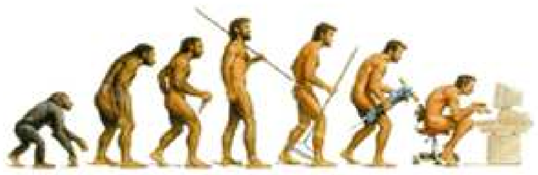
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Matematika v biologii II

Zdeněk Pospíšil

29. března 2011

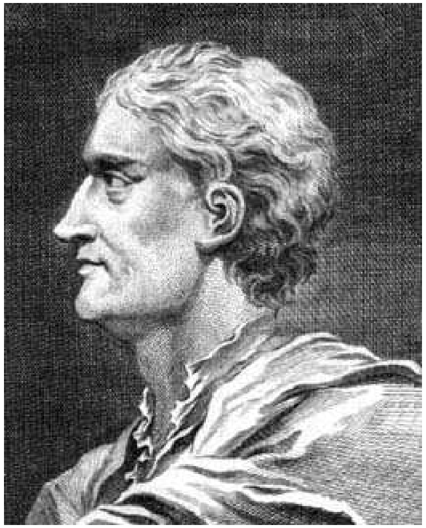
Úvod



Motivace: Fyzika

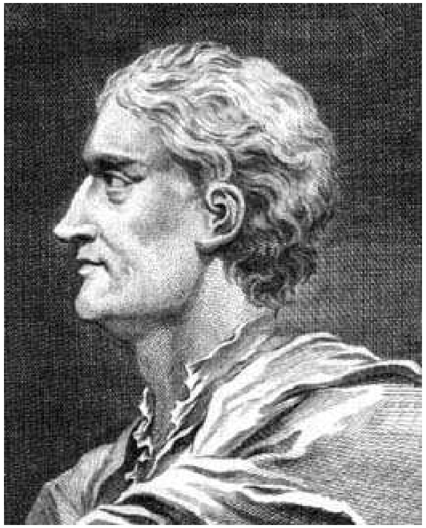
Newtonovy zákony pohybu

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{x}',$$
$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{x}''$$



Newtonovy zákony pohybu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= m\boldsymbol{x}', \\ \boldsymbol{F} &= m\boldsymbol{x}'' \end{aligned}$$



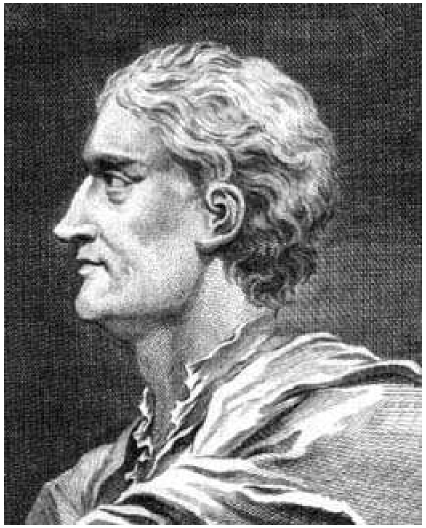
Jednoduchá úprava:

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{x}'' = m\left(\boldsymbol{x}'\right)' = m\left(\frac{\boldsymbol{p}}{m}\right)' = \boldsymbol{p}'$$

Newtonovy zákony pohybu

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p} &= m\boldsymbol{x}', \\ \boldsymbol{F} &= m\boldsymbol{x}''\end{aligned}$$



Jednoduchá úprava:

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{x}'' = m\left(\boldsymbol{x}'\right)' = m\left(\frac{\boldsymbol{p}}{m}\right)' = \boldsymbol{p}'$$

Tedy

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$$

Bipartitní systém

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$$

Bipartitní systém

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$$

Obecně:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}' &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\\ \boldsymbol{y}' &= \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

Změna (derivace) proměnných z jedné sady závisé pouze na proměnných z druhé sady.

Newtonův zákon – pole centrální síly

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$$

Centrální síla

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \frac{cm}{\|\boldsymbol{x}\|^3}\boldsymbol{x}$$

Newtonův zákon – pole centrální síly

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$$

Centrální síla

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \frac{cm}{\|\boldsymbol{x}\|^3}\boldsymbol{x}$$

Systém je tedy tvaru

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{p}' = \frac{cm}{\|\boldsymbol{x}\|^3}\boldsymbol{x}$$

Newtonův zákon – pole centrální síly

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}$$
$$\boldsymbol{p}' = \frac{cm}{\|\boldsymbol{x}\|^3}\boldsymbol{x}$$

Newtonův zákon – pole centrální síly

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}$$
$$\boldsymbol{p}' = \frac{cm}{\|\boldsymbol{x}\|^3}\boldsymbol{x}$$

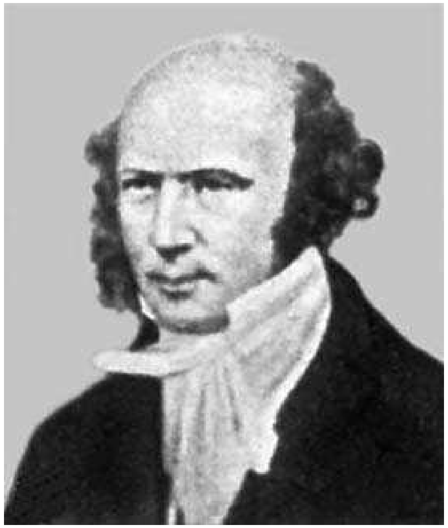
Kinetická energie: $\frac{1}{2}m\|\boldsymbol{x}'\|^2 = \frac{1}{2m}\|\boldsymbol{p}\|^2$

Potenciální energie: $\frac{cm}{\|\boldsymbol{x}\|}$

Celková energie (Hamiltonián):

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = \frac{1}{2m}\|\boldsymbol{p}\|^2 + \frac{cm}{\|\boldsymbol{x}\|}$$

Newtonův zákon – pole centrální síly



$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{p}' = \frac{cm}{\|\boldsymbol{x}\|^3}\boldsymbol{x}$$

