Prostorové šíření epidemie typu SIR

Epidemii typu SIR bez vitální dynamiky popisuje systém tří obyčejných diferenciálních rovnic

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\tau} = -\beta IS, \qquad \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\tau} = \beta IS - \gamma I, \qquad \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\tau} = \gamma I$$

s počátečními podmínkami

$$S(0) = S_0, \quad I(0) = N - S_0, \quad R(0) = 0,$$

kde $N = S + I + R$ je celková velikost populace. Analýza tohoto systému (provedená např. ve skriptech Kalas J., Pospíšil Z. *Spojité modely v biologii,* MU, Brno 2001, str. 87–91.) ukazuje, že pokud $S_0 > \dfrac{\gamma}{\beta}$, pak pro řešení platí

$$\lim_{\tau\to\infty} S(\tau) = S_\infty > 0, \quad \lim_{\tau\to\infty} I(\tau) = 0, \quad \lim_{\tau\to\infty} R(\tau) = R_\infty = N - S_\infty > 0.$$

Uvažujme situaci, kdy se v prostorově homogenní populaci citlivých jedinců objeví jeden infekční. Jako konkrétní epidemii si můžeme představit vzteklinu v populaci lišek. Zdravá liška žije ve svém teritoriu, v prostoru se nepřemisťuje. Nemocné lišky naopak v důsledků vznikajících konfliktů svá teritoria opouštějí, a vyhledávají oblasti, v nichž je menší pravděpodobnost setkání s jedinci nemocnými (vzteklými). Vzteklina je choroba letální, nemocné lišky po nějakém čase umírají.

Nechť nyní $S = S(\tau,\xi)$, $I = I(\tau,\xi)$, $R = R(\tau,\xi)$ označuje hustotu zdravých, infekčních a uhynulách lišek v čase τ a v místě ξ. Model uvažované epidemie můžeme vyjádřit rovnicemi

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = -\beta IS, \qquad \frac{\partial I}{\partial \tau} = \beta IS - \gamma I + D\frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2}, \qquad \frac{\partial R}{\partial \tau} = \gamma I.$$

V tomto systému rovnic reakce-difúze nejprve změníme měřítko všech proměnných tak, aby všechny veličiny byly bezrozměrné, tj. zavedeme substituci

$$u = \frac{1}{N}S, \quad v = \frac{1}{N}I, \quad w = \frac{1}{N}w, \quad t = \gamma\tau, \quad x = \sqrt{\frac{\gamma}{D}}\,\xi, \qquad R_0 = \frac{\beta N}{\gamma}.$$

Pak je

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{N}\frac{\partial S}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{1}{N}\frac{1}{\gamma}(-\beta IS) = -\frac{\beta N}{\gamma}\frac{S}{N}\frac{I}{N} = R_0 uv, \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{N}\frac{\partial R}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{1}{N}\frac{1}{\gamma}\gamma I = v,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{1}{N}\frac{\partial I}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{1}{N}\frac{1}{\gamma}\frac{\partial I}{\partial \tau} = \frac{1}{N}\frac{1}{\gamma}\left(\beta IS - \gamma I + D\frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2}\right) = \\
&= \frac{\beta N}{\gamma}uv - v + \frac{1}{N\gamma}D\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial}{\partial x}Nv\frac{\partial x}{\partial \xi}\right) = R_0 uv - v + \frac{D}{\gamma}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{D}}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \\
&= R_0 uv - v + \frac{D}{\gamma}\sqrt{\frac{\gamma}{D}}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \xi} = R_0 uv - v + \frac{D}{\gamma}\frac{\gamma}{D}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = R_0 uv - v + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.
\end{aligned}$$

Dostáváme tedy systém rovnic reakce-difúze ve tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -R_0 uv, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = R_0 uv - v + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = v. \tag{1}$$

