
Matematické modelování dynamiky populací

Přednáška na veřejném zasedání vědecké rady

Fakulty strojního inženýrství

Vysokého učení technického v Brně

12. 4. 2006

Zdeněk Pospíšil

Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Katedra aplikované matematiky

Obsah

Obsah

- Komu je téma určeno

Obsah

- Komu je téma určeno
- Deterministický dynamický model růstu jedné populace se spojitým časem

Obsah

- Komu je téma určeno
- Deterministický dynamický model růstu jedné populace se spojitým časem
- Model interakce dravec-kořist

Obsah

- Komu je téma určeno
- Deterministický dynamický model růstu jedné populace se spojitým časem
- Model interakce dravec-kořist
 - Modely Gauseho typu

Obsah

- Komu je téma určeno
- Deterministický dynamický model růstu jedné populace se spojitým časem
- Model interakce dravec-kořist
 - Modely Gauseho typu
 - Modely Leslieho typu

Obsah

- Komu je téma určeno
- Deterministický dynamický model růstu jedné populace se spojitým časem
- Model interakce dravec-kořist
 - Modely Gauseho typu
 - Modely Leslieho typu
- Teoretický základ biologické (integrované) ochrany zemědělských plodin

Obsah

- Komu je téma určeno
- Deterministický dynamický model růstu jedné populace se spojitým časem
- Model interakce dravec-kořist
 - Modely Gauseho typu
 - Modely Leslieho typu
- Teoretický základ biologické (integrované) ochrany zemědělských plodin
- Možná zobecnění, výhledy pro další výzkum

Komu je téma určeno

Komu je téma určeno

Studijní program MU PŘF: Biologie
Studijní obor: Matematická biologie

Komu je téma určeno

Studijní program MU PŘF: Biologie

Studijní obor: Matematická biologie

- Od roku 1999 magisterský

Komu je téma určeno

Studijní program MU PŘF: Biologie

Studijní obor: Matematická biologie

- Od roku 1999 magisterský
- Od roku 2002 bakalářský s navazujícím magisterským

Komu je téma určeno

Studijní program MU PŘF: Biologie

Studijní obor: Matematická biologie

- Od roku 1999 magisterský
- Od roku 2002 bakalářský s navazujícím magisterským

Předmět: M5858 Diferenciální rovnice a jejich užití I

Komu je téma určeno

Studijní program MU PŘF: Biologie

Studijní obor: Matematická biologie

- Od roku 1999 magisterský
- Od roku 2002 bakalářský s navazujícím magisterským

Předmět: M5858 Diferenciální rovnice a jejich užití I

Předpoklady:

Komu je téma určeno

Studijní program MU PŘF: Biologie

Studijní obor: Matematická biologie

- Od roku 1999 magisterský
- Od roku 2002 bakalářský s navazujícím magisterským

Předmět: M5858 Diferenciální rovnice a jejich užití I

Předpoklady:

- Základní kurs matematické analýzy (diferenciální a integrální počet funkcí jedné i více proměnných)

Komu je téma určeno

Studijní program MU PŘF: Biologie

Studijní obor: Matematická biologie

- Od roku 1999 magisterský
- Od roku 2002 bakalářský s navazujícím magisterským

Předmět: M5858 Diferenciální rovnice a jejich užití I

Předpoklady:

- Základní kurs matematické analýzy (diferenciální a integrální počet funkcí jedné i více proměnných)
- Základní kurs lineární algebry (vlastní čísla a vlastní vektory matic)

Modely dynamiky jedné populace

Matematické prostředky: obyčejná diferenciální rovnice

Modely dynamiky jedné populace

Matematické prostředky: obyčejná diferenciální rovnice

Model:

- Dynamický

Modely dynamiky jedné populace

Matematické prostředky: obyčejná diferenciální rovnice

Model:

- Dynamický
- Deterministický

Modely dynamiky jedné populace

Matematické prostředky: obyčejná diferenciální rovnice

Model:

- Dynamický
- Deterministický
- Se spojitým časem

Modely dynamiky jedné populace

Matematické prostředky: obyčejná diferenciální rovnice

Model:

- Dynamický
- Deterministický
- Se spojitým časem (s překrývajícími se generacemi)

Modely dynamiky jedné populace

Matematické prostředky: obyčejná diferenciální rovnice

Model:

- Dynamický
- Deterministický
- Se spojitým časem (s překrývajícími se generacemi)

Zjednodušení:

Modely dynamiky jedné populace

Matematické prostředky: obyčejná diferenciální rovnice

Model:

- Dynamický
- Deterministický
- Se spojitým časem (s překrývajícími se generacemi)

Zjednodušení:

- neuvažujeme náhodné vlivy (v biologii je běžná variabilita veličin 20%)

Modely dynamiky jedné populace

Matematické prostředky: obyčejná diferenciální rovnice

Model:

- Dynamický
- Deterministický
- Se spojitým časem (s překrývajícími se generacemi)

Zjednodušení:

- neuvažujeme náhodné vlivy (v biologii je běžná variabilita veličin 20%)
- celou populaci považujeme za homogenní směs;

Modely dynamiky jedné populace

Matematické prostředky: obyčejná diferenciální rovnice

Model:

- Dynamický
- Deterministický
- Se spojitým časem (s překrývajícími se generacemi)

Zjednodušení:

- neuvažujeme náhodné vlivy (v biologii je běžná variabilita veličin 20%)
- celou populaci považujeme za homogenní směs; neuvažujeme rozdělení jedinců podle pohlaví, velikostí ap.

Modely dynamiky jedné populace

Matematické prostředky: obyčejná diferenciální rovnice

Model:

- Dynamický
- Deterministický
- Se spojitým časem (s překrývajícími se generacemi)

Zjednodušení:

- neuvažujeme náhodné vlivy (v biologii je běžná variabilita veličin 20%)
- celou populaci považujeme za homogenní směs; neuvažujeme rozdělení jedinců podle pohlaví, velikostí ap., věkovou strukturu,

Modely dynamiky jedné populace

Matematické prostředky: obyčejná diferenciální rovnice

Model:

- Dynamický
- Deterministický
- Se spojitým časem (s překrývajícími se generacemi)

Zjednodušení:

- neuvažujeme náhodné vlivy (v biologii je běžná variabilita veličin 20%)
- celou populaci považujeme za homogenní směs; neuvažujeme rozdělení jedinců podle pohlaví, velikostí ap., věkovou strukturu, ani její prostorové rozložení

Modely dynamiky jedné populace

Jediná stavová proměnná — velikost populace (počet jedinců, populační hustota, biomasa, ...).

Modely dynamiky jedné populace

Jediná stavová proměnná — velikost populace (počet jedinců, populační hustota, biomasa, ...).

Označení: $x = x(t)$

Modely dynamiky jedné populace

Jediná stavová proměnná — velikost populace (počet jedinců, populační hustota, biomasa, ...).

Označení: $x = x(t)$

Vývoj v čase:

Modely dynamiky jedné populace

Jediná stavová proměnná — velikost populace (počet jedinců, populační hustota, biomasa, ...).

Označení: $x = x(t)$

Vývoj v čase:

$$x(t + \Delta t)$$

Modely dynamiky jedné populace

Jediná stavová proměnná — velikost populace (počet jedinců, populační hustota, biomasa, ...).

Označení: $x = x(t)$

Vývoj v čase:

$$x(t + \Delta t) = x(t)$$

Modely dynamiky jedné populace

Jediná stavová proměnná — velikost populace (počet jedinců, populační hustota, biomasa, ...).

Označení: $x = x(t)$

Vývoj v čase:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \text{množství narozených}$$

Modely dynamiky jedné populace

Jediná stavová proměnná — velikost populace (počet jedinců, populační hustota, biomasa, ...).

Označení: $x = x(t)$

Vývoj v čase:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \text{množství narozených} - \text{množství zemřelých}$$

Modely dynamiky jedné populace

Jediná stavová proměnná — velikost populace (počet jedinců, populační hustota, biomasa, ...).

Označení: $x = x(t)$

Vývoj v čase:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \text{množství narozených} - \text{množství zemřelých}$$

Rození i umírání považujeme za Poissonův proces — množství narozených nebo zemřelých jedinců za krátký časový interval délky Δt je úměrný této délce (trvání) a aktuální velikosti populace.

Modely dynamiky jedné populace

Jediná stavová proměnná — velikost populace (počet jedinců, populační hustota, biomasa, ...).

Označení: $x = x(t)$

Vývoj v čase:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \text{množství narozených} - \text{množství zemřelých}$$

Rození i umírání považujeme za Poissonův proces — množství narozených nebo zemřelých jedinců za krátký časový interval délky Δt je úměrný této délce (trvání) a aktuální velikosti populace.

b ... koeficient porodnosti (birth rate)

d ... koeficient úmrtnosti (death rate)

Modely dynamiky jedné populace

Jediná stavová proměnná — velikost populace (počet jedinců, populační hustota, biomasa, ...).

Označení: $x = x(t)$

Vývoj v čase:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + bx(t)\Delta t - dx(t)\Delta t$$

Rození i umírání považujeme za Poissonův proces — množství narozených nebo zemřelých jedinců za krátký časový interval délky Δt je úměrný této délce (trvání) a aktuální velikosti populace.

b ... koeficient porodnosti (birth rate)

d ... koeficient úmrtnosti (death rate)

Modely dynamiky jedné populace

Jediná stavová proměnná — velikost populace (počet jedinců, populační hustota, biomasa, ...).

Označení: $x = x(t)$

Vývoj v čase:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + (b - d)x(t)\Delta t$$

Rození i umírání považujeme za Poissonův proces — množství narozených nebo zemřelých jedinců za krátký časový interval délky Δt je úměrný této délce (trvání) a aktuální velikosti populace.

b ... koeficient porodnosti (birth rate)

d ... koeficient úmrtnosti (death rate)

Modely dynamiky jedné populace

Jediná stavová proměnná — velikost populace (počet jedinců, populační hustota, biomasa, ...).