Hamiltonián: $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2m}\|\boldsymbol{p}\|^2 + \frac{cm}{\|\boldsymbol{x}\|}$

Platí:

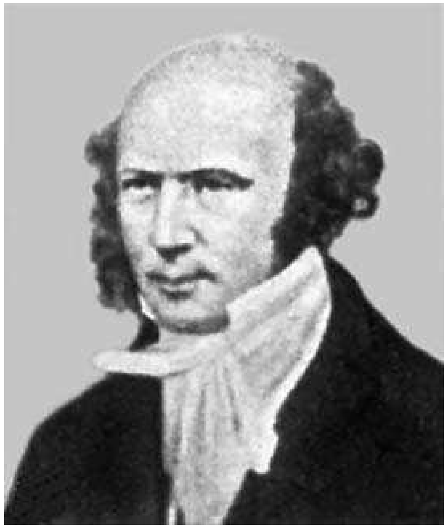
$$\nabla_{\boldsymbol{x}} H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} = -\frac{cm}{\|\boldsymbol{x}\|^3}\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{p}'$$

$$\nabla_{\boldsymbol{p}} H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} = \frac{1}{m}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{x}'$$

Newtonův zákon – pole centrální síly

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{p}' = \frac{cm}{\|\boldsymbol{x}\|^3}\boldsymbol{x}$$



Hamiltonián: $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2m}\|\boldsymbol{p}\|^2 + \frac{cm}{\|\boldsymbol{x}\|}$

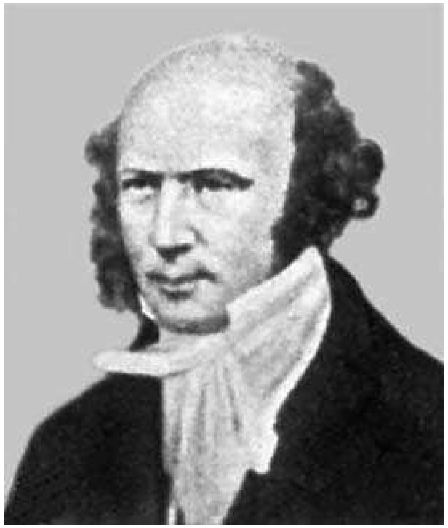
Tedy

$$\boldsymbol{x}' = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}$$

$$\boldsymbol{p}' = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}$$

Newtonův zákon – pole centrální síly

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}$$
$$\boldsymbol{p}' = \frac{cm}{\|\boldsymbol{x}\|^3}\boldsymbol{x}$$



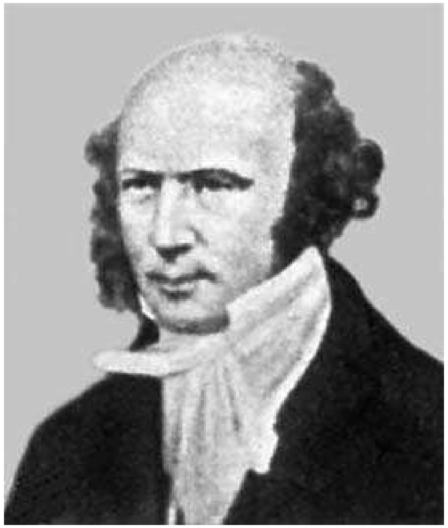
Hamiltonián: $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = \dfrac{1}{2m}\|\boldsymbol{p}\|^2 + \dfrac{cm}{\|\boldsymbol{x}\|}$

nebo ve vektorovém tvaru

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{p}\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}\mathsf{O} & \mathsf{E}\\ -\mathsf{E} & \mathsf{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nabla_{\boldsymbol{x}} H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})\\ \nabla_{\boldsymbol{p}} H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})\end{pmatrix}.$$

Newtonův zákon – pole centrální síly

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}$$
$$\boldsymbol{p}' = \frac{cm}{\|\boldsymbol{x}\|^3}\boldsymbol{x}$$



Hamiltonián: $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2m}\|\boldsymbol{p}\|^2 + \frac{cm}{\|\boldsymbol{x}\|}$

nebo ve vektorovém tvaru

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{p}\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}\mathsf{O} & \mathsf{E}\\ -\mathsf{E} & \mathsf{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nabla_{\boldsymbol{x}}H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})\\ \nabla_{\boldsymbol{p}}H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})\end{pmatrix}.$$

navíc: $\frac{\partial}{\partial t}H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = \left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x}' + \left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}\right)^{\mathsf{T}}\boldsymbol{p}' = 0$

Hamiltonovský systém

$$\boldsymbol{x}' = \mathsf{J}(\boldsymbol{x})\nabla H(\boldsymbol{x}) \quad \text{kde } \mathsf{J}(\boldsymbol{x}) = -\mathsf{J}(\boldsymbol{x})^{\mathsf{T}}$$

Hamiltonovský systém

$$\boldsymbol{x}' = \mathsf{J}(\boldsymbol{x})\nabla H(\boldsymbol{x}) \quad \text{kde } \mathsf{J}(\boldsymbol{x}) = -\mathsf{J}(\boldsymbol{x})^{\mathsf{T}}$$

Platí:

$$\frac{\partial}{\partial t} H(\boldsymbol{x}) = \big(\nabla H(\boldsymbol{x})\big)^{\mathsf{T}} \boldsymbol{x}' = \big(\nabla H(\boldsymbol{x})\big)^{\mathsf{T}} \mathsf{J}(\boldsymbol{x})\nabla H(\boldsymbol{x}) = 0$$

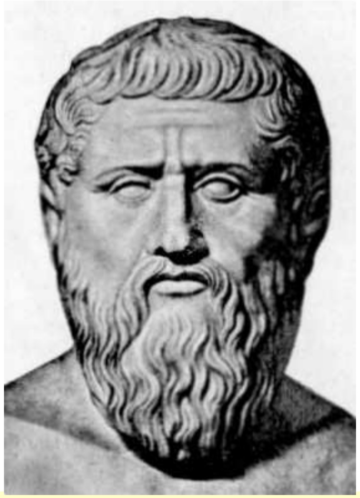
Hamiltonovský systém

$$\boldsymbol{x}' = \mathsf{J}(\boldsymbol{x})\nabla H(\boldsymbol{x}) \quad \text{kde } \mathsf{J}(\boldsymbol{x}) = -\mathsf{J}(\boldsymbol{x})^{\mathsf{T}}$$

