Jak plyne čas

Zdeněk Pospíšil

Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

Vědecká rada VUT, 6. května 2016

Oblasti prezentace:

1. Popis změny: Diferenciální a diferenční rovnice
2. Zobecnění: Dynamické systémy a časové škály
3. Výzkumná činnost a oblasti aplikací
4. Vzdělávací činnost

Evoluční rovnice

Matematický model časové změny

Matematický model časové změny

Změna je určena zákony vývoje a stavem

Matematický model časové změny

Změna je určena zákony vývoje a stavem

$$=$$

Matematický model časové změny

Změna je určena zákony vývoje a stavem

$$= \qquad F_t(x)$$

$F_t : \Omega \to \Omega$ – operátor na stavovém prostoru

Matematický model časové změny

Změna je určena zákony vývoje a stavem

$$\left.\begin{array}{r} x(t+1) \\[1em] \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) \end{array}\right\} \quad = \quad F_t(x)$$

$F_t : \Omega \to \Omega$ – operátor na stavovém prostoru

Matematický model časové změny

Změna je určena zákony vývoje a stavem

$$\left.\begin{array}{r}\Delta x(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)\end{array}\right\} \quad = \quad F_t(x)$$

$F_t : \Omega \to \Omega$ – operátor na stavovém prostoru

Nestrukturovaná proměnná

Spojitý čas: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x)$

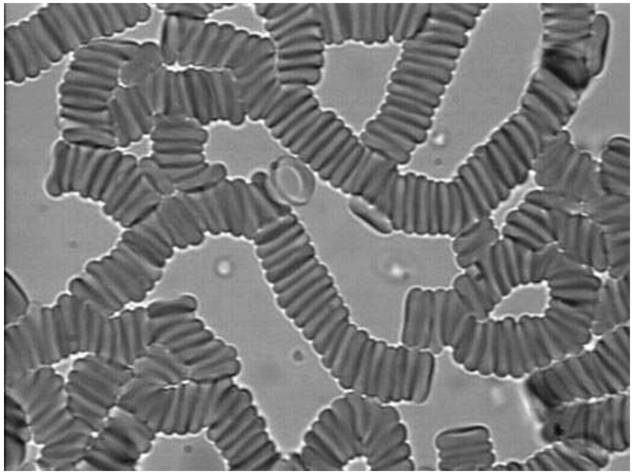
Nestrukturovaná proměnná

Spojitý čas: $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x)$

Př.: Sedimentace erythrocytů

$$v(t) = \frac{2(\rho_E - \rho_P)}{9\eta_P} g Q(H) R_{\mathrm{ef}}(t)^2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} R_{\mathrm{ef}} = \kappa \frac{R_{\mathrm{ef}} - R_K}{R_0 - R_K}$$



Nestrukturovaná proměnná

Spojitý čas: $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x)$

Př.: Růst populace s prolínajícími se generacemi

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

Nestrukturovaná proměnná

Spojitý čas: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x)$

Př.: Růst populace s prolínajícími se generacemi

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

Diskrétní čas: $x(t+1) = g(x)$

Nestrukturovaná proměnná

Spojitý čas: $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x)$

Př.: Růst populace s prolínajícími se generacemi

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

Diskrétní čas: $x(t+1) = g(x)$

Př.: Růst populace s oddělenými generacemi

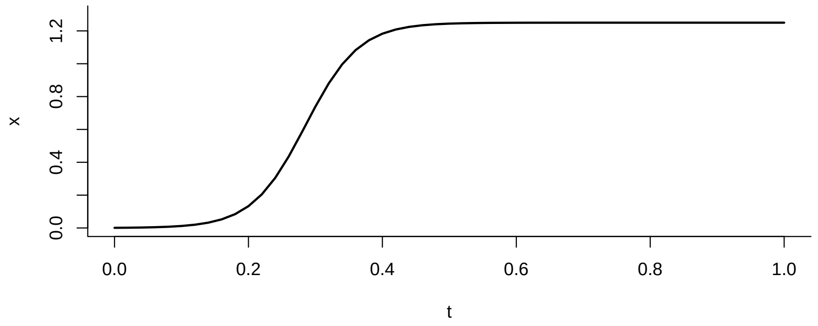
$$x(t+1) = (r-1)x(t)\left(1 - \frac{r}{r-1}\frac{x}{K}\right)$$

Nestrukturovaná proměnná

Spojitý čas: $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x)$

Př.: Růst populace s prolínajícími se generacemi

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 5x\left(1 - \frac{x}{5/4}\right)$$



