

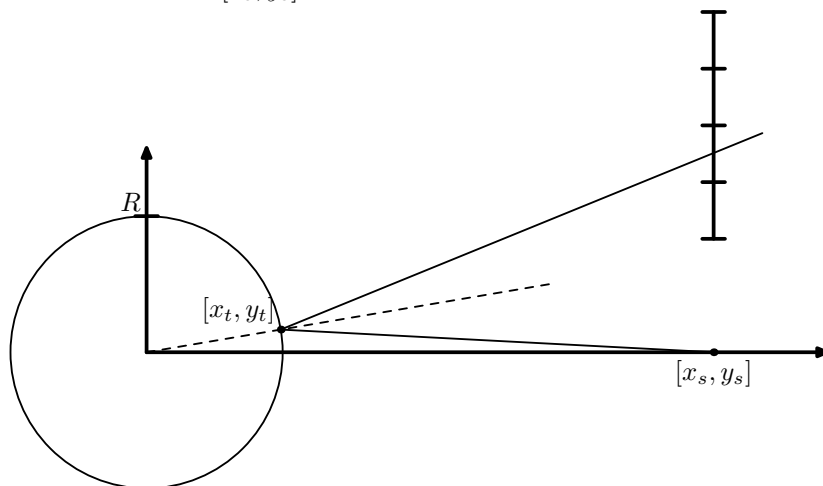
Simulace činnosti Placidova keratografu

V rámci této úlohy budeme studovat odraz paprsků od vypuklého povrchu - v rámci klasických rohovkových topografů je na základě deformace zobrazené scény zpětně určen tvar povrchu, na němž k odrazu došlo.

V rámci naší úlohy budeme ověřovat, zda zobrazení odpovídá odrazu od kulového povrchu, nebo zda povrch oka vykazuje složitější charakteristiky.

Abychom dosáhli dostatečně jednoduchého popisu situace, budeme předpokládat, že fotoaparát, snímáný zdroj světla a odraz tohoto zdroje na snímaném oku leží ve společné svislé rovině. Za tímto účelem zvolíme světelný zdroj převážně vertikálního tvaru a umístíme fotografovanou osobu tak, aby odraz světelného zdroje na jejím oku byl rovněž svislý.

V takovém případě stačí pro popis situace pouze dvourozměrný přístup. Počátek souřadné soustavy umístíme do středu kulového oka, u kterého volíme poloměr oční koule R . Fotoaparát nechť je umístěn v místě o souřadnicích $[x_s, y_s]$.



Pro výpočet odrazu paprsku potřebujeme znát jednak místo dopadu $[x_t, y_t]$ paprsku na povrch oka a normálu k povrchu v tomto místě dopadu, podle níž budeme ze Snellova zákona konstruovat paprsek odražený pod stejným úhlem, jako byl úhel dopadu.

V případě koule umístěné v počátku je určení normály jednoduché, jedná se prostě o vektor $\vec{n} = (x_t, y_t)$. V tomto případě se jedná konkrétně o normálu vnější, normála vnitřní by byla pouze opačného znaménka.

Vektor dopadajícího paprsku je při zvoleném označení dán jako $\vec{p}_i = (x_s - x_t, y_s - y_t)$, přičemž znaménko bylo zvoleno tak, aby vektor směřoval od oka k fotoaparátu.

Potom paprsek odražený postupuje ve směru

$$\vec{p}_o = (p_x, p_y) = \frac{2}{R^2}(x_s x_t + y_s y_t - R^2)(x_t, y_t) - (x_s - x_t, y_s - y_t),$$

a přímka, po níž se paprsek šíří je dána výchozím bodem a tímto směrem:

$$\begin{aligned} x &= x_t + p_x t = x_t + \left[\frac{2}{R^2}(x_s x_t + y_s y_t - R^2)x_t - (x_s - x_t) \right] t \\ y &= y_t + p_y t = y_t + \left[\frac{2}{R^2}(x_s x_t + y_s y_t - R^2)y_t - (y_s - y_t) \right] t. \end{aligned}$$

Dříve nebo později paprsek protne hladinu světelného zdroje x_z , přičemž se tak stane v (momentálně) neznámém bodě y_z . Z podmínky průsečíku $x = x_z$ však získáme hodnotu parametru t , ve kterém k průsečíku došlo a jeho dosazením do rovnice $y_z = y$ konečně hledanou polohu y_z . Po krátkém výpočtu dostáváme

$$y_z = y_t + \frac{2y_t(x_s x_t + y_s y_t - R^2) - R^2(y_s - y_t)}{2x_t(x_s x_t + y_s y_t - R^2) - R^2(x_s - x_t)}(x_z - x_t).$$

Ze znalosti fyzikálních rozměrů ve scéně tak můžeme učinit předpověď vztahu polohy skutečné zářivky a jejího obrazu na povrchu oka a tuto předpověď porovnat s nafocenými snímky. Nesmíme přitom

zapomenout, že souřadnice bodu odrazu jsou svázány podmínkou, že tento bod leží na povrchu oční koule:

$$x_t^2 + y_t^2 = R^2$$

Úkoly:

1. sestavte pozorovanou scénu tak, aby hlavní objekty ležely ve společné svislé rovině
2. vyfoťte ostrý obraz duhovky (bude sloužit pro určení měřítka ostatních snímků)
3. bez pohnutí fotoaparátlem nebo focenou osobou, pořiďte sérii snímků s různým natočením oka
4. pro jednotlivé snímky určete polohu žebrování zářivky
5. porovnejte výsledky s teoretickou předpovědí (zvolte vhodnou velikost poloměru oka při výpočtu)
6. učiňte kvalitativní závěry o struktuře oka na základě předchozího testu

Provedení:

V rámci sestavení zaznamenávané scény umístíme fotoaparát na stativu do výšky oka; volíme tedy speciálně $y_s = 0$. Jako zdroj, jehož obraz budeme na povrchu rohovky zachytávat, zvolíme svislou zářivku, zavěšenou pod stropem. Součástí zářivky je žebrování s roztečí 4 cm. Osobu, jejíž oko budete fotit, umístíte do svislé roviny určené zářivkou tak, aby při pozorování jejího oka ze vzdálenosti jednoho metru byl obraz zářivky dobře viditelný blízko horizontálního středu oka. Skutečnou vzdálenost fotografovaného oka od fotoaparátu nastavíme jako nejmenší takovou, kdy fotoaparát ještě oko zaostří. Fotoaparát nastavíme do zcela manuálního režimu, odcloníme a délku expozice stanovíme tak, aby byla žebra zářivky dobře viditelná (to pravděpodobně povede k podexponování okolních objektů, což nám ale nevadí).

Pokud visí zářivka přibližně nad fotoaparátem, můžeme položit $x_z = x_s$. Hodnoty y_t změříme přímo na fotografii (využijeme k tomu známou skutečnou velikost duhovky). S využitím všech těchto informací se předchozí vztahy redukuje na

$$y_z = y_t + \frac{2y_t(x_s\sqrt{R^2 - y_t^2} - R^2) + R^2y_t}{2\sqrt{R^2 - y_t^2}(x_s\sqrt{R^2 - y_t^2} - R^2) - R^2(x_s - \sqrt{R^2 - y_t^2})} \left(x_s - \sqrt{R^2 - y_t^2} \right).$$

Pro jednotlivé y_t odečtené z fotografie tak dostáváme předpověď polohy jednotlivých žeborů zářivky. Pro správně zvolený poloměr oka by se vzdálenost sousedních žeborů měla dobře blížit hodnotě zmíněných 4 cm.