Platí:

$$\frac{\partial}{\partial t}H(\boldsymbol{x}) = \big(\nabla H(\boldsymbol{x})\big)^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x}' = \big(\nabla H(\boldsymbol{x})\big)^{\mathsf{T}}\mathsf{J}(\boldsymbol{x})\nabla H(\boldsymbol{x}) = 0$$

Platón, Timaios 28a: „Nejprve jest podle mého mínění stanoviti tuto rozluku:
co jest to, co stále jest, ale vzniku nemá,
a co jest to, co stále vzniká, ale nikdy není jsoucí."



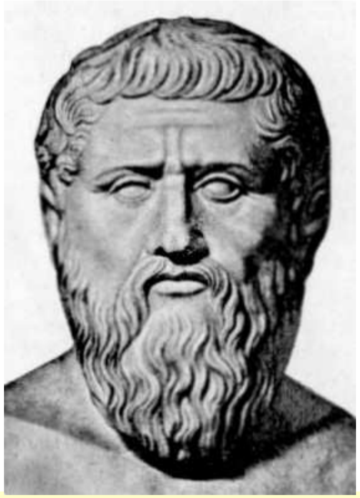
Hamiltonovský systém

$$\boldsymbol{x}' = \mathsf{J}(\boldsymbol{x})\nabla H(\boldsymbol{x}) \quad \text{kde } \mathsf{J}(\boldsymbol{x}) = -\mathsf{J}(\boldsymbol{x})^{\mathsf{T}}$$

Platí:

$$\frac{\partial}{\partial t}H(\boldsymbol{x}) = \big(\nabla H(\boldsymbol{x})\big)^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x}' = \big(\nabla H(\boldsymbol{x})\big)^{\mathsf{T}}\mathsf{J}(\boldsymbol{x})\nabla H(\boldsymbol{x}) = 0$$

Platón, Timaios 28a: „Nejprve jest podle mého mínění stanoviti tuto rozluku: co jest to, co stále jest, ale vzniku nemá, **Hamiltonián**
a co jest to, co stále vzniká, ale nikdy není jsoucí." **stavové proměnné**



Ekologie

Modely populační dynamiky

Modely populační dynamiky

$x = x(t)$ ... velikost populace v čase t

Modely populační dynamiky

$x = x(t)$ ... velikost populace v čase t

- $x' = rx$

Modely populační dynamiky

$x = x(t)$ . . . velikost populace v čase t

- $x' = rx \qquad \Rightarrow$ exponenciální růst

Modely populační dynamiky

$x = x(t)$ . . . velikost populace v čase t

- $x' = rx \qquad \Rightarrow$ exponenciální růst
- Modifikace: $x' = x\,(r - \beta x)$

Modely populační dynamiky

$x = x(t)$ . . . velikost populace v čase t

- $x' = rx \qquad \Rightarrow$ exponenciální růst
- Modifikace: $x' = x\big(r - g(x)\big)$

Modely populační dynamiky

$x = x(t)$ ... velikost populace v čase t

- $x' = rx \qquad \Rightarrow$ exponenciální růst
- Modifikace: $x' = x\big(r - g(x)\big)$

Modely splečenstev:

$x_i = x_i(t)$ ... velikost i-té populace společenstva v čase t.

Modely populační dynamiky

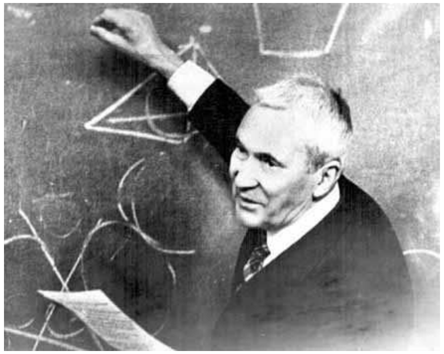
$x = x(t)$ ... velikost populace v čase t

- $x' = rx \qquad \Rightarrow$ exponenciální růst
- Modifikace: $x' = x\big(r - g(x)\big)$

Modely splečenstev:

$x_i = x_i(t)$ ... velikost i-té populace společenstva v čase t.

- Kolmogorov: $x_i' = x_i\big(r_i - g_i(\boldsymbol{x})\big), \quad i = 1, 2, \ldots, n$



Modely populační dynamiky

$x = x(t)$ . . . velikost populace v čase t

- $x' = rx \qquad \Rightarrow$ exponenciální růst
- Modifikace: $x' = x\big(r - g(x)\big)$

Modely splečenstev:

$x_i = x_i(t)$ . . . velikost i-té populace společenstva v čase t.

- Kolmogorov: $x_i' = x_i\big(r_i - g_i(\boldsymbol{x})\big), \quad i = 1, 2, \ldots, n$
- Lotka a Volterra: nejjednodušší volba – všechny funkce g_i jsou lineární.


Modely populační dynamiky

$x = x(t)$ ... velikost populace v čase t

- $x' = rx \qquad \Rightarrow$ exponenciální růst
- Modifikace: $x' = x\big(r - g(x)\big)$

Modely splečenstev:

$x_i = x_i(t)$ ... velikost i-té populace společenstva v čase t.

- Kolmogorov: $x_i' = x_i\big(r_i - g_i(\boldsymbol{x})\big), \quad i = 1, 2, \ldots, n$
- Lotka a Volterra: nejjednodušší volba – všechny funkce g_i jsou lineární.

$$g_i(\boldsymbol{x}) = g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j = (\mathsf{B}\boldsymbol{x})_i$$


Modely populační dynamiky

$x = x(t)$ . . . velikost populace v čase t

- $x' = rx \qquad \Rightarrow$ exponenciální růst
- Modifikace: $x' = x\big(r - g(x)\big)$

Modely splečenstev:

$x_i = x_i(t)$ . . . velikost i-té populace společenstva v čase t.