Diskrétní čas: $x(t+1) = g(x)$

Př.: Růst populace s oddělenými generacemi

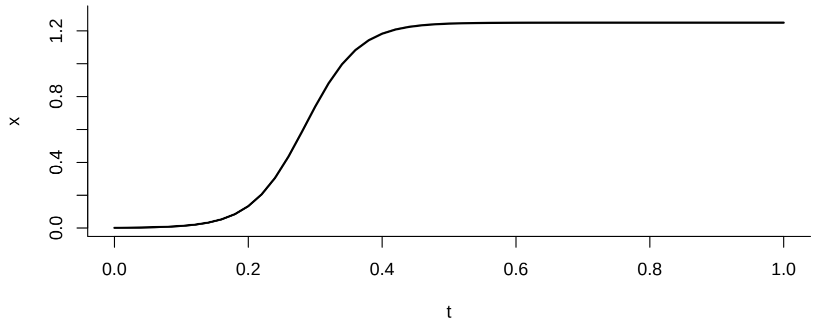
$$x(t+1) = (r-1)x(t)\left(1 - \frac{r}{r-1}\frac{x}{K}\right)$$

Nestrukturovaná proměnná

Spojitý čas: $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x)$

Př.: Růst populace s prolínajícími se generacemi

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 5x\left(1 - \frac{x}{5/4}\right)$$

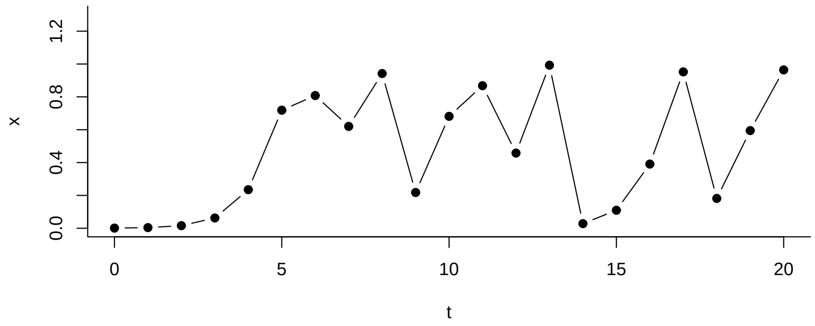


Diskrétní čas: $x(t+1) = g(x)$

Př.: Růst populace s oddělenými generacemi

$$x(t+1) = (r-1)x(t)\left(1 - \frac{r}{r-1}\frac{x}{K}\right)$$

$$x(t+1) = 4x(t)\big(1 - x(t)\big)$$



Jednoduchá struktura

		struktura	
		diskrétní	spojitá
čas	spojitý		
	diskrétní		

Jednoduchá struktura

		struktura	
		diskrétní	spojitá
čas	spojitý	soustava ODR	
	diskrétní		

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Jednoduchá struktura

		struktura	
		diskrétní	spojitá
čas	spojitý	soustava ODR	
	diskrétní		

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Př.: Vývoj interagujících populací

$$\dot{x}_i = x_i g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

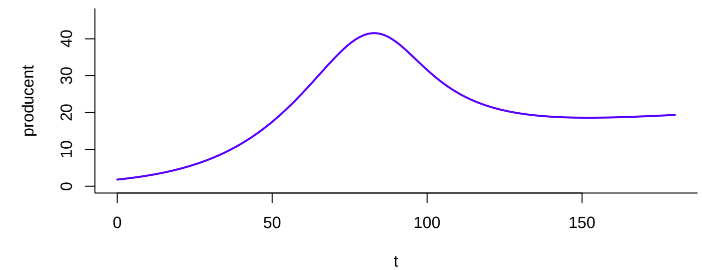
Jednoduchá struktura

		struktura	
		diskrétní	spojitá
čas	spojitý	soustava ODR	
	diskrétní		

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

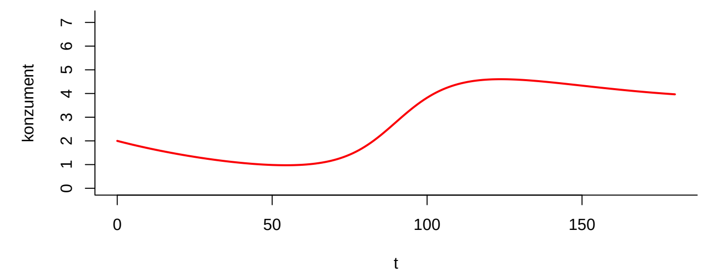
Př.: Vývoj interagujících populací

$$\dot{x}_i = x_i g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$



Konkrétně: producent-konzument

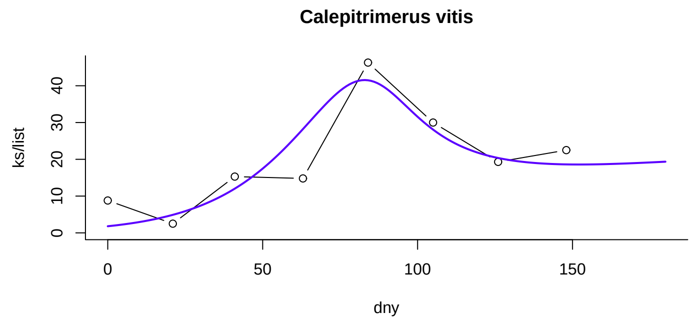
$$\begin{aligned} \dot{x} &= \quad r\,x - \quad A\varphi(x)\,y, \\ \dot{y} &= -d\,y + \kappa A\varphi(x)\,y, \end{aligned}$$