Označení: $x = x(t)$

Vývoj v čase:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + (b - d)x(t)\Delta t$$

Rození i umírání považujeme za Poissonův proces — množství narozených nebo zemřelých jedinců za krátký časový interval délky Δt je úměrný této délce (trvání) a aktuální velikosti populace.

b ... koeficient porodnosti (birth rate)

d ... koeficient úmrtnosti (death rate)

$g = b - d$... růstový koeficient (growth rate)

Modely dynamiky jedné populace

Jediná stavová proměnná — velikost populace (počet jedinců, populační hustota, biomasa, ...).

Označení: $x = x(t)$

Vývoj v čase:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + gx(t)\Delta t$$

Rození i umírání považujeme za Poissonův proces — množství narozených nebo zemřelých jedinců za krátký časový interval délky Δt je úměrný této délce (trvání) a aktuální velikosti populace.

b ... koeficient porodnosti (birth rate)

d ... koeficient úmrtnosti (death rate)

$g = b - d$... růstový koeficient (growth rate)

Modely dynamiky jedné populace

Jediná stavová proměnná — velikost populace (počet jedinců, populační hustota, biomasa, ...).

Označení: $x = x(t)$

Vývoj v čase:

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = gx(t)$$

Rození i umírání považujeme za Poissonův proces — množství narozených nebo zemřelých jedinců za krátký časový interval délky Δt je úměrný této délce (trvání) a aktuální velikosti populace.

b ... koeficient porodnosti (birth rate)

d ... koeficient úmrtnosti (death rate)

$g = b - d$... růstový koeficient (growth rate)

Modely dynamiky jedné populace

Model:

$$\dot{x} = gx,$$

Modely dynamiky jedné populace

Model:

$$\dot{x} = gx, \quad x(0) = x_0$$

Modely dynamiky jedné populace

Model:

$$\dot{x} = gx, \quad x(0) = x_0$$

Řešení počáteční úlohy:

$$x(t) = x_0 e^{gt}$$

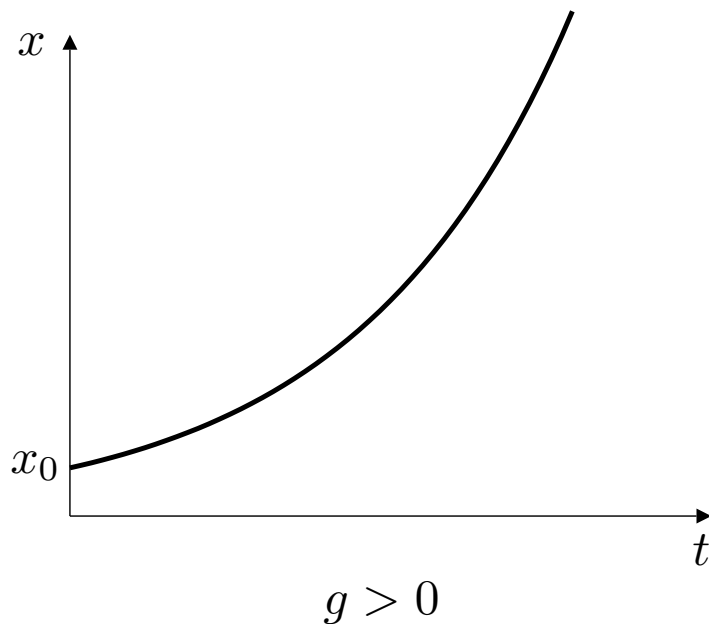
Modely dynamiky jedné populace

Model:

$$\dot{x} = gx, \quad x(0) = x_0$$

Řešení počáteční úlohy:

$$x(t) = x_0 e^{gt}$$



Populace buď neomezeně roste

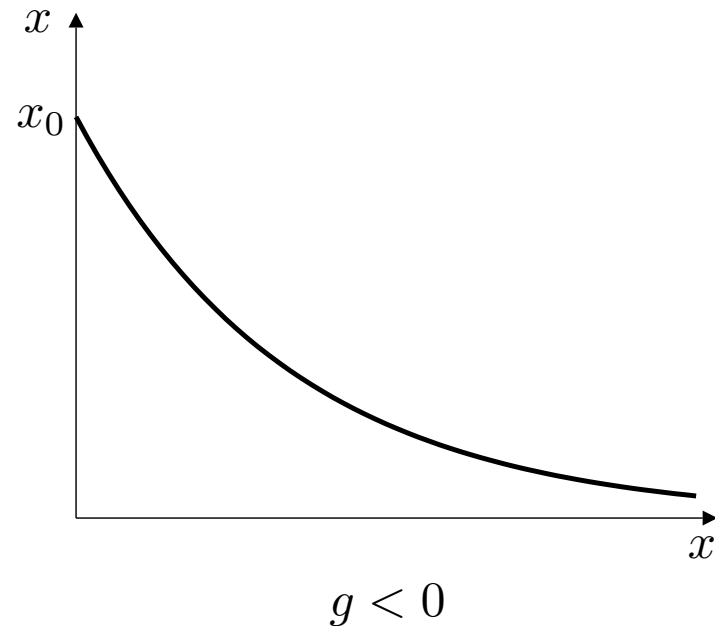
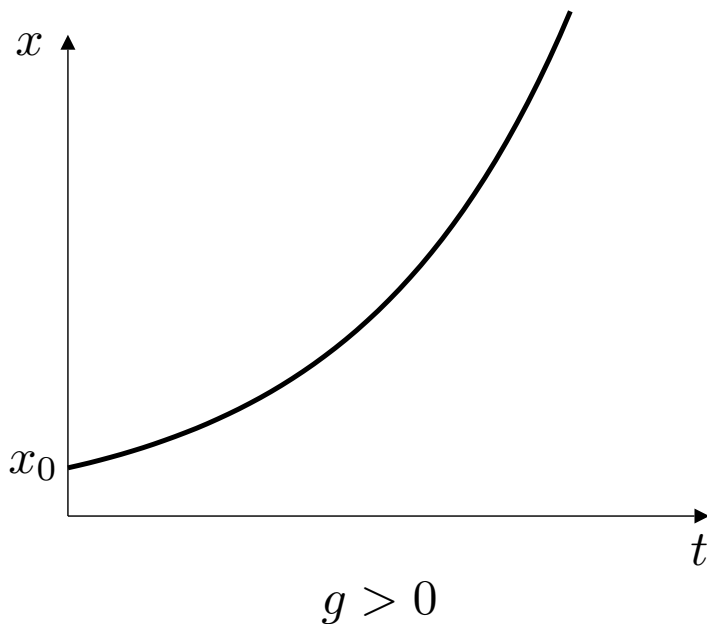
Modely dynamiky jedné populace

Model:

$$\dot{x} = gx, \quad x(0) = x_0$$

Řešení počáteční úlohy:

$$x(t) = x_0 e^{gt}$$



Populace buď neomezeně roste nebo vymírá

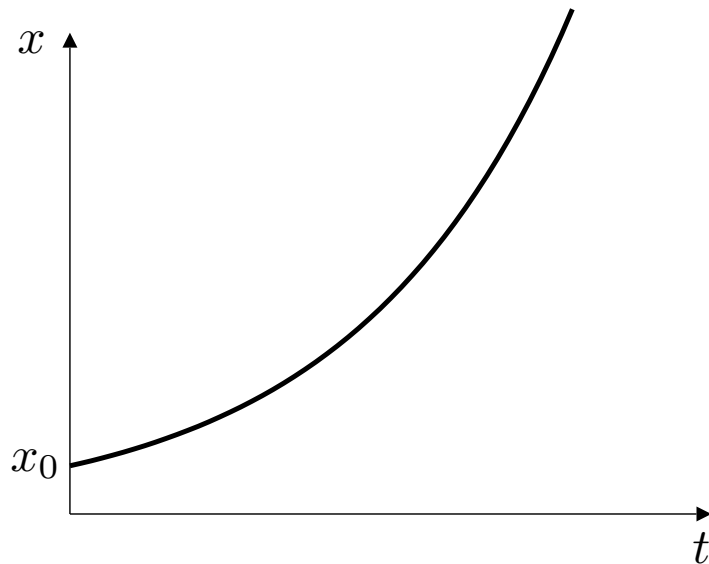
Modely dynamiky jedné populace

Malthusův model:

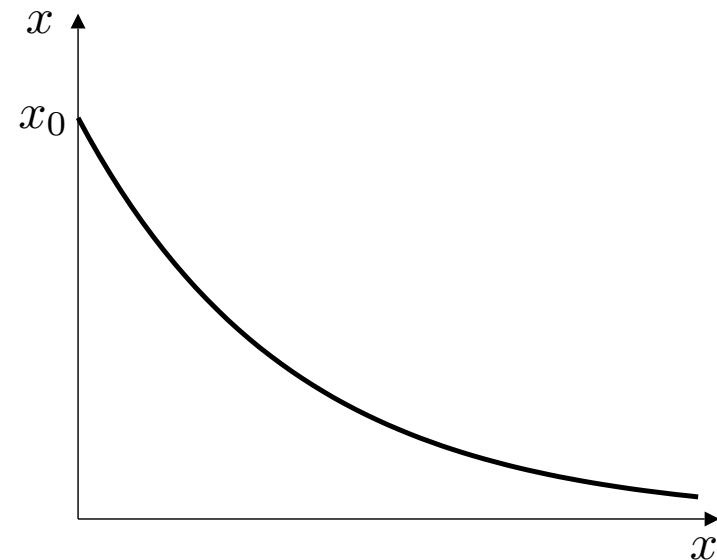
$$\dot{x} = gx, \quad x(0) = x_0$$

Řešení počáteční úlohy:

$$x(t) = x_0 e^{gt}$$



$g > 0$



$g < 0$

Populace buď neomezeně roste nebo vymírá

Modely dynamiky jedné populace

Růstový koeficient závisí na velikosti populace, $g = g(x)$

Modely dynamiky jedné populace

Růstový koeficient závisí na velikosti populace, $g = g(x)$, $g = b - d$

Modely dynamiky jedné populace

Růstový koeficient závisí na velikosti populace, $g = g(x)$, $g = b - d$

Předpoklady:

Modely dynamiky jedné populace

Růstový koeficient závisí na velikosti populace, $g = g(x)$, $g = b - d$

Předpoklady:

- ve velké populaci je velká úmrtnost,

Modely dynamiky jedné populace

Růstový koeficient závisí na velikosti populace, $g = g(x)$, $g = b - d$

Předpoklady:

- ve velké populaci je velká úmrtnost,
- ve velké populaci je malá porodnost,

Modely dynamiky jedné populace

Růstový koeficient závisí na velikosti populace, $g = g(x)$, $g = b - d$

Předpoklady:

- ve velké populaci je velká úmrtnost,
- ve velké populaci je malá porodnost,

tj. růstový koeficient je klesající funkcí velikosti populace.