- Kolmogorov: $x_i' = x_i\big(r_i - g_i(\boldsymbol{x})\big), \quad i = 1, 2, \dots, n$
- Lotka a Volterra: nejjednodušší volba – všechny funkce g_i jsou lineární.

$$g_i(\boldsymbol{x}) = g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j = (\mathsf{B}\boldsymbol{x})_i$$

$$x_i' = x_i\big(r_i - (\mathsf{B}\boldsymbol{x})_i\big), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Modely populační dynamiky

$x = x(t)$ . . . velikost populace v čase t

- $x' = rx \qquad \Rightarrow$ exponenciální růst
- Modifikace: $x' = x\big(r - g(x)\big)$

Modely splečenstev:

$x_i = x_i(t)$ . . . velikost i-té populace společenstva v čase t.

- Kolmogorov: $x_i' = x_i\big(r_i - g_i(\boldsymbol{x})\big), \quad i = 1, 2, \ldots, n$
- Lotka a Volterra: nejjednodušší volba – všechny funkce g_i jsou lineární.

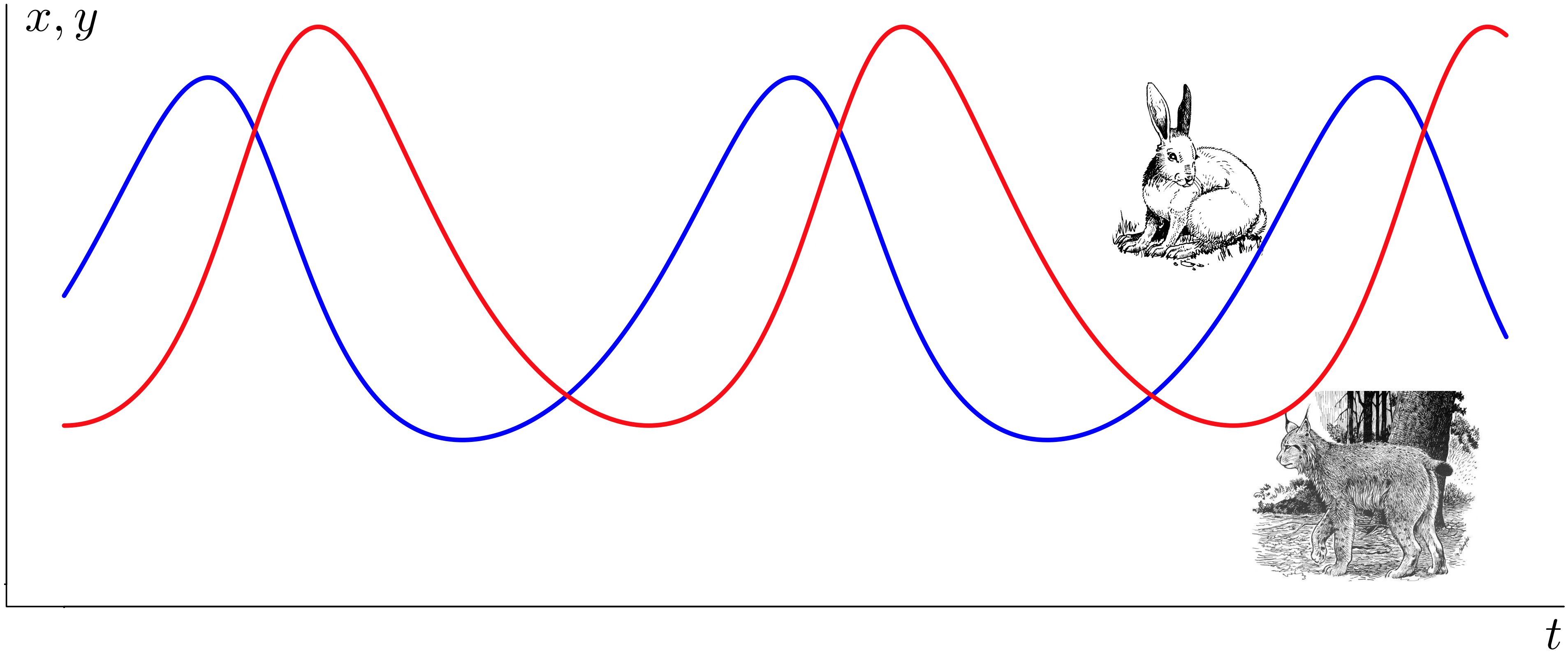
  $g_i(\boldsymbol{x}) = g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij} x_j = (\mathsf{B}\boldsymbol{x})_i$

$$x_i' = x_i\big(r_i - (\mathsf{B}\boldsymbol{x})_i\big), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} \circ (\boldsymbol{r} - \mathsf{B}\boldsymbol{x})$$

Příklad: klasický model dravec-kořist

$$x' = x(r - by),$$
$$y' = y(-s + cx).$$



Příklad: klasický model dravec-kořist

$$
\begin{aligned}
x' &= x(r - by),\\
y' &= y(-s + cx).
\end{aligned}
$$

Transformace: $\xi = \ln x$, $\eta = \ln y$.

$$
\begin{aligned}
\xi' &= r - b\mathrm{e}^{\eta},\\
\eta' &= -s + c\mathrm{e}^{\xi}.
\end{aligned}
$$

Příklad: klasický model dravec-kořist

$$x' = x(r - by),$$
$$y' = y(-s + cx).$$

Transformace: $\xi = \ln x$, $\eta = \ln y$.