Jednoduchá struktura

		struktura	
		diskrétní	spojitá
čas	spojitý	soustava ODR	
	diskrétní		

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

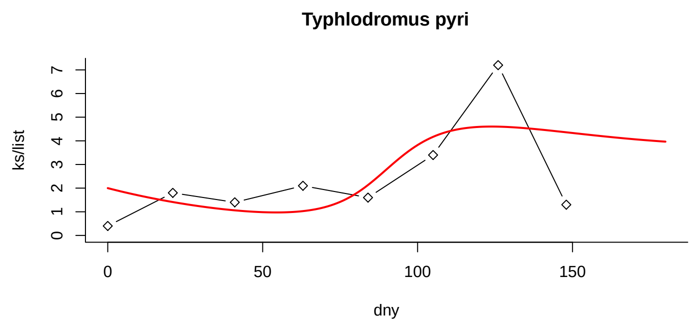


Př.: Vývoj interagujících populací

$$\dot{x}_i = x_i g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Konkrétně: producent-konzument

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \quad r\,x - \quad A\varphi(x)\,y, \\ \dot{y} &= -d\,y + \kappa A\varphi(x)\,y, \end{aligned}$$



Jednoduchá struktura

		struktura	
		diskrétní	spojitá
čas	spojitý	soustava ODR	
	diskrétní	soustava ΔR	

$$x_i(t+1) = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Jednoduchá struktura

		struktura	
		diskrétní	spojitá
čas	spojitý	soustava ODR	
	diskrétní	soustava ΔR	

$$x_i(t+1) = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Př.: Vývoj populace složené z vývojových stadií s nepřekrývajícími se generacemi

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{A}\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big)\boldsymbol{x}(t)$$

		struktura	
		diskrétní	spojitá
čas	spojitý	soustava ODR	
	diskrétní	soustava ΔR	

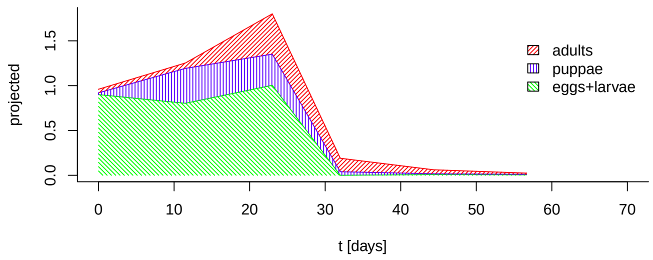
$$x_i(t+1) = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Př.: Vývoj populace složené z vývojových stadií s nepřekrývajícími se generacemi

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{A}\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big)\boldsymbol{x}(t)$$

Konkrétně: larva $\to$ kukla $\to$ imago

$$\begin{pmatrix} l(t+1) \\ p(t+1) \\ a(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1(t) & 0 & F(t) \\ Q_1(t) & P_2(t) & 0 \\ 0 & Q_2(t) & P_3(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l(t) \\ p(t) \\ a(t) \end{pmatrix}$$



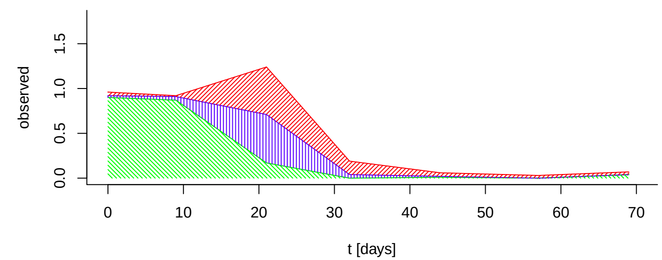
Jednoduchá struktura

		struktura	
		diskrétní	spojitá
čas	spojitý	soustava ODR	
	diskrétní	soustava ΔR	

$$x_i(t+1) = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

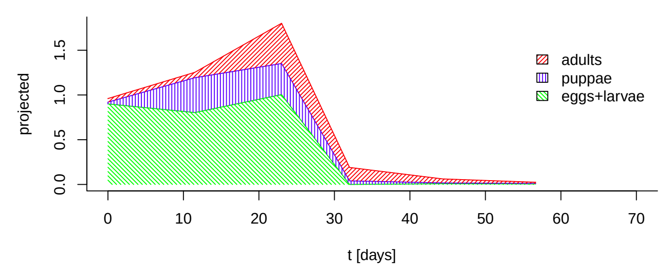
Př.: Vývoj populace složené z vývojových stadií

