo vyšel integrál jednodušší, který umíme vypočítat. Vidíme, že u druhé substituční metody se vlastně jedná o použití vzorce z první metody zprava doleva.

⇒ Příklady na substituční metodu. ⇐

Integrace racionálních lomených funkcí

Při integraci neryze lomené funkce vždy rozkládáme funkci na součet polynomu a ryze lomené funkce, a to pomocí dělení polynomů se zbytkem nebo trikovým doplněním čitatele. Polynom pak integrujeme a ryze lomenou funkci rozkládáme na jednodušší ryze lomené funkce, tzv. parciální zlomky. Dostaneme jednoduché integrály, z nichž některé typy uvádíme:

$$a)\ \frac{1}{ax+b} \quad b)\ \frac{1}{(ax+b)^k} \quad c)\ \frac{1}{ax^2+bx+c} \quad d)\ \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$$

a) Substituce $t = ax + b$ nebo vzorec $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)$ pro funkci $f(x) = \frac{1}{x}$ dává

$$\int \frac{1}{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$$

b) Substituce $t = ax + b$ nebo vzorec $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)$ pro funkci $f(x) = x^{-k}$ dává

$$\int \frac{1}{(ax+b)^k}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{-k+1}}{-k+1} + c$$

c) Jmenovatel doplníme na čtverec a integrujeme podle vzorce $\int \frac{1}{x^2+A^2} = \frac{1}{A}\operatorname{arctg}\frac{x}{A} + c$ nebo $\int \frac{1}{A^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2A}\ln\left|\frac{A+x}{A-x}\right| + c$.

⇒ Příklad na integraci rac. lomené funkce typu c). ⇐

d) Čitatel zlomku rozložíme na 2 sčítance tak, že první je derivací jmenovatele a druhý konstanta, pak integrujeme zvlášť

⇒ **Příklady na integraci rac. lomené funkce typu d).** ⇐

Integrace goniometrických funkcí.

$$\int R(\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x \text{ zavádíme substituci } t = \cos x$$
$$\int R(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x \text{ zavádíme substituci } t = \sin x$$

$R(\sin x)$ resp. $R(\cos x)$ jsou rac. lomené funkce jen v sinu resp. kosinu. Většinou je třeba integrand na tento typ převést užitím goniometrických vzorců nebo rozšířením zlomku.

⇒ **Příklady na integraci goniometrických funkcí.** ⇐

Poznámka 30. Univerzální metodou k výpočtu $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ je substituce $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. V případě pouze sudých mocnin funkcí sinus a kosinus je jednodušší substituce $t = \operatorname{tg} x$.

Integrace iracionálních funkcí.

Některé jednoduché iracionální funkce (tj. funkce, které obsahují odmocniny) již umíme integrovat:

$$\int \sqrt[3]{x^5}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{5}{3}} = \dots$$

základním vzorcem pro integraci mocniny,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x+9}} = \int (4x+9)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \dots$$

s použitím věty o integraci speciální složené funkce
nebo substitucí $t = 4x + 9$,

$$\int 2x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \dots \text{ substitucí } t = x^2 + 1.$$

Nechť R je racionální lomená funkce.

$$\int R\left(x, \sqrt[n_1]{f(x)}, \sqrt[n_2]{f(x)}, \dots\right) dx,$$

kde $f(x) = x$, $f(x) = ax + b$ nebo $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ řešíme substitucí $t^s = f(x)$, kde s je tzv. společný odmocnitel, tj. nejmenší společný násobek čísel n_1, n_2, ….

$$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})dx \quad \text{řešíme substitucí } x = a\sin t$$
$$\int R(x, \sqrt{a^2+x^2})dx \quad \text{řešíme substitucí } x = a\operatorname{tg} t$$
$$\int R(x, \sqrt{x^2-a^2})dx \quad \text{řešíme substitucí } x = \frac{a}{\sin t}$$