Modely dynamiky jedné populace

Růstový koeficient závisí na velikosti populace, $g = g(x)$, $g = b - d$

Předpoklady:

- ve velké populaci je velká úmrtnost,
- ve velké populaci je malá porodnost,

tj. růstový koeficient je klesající funkcí velikosti populace.

Nejjednodušší volba — lineární funkce $g(x) = r \left(1 - \frac{x}{K}\right)$

Modely dynamiky jedné populace

Růstový koeficient závisí na velikosti populace, $g = g(x)$, $g = b - d$

Předpoklady:

- ve velké populaci je velká úmrtnost,
- ve velké populaci je malá porodnost,

tj. růstový koeficient je klesající funkcí velikosti populace.

Nejjednodušší volba — lineární funkce $g(x) = r \left(1 - \frac{x}{K}\right)$

r ... vnitřní koeficient růstu

K ... kapacita (úživnost) prostředí

Modely dynamiky jedné populace

Verhulstova-Pearlova (logistická) rovnice:

$$\dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad x(0) = x_0$$

Modely dynamiky jedné populace

Verhulstova-Pearlova (logistická) rovnice:

$$\dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad x(0) = x_0$$

Řešení:

$$x(t) = x_0 \frac{K}{x_0 + (K - x_0)e^{-rt}}$$

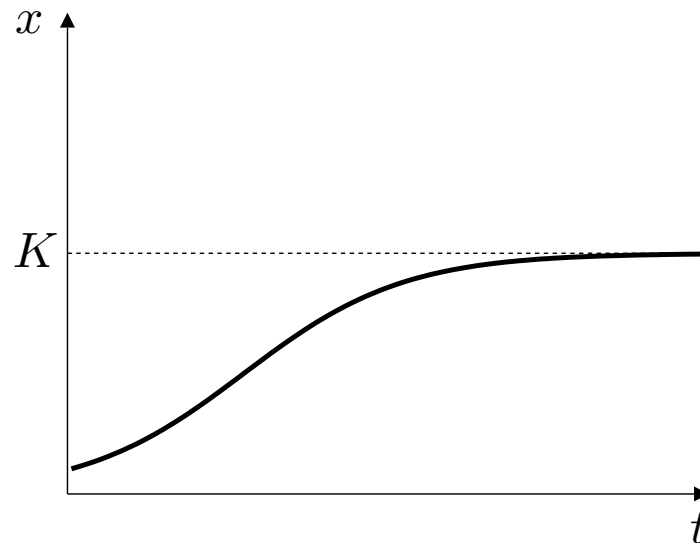
Modely dynamiky jedné populace

Verhulstova-Pearlova (logistická) rovnice:

$$\dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad x(0) = x_0$$

Řešení:

$$x(t) = x_0 \frac{K}{x_0 + (K - x_0)e^{-rt}}$$



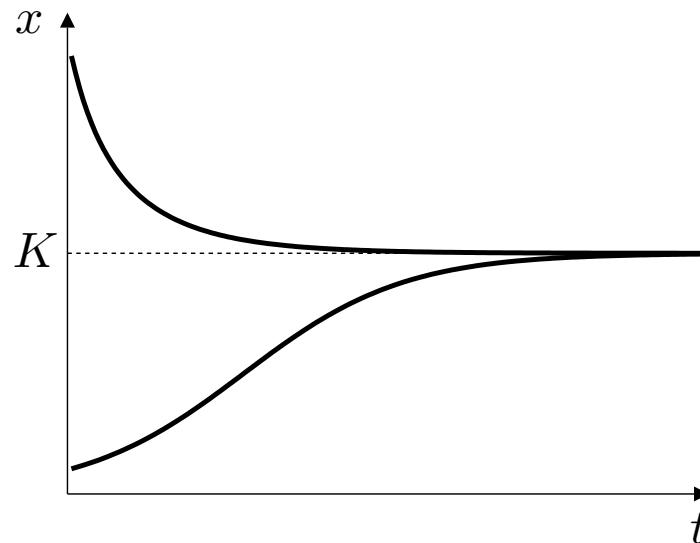
Modely dynamiky jedné populace

Verhulstova-Pearlova (logistická) rovnice:

$$\dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad x(0) = x_0$$

Řešení:

$$x(t) = x_0 \frac{K}{x_0 + (K - x_0)e^{-rt}}$$



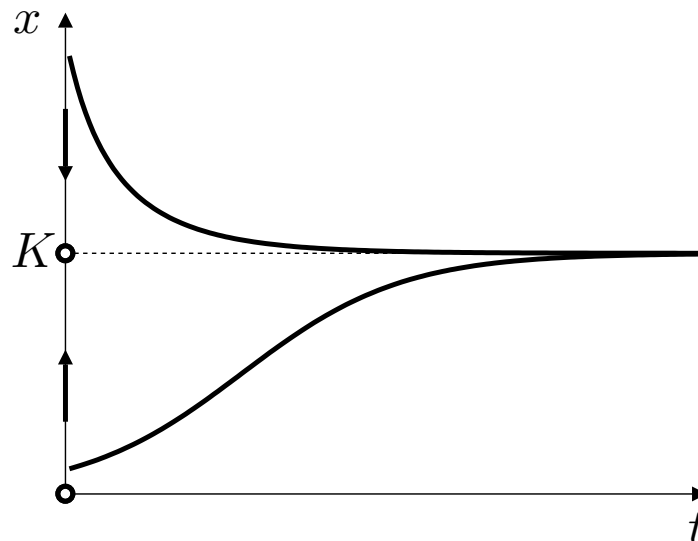
Modely dynamiky jedné populace

Verhulstova-Pearlova (logistická) rovnice:

$$\dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad x(0) = x_0$$

Řešení:

$$x(t) = x_0 \frac{K}{x_0 + (K - x_0)e^{-rt}}$$



Modely dravec-kořist (Gause)

Modely dravec-kořist (Gause)

$x = x(t)$... velikost populace kořisti

$y = y(t)$... velikost populace predátora

Modely dravec-kořist (Gause)

$x = x(t)$... velikost populace kořisti (hostitele)

$y = y(t)$... velikost populace predátora (parazita)

Modely dravec-kořist (Gause)

$x = x(t)$... velikost populace kořisti (hostitele, rostliny)

$y = y(t)$... velikost populace predátora (parazita, herbivora)

Modely dravec-kořist (Gause)

$x = x(t)$... velikost populace kořisti (hostitele, rostliny)

$y = y(t)$... velikost populace predátora (parazita, herbivora)

$$\dot{x} = x f(x)$$

Modely dravec-kořist (Gause)

$x = x(t)$... velikost populace kořisti (hostitele, rostliny)

$y = y(t)$... velikost populace predátora (parazita, herbivora)

$$\dot{x} = x f(x)$$

- $(x - K) f(x) \leq 0$

Modely dravec-kořist (Gause)

$x = x(t)$... velikost populace kořisti (hostitele, rostliny)

$y = y(t)$... velikost populace predátora (parazita, herbivora)

$$\dot{x} = x f(x)$$

$$\dot{y} = y g(y)$$

- $(x - K) f(x) \leq 0$

Modely dravec-kořist (Gause)

$x = x(t)$... velikost populace kořisti (hostitele, rostliny)

$y = y(t)$... velikost populace predátora (parazita, herbivora)

$$\dot{x} = x f(x)$$

$$\dot{y} = y g(y)$$

- $(x - K) f(x) \leq 0$
- $g(y) < 0$ (specializovaný predátor)

Modely dravec-kořist (Gause)

$x = x(t)$... velikost populace kořisti (hostitele, rostliny)

$y = y(t)$... velikost populace predátora (parazita, herbivora)

$$\dot{x} = x f(x) - V y$$

$$\dot{y} = y g(y)$$

- $(x - K) f(x) \leq 0$
- $g(y) < 0$ (specializovaný predátor)
- V — množství kořisti, které zlikviduje jeden predátor za jednotku času

Modely dravec-kořist (Gause)

$x = x(t)$... velikost populace kořisti (hostitele, rostliny)

$y = y(t)$... velikost populace predátora (parazita, herbivora)

$$\dot{x} = x f(x) - V y$$

$$\dot{y} = y g(y) + \kappa V y$$

- $(x - K) f(x) \leq 0$
- $g(y) < 0$ (specializovaný predátor)
- V — množství kořisti, které zlikviduje jeden predátor za jednotku času
- κ — efektivita, s jakou predátor přemění zlikvidovanou kořist na svoji biomasu

Modely dravec-kořist (Gause)

$x = x(t)$... velikost populace kořisti (hostitele, rostliny)

$y = y(t)$... velikost populace predátora (parazita, herbivora)

$$\dot{x} = x f(x) - V y$$

$$\dot{y} = y g(y) + \kappa V y$$

- $g(y) < 0$ (specializovaný predátor)
- V — množství kořisti, které zlikviduje jeden predátor za jednotku času
- κ — efektivita, s jakou predátor přemění zlikvidovanou kořist na svoji biomasu
- V může záviset na velikosti populace kořisti i predátora,

Modely dravec-kořist (Gause)

$x = x(t)$... velikost populace kořisti (hostitele, rostliny)

$y = y(t)$... velikost populace predátora (parazita, herbivora)

$$\dot{x} = x f(x) - V(x, y)y$$

$$\dot{y} = yg(y) + \kappa V(x, y)y$$

- V — množství kořisti, které zlikviduje jeden predátor za jednotku času
- κ — efektivita, s jakou predátor přemění zlikvidovanou kořist na svoji biomasu
- V může záviset na velikosti populace kořisti i predátora, $V = V(x, y)$... trofická funkce