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{A}\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big)\boldsymbol{x}(t)$$



Konkrétně: larva $\to$ kukla $\to$ imago

$$\begin{pmatrix} l(t+1) \\ p(t+1) \\ a(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1(t) & 0 & F(t) \\ Q_1(t) & P_2(t) & 0 \\ 0 & Q_2(t) & P_3(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l(t) \\ p(t) \\ a(t) \end{pmatrix}$$



Jednoduchá struktura

		struktura	
		diskrétní	spojitá
čas	spojitý	soustava ODR	evoluční PDR
	diskrétní	soustava ΔR	

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + f(u)$$

Jednoduchá struktura

		struktura	
		diskrétní	spojitá
čas	spojitý	soustava ODR	evoluční PDR
	diskrétní	soustava ΔR	

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + f(u)$$

Př.: Biologická invaze

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u)$$

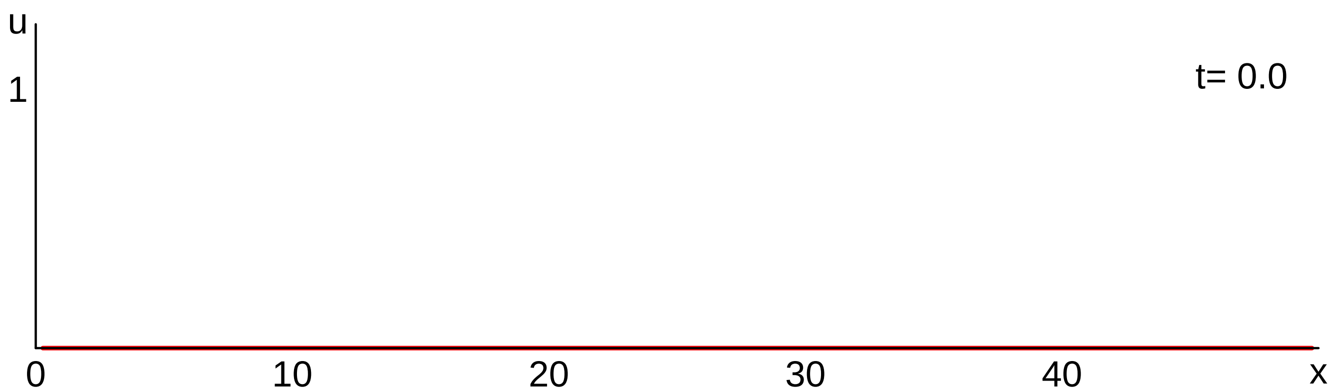
Jednoduchá struktura

		struktura	
		diskrétní	spojitá
čas	spojitý	soustava ODR	evoluční PDR
	diskrétní	soustava ΔR	

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + f(u)$$

Př.: Biologická invaze

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u)$$



Jednoduchá struktura

		struktura	
		diskrétní	spojitá
čas	spojitý	soustava ODR	evoluční PDR
	diskrétní	soustava ΔR	integrální rekurence

$$u(t+1,x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y) f\big(u(t,y)\big) \mathrm{d}y$$

Jednoduchá struktura

		struktura	
		diskrétní	spojitá
čas	spojitý	soustava ODR	evoluční PDR
	diskrétní	soustava ΔR	integrální rekurence

$$u(t+1,x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(x-y) f\big(u(t,y)\big) \mathrm{d}y$$

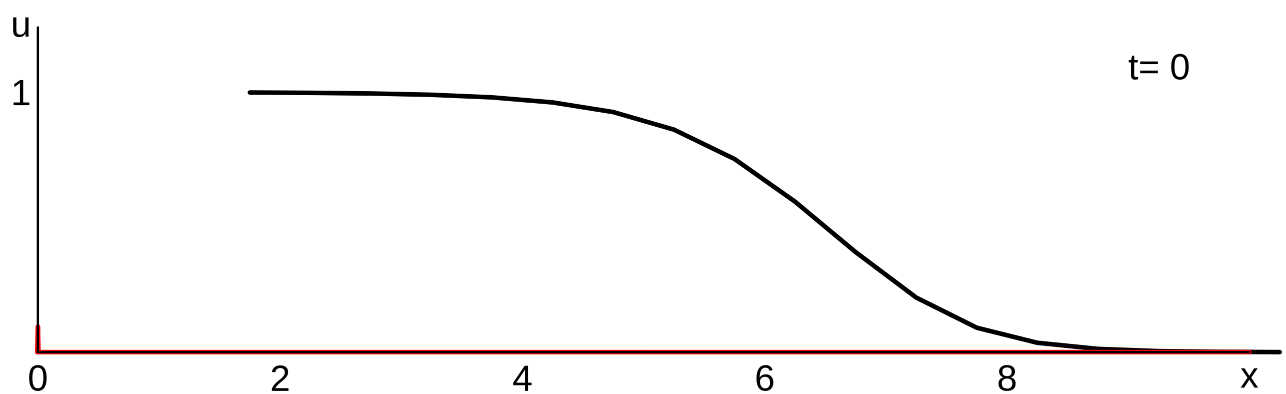
Př.: Biologická invaze, $f(u) = \dfrac{3u}{2+u}$, $k(s) = \chi_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(s)$