⇒ **Příklady na integraci iracionání funkce.** ⇐

Integrace složené exponenciální funkce

Nechť R je racionální lomená funkce.

$$\int R(e^x)dx \quad \text{řešíme substitucí } t = e^x$$

⇒ **On-line příklady na výpočet integrálů.** ⇐

⇒ **On-line kvizy na určení metody integrace.** ⇐

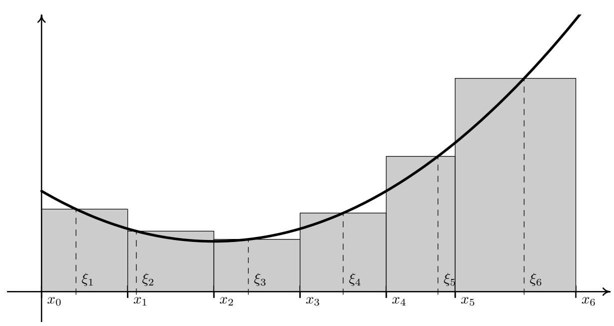
⇒ **On-line interaktivní příklady na výpočet integrálů.** ⇐

Určitý integrál

Spočítat obsah plochy je jedna ze základních matematických úloh. Lidé potřebovali znát velikost pozemku, odhadnout úrodu nebo umět rozdělit majetek. Až do konce 17. století však používali přibližnou metodu, známou již ze starověku.

Průmyslovou revoluci svým způsobem odstartoval objev **Isaaca Newtona** a **Gottfrieda Wilhelma Leibnize** – diferenciální a integrální počet. Formule, která dnes nese jejich jména, totiž slouží k **přesnému stanovení obsahu útvaru omezeného křivkou** $y = f(x)$ **a osou** x **na intervalu** $\langle a, b\rangle$.

Dnes ji najdete v pozadí veškerých technických vymožeností, protože je základem většiny fyzikálních a technických vzorců. Lze s její pomocí spočítat např. množství energie vytvořené vodní elektrárnou, únosnost pilířů mostu, statické i dynamické vlastnosti moderních staveb nebo také dobu, za kterou sinice zamoří přehradu.
Než se seznámíme s objevem přesného výpočtu obsahu, vrátíme se ke starým Řekům. Ti počítali přibližně obsah plochy pod křivkou $y = f(x)$ tak, že útvar rozsekali na kousky, které byly podobné obdélníkům, spočítali jejich obsahy a sečetli je. Rozdělíme tedy interval $\langle a, b\rangle$ na dílky $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.



Na obrázku je $n = 6$. Obsah i-tého obdélníku je přibližně $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, kde $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ je tzv. reprezentant.
Součet všech obdélníků a přibližný obsah útvaru je

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Tomuto číslu dnes říkáme **integrální součet**.

Je zřejmé, že na našem obrázku dostaneme pro $n > 6$ přesnější odhad obsahu útvaru pod křivkou.

První důležitý krok, který Newton a Leibnitz provedli, byl **limitní přechod** $n \to \infty$. Dílky dělení $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ pak mají délku konvergující k 0 a označujeme je $\mathrm{d}x$ (už jsme se s tímto symbolem setkali, jde o diferenciál x). Formálně tak dostáváme zápis

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \to \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde znak integrálu původně opravdu znamenal protáhlé písmeno S - suma.

Definice: Buď $\langle a, b\rangle$ uzavřený interval a f funkce definovaná a ohraničená na $\langle a, b\rangle$. Řekneme, že funkce f je **integrovatelná** na intervalu $\langle a, b\rangle$, jestliže existuje číslo I, které je limitou

$$I = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

pro libovolnou posloupnost dělení s délkou dílků konvergující k 0, při libovolné volbě reprezentantů. Číslo I nazýváme **určitý integrál funkce f na intervalu** $\langle a, b\rangle$ a označujeme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

⇒ On-line animace na definici určitého integrálu. ⇐

Newton–Leibnitzova formule

Pro výpočet obsahu útvaru pod křivkou bylo tedy nutné vytvořit nejprve pojem limity a poté diferenciální a integrální počet, který nezávisle na sobě pro výpočet obsahu vytvořili Newton s Leibnitzem. Teprve integrální počet je totiž tím nástrojem, který lze pro výpočet obsahu útvaru pod křivkou skutečně použít.