$$\xi' = r - b\mathrm{e}^{\eta},$$
$$\eta' = -s + c\mathrm{e}^{\xi}.$$

Bipartitní systém

Příklad: klasický model dravec-kořist

$$
\begin{aligned}
x' &= x(r - by),\\
y' &= y(-s + cx).
\end{aligned}
$$

Bipartitní systém

$$x' = x(r - by),$$
$$y' = y(-s + cx).$$

Bipartitní systém

$H(x,y) = cx + by - s\ln x - r\ln y$

$$\frac{\partial}{\partial x}H(x,y) = c - \frac{s}{x} \qquad \frac{\partial}{\partial y}H(x,y) = b - \frac{r}{y}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -xy\left(b - \frac{r}{y}\right) \\ xy\left(c - \dfrac{s}{x}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -xy \\ xy & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}H(x,y) \\ \dfrac{\partial}{\partial y}H(x,y) \end{pmatrix}$$

Příklad: klasický model dravec-kořist

$$\begin{aligned} x' &= x(r - by), \\ y' &= y(-s + cx). \end{aligned}$$

Bipartitní systém

$$H(x,y) = cx + by - s\ln x - r\ln y$$

$$\frac{\partial}{\partial x}H(x,y) = c - \frac{s}{x} \qquad \frac{\partial}{\partial y}H(x,y) = b - \frac{r}{y}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -xy\left(b - \frac{r}{y}\right) \\ xy\left(c - \dfrac{s}{x}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -xy \\ xy & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}H(x,y) \\ \dfrac{\partial}{\partial y}H(x,y) \end{pmatrix}$$

Hamiltonovský systém

Boj o život (Struggle for existence)

$\xi_i = \xi_i(t)$ ... abundance i-tého druhu

Boj o život (Struggle for existence)

$\xi_i = \xi_i(t)$ ... abundance i-tého druhu

$$\xi_i' = \xi_i \varphi_i(\boldsymbol{\xi}), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Boj o život (Struggle for existence)

$\xi_i = \xi_i(t)$ ... abundance i-tého druhu

$$\xi_i' = \xi_i \varphi_i(\boldsymbol{\xi}), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$N := \sum_{j=1}^{n} \xi_j$$

$x_i := \dfrac{\xi_i}{N}$ ... relativní abundance i-tého druhu

Boj o život (Struggle for existence)

$\xi_i = \xi_i(t)$ ... abundance i-tého druhu

$$\xi_i' = \xi_i \varphi_i(\boldsymbol{\xi}), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$N := \sum_{j=1}^{n} \xi_j$$

$x_i := \dfrac{\xi_i}{N}$ ... relativní abundance i-tého druhu

$$x_i' = \frac{\xi_i' N - \xi_i N'}{N^2}$$

Boj o život (Struggle for existence)

$\xi_i = \xi_i(t)$ ... abundance i-tého druhu

$$\xi_i' = \xi_i \varphi_i(\boldsymbol{\xi}), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$N := \sum_{j=1}^{n} \xi_j, \quad N' = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \varphi_j(\boldsymbol{\xi})$$

$x_i := \dfrac{\xi_i}{N}$ ... relativní abundance i-tého druhu

$$x_i' = \frac{\xi_i' N - \xi_i N'}{N^2}$$

Boj o život (Struggle for existence)

$\xi_i = \xi_i(t)$ ... abundance i-tého druhu

$$\xi_i' = \xi_i \varphi_i(\boldsymbol{\xi}), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$N := \sum_{j=1}^{n} \xi_j, \quad N' = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \varphi_j(\boldsymbol{\xi})$

$x_i := \dfrac{\xi_i}{N}$ ... relativní abundance i-tého druhu

$$x_i' = \frac{\xi_i' N - \xi_i N'}{N^2} = x_i \varphi(\boldsymbol{\xi}) - x_i \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi_j(\boldsymbol{\xi})$$

Boj o život (Struggle for existence)

$\xi_i = \xi_i(t)$ ... abundance i-tého druhu

$$\xi_i' = \xi_i \varphi_i(\boldsymbol{\xi}), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$N := \sum_{j=1}^{n} \xi_j, \quad N' = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \varphi_j(\boldsymbol{\xi})$

$x_i := \dfrac{\xi_i}{N}$ ... relativní abundance i-tého druhu

$x_i' = \dfrac{\xi_i' N - \xi_i N'}{N^2} = x_i \varphi(\boldsymbol{\xi}) - x_i \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi_j(\boldsymbol{\xi})$

$f_i(\boldsymbol{x}) := \varphi_i(N\boldsymbol{x}) = \varphi_i(\boldsymbol{\xi})$

Boj o život (Struggle for existence)

$\xi_i = \xi_i(t)$ . . . abundance i-tého druhu

$$\xi_i' = \xi_i \varphi_i(\boldsymbol{\xi}), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$N := \sum_{j=1}^{n} \xi_j, \quad N' = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \varphi_j(\boldsymbol{\xi})$$

$x_i := \dfrac{\xi_i}{N}$ . . . relativní abundance i-tého druhu

$$x_i' = \frac{\xi_i' N - \xi_i N'}{N^2} = x_i f_i(\boldsymbol{x}) - x_i \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x})$$

$$f_i(\boldsymbol{x}) := \varphi_i(N\boldsymbol{x}) = \varphi_i(\boldsymbol{\xi})$$

Boj o život (Struggle for existence)

$\xi_i = \xi_i(t)$ ... abundance i-tého druhu

$$\xi_i' = \xi_i \varphi_i(\boldsymbol{\xi}), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$N := \sum_{j=1}^{n} \xi_j, \quad N' = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \varphi_j(\boldsymbol{\xi})$$

$x_i := \dfrac{\xi_i}{N}$ ... relativní abundance i-tého druhu

$$x_i' = \frac{\xi_i' N - \xi_i N'}{N^2} = x_i f_i(\boldsymbol{x}) - x_i \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x})$$

$$f_i(\boldsymbol{x}) := \varphi_i(N\boldsymbol{x}) = \varphi_i(\boldsymbol{\xi})$$

$$\bar{f}(\boldsymbol{x}) := \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x})$$

Boj o život (Struggle for existence)

$\xi_i = \xi_i(t)$ … abundance i-tého druhu

$$\xi_i' = \xi_i \varphi_i(\boldsymbol{\xi}), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$N := \sum_{j=1}^{n} \xi_j, \quad N' = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \varphi_j(\boldsymbol{\xi})$$