Jednoduchá struktura

		struktura	
		diskrétní	spojitá
čas	spojitý	soustava ODR	evoluční PDR
	diskrétní	soustava ΔR	integrální rekurence

$$u(t+1,x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y) f\big(u(t,y)\big)\mathrm{d}y$$

Př.: Biologická invaze, $f(u) = \dfrac{3u}{2+u}$, $k(s) = \chi_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(s)$



Kombinovaná struktura

Kombinovaná struktura

Nestabilita řízená difúzí, Turingův jev

Kombinovaná struktura

Nestabilita řízená difúzí, Turingův jev

Několik interagujících komponent se vyvíjí ve spojitém prostoru a čas plyne spojitě.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} &= D_i \Delta u_i + f_i(u_1, u_2, \ldots, u_n), && t > 0,\ \boldsymbol{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \\ \frac{\partial u_i}{\partial \boldsymbol{\nu}} &= 0, && \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \end{aligned}\right. \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Kombinovaná struktura

Nestabilita řízená difúzí, Turingův jev, morfogeneze

Několik interagujících komponent se vyvíjí ve spojitém prostoru a čas plyne spojitě.

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial u_i}{\partial t} &= D_i \Delta u_i + f_i(u_1, u_2, \ldots, u_n), \quad && t > 0,\ \boldsymbol{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \\
\frac{\partial u_i}{\partial \boldsymbol{\nu}} &= 0, && \boldsymbol{x} \in \partial\Omega,
\end{aligned}
\right\}
\quad i = 1, 2, \ldots, n.
$$

Kombinovaná struktura

Nestabilita řízená difúzí

Dvě komponenty se vyvíjí v diskrétním prostoru tvaru cyklu a čas plyne diskrétně.

$$x_i(t+1) = r x_i(t) + \varrho y_i(t) + \alpha\left[r\big(x_{i-1}(t) - 2x_i(t) + x_{i+1}(t)\big) + \varrho\big(y_{i-1}(t) - 2y_i(t) + y_{i+1}(t)\big)\right],$$
$$y_i(t+1) = \sigma x_i(t) + s y_i(t) + \beta\left[\sigma\big(x_{i-1}(t) - 2x_i(t) + x_{i+1}(t)\big) + s\big(y_{i-1}(t) - 2y_i(t) + y_{i+1}(t)\big)\right],$$

$$i = 1, 2, \ldots, k$$

$$x_0(t) = x_k(t),\ x_{k+1}(t) = x_1(t), \quad y_0(t) = y_k(t),\ y_{k+1}(t) = y_1(t).$$

Kombinovaná struktura

Nestabilita řízená difúzí

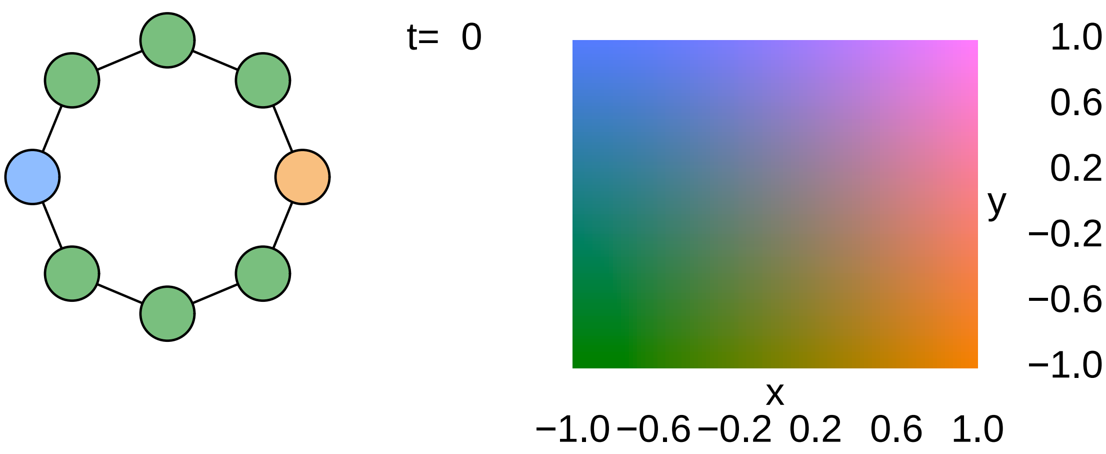
Dvě komponenty se vyvíjí v diskrétním prostoru tvaru cyklu a čas plyne diskrétně.