Věta (Newton–Leibnitzova formule): Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná na $\langle a, b\rangle$. Nechť $F(x)$ je funkce spojitá na $\langle a, b\rangle$, která je na intervalu (a, b) primitivní k funkci $f(x)$. Pak platí

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathbf{dx} = [\mathbf{F}(\mathbf{x})]_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} = \mathbf{F}(\mathbf{b}) - \mathbf{F}(\mathbf{a}).$$

Vlastnosti určitého integrálu

Z Newton-Leibnitzovy věty vyplývají následující vlastnosti určitého integrálu:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int_a^b c\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c\cdot\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x, \text{ pro } c\in\langle a, b\rangle$$

Výpočet určitého integrálu

Najít primitivní funkci umíme. V Newton-Leibnitzově větě je ale také podmínka spojitosti funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$, což je nutné zkontrolovat.

⇒ Příklady na výpočet určitého integrálu. ⇐

Geometrické aplikace určitého integrálu

- **Obsah rovinné plochy** omezené spojitou nezápornou funkcí $y = f(x)$, osou x a přímkami $x = a$ a $x = b$:

$$S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

- **Obsah rovinné plochy** omezené spojitými funkcemi $y = d(x)$ a $y = h(x)$, které na intervalu $\langle a, b\rangle$ splňují $d(x) \le h(x)$, a přímkami $x = a$ a $x = b$:

$$S = \int_a^b \big(h(x) - d(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

- **Objem rotačního tělesa** vzniklého rotací plochy omezené spojitou nezápornou funkcí $y = f(x)$, osou x a přímkami $x = a$ a $x = b$:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

- **Objem rotačního tělesa** vzniklého rotací plochy omezené spojitými funkcemi $y = d(x)$ a $y = h(x)$, které na intervalu $\langle a, b\rangle$ splňují $d(x) \le h(x)$, a přímkami $x = a$ a $x = b$:

$$V = \pi \int_a^b \big(h^2(x) - d^2(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

- **Délka rovinné křivky** $y = f(x)$ $x \in \langle a, b\rangle$, která je na intervalu $\langle a, b\rangle$ diferencovatelná.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

- **Obsah pláště rotačního tělesa** vzniklého rotací plochy omezené spojitou nezápornou funkcí $y = f(x)$, osou x a přímkami $x = a$ a $x = b$:

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

Nevlastní integrál

Nevlastní integrál je rozšířením pojmu určitého integrálu. Určitý integrál je definovaný pouze pro **ohraničené** funkce a **konečné** obory integrace.

Body, ve kterých funkce není ohraničená a nevlastní body $\pm\infty$, budeme souhrnně nazývat **singularitami**.

Integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ nazýváme **nevlastní**, pokud alespoň jedno z čísel a, b je rovno $\pm\infty$, nebo funkce $f(x)$ není ohraničená na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ (tj. alespoň v jednom bodě intervalu funkce **má singularitu** - nemusí jít vždy o body a nebo b, ale singulární bod může být i uvnitř intervalu).

Následující definice je současně i návodem, jak nevlastní integrál vypočítat.

Definice: Nechť $f(x)$ má singularitu v horní mezi b (resp. dolní mezi a). Existuje-li konečná limita

$$\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x \quad \Bigl(\text{resp. } \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x\Bigr)$$

říkáme, že nevlastní integrál konverguje (existuje) a definujeme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Bigl(\text{resp. } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x\Bigr)$$

Pokud limita neexistuje nebo je nevlastní říkáme, že integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ neexistuje.

