Spojité deterministické modely I
1. cvičná písemka

I. část

1. Najděte obecné řešení rovnice $tx' - x = t \operatorname{tg} \dfrac{x}{t}$.

2. Rozhodněte, zda počáteční úloha $x' = -t\sqrt[3]{x}$, $x(0) = 0$ je jednoznačně řešitelná. Odpověď zdůvodněte.

3. Najděte první tři členy Picardovy posloupnosti postupných aproximací řešení úlohy

$$x'' - x' = 0,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1.$$

4. Odhadněte řešení problému

$$x' = t + \frac{x}{1+x^2}, \qquad x(0) = 0,$$

tj. najděte funkce φ, ψ takové, že $\varphi(t) \leqslant x(t) \leqslant \psi(t)$ pro všechna $t > 0$ z definičního oboru řešení x.

5. Zjistěte, zda autonomní systém

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y, \\ y' &= -x + 2y \end{aligned}$$

má nekonstantní periodické řešení.

6. Určete, pro které hodnoty parametru a je řešení $x(t) \equiv \dfrac{1}{a}$ rovnice $x' = ax - 1$ stejnoměrně asymptoticky stabilní.

II. část

1. Najděte řešení počátečního problému

$$x''' + x'' + 2x' + 2x = 3, \qquad x(0) = 1,\ x'(0) = \frac{1}{2},\ x''(0) = -\frac{1}{2}.$$

2. Vývoj dvou populací o velikostech $x = x(t)$, $y = y(t)$ je modelován systémem rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x - (x-k)y, \\ y' &= -ay + \kappa(x-k)y; \end{aligned}$$

parametry a, k, κ jsou kladné. Určete, o jaký typ interakce (vztahu populací) jde, najděte rovnovážné velikosti populací a vyšetřete jejich stabilitu.

3. Model epidemie SEI bez vitální dynamiky je tvaru

$$\begin{aligned} S' &= -\beta IS, \\ E' &= \beta IS - \delta E, \\ I' &= \delta E, \end{aligned}$$

$$S(0) = N - 1,\ E(0) = 0,\ I(0) = 1.$$

N označuje velikost populace, na počátku je jeden infekční jedinec a žádný nakažený v latentním stádiu. Načrtněte fázové portréty a popište vývoj epidemie.

Čas na vypracování: I. část 90 minut, II. část 60 minut.
Bodování: I. část 6×1 bod, II. část 3×2 body.
Hodnocení: I. část: dosáhnout alespoň 3 bodů.
II. část: [5,6]=A, [4,5)=B, [3,4)=C, [2,3)=D, (0,2)=E.

Výsledky:

I1. $x(t) = t \arcsin Ct$

I2. Ano; řešení je $x \equiv 0$ a řešení jednoznačně řešitelné úlohy s počáteční podmínkou $x(t_0) = a \neq 0$ pro $t_0 \neq 0$ není řešením zadané úlohy.

I3. $x_0(t) = 0$, $x_1(t) = t$ $x_2(t) = t + \dfrac{t^2}{2}$

I4. $\dfrac{t^2}{2} - t \leqslant x(t) \leqslant \dfrac{t^2}{2} + t$

I5. Reálné části vlastních čísel matice jsou nenulové, imaginární nulové; proto nestacionární periodické řešení nemůže existovat.

I6. $a < 0$.

II1. $\frac{1}{2}\left(3 - \mathrm{e}^{-t}\right)$.

II2. Dravec-kořist; úživnost prostředí pro populaci kořisti je neomezená a obsahuje úkryt, který pojme populaci kořisti o velikosti k a ochrání ji před dravcem; koeficient úmrtnosti dravce bez potravy je a, efektivita, s níž přemění zničenou kořist na růst své populace je κ. Stacionární řešení $x \equiv k + \dfrac{a}{\kappa}$, $y \equiv 1 + \dfrac{\kappa k}{a}$ je asymptoticky stabilní. (Pro $\kappa k < 2a^2\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{1}{a}}\right)$ se jedná o ohnisko, pro $\kappa k > 2a^2\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{1}{a}}\right)$ se jedná o uzel.)