$x_i := \dfrac{\xi_i}{N}$ … relativní abundance i-tého druhu

$$x_i' = \frac{\xi_i' N - \xi_i N'}{N^2} = x_i f_i(\boldsymbol{x}) - x_i \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x})$$

$$f_i(\boldsymbol{x}) := \varphi_i(N\boldsymbol{x}) = \varphi_i(\boldsymbol{\xi})$$

$$\bar{f}(\boldsymbol{x}) := \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x})$$

$$x_i' = x_i\big(f_i(\boldsymbol{x}) - \bar{f}(\boldsymbol{x})\big), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Boj o život (Struggle for existence)

$\xi_i = \xi_i(t)$ ... abundance i-tého druhu

$$\xi_i' = \xi_i \varphi_i(\boldsymbol{\xi}), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$N := \sum_{j=1}^{n} \xi_j, \quad N' = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \varphi_j(\boldsymbol{\xi})$

$x_i := \dfrac{\xi_i}{N}$ ... relativní abundance i-tého druhu

$x_i' = \dfrac{\xi_i' N - \xi_i N'}{N^2} = x_i f_i(\boldsymbol{x}) - x_i \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x})$

$f_i(\boldsymbol{x})$ ... zdatnost (fitness) i-tého druhu

$\bar{f}(\boldsymbol{x})$ ... průměrná zdatnost

$$x_i' = x_i\big(f_i(\boldsymbol{x}) - \bar{f}(\boldsymbol{x})\big), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Selekční systém

Vývoj abundancí druhů tvořících společenstvo:

$$\xi_i' = \xi_i \varphi_i(\boldsymbol{\xi}), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Vývoj relativních abundancí:

$$x_i' = x_i\big(f_i(\boldsymbol{x}) - \bar{f}(\boldsymbol{x})\big), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Selekční systém

Vývoj abundancí druhů tvořících společenstvo:

$$\xi_i' = \xi_i \varphi_i(\boldsymbol{\xi}), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Vývoj relativních abundancí:

$$x_i' = x_i \big(f_i(\boldsymbol{x}) - \bar{f}(\boldsymbol{x}) \big), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

vektor abundancí:

$$\boldsymbol{\xi}' = \boldsymbol{\xi} \circ \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi})$$

vektor relativních abundancí:

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} \circ (\mathsf{E} - \boldsymbol{x}\mathbf{1}^{\mathsf{T}}) \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

Selekční systém

Vývoj abundancí druhů tvořících společenstvo:

$$\xi_i' = \xi_i \varphi_i(\boldsymbol{\xi}), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Vývoj relativních abundancí:

$$x_i' = x_i\big(f_i(\boldsymbol{x}) - \bar{f}(\boldsymbol{x})\big), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

vektor abundancí:

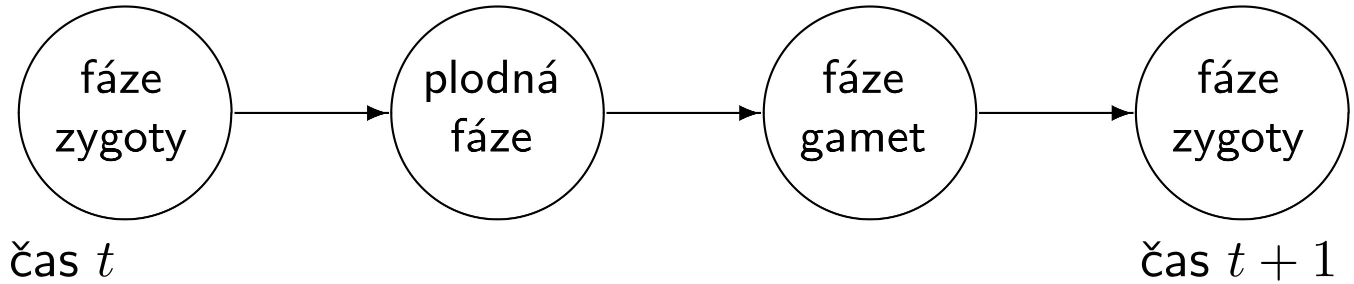
$$\boldsymbol{\xi}' = \boldsymbol{\xi} \circ \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi})$$

vektor relativních abundancí:

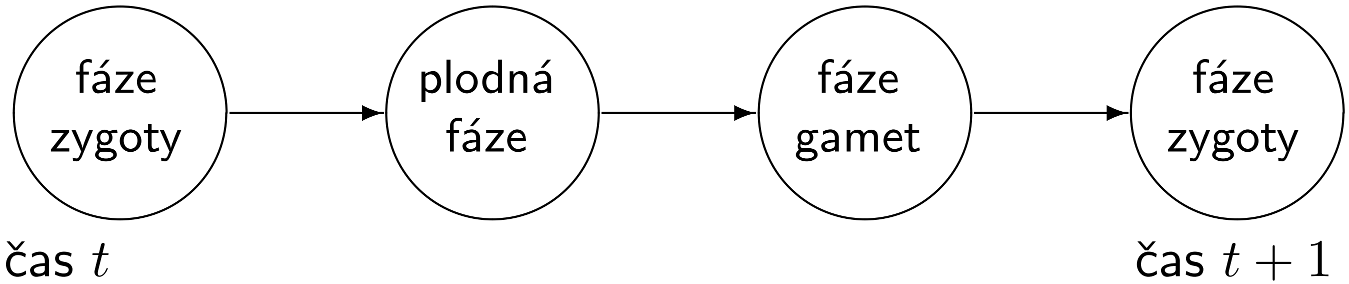
$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} \circ (\mathsf{E} - \boldsymbol{x}\mathbf{1}^{\mathsf{T}})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