⇒ Příklady na výpočet integrálu nevlastního vlivem meze. ⇐

⇒ Příklady na výpočet integrálu nevlastního vlivem funkce. ⇐

⇒ Složitější příklad na výpočet nevlastního integrálu. ⇐

⇒ On-line příklady na výpočet nevlastních integrálů. ⇐

Diferenciální počet funkcí dvou proměnných

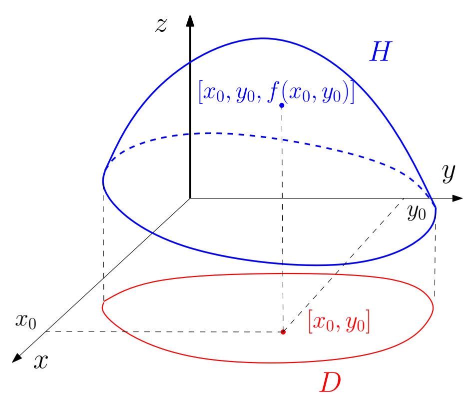
Definice: Necht' jsou dány neprázdné množiny $D \subseteq \mathbb{R}^2$ a $H \subseteq \mathbb{R}$. Pravidlo f, které každému prvku $[x, y] \in D$ přiřazuje právě jeden prvek $z \in H$, se nazývá **funkce**. Zapisujeme $\mathbf{z = f(x, y)}$.

Množina $D = D(f)$ se nazývá **definiční obor funkce** f.

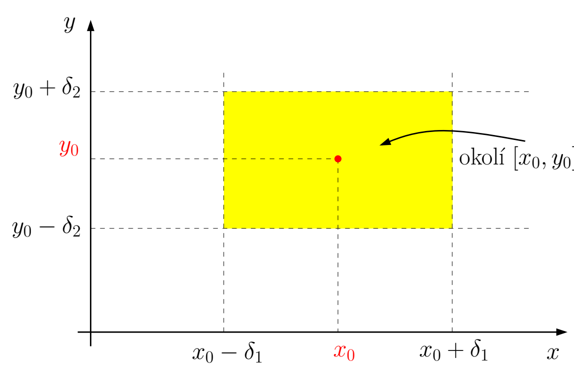
Množina všech $z \in H$, pro která existuje $[x, y] \in D$ s vlastností $f(x, y) = z$ se nazývá **obor hodnot funkce** f a označujeme jej $H(f)$.

Jde o stejnou definici funkce, kterou jsme již probírali. Vzhledem k tomu, že $D(f) \subseteq \mathbb{R}^2$ a $H(f) \subseteq \mathbb{R}$, mluvíme o reálné funkci dvou reálných proměnných.

Definice: **Grafem funkce** $z = f(x, y)$ rozumíme množinu všech uspořádaných trojic $[x, y, f(x, y)]$, x a y označujeme jako **nezávislé proměnné** a z jako **závislou proměnnou**.



Definice: Bud' $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ bod, $\delta_1 > 0$ a $\delta_2 > 0$ čísla. Množinu $O = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| < \delta_1, |y - y_0| < \delta_2\}$ nazýváme **okolím bodu** $[x_0, y_0]$. **Ryzím okolím bodu** $[x_0, y_0]$ rozumíme množinu $\hat{O} = O - \{[x_0, y_0]\}$.



Definice: Necht' $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$, $L \in \mathbb{R}$ a $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce definovaná v nějakém ryzím okolí bodu $[x_0, y_0]$.

Řekneme, že funkce f má v bodě $[x_0, y_0]$ **limitu** rovnu číslu L, jestliže $\forall \varepsilon > 0$ existuje ryzí okolí $\hat{O}$ bodu $[x_0, y_0]$ ($\exists \delta_1, \delta_2 > 0$ z předchozí definice) takové, že pro $[x, y] \in \hat{O}$ platí $f(x) \in O_\varepsilon(L)$. Píšeme

$$\lim_{[x,y] \to [x_0,y_0]} f(x) = L.$$

Poznámka 31. Definice limity funkce dvou proměnných má formálně stejné znění jako definice limity funkce jedné proměnné. Proto také pro limitu funkce dvou proměnných platí analogické věty jako pro limitu funkce jedné proměnné.