$$x_i(t+1) = r x_i(t) + \varrho y_i(t) + \alpha \left[r\big(x_{i-1}(t) - 2x_i(t) + x_{i+1}(t)\big) + \varrho\big(y_{i-1}(t) - 2y_i(t) + y_{i+1}(t)\big)\right],$$

$$y_i(t+1) = \sigma x_i(t) + s y_i(t) + \beta \left[\sigma\big(x_{i-1}(t) - 2x_i(t) + x_{i+1}(t)\big) + s\big(y_{i-1}(t) - 2y_i(t) + y_{i+1}(t)\big)\right],$$

$$i = 1, 2, \ldots, k$$

$$x_0(t) = x_k(t),\ x_{k+1}(t) = x_1(t), \quad y_0(t) = y_k(t),\ y_{k+1}(t) = y_1(t).$$



Zobecnění

Dynamické systémy

Semidynamický systém:

- Neprázdná množina X
- Časová množina $J \subseteq [0, \infty)$

  (1) $0 \in J$, $1 \in J$
  (2) $s, t \in J \quad \Rightarrow \quad s + t \in J$
  (3) $s, t \in J,\ s < t, \quad \Rightarrow \quad t - s \in J$

- Evoluční operátor $\Phi : J \times X \to X$

  (i) $\Phi(0, x) = x$ pro každé $x \in X$
  (ii) $\Phi(t + s, x) = \Phi\big(t, \Phi(s, x)\big)$ pro všechna $t, s \in J$ a každé $x \in X$

Dynamické systémy

Semidynamický systém:

- Metrický prostor X
- Časová množina $J \subseteq [0, \infty)$

  (1) $0 \in J$, $1 \in J$
  (2) $s, t \in J \quad \Rightarrow \quad s + t \in J$
  (3) $s, t \in J,\ s < t, \quad \Rightarrow \quad t - s \in J$

- Evoluční operátor $\Phi : J \times X \to X$

  (i) $\Phi(0, x) = x$ pro každé $x \in X$
  (ii) $\Phi(t + s, x) = \Phi\big(t, \Phi(s, x)\big)$ pro všechna $t, s \in J$ a každé $x \in X$

Systém *se spojitými stavy:* $\Phi(t, \cdot\,) : X \to X$ je spojité pro každé $t \in J$
spojitý v čase: $\Phi(\,\cdot\,, x) : J \to X$ je spojitá funkce pro každé $x \in X$
spojitý: Φ je spojité vzhledem k součinové topologii na $J \times X$

Dynamické systémy

Dynamický systém:

- Metrický prostor X
- Časová množina $J \subseteq \mathbb{R}$

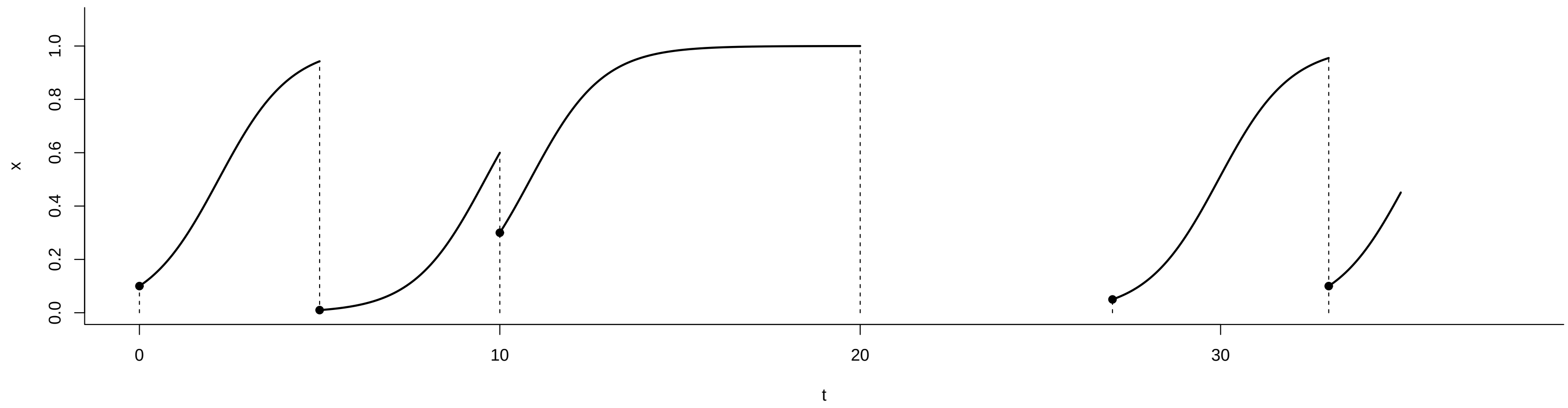
  (1) $0 \in J$, $1 \in J$
  (2) $s, t \in J \quad \Rightarrow \quad s + t \in J$
  (3) $(J, +)$ je podgrupa $(\mathbb{R}, +)$