Genetika

FHW rovnice

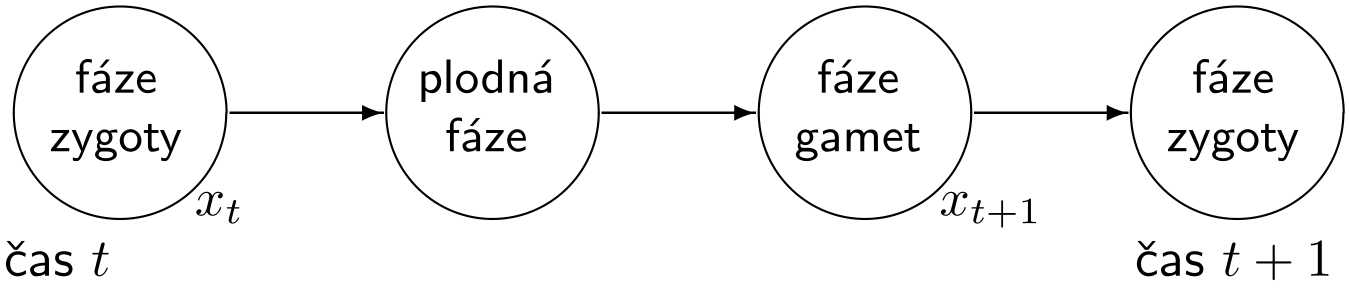


FHW rovnice



Lokus s alelami A, a

FHW rovnice

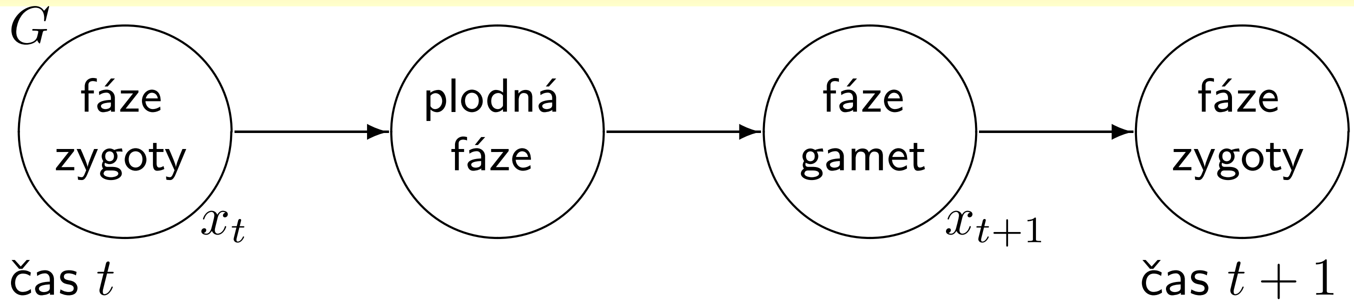


Lokus s alelami A, a

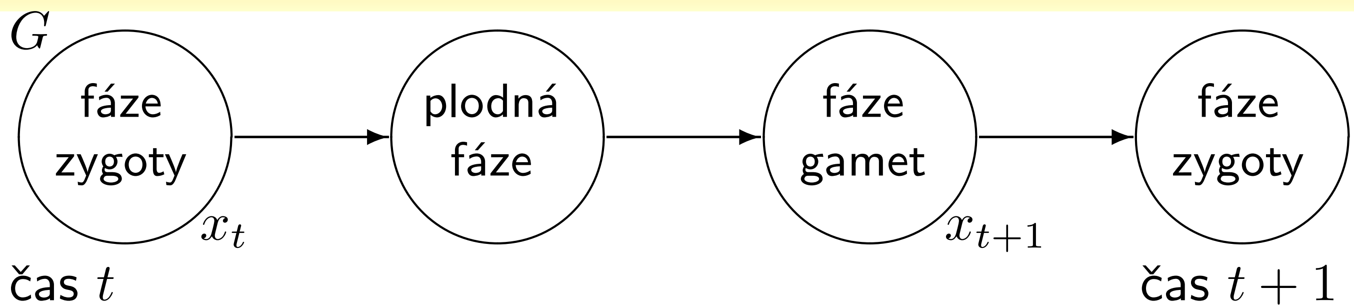
x_t ... relativní četnost alely A v čase t

$1 - x_t$ ... relativní četnost alely a v čase t

FHW rovnice



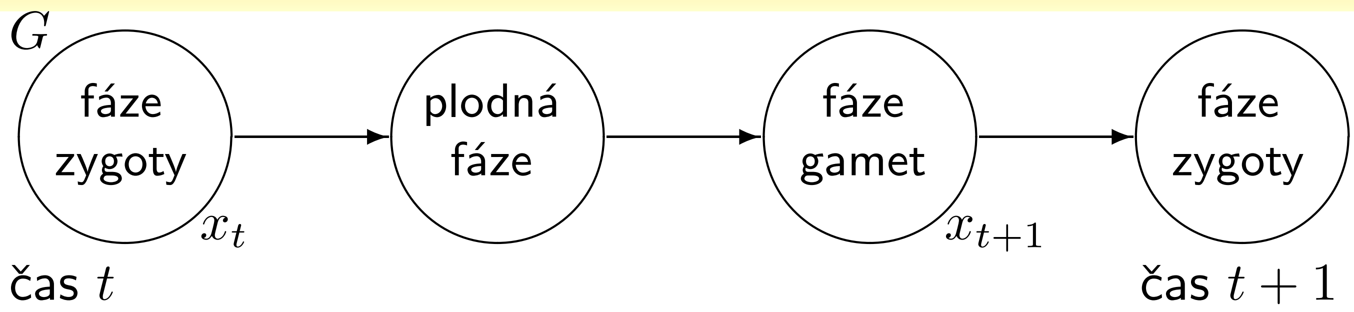
Lokus s alelami A, a
x_t . . . relativní četnost alely A v čase t
G_t . . . počet zygot



Lokus s alelami A, a
x_t . . . relativní četnost alely A v čase t
G_t . . . počet zygot
p_{AA} . . . relativní četnost genotypu AA, atd.

$$\begin{aligned} p_{AA} &= x_t x_t \\ p_{Aa} &= x_t(1-x_t) + (1-x_t)x_t \\ p_{aa} &= (1-x_t)(1-x_t) \end{aligned}$$