Definice: Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je **spojitá** v bodě $[x_0, y_0]$, jestliže $[x_0, y_0] \in D(f)$ a $\lim\limits_{[x,y] \to [x_0, y_0]} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Věta: Součet, rozdíl a součin dvou funkcí spojitých v bodě $[x_0, y_0]$ je funkce spojitá v bodě $[x_0, y_0]$. Podíl dvou funkcí spojitých v bodě $[x_0, y_0]$ je funkce spojitá v bodě $[x_0, y_0]$, pokud funkce ve jmenovateli je v tomto bodě různá od nuly.

Definice: Nechť $u = g(x, y)$ a $v = h(x, y)$ jsou funkce definované v množině M, nechť $f(u, v)$ je funkce definovaná v množině D a nechť pro každý bod $[x, y] \in M$ platí $[g(x, y), h(x, y)] \in D$. Pak funkce přiřazující každému bodu $[x, y] \in M$ číslo $f[g(x, y), h(x, y)]$ se nazývá **složená funkce**. Tato funkce je definovaná na množině M, funkce f se nazývá její **vnější složka**, $g(x, y), h(x, y)$ její **vnitřní složky**.

Parciální derivace

Definice: Buď $f(x, y)$ funkce a $[x_0, y_0]$ bod. Funkce $g(x) = f(x, y_0)$ je funkcí jedné proměnné x. Má-li funkce $g(x)$ v bodě x_0 derivaci $g'(x_0)$, nazýváme ji **parciální derivací** funkce $f(x, y)$ podle x v bodě $[x_0, y_0]$ a značíme ji $f'_x(x_0, y_0)$ nebo $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$. Analogicky definujeme parciální defivaci podle y.

Podle definice derivace tedy platí

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$
$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

⇒ Geometrický význam parciální derivace. ⇐
⇒ Příklady na parciální derivace ⇐
⇒ Interaktivní on-line příklady na parciální derivace ⇐

Parciální derivace vyšších řádů můžeme definovat analogicky. Má-li např. funkce $f'_x(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ parciální derivaci podle x, značíme ji $f''_{xx}(x_0, y_0)$ nebo $\dfrac{\partial f^2(x_0, y_0)}{\partial x^2}$. Má-li funkce $f'_x(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ parciální derivaci podle y, značíme ji $f''_{xy}(x_0, y_0)$ nebo $\dfrac{\partial f^2(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}$. Podobně definujeme a značíme i derivace vyšších řádů.

Věta: Nechť má funkce $f(x, y)$ parciální derivace $f''_{xy}(x_0, y_0)$ a $f''_{yx}(x_0, y_0)$ spojité v bodě $[x_0, y_0]$. Pak platí

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Diferenciál a tečná rovina plochy

Definice: Nechť je funkce $f(x,y)$ spojitá v okolí O bodu $[x_0, y_0]$ a nechť existují parciální derivace $f'_x(x_0, y_0)$ a $f'_y(x_0, y_0)$. Nechť bod $[x, y] = [x_0 + h, y_0 + k] \in O$. **Totálním diferenciálem funkce** $f(x,y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ rozumíme výraz

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) \cdot h + f'_y(x_0, y_0) \cdot k.$$

Poznámka 32. Analogicky jako u diferenciálu funkce jedné proměnné lze psát $h = dx$ a $k = dy$ a totální diferenciál v obecném bodě má tvar

$$df(x,y) = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy.$$

Věta: Má-li funkce $f(x,y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ totální diferencál, pak má graf funkce $z = f(x,y)$ v bodě $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ tečnou rovinu o rovnici