- Evoluční operátor $\Phi : J \times X \to X$

  (i) $\Phi(0, x) = x$ pro každé $x \in X$
  (ii) $\Phi(t + s, x) = \Phi\big(t, \Phi(s, x)\big)$ pro všechna $t, s \in J$ a každé $x \in X$

Systém *se spojitými stavy:* $\Phi(t, \cdot\,) : X \to X$ je spojité pro každé $t \in J$
spojitý v čase: $\Phi(\,\cdot\,, x) : J \to X$ je spojitá funkce pro každé $x \in X$
spojitý: Φ je spojité vzhledem k součinové topologii na $J \times X$

Časové škály



Časové škály

Vlastnosti času

A1 Pokud rozlišíme dva okamžiky, rozlišíme také, který byl dříve a který později;
rozlišujeme minulost a budoucnost;
přítomný okamžik dělí běh času na minulost a budoucnost;
není úplně jasné, co to je přítomný okamžik.

A2 Minulost plynule přechází do budoucnosti;
mezi všemi budoucími okamžiky je ,,ten nejbližší''.

A3 Jsme schopni plynoucí čas jaksi kvantifikovat;
můžeme rozlišit okamžiky ,,blízké'' a ,,vzdálené''.

$(\mathbb{T}, \leq, \nu)$ se nazývá *řetězec s mírou* [(strong) measure chain], pokud $\mathbb{T} \neq \emptyset$ a platí:

A1 Relace „$\leq$" splňuje (pro všechna $r, s, t \in \mathbb{T}$):

- (i) $t \leq t$ (reflexivita);
- (ii) je-li $r \leq s$ a $s \leq t$, pak $r \leq t$ (tranzitivita);
- (iii) je-li $r \leq s$ a $s \leq r$, pak $r = s$ (antisymetrie);
- (iv) $r \leq s$ nebo $s \leq r$ (úplnost).

A2 Každá neprázdná podmnožina $\mathbb{T}$, která má v $\mathbb{T}$ horní závoru, má v $\mathbb{T}$ supremum (řetězec $(\mathbb{T}, \leq)$ je podmíněně úplný).

A3 Zobrazení $\nu : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ má následující vlastnosti (pro všechna $r, s, t \in \mathbb{T}$):

- (i) $\nu(r, s) + \nu(s, t) = \nu(r, t)$ (kocykličnost);
- (ii) je-li $r > s$, pak $\nu(r, s) > 0$ (silná izotonie);
- (iii) ν je spojité.

Časové škály

,,Nejbližší budoucnost" a ,,nejbližší minulost": operátory *skoku vpřed* a *vzad*

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} :\ s > t\}, \quad \rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} :\ s < t\}.$$

Čas někdy plyne spojitě, někdy diskrétně.

Zrnitost času v okamžiku t definujeme jako $\mu(t) = \nu\big(\sigma(t), t\big)$.

Časové škály

Příklady:

- Libovolná uzavřená podmnožina $\mathbb{R}$ – časová škála (time scale)
- $\mathbb{T}=\mathbb{R}$, $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$:

$\mathbb{T}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}$
$\sigma(t)$	t	$t+1$
$\rho(t)$	t	$t-1$
$\nu(r,s)$	$r-s$	$r-s$
$\mu(t)$	0	1
rd-spojitá f	spojitá funkce f	libovolná posloupnost f
$f^{\Delta}(t)$	$f'(t)$	$\Delta f(t)=f(t+1)-f(t)$
$\int\limits_r^s f(t)\Delta t$	$\int\limits_r^s f(t)\mathrm{d}t$	$\sum\limits_{t=r}^{s-1} f(t)$

Výzkum a aplikace

Výzkumná činnost

- Kvalitativní teorie diferenciálních a diferenčních rovnic:
  - Symplektické diferenční systémy, zobecnění hyperbolických funkcí
  - Permanence systémů ODR
  - Vztah replikátorových rovnic a Kolmogorovových systémů
  - Integrální rekurence
- Kalkulus na časových škálách:
  - Rovnice pro hyperbolické funkce
  - ,,Measure chain'' pro rovnice s pulsy

Výsledky se staly součástí základní učebnice
BOHNER, M., PETERSON, A. *Dynamic Equations on Time Scales. An Introduction with Applications.* Boston, Basel, Berlin: Birkhauser, 2001.