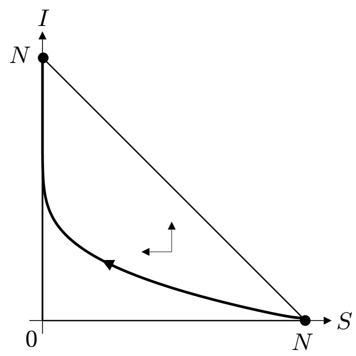
II3. $(S + E + I)' = S' + E' + I' = 0 \quad \Rightarrow \quad S + E + I = N = const$

Stavový prostor $\Omega = \left\{(S, E, I) \in \mathbb{R}^3 : S \geq 0, E \geq 0, I \geq 0, S + E + I = N\right\}$

- $E = N - I - S$: $\Omega = \left\{(S, I) \in \mathbb{R}^2 : S \geq 0, I \geq 0, S + I \leq N\right\}$

$$\begin{aligned} S' &= -\beta I S \\ I' &= \delta(N - I - S) \end{aligned}$$

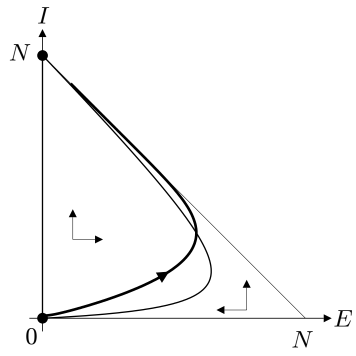
S-nulkliny: $I = 0$, $S = 0$
I-nulklina: $I = N - S$



- $S = N - E - I$: $\Omega = \left\{(E, I) \in \mathbb{R}^2 : E \geq 0, I \geq 0, E + I \leq N\right\}$

$$\begin{aligned} E' &= \beta I(N - E - I) - \delta E \\ I' &= \delta E \end{aligned}$$

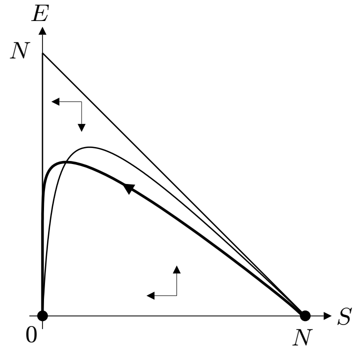
E-nulklina: $E = \dfrac{\beta I(N - I)}{\delta + \beta I}$
I-nulklina: $E = 0$



- $I = N - S - E$: $\Omega = \left\{(S, E) \in \mathbb{R}^2 : S \geq 0, E \geq 0, S + E \leq N\right\}$

$$\begin{aligned} S' &= -\beta(N - S - E)S \\ E' &= \beta(N - S - E)S - \delta E \end{aligned}$$

S-nulkliny: $S = 0$, $E = N - S$
I-nulklina: $E = \dfrac{\beta(N - S)S}{\beta S + \delta}$



Počet zdravých jedinců monotonně klesá k nule, počet infekčních monotonně roste k N, počet nakažených v latentním stadiu nejdříve roste a po dosažení jistého maxima klesá k nule.

Spojité deterministické modely I
2. cvičná písemka

I. část

1. Najděte obecné řešení rovnice $y' \sin x = y \ln y$.
2. Zjistěte, zda je lokálně jednoznačně řešitelná počáteční úloha

$$x'' + x' \sin 2t + \frac{x}{(\cos t)^2} = 0, \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 0.$$

3. Ukažte, že funkce $x_1(t) = t$ a $x_2(t) = \mathrm{e}^t$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice přidružené k rovnici

$$(t-1)x'' - tx' + x = (t-1)^2$$

na jakémkoliv intervalu, který neobsahuje 1. Pak najděte řešení této nehomogenní rovnice s počátečními podmínkami $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

4. Najděte maximální a minimální řešení úlohy $x' = \dfrac{x}{t}$, $x(0) = 0$.
5. Určete parametr a tak, aby autonomní systém

$$\begin{aligned} x' &= 2x - 5y \\ y' &= x + ay \end{aligned}$$

měl periodické řešení.