Modely dravec-kořist (Gause)

$x = x(t)$... velikost populace kořisti (hostitele, rostliny)

$y = y(t)$... velikost populace predátora (parazita, herbivora)

$$\dot{x} = x f(x) - V(x)y$$

$$\dot{y} = yg(y) + \kappa V(x)y$$

- V — množství kořisti, které zlikviduje jeden predátor za jednotku času
- κ — efektivita, s jakou predátor přemění zlikvidovanou kořist na svoji biomasu
- necht' V závisí pouze na velikosti populace kořisti, $V = V(x)$... trofická funkce

Modely dravec-kořist (Gause)

Vlastnosti trofické funkce:

Modely dravec-kořist (Gause)

Vlastnosti trofické funkce:

- $V(x) \geq 0$,

Modely dravec-kořist (Gause)

Vlastnosti trofické funkce:

- $V(x) \geq 0$,
- V je neklesající,

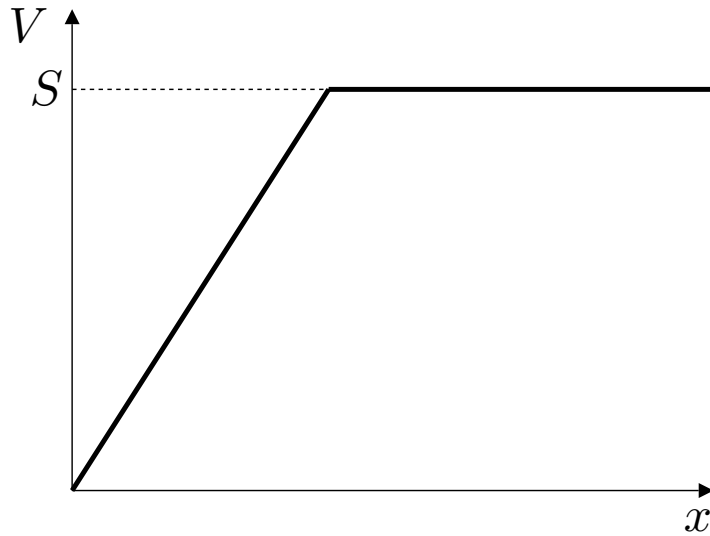
Modely dravec-kořist (Gause)

Vlastnosti trofické funkce:

- $V(x) \geq 0$,
- V je neklesající,
- $\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = S > 0$... hladina nasycení.

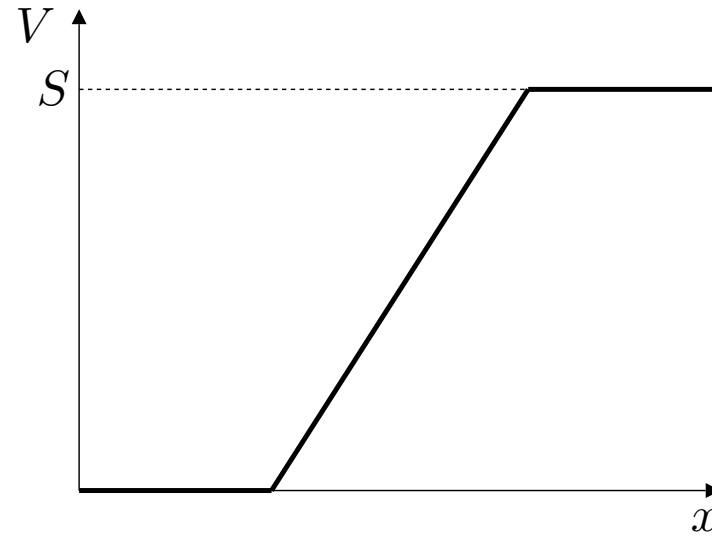
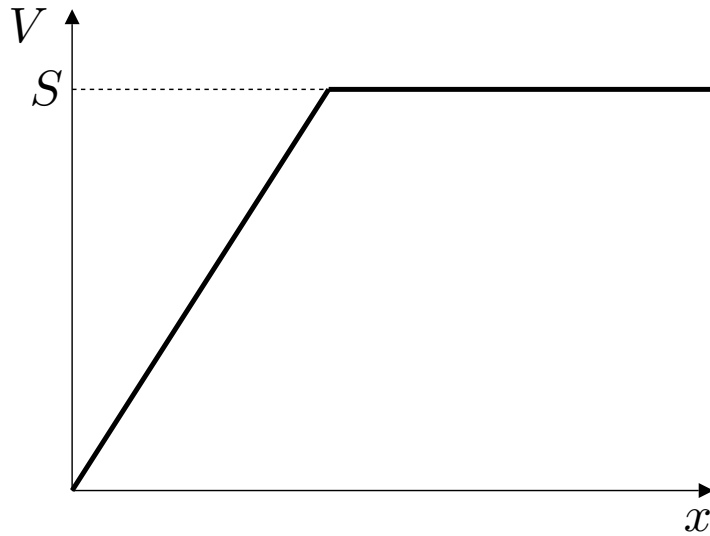
Modely dravec-kořist (Gause)

Vlastnosti trofické funkce:



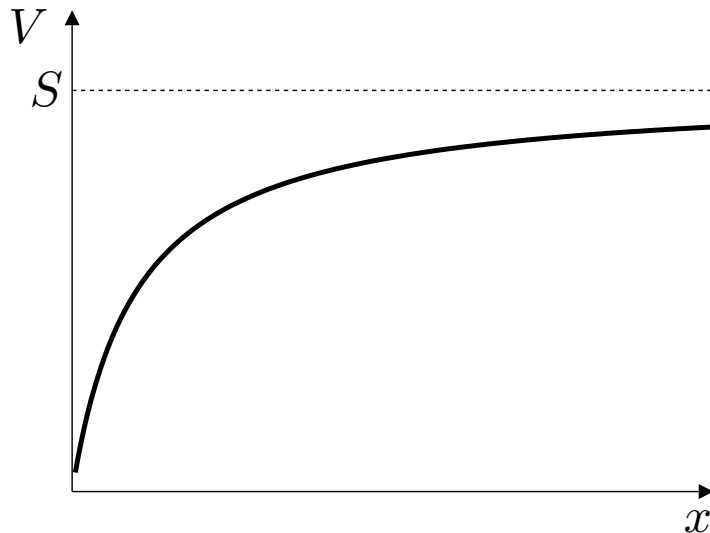
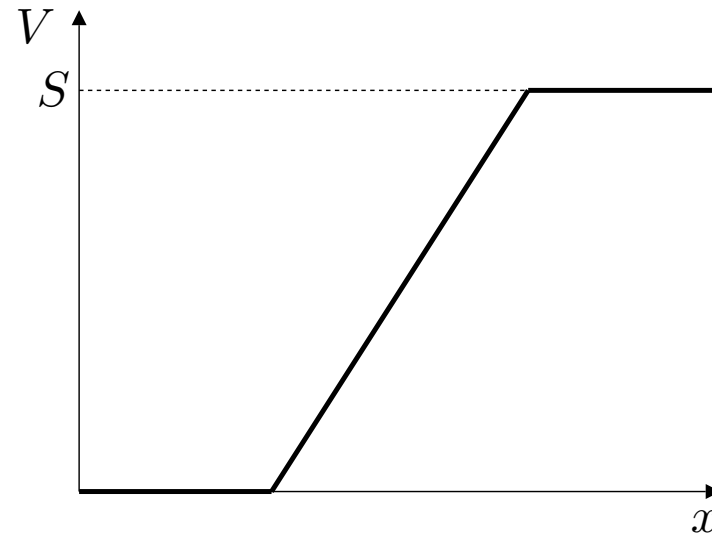
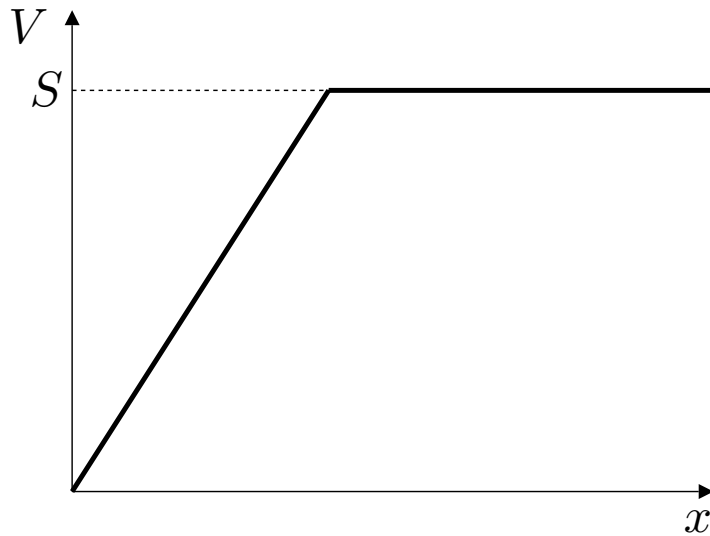
Modely dravec-kořist (Gause)

Vlastnosti trofické funkce:



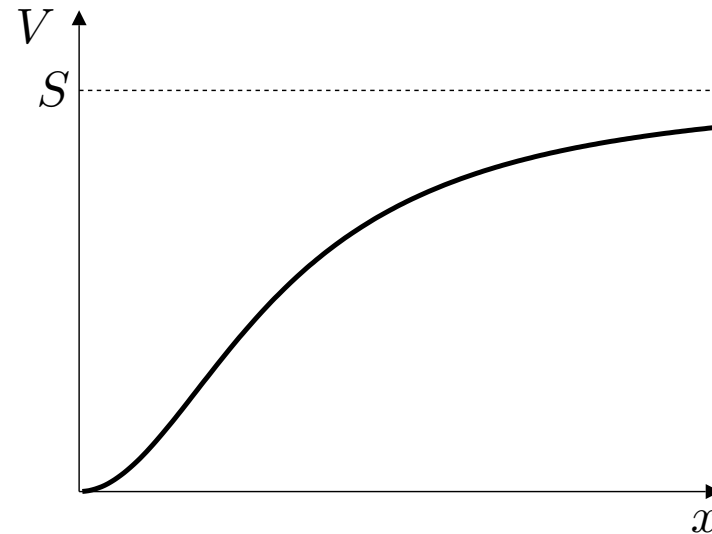
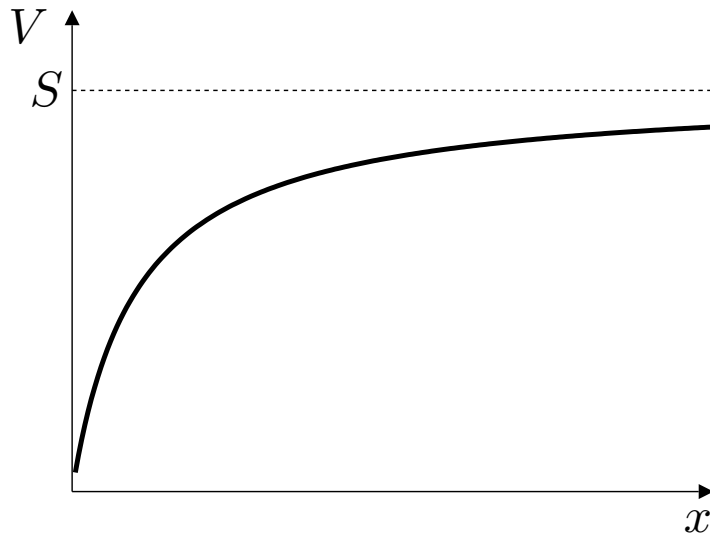
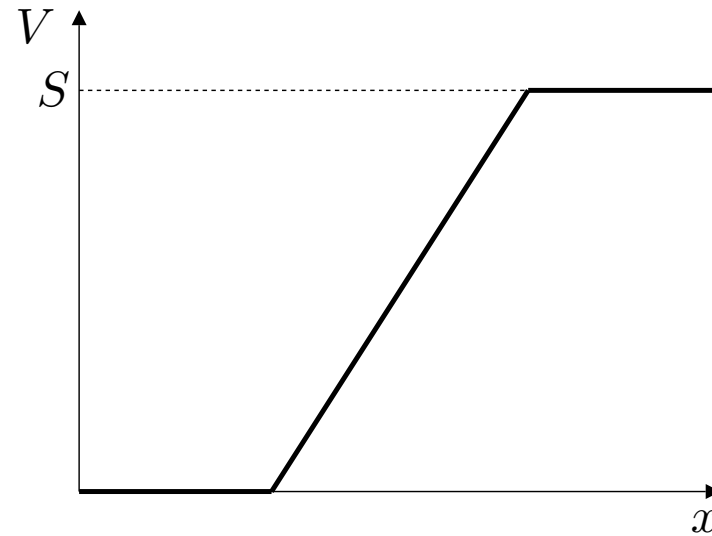
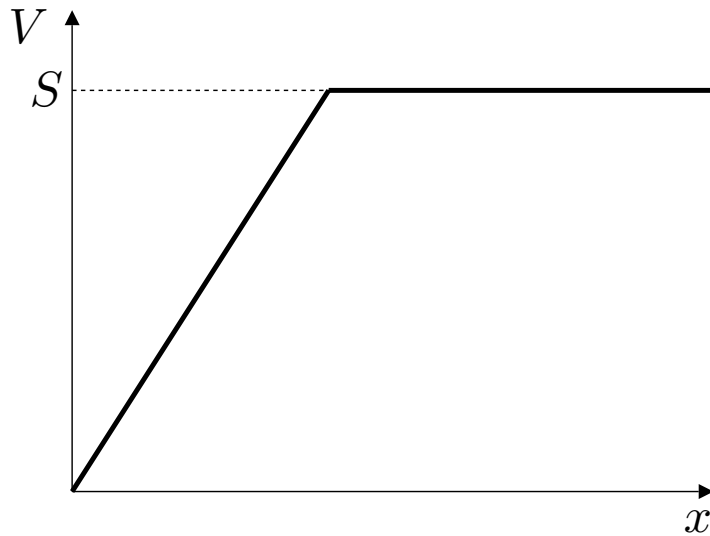
Modely dravec-kořist (Gause)

Vlastnosti trofické funkce:



Modely dravec-kořist (Gause)

Vlastnosti trofické funkce:



Modely dravec-kořist (Gause)

$$\dot{x} = x f(x) - V(x)y$$

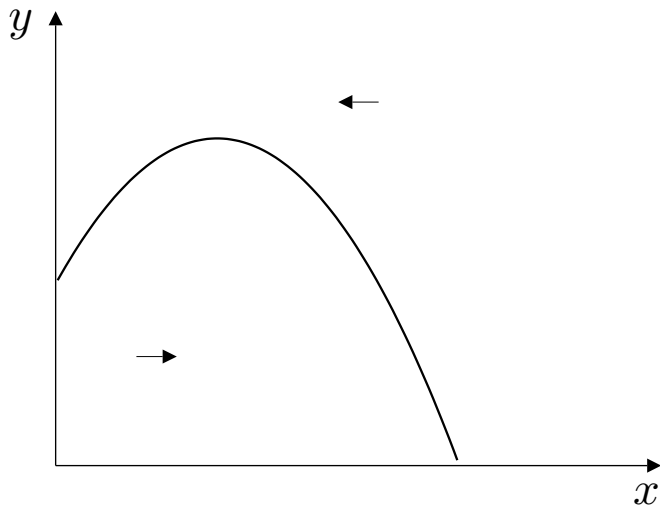
$$\dot{y} = -\gamma y + \kappa V(x)y$$

Modely dravec-kořist (Gause)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x f(x) - V(x)y &= x \left(f(x) - \frac{V(x)}{x} y \right) \\ \dot{y} &= -\gamma y + \kappa V(x)y &= y(-\gamma + \kappa V(x))\end{aligned}$$

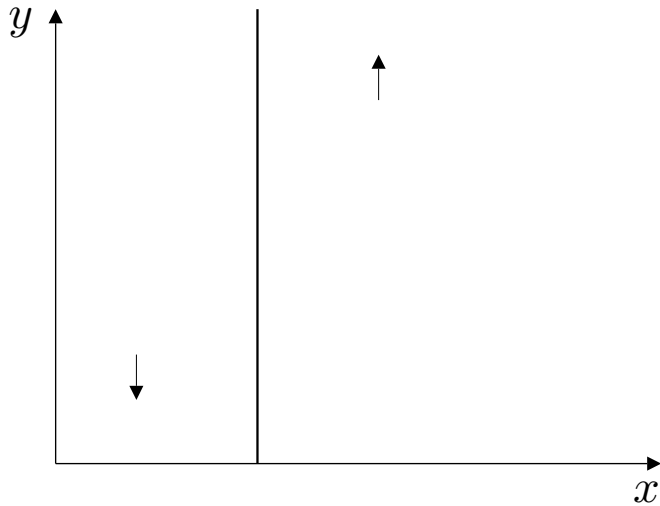
Modely dravec-kořist (Gause)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x f(x) - V(x)y = x \left(f(x) - \frac{V(x)}{x} y \right) \\ \dot{y} &= -\gamma y + \kappa V(x)y = y(-\gamma + \kappa V(x))\end{aligned}$$



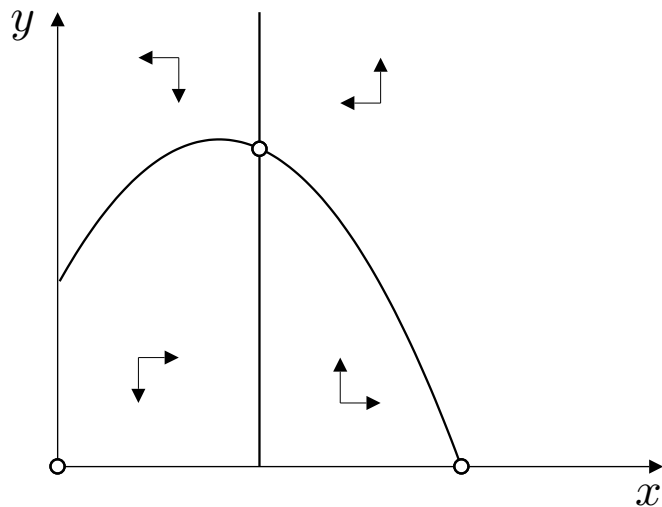
Modely dravec-kořist (Gause)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x f(x) - V(x)y = x \left(f(x) - \frac{V(x)}{x} y \right) \\ \dot{y} &= -\gamma y + \kappa V(x)y = y(-\gamma + \kappa V(x))\end{aligned}$$

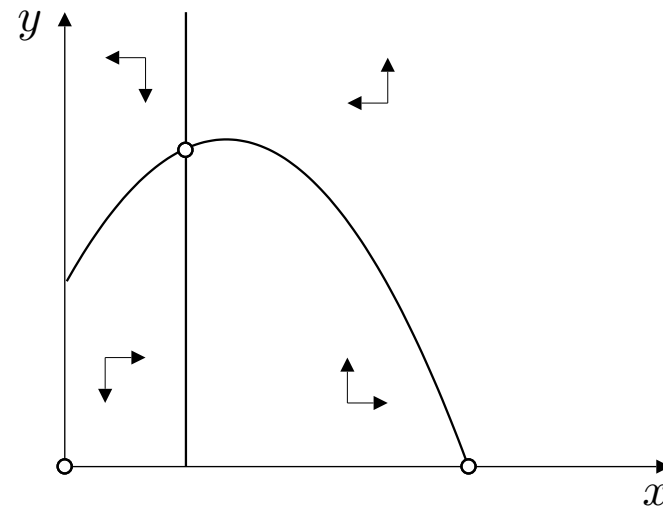


Modely dravec-kořist (Gause)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x f(x) - V(x)y = x \left(f(x) - \frac{V(x)}{x} y \right) \\ \dot{y} &= -\gamma y + \kappa V(x)y = y \left(-\gamma + \kappa V(x) \right)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1 - x) - \frac{xy}{1 + 5x} \\ \dot{y} &= -0.07y + 0.5 \frac{xy}{1 + 5x}\end{aligned}$$