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

⇒ **Tečná rovina.** ⇐

Totální diferenciál je vlastně přírůstek na tečné rovině při přechodu z bodu $[x_0, y_0]$ do bodu $x0 + h, y_0 + k$. V dostatečně malém okolí bodu $[x_0, y_0]$ lze přírůstek funkce nahradit totáním diferenciálem, tj.

$$\triangle f(x_0, y_0) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \doteq df(x_0, y_0).$$

Lokální extrémy funkcí dvou proměnných

Definice: Buď $f(x,y)$ funkce definovaná v nějakém okolí O bodu $[x_0, y_0]$ a nechť pro každé $[x, y] \in O$ platí

$$f(x,y) \leq f(x_0, y_0) resp. f(x,y) \geq f(x_0, y_0).$$

Pak říkáme, že funkce $f(x,y)$ má v bodě $[x_0, y_0]$ **lokální maximum** resp. **lokální minimum**, mluvíme o **lokálním extrému funkce**. Platí-li v uvedených vztazích ostré nerovnosti, nazýváme lokální extrém **ostrým**.

Věta: Nechť funkce $f(x,y)$ má v bodě $[x_0, y_0]$ lokální extrém a nechť zde má parciální derivace $f'_x(x_0, y_0)$ a $f'_y(x_0, y_0)$. Pak platí

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Poznámka 33. Bod $[x_0, y_0]$, který splňuje vlastnost

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$$

nazýváme stejně jako u funkcí jedné proměnné **stacionárním bodem**. Podobně jako u funkcí jedné proměnné neplatí obrácení předchozí věty. Stacionární bod nemusí být lokálním extrémem.

Definice: Má-li funkce $f(x,y)$ parciální derivace 2. řádu, nazýváme matici druhých derivací

$$H = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

Hessova matice funkce $f(x,y)$. Její determinant se nazývá hessián.

Věta: Nechť má funkce $f(x,y)$ ve stacionárním bodě $[x_0, y_0]$ a jeho okolí spojité parciální derivace 1. a 2. řádu. Jestliže je hessián v bodě $[x_0, y_0]$ kladný, má funkce $f(x,y)$ v tomto bodě ostrý lokální extrém. Je-li naopak hessián v bodě $[x_0, y_0]$ záporný, nemá funkce $f(x,y)$ v tomto bodě ostrý lokální extrém, bod $[x_0, y_0]$ v tomto případě nazýváme **sedlem**.

Poznámka 34. Najdeme-li pomocí hessiánu v bodě $[x_0, y_0]$ lokální extrém, můžeme o maximu resp. minimu rozhodnout pomocí druhých parciálních derivací. Je-li v řezu ve směru např. osy x funkce konvexní, tj. pokud $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, nastává v tomto bodě lok. minimum. V opačném případě maximum.

⇒ Lokální extrém. ⇐
⇒ Sedlo. ⇐

⇒ Příklady na lokální extrémy funkcí dvou proměnných ⇐
⇒ Interaktivní on-line příklady na lokální extrémy ⇐

Absolutní extrémy

Definice: Buď $M \in \mathbb{R}^2$ množina v rovině, $[x_0, y_0]$ bod, $f(x,y)$ funkce definovaná na množině M. Řekneme, že funkce $f(x,y)$ má v bodě $[x_0, y_0]$ **absolutní maximum** resp. **absolutní minimum**, jestliže pro $\forall [x,y] \in M$ platí $f(x,y) \leq f(x_0, y_0)$ resp. $f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$.

Věta: Nechť $M \neq \emptyset$ je množina v rovině, $[x_0, y_0] \in M$ bod, $f(x,y)$ funkce definovaná na množině M. Pokud má funkce $f(x,y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ absolutní extrém, pak bod $[x_0, y_0]$ leží buď na hranici množiny M nebo v něm má funkce $f(x,y)$ lokální extrém.