6. Zjistěte, zda řešení $x \equiv 3$ rovnice $x' = x^3 - 27$ je stabilní nebo asymptoticky stabilní.

II. část

1. Najděte řešení počátečního problému

$$x'''' + 8x'' + 16x = \cos t, \qquad x(0) = \frac{1}{9},\ x'(0) = 0,\ x''(0) = -\frac{1}{9},\ x'''(0) = 0.$$

2. Uvažujte model konkurence dvou populací takových, že pro druhou z nich je kapacita prostředí neomezená:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} &= r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1} - a_{12}N_2\right), \\ \frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} &= r_2 N_2 \left(1 - a_{21}N_1\right). \end{aligned}$$

Najděte nezáporná stacionární řešení a určete jejich typ a stabilitu. Určete podmínky, za kterých může druhá populace vyhynout.

3. Autonomní systém

$$\begin{aligned} S' &= mS - d_1 S - \beta IS + \gamma I, \\ I' &= \beta IS - \gamma I - d_2 I, \end{aligned}$$

(všechny parametry jsou kladné a $m > d_1$) představuje model epidemie SIS s vitální dynamikou za předpokladů: Potomky má pouze zdravá část (S) populace; úmrtnosti ve zdravé (S) a infekční (I) části populace mohou být rozdílné; omezenost zdrojů (vnitrodruhová konkurence) se neprojevuje, tj. zdravá populace by rostla neomezeně (exponenciálně).

Může epidemie tohoto typu stabilizovat populaci? Jaká musí být úmrtnost infikovaných jedinců, aby se růst populace zastavil?

Čas na vypracování: I. část 90 minut, II. část 60 minut.
Bodování: I. část 6 × 1 bod, II. část 3 × 2 body.
Hodnocení: I. část: dosáhnout alespoň 3 bodů.
II. část: [5,6]=A, [4,5)=B, [3,4)=C, [2,3)=D, (0,2)=E.

Výsledky:
I1. $y = \exp\left\{C \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}\right\}$.
I2. Ano. Jedná se o lineární rovnici se spojitými koeficienty.
I3. Každá z funkcí $x_1(t) = t$, $x_2(t) = \mathrm{e}^t$ je řešením homogenní rovnice druhého řádu $x'' - \dfrac{t}{t-1}x' + \dfrac{1}{t-1}x = 0$. Dále je

$$\begin{vmatrix} t & \mathrm{e}^t \\ 1 & \mathrm{e}^t \end{vmatrix} (t-1)\mathrm{e}^t \neq 0 \quad \text{pro } t \neq 1.$$

Řešení dané úlohy je $\mathrm{e}^t - t^2 - t - 1$.
I4. Úloha má řešení $x(t) = Ct$, kde C je libovolná reálná konstanta, a toto řešení je definováno na intervalu $[0, \infty)$ nebo $(-\infty, 0]$. Pro $t > 0$ a libovolné $c > 0$ platí $ct < (2c)t$ a podobně. Maximální ani minimální řešení tedy neexistuje.
I5. Systém má vždy řešení $x \equiv 0$, $y \equiv 0$, tj. řešení konstantní tedy periodické s libovolnou periodou. Pro $a = -2$ má nekonstantní periodické řešení.
I6. Řešení je nestabilní.