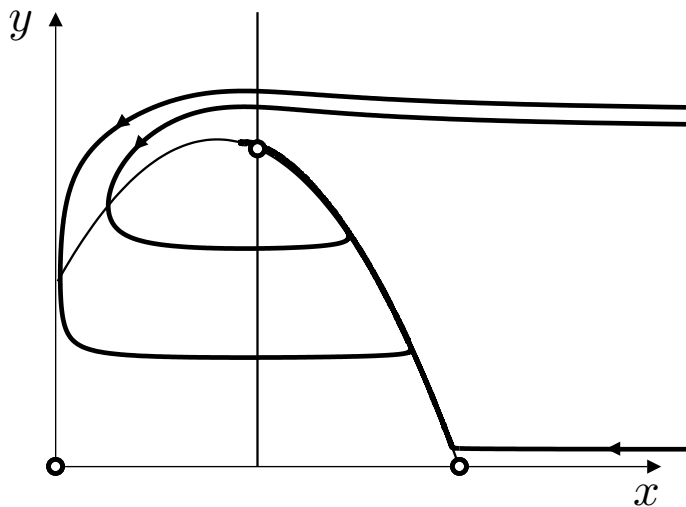


$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1 - x) - \frac{xy}{1 + 5x} \\ \dot{y} &= -0.06y + 0.5 \frac{xy}{1 + 5x}\end{aligned}$$

Modely dravec-kořist (Gause)

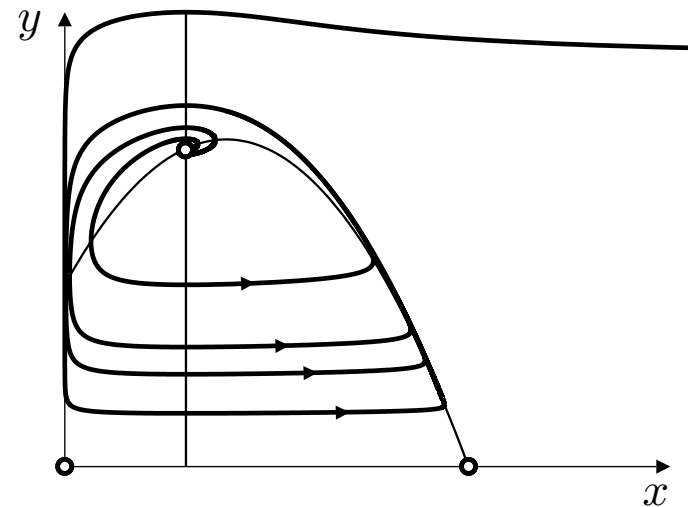
$$\dot{x} = x f(x) - V(x)y = x \left(f(x) - \frac{V(x)}{x} y \right)$$

$$\dot{y} = -\gamma y + \kappa V(x)y = y \left(-\gamma + \kappa V(x) \right)$$



$$\dot{x} = x(1 - x) - \frac{xy}{1 + 5x}$$

$$\dot{y} = -0.07y + 0.5 \frac{xy}{1 + 5x}$$



$$\dot{x} = x(1 - x) - \frac{xy}{1 + 5x}$$

$$\dot{y} = -0.06y + 0.5 \frac{xy}{1 + 5x}$$

Modely dravec-kořist (Leslie)

Modely dravec-kořist (Leslie)

Růst populace: $\dot{y} = yg(y)$

Modely dravec-kořist (Leslie)

Růst populace: $\dot{y} = yg(y)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = K$$

Modely dravec-kořist (Leslie)

Růst populace: $\dot{y} = yg(y)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = K$$

K označuje kapacitu (úživnost) prostředí

Modely dravec-kořist (Leslie)

Růst populace: $\dot{y} = yg(y) = yg(y; K)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = K$$

K označuje kapacitu (úživnost) prostředí

Modely dravec-kořist (Leslie)

Růst populace: $\dot{y} = yg(y) = yg(y; K)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = K$$

K označuje kapacitu (úživnost) prostředí

Model Leslieho typu:

Modely dravec-kořist (Leslie)

Růst populace: $\dot{y} = yg(y) = yg(y; K)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = K$$

K označuje kapacitu (úživnost) prostředí

Model Leslieho typu:

$$\dot{x} = x f(x) - V(x)y$$

Modely dravec-kořist (Leslie)

Růst populace: $\dot{y} = yg(y) = yg(y; K)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = K$$

K označuje kapacitu (úživnost) prostředí

Model Leslieho typu:

$$\dot{x} = xf(x) - V(x)y$$

$$\dot{y} = yg(y; K(x))$$

Modely dravec-kořist (Leslie)

Růst populace: $\dot{y} = yg(y) = yg(y; K)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = K$$

K označuje kapacitu (úživnost) prostředí

Model Leslieho typu:

$$\dot{x} = xf(x) - V(x)y$$

$$\dot{y} = yg(y; K(x))$$

K je neklesající funkce, $\lim_{x \rightarrow \infty} K(x) > 0$.

Teorie biologické ochrany plodin

Teorie biologické ochrany plodin

Organismus „škůdce“ ničí zemědělskou produkci

Ochrana: přirozený nepřítel

Teorie biologické ochrany plodin

- Kapacitu prostředí pro „škůdce“ považujeme za neomezenou

Teorie biologické ochrany plodin

- Kapacitu prostředí pro „škůdce“ považujeme za neomezenou
- Přírodním nepřítelem je specializovaný predátor, parazit, parazitoid ap.

Teorie biologické ochrany plodin

- Kapacitu prostředí pro „škůdce“ považujeme za neomezenou
- Přírodním nepřítelem je specializovaný predátor, parazit, parazitoid ap.

Model Gauseho typu:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx - V(x)y \\ \dot{y} &= -dy + \kappa V(x)y\end{aligned}$$

Teorie biologické ochrany plodin

- Kapacitu prostředí pro „škůdce“ považujeme za neomezenou
- Přírodním nepřítelem je specializovaný predátor, parazit, parazitoid ap.

Model Gauseho typu:

$$\dot{x} = rx - V(x)y$$

$$\dot{y} = -dy + \kappa V(x)y$$

Předpoklad: $\frac{d}{\kappa} < S = \lim_{x \rightarrow \infty} V(x)$

Teorie biologické ochrany plodin

- Kapacitu prostředí pro „škůdce“ považujeme za neomezenou
- Přírodním nepřítelem je specializovaný predátor, parazit, parazitoid ap.

Model Gauseho typu:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx - V(x)y \\ \dot{y} &= -dy + \kappa V(x)y\end{aligned}$$

Předpoklad: $\frac{d}{\kappa} < S = \lim_{x \rightarrow \infty} V(x)$

Existuje stacionární řešení (\hat{x}, \hat{y}) uvnitř prvního kvadrantu,

$$\hat{x} = V^{-1}\left(\frac{d}{\kappa}\right), \quad \hat{y} = \frac{r\kappa}{d}\hat{x}$$

Teorie biologické ochrany plodin

Předpoklad: \hat{x} je menší, než hladina škodlivosti

Teorie biologické ochrany plodin

Předpoklad: \hat{x} je menší, než hladina škodlivosti

Otázky:

Teorie biologické ochrany plodin

Předpoklad: \hat{x} je menší, než hladina škodlivosti

Otázky:

- Je stacionární řešení globálně asymptoticky stabilní?

Teorie biologické ochrany plodin

Předpoklad: \hat{x} je menší, než hladina škodlivosti

Otázky:

- Je stacionární řešení globálně asymptoticky stabilní?
- Je stabilní alespoň lokálně?

Teorie biologické ochrany plodin

Předpoklad: \hat{x} je menší, než hladina škodlivosti

Otázky:

- Je stacionární řešení globálně asymptoticky stabilní?
- Je stabilní alespoň lokálně?
- Existuje řešení takové, že jeho první složka je ohraničená a menší než hladina škodlivosti?

Teorie biologické ochrany plodin

Analýza systému $\dot{x} = rx - V(x)y, \quad \dot{y} = -dy + \kappa V(x)y$

Teorie biologické ochrany plodin

Analýza systému $\dot{x} = rx - V(x)y, \quad \dot{y} = -dy + \kappa V(x)y$

Lokální:

Teorie biologické ochrany plodin

Analýza systému $\dot{x} = rx - V(x)y, \quad \dot{y} = -dy + \kappa V(x)y$

Lokální:

$$\text{Variační matice } J(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{pmatrix} r \left(1 - \frac{\hat{x}V'(\hat{x})}{V(\hat{x})} \right) & -V(\hat{x}) \\ \kappa\hat{y}V'(\hat{x}) & 0 \end{pmatrix}$$

Teorie biologické ochrany plodin

Analýza systému $\dot{x} = rx - V(x)y, \quad \dot{y} = -dy + \kappa V(x)y$

Lokální:

$$\text{Variační matice } J(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{pmatrix} r \left(1 - \frac{\hat{x}V'(\hat{x})}{V(\hat{x})} \right) & -V(\hat{x}) \\ \kappa\hat{y}V'(\hat{x}) & 0 \end{pmatrix}$$

- $V(\hat{x}) < \hat{x}V'(\hat{x}) \Rightarrow (\hat{x}, \hat{y})$ je lokálně asymptoticky stabilní

Teorie biologické ochrany plodin

Analýza systému $\dot{x} = rx - V(x)y, \quad \dot{y} = -dy + \kappa V(x)y$

Lokální:

$$\text{Variační matice } J(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{pmatrix} r \left(1 - \frac{\hat{x}V'(\hat{x})}{V(\hat{x})} \right) & -V(\hat{x}) \\ \kappa\hat{y}V'(\hat{x}) & 0 \end{pmatrix}$$

- $V(\hat{x}) < \hat{x}V'(\hat{x}) \Rightarrow (\hat{x}, \hat{y})$ je lokálně asymptoticky stabilní
- $V(\hat{x}) > \hat{x}V'(\hat{x}) \Rightarrow (\hat{x}, \hat{y})$ je nestabilní