Budeme-li tedy hledat absolutní extrémy funkce, porovnáváme funkční hodnoty ve všech

- stacionárních bodech (v nich může nastat lokální extrém),
- dále ve stacionárních bodech vázaných hranicemi množiny M
- a ve vrcholech (pokud existují).

⇒ Absolutní extrém. ⇐
⇒ Příklady na absolutní extrémy ⇐

Integrální počet funkcí dvou proměnných

Tak jako u integrace funkce jedné proměnné představoval určitý integrál na nějakém intervalu obsah plochy pod křivkou danou touto funkcí na tomto intervalu, tak i pro funkce dvou proměnných určitý integrál (říkáme mu dvojný integrál) představuje objem pod plochou danou funkcí dvou proměnných na nějaké rovinné podmnožině.

⇒ Dvojný integrál. ⇐

Ne vždy takový dvojný integrál existuje, ale my se tímto tématem nebudeme zabývat. Uvedeme si pouze jednu konkrétní metodu výpočtu dvojného integrálu pro spojité funkce dvou proměnných a takzvané elementární množiny - nejjednodušší typ tzv. měřitelných množin. Dvojný integrál z funkce $\Phi(x,y)$ na rovinné podmnožině Ω značíme

$$\iint\limits_{\Omega} \Phi(x,y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Věta (Fubiniova věta)**:** Nechť $a < b$, funkce f, g funkce jedné proměnné spojité na $\langle a, b\rangle$ a $\Phi(x, y)$ funkce spojitá na elementární množině $\Omega_x = \Big\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, \quad f(x) \le y \le g(x)\Big\}$. Pak pro dvojný integrál platí

$$\iint\limits_{\Omega_x} \Phi(x, y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} \Phi(x, y)\ \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x.$$

Analogicky na elementární množině

$$\Omega_y = \Big\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : a \le y \le b, \quad f(y) \le x \le g(y)\Big\} \quad \text{platí}$$

$$\iint\limits_{\Omega_y} \Phi(x, y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{f(y)}^{g(y)} \Phi(x, y)\ \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y.$$

Z této věty vyplývá, že dvojný integrál na obdélníkové oblasti $\Omega = [a, b] \times [c, d]$

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

je podle Fubiniovy věty roven integrálu

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\ \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x$$

respektive integrálu

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\ \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y.$$

Je-li navíc funkce $f(x, y)$ součinem funkce proměnné x a funkce proměnné y, pak platí

$$\iint\limits_{\Omega} g(x)h(y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x \int_c^d h(y)\ \mathrm{d}y.$$

⇒ Interaktivní příklady na výpočet dvojných integrálů. ⇐

V některých případech je pro výpočet dvojného integrálu vhodné provést transformaci proměnných. Jde ve své podstatě o substituční metodu integrace.

Zavedeme-li nové proměnné regulární transformací

$$\varphi : x = g(u, v), \quad y = h(u, v),$$

pak platí

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\varphi(\Omega)} f(g(u, v), h(u, v))|J(u, v)|dudv,$$

kde

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} g'_u(u, v) & g'_v(u, v) \\ h'_u(u, v) & h'_v(u, v) \end{vmatrix}$$

je jakobián zobrazení φ (zobrazení je regulární pokud je tento determinant nenulový - podobně jsme definovali regulární matice). Množina Ω je zobrazena na množinu $\varphi(\Omega)$.
Nejčastěji užívanou transformací je transformace do polárních souřadnic. Jde o případy, kdy je množina Ω kruh, mezikruží nebo kruhová výseč apod.

Polární souřadnice zavedeme pomocí zobrazení

$$\varphi : x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi,$$

kde r je vzdálenost bodu $[x, y]$ od počátku a ϕ je úhel, který svírá jeho průvodič s osou x. Tento přepis jsme již používali pro komplexní čísla při přechodu z algebraického do goniometrického tvaru.

Zobrazení φ je regulární, protože jeho jakobián je
$J(r, \phi) = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r.$

⇒ Interaktivní příklady na transformace dvojných integrálů. ⇐

KONEC