Výzkumná činnost

- Kvalitativní teorie diferenciálních a diferenčních rovnic:
  - Symplektické diferenční systémy, zobecnění hyperbolických funkcí
  - Permanence systémů ODR
  - Vztah replikátorových rovnic a Kolmogorovových systémů
  - Integrální rekurence
- Kalkulus na časových škálách:
  - Rovnice pro hyperbolické funkce
  - „Measure chain" pro rovnice s pulsy

  Výsledky se staly součástí základní učebnice
  BOHNER, M., PETERSON, A. *Dynamic Equations on Time Scales. An Introduction with Applications.* Boston, Basel, Berlin: Birkhauser, 2001.

Plány a výhledy:

- Časové škály s algebraickou strukturou
- „Turingova nestabilita" v diskrétním prostoru i čase

Oblasti aplikací

- Populační dynamika, biologická (integrovaná) ochrana rostlin
- Hematologie
- Deterministická složka evoluce
- . . . další oblasti přírodních, technických a společenských věd

Oblasti aplikací

- Populační dynamika, biologická (integrovaná) ochrana rostlin
- Hematologie
- Deterministická složka evoluce
- ... další oblasti přírodních, technických a společenských věd

Konkrétní spolupráce:

- Biocont Laboratory, s r.o.
- Interní hematoonkologická klinika FN Bohunice
- Veterinární a farmaceutická univerzita Brno
- Ústav religionistiky FF MU

Výuka

Vzdělávací činnost

- Garant studijních oborů PřF MU:
  - Aplikovaná matematika pro víceoborové studium (bakalářský)
  - Matematické modelování a numerické metody (magisterský)
- Garant a vyučující nových nebo inovovaných předmětů:
  - Spojité deterministické modely I a II
  - Diskrétní deterministické modely
  - Maticové populační modely
  - Rovnice matematické fyziky
  - Matematika pro biology
  - Matematika pro kartografy
- Vedení závěrečných prací:
  - bakalářské – 27 úspěšně obhájených
  - diplomové – 30 úspěšně obhájených
  - disertační: Jitka Kühnová 2013
Darina Brothánková 2014
Václav Pink 2014

Vzdělávací činnost

- Člen oborové komise pro doktorský studijní program *Pravděpodobnost, statistika a matematické modelování*
- Předseda komise pro státní rigorózní zkoušku v oboru *Matematické modelování a numerické metody*
- Alternující předseda komise pro státní závěrečnou zkoušku v oboru *Matematická biologie*

- Skripta:
  - J. Kalas, ZP: Spojité modely v biologii
  - J. Hřebíček, ZP, J. Urbánek: Úvod do matematického modelování s využitím Maple

- Elektronické učební texty a e-learningové materiály pro vyučované předměty https://is.muni.cz

- Popularizace (Planetárium, střední školy, U3V, JČMF, MSKA, ČRo, ČTv)

Další plány a výhledy:

- Průběžná inovace výuky a studijních materiálů, reakce na studentské ankety.
- Prohlubování mezioborové spolupráce v rámci MU.
- Publikace Rovnice matematické biologie.

Závěrečný přehled

- **Projekty GAČR** (spoluřešitel)
  Diferenční rovnice a jejich aplikace, 1998–2000
  Funkcionální diferenciální rovnice, 1999–2001
  Kvalitativní teorie řešení diferenčních rovnic, 2001–2003
  Diferenční rovnice a dynamické rovnice na "time scales", 2004–2006
  Diferenční rovnice a dynamické rovnice na "time scales" II, 2007–2009
  Diferenční rovnice a dynamické rovnice na time scales III, 2010–2014
- **Projekty MŠMT** (spoluřešitel)
  Funkcionální diferenciální rovnice a matematicko-statistické modely (VZ), 1999–2003
  Implementace systémového hlediska do vzdělávání při přechodu k udržitelnému rozvoji, 2005–2008
  Univerzitní výuka matematiky v měnícím se světě, 2010–2013
  Interdisciplinární rozvoj studijního oboru matematická biologie, 2012–2015
- **Projekt GAMU** (spoluřešitel)
  Generativní historiografie antického Středomoří, 2014–2017
- **Publikace a citace:**
  38 původních prací v odborných časopisech (v tom 24 v časopisech s IF)
  36 prací v ostatních recenzovaných publikacích
  147 citací bez autocitací, v tom 124 podle WoS nebo Scopus
- **Posudky:**
  Pro časopisy Advances in Difference Equations, Applied Mathematics and Computation, Mathematica Bohemica, Hindawi Journal of Applied Mathematics
  Habilitační (3) a disertační (9) práce
- **Doktorandi:** 3