V analogii s modelem epidemie bez prostorové závislosti očekáváme, že výsledkem bude prostorově homogenní populace lišek zmenšená o ty, které uhynuly během epidemie, tedy že pro řešení systému (1) bude platit

$$\lim_{t\to\infty} u(t,x) = u_1 = \frac{S_\infty}{N}, \qquad \lim_{t\to\infty} v(t,x) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} w(t,x) = 1 - u_1 = \frac{R_\infty}{N} \tag{2}$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$. Budeme hledat takové řešení systému (1), že v okolí místa v prostoru, v němž se epidemie objevila je populace zredukovaná, ve vzdáleném místě má populace původní hustotu a přechod mezi těmito stavy putuje v prostoru zleva doprava (tj. v kladném smyslu osy x) jako vlna rychlostí c. Přesněji řečeno, budeme hledat řešení systému (1), které splňuje podmínky

$$\begin{aligned} u(t,x) &= u(0,x-ct), & \lim_{t\to-\infty} u(t,x) &= 1, \ \lim_{t\to\infty} u(t,x) = u_1, \\ v(t,x) &= v(0,x-ct), & \lim_{t\to-\infty} v(t,x) &= 0, \ \lim_{t\to\infty} v(t,x) = 0, \\ w(t,x) &= w(0,x-ct), & \lim_{t\to-\infty} w(t,x) &= 0, \ \lim_{t\to\infty} w(t,x) = 1-u_1 \end{aligned} \tag{3}$$

pro všechna $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Zavedeme novou nezávisle proměnnou z a nové funkce této proměnné vztahy

$$z = x - ct,$$

$$U(z) = u(0,z) = u(0,x-ct), \quad V(z) = v(0,z) = v(0,x-ct), \quad W(z) = w(0,z) = w(0,x-ct).$$

Pak podle (1) platí

$$\frac{\partial U(z)}{\partial t} = U'(z)\frac{\partial z}{\partial t} = -cU'(z) = -R_0U(z)V(z),$$

$$\frac{\partial V(z)}{\partial t} = V'(z)\frac{\partial z}{\partial t} = -cV'(z) = -R_0U(z)V(z) - V(z) + V''(z),$$

$$\frac{\partial W(z)}{\partial t} = W'(z)\frac{\partial z}{\partial t} = -cW'(z) = V(z).$$

Dostáváme tedy systém obyčejných diferenciálních rovnic

$$U' = \frac{R_0}{c}UV, \qquad V' = -\frac{R_0}{c}UV + \frac{1}{c}V - \frac{1}{c}V'', \qquad W' = -\frac{1}{c}V \tag{4}$$

s podmínkami

$$\lim_{z\to\infty} U(z) = 1, \ \lim_{z\to-\infty} U(z) = u_1, \quad \lim_{z\to\pm\infty} V(z) = 0, \quad \lim_{z\to\infty} W(z) = 0, \ \lim_{z\to-\infty} W(z) = 1-u_1, \tag{5}$$

neboť $\lim\limits_{t\to\pm\infty} z(x-ct) = \mp\infty$. Dále budeme požadovat, aby funkce V byla v okolí ∞ i v okolí $-\infty$ monotonní. V opačném případě by totiž funkce V nabývala pro velké absolutní hodnoty nezávisle proměnné z záporných hodnot, což není realistické (infikovaných jedinců nemůže být méně, než žádný). Na řešení systému (4) tedy klademe další podmínku

$$\lim_{z\to\pm\infty} V'(z) = 0. \tag{6}$$

Druhou z rovnic (4) vydělíme první z nich. Dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}U} = -1 + \frac{1}{R_0U} - \frac{V''}{R_0UV}.$$

Vyjádříme poslední člen pravé strany této rovnosti. Poněvadž

$$V'' = \frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}z^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}U}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z} = U'\frac{\mathrm{d}V'}{\mathrm{d}U} = \frac{R_0}{c}UV\frac{\mathrm{d}V'}{\mathrm{d}U},$$

platí

$$\frac{V''}{R_0UV} = \frac{\frac{R_0}{c}UV\frac{\mathrm{d}V'}{\mathrm{d}U}}{R_0UV} = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}V'}{\mathrm{d}U}.$$

