

## Pascalova sázka

### O náhodě, pravděpodobnosti, poznávání a rozhodování

Zdeněk Pospíšil, Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta MU

<https://www.math.muni.cz/~pospisil/>    <http://www.muni.cz/people/707>



#### Souhrn:

Blaise Pascal (1623–1662) je považován za zakladatele matematické teorie pravděpodobnosti.

Cílem přednášky je ukázat motivaci a předpoklady klasické teorie pravděpodobnosti a dále některé alternativní přístupy k zacházení s pojmy „náhoda“ a „pravděpodobnost“. Pokusí se naznačit, jak tato teorie může pomoci při praktickém rozhodování – od hazardních her po existenciální otázky.

### „Předvědecká“ pojetí

*Náhoda* v antice: Svévole bohyně Tyché.

*Náhoda* ve filosofii:

- Jev, který nemá příčinu.
- Jev, který má tak komplikované a komplexní příčiny, že je nemůžeme poznat.
- Jev, který je unikátní, neopakovatelný.

*Pravděpodobnost* ve scholastice: Jistá jsou tvrzení z Písma svatého, z papežských bul a z usnesení koncilů. Objevili-li se totéž tvrzení v knihách theologů, je pravděpodobné.

### „Klasické“ pojetí pravděpodobnosti

Toto nové učení . . . sjednocuje přesnost matematických důkazů s neurčitostí našich pokusů a směřuje tím věci zdánlivě nesourodé. B.Pascal, cit. dle. 3.

**Náhodný pokus:** jakákoliv akce, která může dát různé rozpoznatelné a nezaměnitelné výsledky; před provedením pokusu není jeho výsledek znám.

**Základní prostor možných výsledků  $\Omega$ :** souhrn všech možných výsledků náhodného pokusu.

**Náhodný jev:** část základního prostoru; symbolicky  $A \subseteq \Omega$

Klasifikace jevů:

*jev jistý*  $\times$  *nemožný*, symbolicky  $\Omega, \emptyset$ ;

*jevy slučitelné*  $\times$  *neslučitelné*  $\times$  *komplementární*, symbolicky  $A \cap B \neq \emptyset, A \cap B = \emptyset, B = \Omega \setminus A$ .

**Pravděpodobnost:** číslo z intervalu od 0 do 1 (včetně) přiřazené jevu  $A$ ; označení  $P(A)$ .

Možnosti přiřazení:

*klasická pravděpodobnost* – poměr počtu výsledků náhodného pokusu „příznivých“ jevu ku počtu všech možných výsledků;

*geometrická pravděpodobnost* – poměr „velikosti“ jevu ku „velikosti“ základního prostoru;

*empirická pravděpodobnost* – náhodný pokus je opakovaně proveden, jako pravděpodobnost je přiřazen poměr pozorované četnosti jevu ku počtu opakování pokusu.

### Vlastnosti pravděpodobnosti:

1. pravděpodobnost jevu jistého je rovna 1,
2. pravděpodobnost sjednocení neslučitelných jevů je součtem pravděpodobností jednotlivých jevů.

**Podmíněná pravděpodobnost:** pravděpodobnost jevu  $A$  za podmínky (za předpokladu), že nastal jev (že platí hypotéza)  $H$ ; označení  $P(A|H)$ . Základní prostor je zúžený na jeho část  $H$ . Každá pravděpodobnost je podmíněná! Přejmenším volbou základního prostoru.

**Stochasticky nezávislé jevy  $A, B$ :**  $P(A|B) = P(A)$  nebo  $P(B) = 0$ .

**Induktivní úsudek:** z toho, že  $P(H|A) > P(\Omega \setminus H|A)$  a jev  $A$  nastal, usuzujeme, že (asi) platí hypotéza  $H$ .

Související pojmy: *inverzní pravděpodobnost*  $P(H|A) = \frac{P(H)}{P(A)}P(A|H)$ ;

$$\text{Bayesův vzorec } P(H|A) = \frac{P(H)P(A|H)}{P(H)P(A|H) + P(\Omega \setminus H)P(A|\Omega \setminus H)}.$$

### „Alternativní“ pojetí pravděpodobnosti

**Logická pravděpodobnost:** zobecnění pojmu vyplývání – jaká je míra platnosti závěru při splnění předpokladů. Nebo: jak mohu věřit nové informaci na základě informací dříve přijatých.

**Propenzitní (fyzikální) pravděpodobnost:** míra disponovanosti určité události k tomu, aby nastala nějaká jiná událost.

**Subjektivní (epistemická) pravděpodobnost:** stanovení kurzu sázky na neopakovatelný jev.

### Rozhodování za nejistoty

#### Úlohy rytíře de Méré:

- Hází se několika kostkami. Při jakém počtu kostek je rozumné vsadit na to, že aspoň na jedné z nich padne šestka?
- Hází se několikrát dvěma kostkami. Při jakém počtu hodů je rozumné vsadit na to, že součet ok na obou kostkách je 12?

**Očekávaná velikost výhry:** velikost sázky  $\times$  pravděpodobnost jevu, na který se vsází.

**Úloha Pascalova:** Mám vsadit svůj život na to, že existuje Bůh?

**Teorie her a ekonomického rozhodování:** moderní analýza starých otázek dává překvapivé (nebo paradoxní) odpovědi.

### Literatura doporučená k další četbě

1. B. PASCAL, *Myšlenky*. J.Leichter, Praha 1937.  
Zejména jde o fragment 233.
2. A. PŁOCKI, *O náhodě a pravděpodobnosti*. Mladá fronta, Praha 1982.  
Pěkná a stručná knížka o teorii pravděpodobnosti z edice Škola mladých matematiků.
3. A. RÉNYI, *Dialogy o matematice*. Mladá fronta, Praha 1980.  
V kapitole „Pascalovský dialog. Čtyři dopisy o pravděpodobnosti“ (str. 124-182) jsou fiktivní dopisy B. Pascala P. Fermatovi o základních otázkách vznikající teorie.
4. M. HYKŠOVÁ, *Filosofická pojetí pravděpodobnosti v pracích českých myslitelů*. MatFyzPress, Praha 2011.  
Kniha obsahuje korektní popis teorie subjektivní pravděpodobnosti (str. 13-17).
5. L. NOVÁK, V. VOHÁNKA, *Kapitoly z epistemologie a noetiky*. Krystal OP, Olomouc 2015.  
Kapitola 9. (str. 187-209) pojednává o významu pravděpodobnosti a nejistoty v teorii poznání, zejména o logické pravděpodobnosti.
6. S. BRAMS, *Superior Beings. If They Exist, How Would We Know?* Springer, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, 1983.  
„Herně teoretické“ důsledky všvědoucnosti a všemohoucnosti.