Teorie biologické ochrany plodin

Analýza systému $\dot{x} = rx - V(x)y, \quad \dot{y} = -dy + \kappa V(x)y$

Lokální:

$$\text{Variační matice } J(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{pmatrix} r \left(1 - \frac{\hat{x}V'(\hat{x})}{V(\hat{x})} \right) & -V(\hat{x}) \\ \kappa\hat{y}V'(\hat{x}) & 0 \end{pmatrix}$$

- $V(\hat{x}) < \hat{x}V'(\hat{x}) \Rightarrow (\hat{x}, \hat{y})$ je lokálně asymptoticky stabilní
- $V(\hat{x}) > \hat{x}V'(\hat{x}) \Rightarrow (\hat{x}, \hat{y})$ je nestabilní
- $(V(\hat{x}) - \hat{x}V'(\hat{x}))^2 < \frac{4\kappa}{r}\hat{x}V'(\hat{x}) \Rightarrow (\hat{x}, \hat{y})$ je ohnisko

Teorie biologické ochrany plodin

Analýza systému $\dot{x} = rx - V(x)y, \quad \dot{y} = -dy + \kappa V(x)y$

Lokální:

$$\text{Variační matice } J(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{pmatrix} r \left(1 - \frac{\hat{x}V'(\hat{x})}{V(\hat{x})} \right) & -V(\hat{x}) \\ \kappa\hat{y}V'(\hat{x}) & 0 \end{pmatrix}$$

- $V(\hat{x}) < \hat{x}V'(\hat{x}) \Rightarrow (\hat{x}, \hat{y})$ je lokálně asymptoticky stabilní
- $V(\hat{x}) > \hat{x}V'(\hat{x}) \Rightarrow (\hat{x}, \hat{y})$ je nestabilní
- $(V(\hat{x}) - \hat{x}V'(\hat{x}))^2 < \frac{4\kappa}{r}\hat{x}V'(\hat{x}) \Rightarrow (\hat{x}, \hat{y})$ je ohnisko
- $(V(\hat{x}) - \hat{x}V'(\hat{x}))^2 > \frac{4\kappa}{r}\hat{x}V'(\hat{x}) \Rightarrow (\hat{x}, \hat{y})$ je uzel

Teorie biologické ochrany plodin

Analýza systému $\dot{x} = rx - V(x)y, \quad \dot{y} = -dy + \kappa V(x)y$

Lokální:

Variační matice $J(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{pmatrix} r \left(1 - \frac{\hat{x}V'(\hat{x})}{V(\hat{x})} \right) & -V(\hat{x}) \\ \kappa\hat{y}V'(\hat{x}) & 0 \end{pmatrix}$

- $V(\hat{x}) < \hat{x}V'(\hat{x}) \Rightarrow (\hat{x}, \hat{y})$ je lokálně asymptoticky stabilní

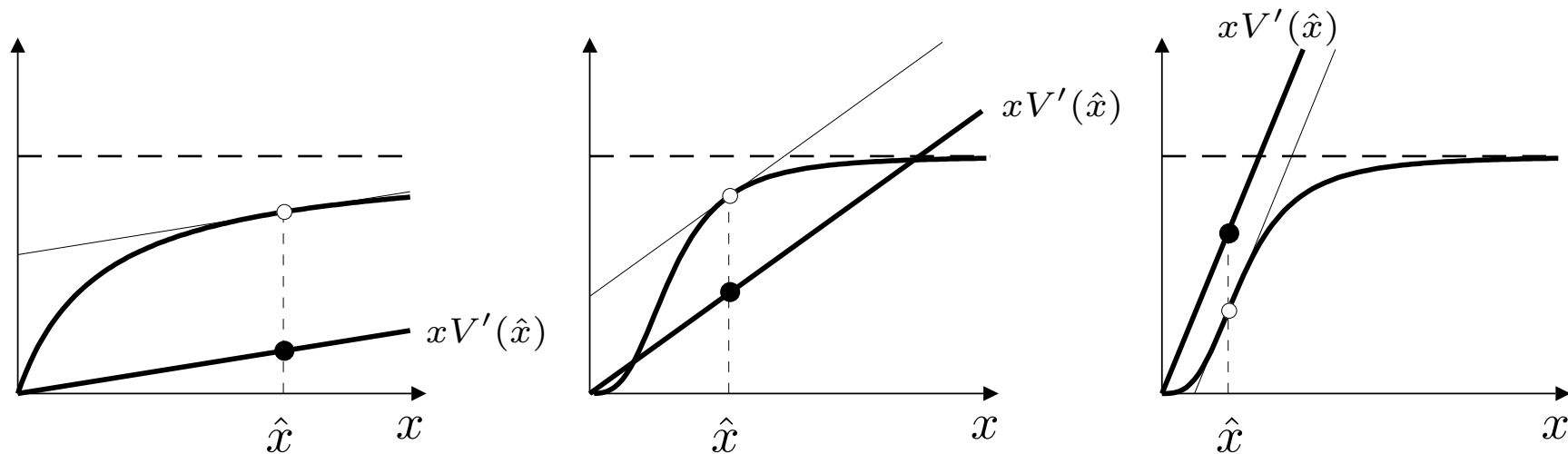
Teorie biologické ochrany plodin

Analýza systému $\dot{x} = rx - V(x)y, \quad \dot{y} = -dy + \kappa V(x)y$

Lokální:

$$\text{Variační matice } J(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{pmatrix} r \left(1 - \frac{\hat{x}V'(\hat{x})}{V(\hat{x})} \right) & -V(\hat{x}) \\ \kappa\hat{y}V'(\hat{x}) & 0 \end{pmatrix}$$

- $V(\hat{x}) < \hat{x}V'(\hat{x}) \Rightarrow (\hat{x}, \hat{y})$ je lokálně asymptoticky stabilní



Teorie biologické ochrany plodin

Analýza systému $\dot{x} = rx - V(x)y, \quad \dot{y} = -dy + \kappa V(x)y$

„Globální“:

Teorie biologické ochrany plodin

Analýza systému $\dot{x} = rx - V(x)y, \quad \dot{y} = -dy + \kappa V(x)y$

„Globální“:

Je-li $x \gg 0$, pak $V(x) \approx S$.

Teorie biologické ochrany plodin

Analýza systému $\dot{x} = rx - V(x)y, \quad \dot{y} = -dy + \kappa V(x)y$

„Globální“:

Je-li $x \gg 0$, pak $V(x) \approx S$.

Původní systém nahradíme systémem

$$\dot{x} = rx - Sy$$

$$\dot{y} = -dy + \kappa Sy$$

Teorie biologické ochrany plodin

Analýza systému $\dot{x} = rx - V(x)y, \quad \dot{y} = -dy + \kappa V(x)y$

„Globální“:

Je-li $x \gg 0$, pak $V(x) \approx S$.

Původní systém nahradíme systémem

$$\dot{x} = rx - Sy$$

$$\dot{y} = -dy + \kappa Sy = (\kappa S - d)y$$

Teorie biologické ochrany plodin

Analýza systému $\dot{x} = rx - V(x)y, \quad \dot{y} = -dy + \kappa V(x)y$

„Globální“:

Je-li $x \gg 0$, pak $V(x) \approx S$.

Původní systém nahradíme systémem

$$\dot{x} = rx - Sy$$

$$\dot{y} = -dy + \kappa Sy = (\kappa S - d)y$$

$$y = y_0 \exp \{(\kappa S - d)t\}$$

Teorie biologické ochrany plodin

Analýza systému $\dot{x} = rx - V(x)y, \quad \dot{y} = -dy + \kappa V(x)y$

„Globální“:

Je-li $x \gg 0$, pak $V(x) \approx S$.

Původní systém nahradíme systémem

$$\dot{x} = rx - Sy$$

$$\dot{y} = -dy + \kappa Sy = (\kappa S - d)y$$

$$y = y_0 \exp \{(\kappa S - d)t\}$$

$$x = x_0 \exp \{rt\} - \frac{Sy_0}{\kappa S - d - r} \exp \{(\kappa S - d)t\}$$

Teorie biologické ochrany plodin

Analýza systému $\dot{x} = rx - V(x)y, \quad \dot{y} = -dy + \kappa V(x)y$

„Globální“:

Je-li $x \gg 0$, pak $V(x) \approx S$.

Původní systém nahradíme systémem

$$\dot{x} = rx - Sy$$

$$\dot{y} = -dy + \kappa Sy = (\kappa S - d)y$$

$$y = y_0 \exp \{(\kappa S - d)t\}$$

$$x = x_0 \exp \{rt\} - \frac{Sy_0}{\kappa S - d - r} \exp \{(\kappa S - d)t\}$$

Je-li $\kappa S - d > r$, pak nemůže být $x(t) \gg 0$ pro všechna t .