II1. $x(t) = \frac{1}{9}\cos t$.
II2. Pokud $a_{21}K_1 \leq 1$, existuje jediné stacionární řešení: sedlo $(K_1, 0)$ a druhá populace nemůže vymřít, roste nade všechny meze. Pokud $a_{21}K_1 > 1$, existují dvě stacionární řešení: stabilní uzel $(K_1, 0)$ a sedlo $\left(\dfrac{1}{a_{21}}, \dfrac{a_{21}K_1 - 1}{a_{12}a_{21}K_1}\right)$; v tomto případě tedy může druhá populace vymřít, pokud její počáteční velikost je „dostatečně malá“ a počáteční velikost první populace je „dostatečně blízko“ kapacitě prostředí K_1.
II3. Systém má jediný rovnovážný bod

$$\left(\frac{\gamma + d_2}{\beta}, \frac{(m - d_1)(\gamma + d_2)}{\beta d_2}\right),$$

který je pro

$$m - d_1 > \left(\frac{2d_2}{\gamma}\right)^2 (\gamma + d_2)$$

stabilním uzlem a pro

$$m - d_1 < \left(\frac{2d_2}{\gamma}\right)^2 (\gamma + d_2)$$

stabilním ohniskem. Epidemie, která potlačuje plodnost, tedy může zastavit růst malthusovské populace bez ohledu na to, jaký vliv má na úmrtnost.

Spojité deterministické modely I
3. cvičná písemka

I. část

1. Najděte obecné řešení rovnice $tx' - x = x \ln \dfrac{x}{t}$.

2. Určete parametr a tak, aby počáteční úloha $tx' = x$, $x(0) = a$ měla alespoň jedno řešení definované na intervalu $[0, \infty)$.

3. Najděte první tři členy Picardovy posloupnosti postupných aproximací řešení počáteční úlohy

$$\begin{array}{l} x' = y, \\ y' = -x + t \end{array} \qquad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Najděte maximální a minimální řešení úlohy $x' = 3\sqrt[3]{x^2}$, $x(0) = 0$ na intervalu $[0, \infty)$.

5. Najděte všechny izolované stacionární body autonomního systému

$$\begin{aligned} x' &= 2x - 5y \\ y' &= x - 2y + 1 \end{aligned}$$

a určete jejich typ.

6. Nechť $x = x(t)$ je řešení počáteční úlohy $x' = 2x^2 - (x^3 + x)$, $x(1) = \alpha$. Určete, pro které hodnoty parametru α je funkce x rostoucí, pro které hodnoty je klesající a pro které hodnoty je periodická.

II. část

1. Najděte řešení počátečního problému

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= z \\ z' &= -x - y - z + 2\cos t, \end{aligned} \qquad x(0) = 1,\ y(0) = -\frac{1}{2},\ z(0) = 1.$$

2. Zdroj podléhající rozkladu je pravidelně dodáván konzumentovi. Tato situace může být popsána modelem

$$\begin{aligned} x' &= a - x - xy, \\ y' &= xy - by, \end{aligned}$$

kde x označuje množství zdroje a y velikost populace konzumenta, parametry a, b jsou kladné.

Najděte podmínky, za jakých může dojít k dynamické rovnováze zdroje a konzumenta; přitom množství zdroje i velikost populace konzumenta mají být nenulové. Je tato rovnováha dlouhodobě udržitelná?

3. Pokud relativní změna mezd závisí na relativní zaměstnanosti lineárně, lze dynamiku mezd a zaměstnanosti při vhodné volbě jednotek popsat autonomním systémem

$$\begin{aligned} u' &= u\left(v - \tfrac{1}{2}\right), \\ v' &= v\left(1 - 2u\right), \end{aligned}$$

(jedná se o speciální případ Goodwinova modelu). Rozhodněte o stabilitě všech stacionárních bodů tohoto systému a najděte invariant (první integrál) tohoto systému.

Čas na vypracování: I. část 90 minut, II. část 60 minut.
Bodování: I. část 6×1 bod, II. část 3×2 body.
Hodnocení: I. část: dosáhnout alespoň 3 bodů.
II. část: [5,6]=A, [4,5)=B, [3,4)=C, [2,3)=D, (0,2)=E.