Máme tedy rovnost

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}U} = -1 + \frac{1}{R_0U} - \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}V'}{\mathrm{d}U},$$

kterou můžeme integrovat podle U. Obdržíme

$$V = -U + \frac{1}{R_0}\ln U - \frac{1}{c}V' + A,$$

kde A je integrační konstanta. Její hodnotu určíme z podmínek (5) a (6) limitním přechodem $z \to \infty$ v poslední rovnosti. Dostaneme $0 = -1 + 0 - 0 + A$, tedy $A = 1$. Nyní můžeme vyjádřit V'. Spolu s první z rovnic (4) dostaneme dvourozměrný autonomní systém obyčejných diferenciálních rovnic

$$U' = \frac{R_0}{c}UV, \qquad V' = c\left(1 - U - V + \frac{1}{R_0}\ln U\right). \tag{7}$$

Ve druhé z nich provedeme limitní přechod $z \to -\infty$ a s využitím podmínek (5), (6) dostaneme

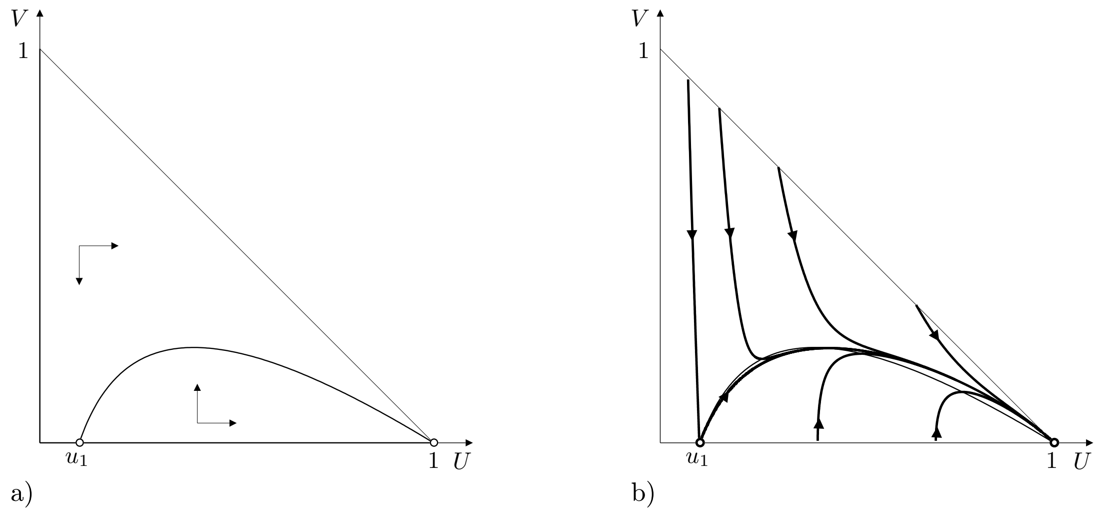
$$0 = c\left(1 - u_1 + \frac{1}{R_0}\ln u_1\right),$$

tedy

$$R_0 = \frac{\ln u_1}{u_1 - 1}. \tag{8}$$

Na pravé straně je výraz, který je pro $u_1 \in (0, 1)$ větší než 1. Z tohoto pozorování plyne, že systém rovnic reakce-difúze (1) může mít řešení splňující podmínky (3) pouze tehdy, když $R_0 > 1$. (To je stejná podmínka, jako podmínka pro vypuknutí epidemie v prostorově homogenním případě.)