Teorie biologické ochrany plodin

Analýza systému $\dot{x} = rx - V(x)y, \quad \dot{y} = -dy + \kappa V(x)y$

„Globální“:

Transformace

$$\xi = \operatorname{arccotg} x, \quad \eta = \operatorname{arccotg} y$$

převádí první kvadrant \mathbb{R}_+^2 na celou rovinu \mathbb{R}^2

Teorie biologické ochrany plodin

Analýza systému $\dot{x} = rx - V(x)y, \quad \dot{y} = -dy + \kappa V(x)y$

„Globální“:

Transformace

$$\xi = \operatorname{arccotg} x, \quad \eta = \operatorname{arccotg} y$$

převádí první kvadrant \mathbb{R}_+^2 na celou rovinu \mathbb{R}^2

Označení $v(\xi) = V(\cotg \xi)$

Teorie biologické ochrany plodin

Analýza systému $\dot{x} = rx - V(x)y, \quad \dot{y} = -dy + \kappa V(x)y$

„Globální“:

Transformace

$$\xi = \operatorname{arccotg} x, \quad \eta = \operatorname{arccotg} y$$

převádí první kvadrant \mathbb{R}_+^2 na celou rovinu \mathbb{R}^2

Označení $v(\xi) = V(\cotg \xi)$

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{v(\xi) \cotg \eta - r \cotg \xi}{1 + (\cotg \xi)^2} \\ \dot{\eta} &= \frac{(\kappa v(\xi) - d) \cotg \eta}{1 + (\cotg \xi)^2} \end{aligned}$$

Teorie biologické ochrany plodin

Analýza systému $\dot{x} = rx - V(x)y, \quad \dot{y} = -dy + \kappa V(x)y$

„Globální“:

Transformace

$$\xi = \operatorname{arccotg} x, \quad \eta = \operatorname{arccotg} y$$

převádí první kvadrant \mathbb{R}_+^2 na celou rovinu \mathbb{R}^2

Označení $v(\xi) = V(\cotg \xi)$

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{v(\xi) \cotg \eta - r \cotg \xi}{1 + (\cotg \xi)^2} \\ \dot{\eta} &= \frac{(\kappa v(\xi) - d) \cotg \eta}{1 + (\cotg \xi)^2} \end{aligned}$$

System má stacionární řešení $(0, 0)$

Teorie biologické ochrany plodin

Analýza systému $\dot{x} = rx - V(x)y, \quad \dot{y} = -dy + \kappa V(x)y$

„Globální“:

Transformace

$$\xi = \operatorname{arccotg} x, \quad \eta = \operatorname{arccotg} y$$

převádí první kvadrant \mathbb{R}_+^2 na celou rovinu \mathbb{R}^2

Označení $v(\xi) = V(\cotg \xi)$

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{v(\xi) \cotg \eta - r \cotg \xi}{1 + (\cotg \xi)^2} \\ \dot{\eta} &= \frac{(\kappa v(\xi) - d) \cotg \eta}{1 + (\cotg \xi)^2} \end{aligned}$$

System má stacionární řešení $(0, 0)$, je to stabilní uzel nebo sedlo.

Teorie biologické ochrany plodin

Vlastnosti řešení systému

$$\dot{x} = rx - V(x)y, \quad \dot{y} = -dy + \kappa V(x)y$$

Teorie biologické ochrany plodin

Vlastnosti řešení systému

$$\dot{x} = rx - V(x)y, \quad \dot{y} = -dy + \kappa V(x)y$$

- Vždy existuje řešení, že $\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$.

Teorie biologické ochrany plodin

Vlastnosti řešení systému

$$\dot{x} = rx - V(x)y, \quad \dot{y} = -dy + \kappa V(x)y$$

- Vždy existuje řešení, že $\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$.
- Je-li $r < \kappa S + d$, pak pro každé řešení platí $\liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) < \infty$.

Teorie biologické ochrany plodin

Vlastnosti řešení systému

$$\dot{x} = rx - V(x)y, \quad \dot{y} = -dy + \kappa V(x)y$$

- Vždy existuje řešení, že $\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$.
- Je-li $r < \kappa S + d$, pak pro každé řešení platí $\liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) < \infty$.
- Je-li $V(\hat{x}) < \hat{x}V'(\hat{x})$, je stacionární řešení (\hat{x}, \hat{y}) lokálně asymptoticky stabilní;
je-li $V(\hat{x}) > \hat{x}V'(\hat{x})$, je toto řešení nestabilní.

Teorie biologické ochrany plodin

Vlastnosti řešení systému

$$\dot{x} = rx - V(x)y, \quad \dot{y} = -dy + \kappa V(x)y$$

- Vždy existuje řešení, že $\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$.
- Je-li $r < \kappa S + d$, pak pro každé řešení platí $\liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) < \infty$.
- Je-li $V(\hat{x}) < \hat{x}V'(\hat{x})$, je stacionární řešení (\hat{x}, \hat{y}) lokálně asymptoticky stabilní;
je-li $V(\hat{x}) > \hat{x}V'(\hat{x})$, je toto řešení nestabilní.
- Je-li $(V(\hat{x}) - \hat{x}V'(\hat{x}))^2 > \frac{4\kappa}{r}\hat{x}V'(\hat{x})$, je stacionární řešení (\hat{x}, \hat{y}) uzlem;
je-li $(V(\hat{x}) - \hat{x}V'(\hat{x}))^2 < \frac{4\kappa}{r}\hat{x}V'(\hat{x})$, je toto řešení ohniskem.

Zobecnění

Systemy Kolmogorova typu

Zobecnění

Systemy Kolmogorova typu

modely společenstev n druhů organismů

$$\dot{x}_i = x_i f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Zobecnění

Systemy Kolmogorova typu

modely společenstev n druhů organismů

$$\dot{x}_i = x_i f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- $\frac{\partial f_i}{\partial x_i} < 0$ — vnitrodruhová konkurence

Zobecnění

Systemy Kolmogorova typu

modely společenstev n druhů organismů

$$\dot{x}_i = x_i f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- $\frac{\partial f_i}{\partial x_i} < 0$ — vnitrodruhová konkurence
- $\frac{\partial f_i}{\partial x_i} > 0$ — vnitrodruhová kooperace

Zobecnění

Systemy Kolmogorova typu

modely společenstev n druhů organismů

$$\dot{x}_i = x_i f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- $\frac{\partial f_i}{\partial x_i} < 0$ — vnitrodruhová konkurence
- $\frac{\partial f_i}{\partial x_i} > 0$ — vnitrodruhová kooperace
- $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} < 0, \frac{\partial f_j}{\partial x_i} < 0$ — mezidruhová konkurence, kompetice

Zobecnění

Systemy Kolmogorova typu

modely společenstev n druhů organismů

$$\dot{x}_i = x_i f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- $\frac{\partial f_i}{\partial x_i} < 0$ — vnitrodruhá konkurence
- $\frac{\partial f_i}{\partial x_i} > 0$ — vnitrodruhá kooperace
- $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} < 0, \frac{\partial f_j}{\partial x_i} < 0$ — mezidruhá konkurence, kompetice
- $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} > 0, \frac{\partial f_j}{\partial x_i} > 0$ — mutualismus, symbióza

Zobecnění

Systemy Kolmogorova typu

modely společenstev n druhů organismů

$$\dot{x}_i = x_i f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- $\frac{\partial f_i}{\partial x_i} < 0$ — vnitrodruhová konkurence
- $\frac{\partial f_i}{\partial x_i} > 0$ — vnitrodruhová kooperace
- $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} < 0, \frac{\partial f_j}{\partial x_i} < 0$ — mezidruhová konkurence, kompetice
- $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} > 0, \frac{\partial f_j}{\partial x_i} > 0$ — mutualismus, symbióza
- $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} < 0, \frac{\partial f_j}{\partial x_i} > 0$ — predace, parazitismus

Zobecnění

Lotkovy-Volterrovy systémy

Zobecnění

Lotkovy-Volterrový systémy

modely společenstev n druhů organismů

$$\dot{x}_i = x_i \left(r_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Zobecnění

Lotkovy-Volterrovy systémy

modely společenstev n druhů organismů

$$\dot{x}_i = x_i \left(r_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Znaménko konstanty a_{ii} určuje typ vnitrodruhových vztahů, znaménka konstant a_{ij} , a_{ji} určují typ mezidruhové interakce.

Zobecnění

Lotkovy-Volterrový systémy

modely společenstev n druhů organismů

$$\dot{x}_i = x_i \left(r_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Znaménko konstanty a_{ii} určuje typ vnitrodruhových vztahů, znaménka konstant a_{ij} , a_{ji} určují typ mezidruhové interakce.

Je-li $r_i > 0$, je i -tý druh soběstačný; je-li $r_i \leq 0$, je přežití tohoto druhu závislé na některém jiném druhu společenstva (případně na všech).

Zobecnění

Lotkûv-Volterrûv model dravec-kořist (producent-konzument)

$$\dot{x} = x(r - ay)$$

$$\dot{y} = y(-d + bx)$$

Zobecnění

Lotkûv-Volterrûv model dravec-kořist (producent-konzument)

$$\dot{x} = x(r - ay) = rx - axy$$

$$\dot{y} = y(-d + bx) = -dy + bxy$$

Zobecnění

Lotkûv-Volterrûv model dravec-kořist (producent-konzument)

$$\dot{x} = x(r - ay) = rx - axy$$

$$\dot{y} = y(-d + bx) = -dy + bxy$$

Změna měřítka:

$$\dot{x} = x - xy$$

$$\dot{y} = -y + cxy$$

Zobecnění

Lotkûv-Volterrûv model dravec-kořist (producent-konzument)

$$\dot{x} = x(r - ay) = rx - axy$$

$$\dot{y} = y(-d + bx) = -dy + bxy$$

Změna měřítka:

$$\dot{x} = x - xy$$

$$\dot{y} = -y + cxy$$

První integrál (invariant systému): $H(x, y) = cx + y - \ln xy$

Zobecnění

Lotkův-Volterrův model dravec-kořist (producent-konzument)

$$\dot{x} = x(r - ay) = rx - axy$$

$$\dot{y} = y(-d + bx) = -dy + bxy$$

Změna měřítka:

$$\dot{x} = x - xy$$

$$\dot{y} = -y + cxy$$

První integrál (invariant systému): $H(x, y) = cx + y - \ln xy$

Hamiltonův systém

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{x(y - 1)}{xy}$$

$$\dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{y(cx - 1)}{xy}$$

má stejné (uzavřené) trajektorie jako původní systém.

Rozšíření

Rozšíření

Motivace:

společenstvo fytofágních a dravých roztočů na vinicích.

Rozšíření

Motivace:

společenstvo fytofágních a dravých roztočů na vinicích.

- Vývoj společenstva je občas přerušen chemickým zásahem.

Rozšíření

Motivace:

společenstvo fytofágních a dravých roztočů na vinicích.

- Vývoj společenstva je občas přerušen chemickým zásahem.
- V zimě se společenstvo vyvíjí jinak, než od jara do podzimu.

Rozšíření

Motivace:

společenstvo fytofágních a dravých roztočů na vinicích.

- Vývoj společenstva je občas přerušen chemickým zásahem.
- V zimě se společenstvo vyvíjí jinak, než od jara do podzimu.

Adekvátním modelem je systém dynamických rovnic na measure chain.



Děkuji za pozornost