Výsledky:
I1. $x(t) = t\mathrm{e}^{Ct}$.
I2. Obecné řešení rovnice je $x(t) = Ct$. Pro řešení rovnice tedy vždy platí $x(0) = 0$. Musí tedy být $a = 0$.
I3.

$$\begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}t^3 \\ \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_3(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}t^3 \\ -\frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix}.$$

I4. $x_*(t) = 0$, $x^*(t) = t^3$.
I5. Jediný stacionární bod $(-5, -2)$ je střed.
I6. Pravá strana dané rovnice $f(x) = 2x^2 - (x^3 + x) = -x(x^2 - 2x + 1) = -x(x-1)^2$ je nulová pro $x = 0$ nebo $x = 1$, je kladná pro $x < 0$ a záporná pro $x \in (0, \infty) \setminus \{1\}$. To znamená, že pro počáteční hodnotu $\alpha < 0$ je řešení dané úlohy (ryze) rostoucí, pro počáteční hodnotu $\alpha \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ je řešení (ryze) klesající a pro počáteční hodnotu $\alpha \in \{0, 1\}$ je řešení konstantní (tedy periodické).

II1. Daná úloha je ekvivalentní s počáteční úlohou pro lineární rovnici třetího řádu

$$x''' + x'' + x' + x = 2\cos t, \quad x(0) = 0, \ x'(0) = -\tfrac{1}{2}, \ x''(0) = 1.$$

Obecné řešení přidružené homogenní rovnice je $\bar{x}(t) = A\mathrm{e}^{-t} + B\cos(t) + C\sin t$, partikulární řešení nehomogenní rovnice je $\tilde{x}(t) = \frac{1}{2}t(\sin t - \cos t)$, řešení úlohy pro rovnici třetího řádu tedy je

$$x(t) = \tfrac{1}{2}\big(\mathrm{e}^{-t} + (1-t)\cos t + (1+t)\sin t\big).$$

Tato funkce je první složkou řešení dané úlohy. Její druhá a třetí složka jsou

$$y(t) = x'(t) = -\tfrac{1}{2}\big(\mathrm{e}^{t} - t\cos t - t\sin t\big), \quad z(t) = y'(t) = \tfrac{1}{2}\big(\mathrm{e}^{t} + (1+t)\cos t + (1-t)\sin t\big).$$

II2. Systém má jediný stacionární bod $\left(b, \dfrac{a-b}{b}\right)$. Ten leží uvnitř prvního kvadrantu, pokud $a > b$. Variační matice je

$$\mathsf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & -y \\ y & x-b \end{pmatrix}, \quad \mathsf{J}^* = \mathsf{J}\left(b, \frac{a-b}{b}\right) = \begin{pmatrix} -1 & \dfrac{b-a}{b} \\ \dfrac{a-b}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

a platí pro ni $\operatorname{tr} \mathsf{J}^* = -1 < 0$, $\det \mathsf{J}^* = \left(\dfrac{a-b}{b}\right)^2 > 0$, takže stacionární bod je stok (stabilní uzel nebo ohnisko).

K dynamické rovnováze zdroje a konzumenta dojde, pokud $b < a$ (transformovaná úmrtnost konzumenta je menší než intenzita dodávání zdroje). Tato rovnováha je stejnoměrně asymptoticky stabilní, tedy udržitelná.

II3. Invariant systému:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} &= \frac{2v(1-2u)}{u(2v-1)} \\ \frac{2v-1}{\mathrm{d}}v &= 2\frac{1-2u}{u}\mathrm{d}u \\ 2v - \ln v &= 2\ln u - 4u + const \end{aligned}$$

Invariant systému tedy je $V(u,v) = 4u + 2v - \ln u^2 v$.

Stacionární body: $(0,0)$ sedlo, tj. nestabilní
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ střed, tj. stejnoměrně stabilní (nikoliv asymptoticky)