Stavový prostor systému (7) je množina $\Omega = \left\{(U, V) \in \mathbb{R}^2 : U \geq 0, V \geq 0, U + V \leq 1\right\}$. V této množině má za podmínky $R_0 > 1$ systém dva stacionární body $(1, 0)$ a $(u_1, 0)$, sr. obr. 1. Aby systém (1) měl řešení splňující podmínky (3), tj. aby systém (7) měl řešení splňující podmínky (5), (6), musí existovat heteroklinická trajektorie systému (7) vycházející ze stacionárního bodu $(u_1, 0)$ a končící v bodě $(1, 0)$, která je celá v množině Ω.



Obrázek 1: Fázový portrét a) a trajektorie b) systému (7). Nulkliny funkce U jsou úsečky $(0, V)$, $V \in [0, 1]$, $(U, 0)$, $U \in [0, 1]$, nulklina funkce V má rovnici $V = 1 - U + \dfrac{\ln U}{R_0}$.

Variační matice systému (7) v obecném bodě je

$$J(U, V) = \begin{pmatrix} \dfrac{R_0}{c}V & \dfrac{R_0}{c}U \\ c\left(-1 + \dfrac{1}{R_0 U}\right) & -c \end{pmatrix},$$

takže

$$J(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{R_0}{c} \\ -c\left(1-\dfrac{1}{R_0}\right) & -c \end{pmatrix},$$

$$\det J(1,0) = R_0 \frac{R_0-1}{R_0} = R_0 - 1 > 0, \qquad \operatorname{tr} J(1,0) = -c < 0,$$

$$\operatorname{tr} J(1,0)^2 - 4 \det J(1,0) = c^2 - 4(R_0-1),$$

což znamená, že pro

$$c \geq \sqrt{4(R_0-1)} \tag{9}$$

je stacionární bod $(1,0)$ stabilním uzlem a v opačném případě je stabilním ohniskem. Pokud by tento bod, který leží na hranici stavového prostoru Ω, byl ohniskem, trajektorie v jeho okolí by opustila stavový prostor. To není realistické, takže nerovnost (9) je nutnou podmínkou pro existenci řešení systému (1) splňujícího podmínky (3).

Dále

$$J(u_1,0) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{R_0}{c}u_1 \\ -c\left(1-\dfrac{1}{R_0 u_1}\right) & -c \end{pmatrix}, \qquad \det J(u_1,0) = R_0 u_1 - 1.$$

Podle rovnosti (8) je

$$\frac{1}{u_1} - R_0 = \frac{1}{u_1} + \frac{\ln u_1}{1-u_1} > 0,$$

neboť

$$\lim_{u_1\to 1}\left(\frac{1}{u_1} + \frac{\ln u_1}{1-u_1}\right) = 0 + \lim_{u_1\to 1}\frac{\frac{1}{u_1}}{-1} = 0$$

a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u_1}\left(\frac{1}{u_1} + \frac{\ln u_1}{1-u_1}\right) = -\frac{1}{u_1^2} + \frac{\frac{1}{u_1}(1-u_1) + \ln u_1}{(1-u_1)^2} \leq -\frac{1}{u_1^2} + \frac{\frac{1}{u_1}(1-u_1) - (1-u_1)}{(1-u_1)^2} =$$
$$= -\frac{1}{u_1^2} + \frac{1-u_1}{u_1(1-u_1)} = \frac{u_1-1}{u_1^2} < 0$$

pro $u_1 \in (0,1)$, což znamená, že $J(u_1,0) < 0$ s stacionární bod $(u_1,0)$ je sedlo.

Provedená analýza ukazuje, že v případě $R_0 > 1$ může mít systém rovnic reakce-difúze (1) řešení ve tvaru putující vlny. Rychlost c jejího postupu je zdola omezena nerovností (9). Minimální rychlost šíření modelované epidemie tedy je

$$c = 2\sqrt{R_0 - 1}\,,$$

nebo v původních jednotkách

$$c = 2\sqrt{D(\beta N - \gamma)}\,.$$

Rychlost postupu epidemie závisí na velikosti populace.