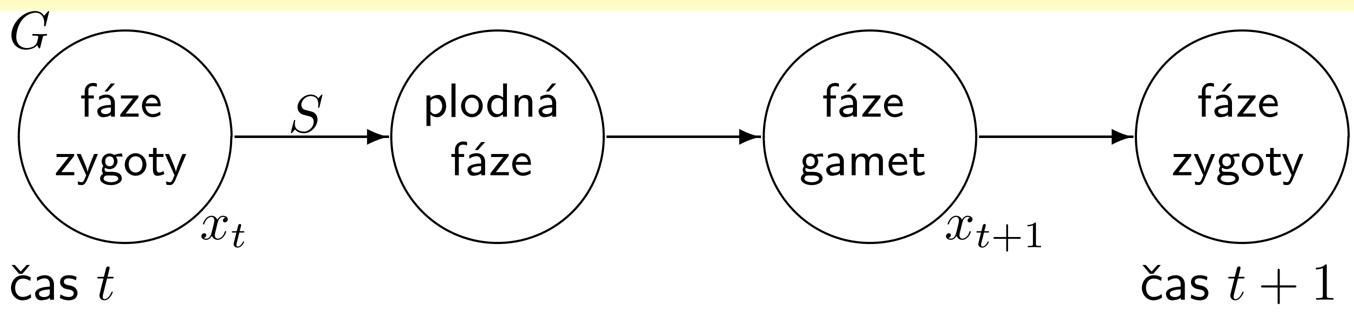
FHW rovnice



Lokus s alelami A, a
x_t ... relativní četnost alely A v čase t
G_t ... počet zygot
p_{AA} ... relativní četnost genotypu AA, atd.

$$p_{AA} = x_t^2, \quad p_{Aa} = 2x_t(1-x_t), \quad p_{aa} = (1-x_t)^2$$

FHW rovnice

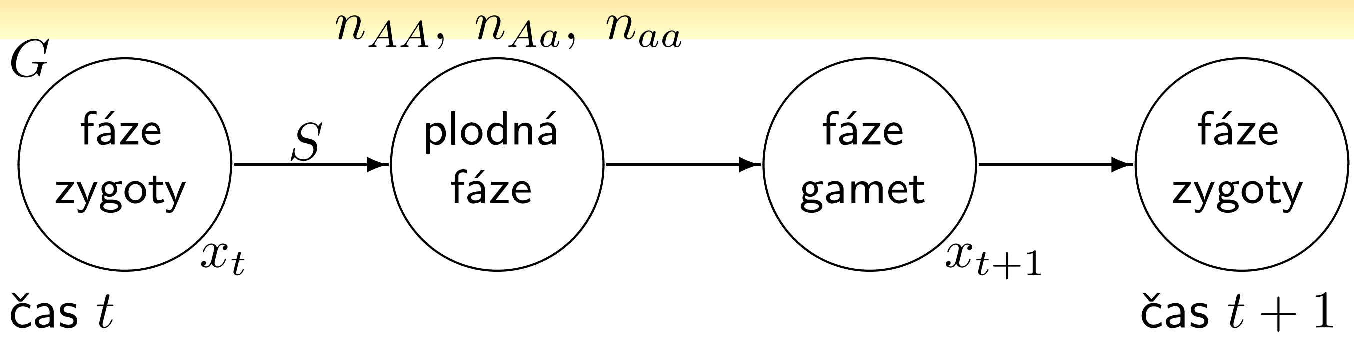


Lokus s alelami A, a
x_t . . . relativní četnost alely A v čase t
G_t . . . počet zygot
p_{AA} . . . relativní četnost genotypu AA, atd.

$$p_{AA} = x_t^2, \quad p_{Aa} = 2x_t(1-x_t), \quad p_{aa} = (1-x_t)^2$$

S_{AA} . . . pravděpodobnost, že zygota genotypu AA přežije až do fáze plodnosti, atd.

FHW rovnice

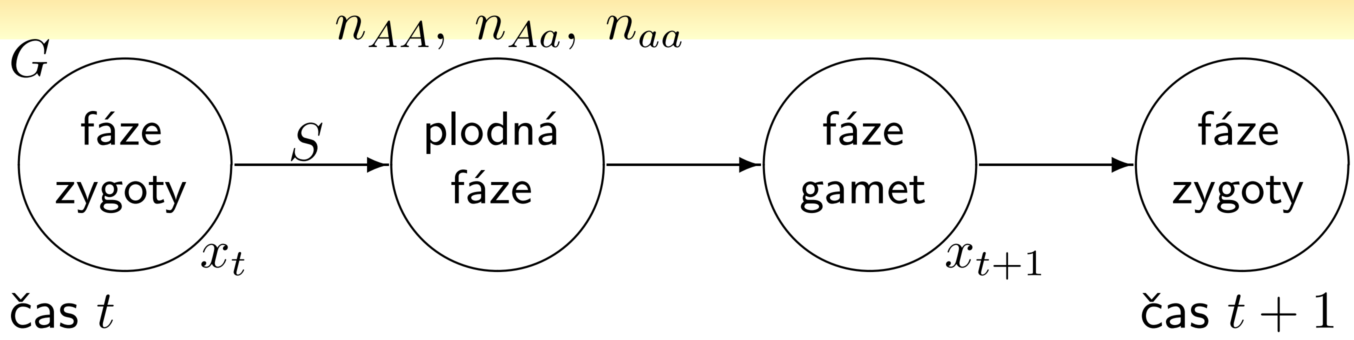


Lokus s alelami A, a
x_t ... relativní četnost alely A v čase t
G_t ... počet zygot
p_{AA} ... relativní četnost genotypu AA, atd.

$$p_{AA} = x_t^2, \quad p_{Aa} = 2x_t(1-x_t), \quad p_{aa} = (1-x_t)^2$$

S_{AA} ... pravděpodobnost, že zygota genotypu AA přežije až do fáze plodnosti, atd.
n_{AA} ... počet plodných jedinců genotypu AA, $n_{AA} = S_{AA} p_{AA} G_t$, atd.

FHW rovnice



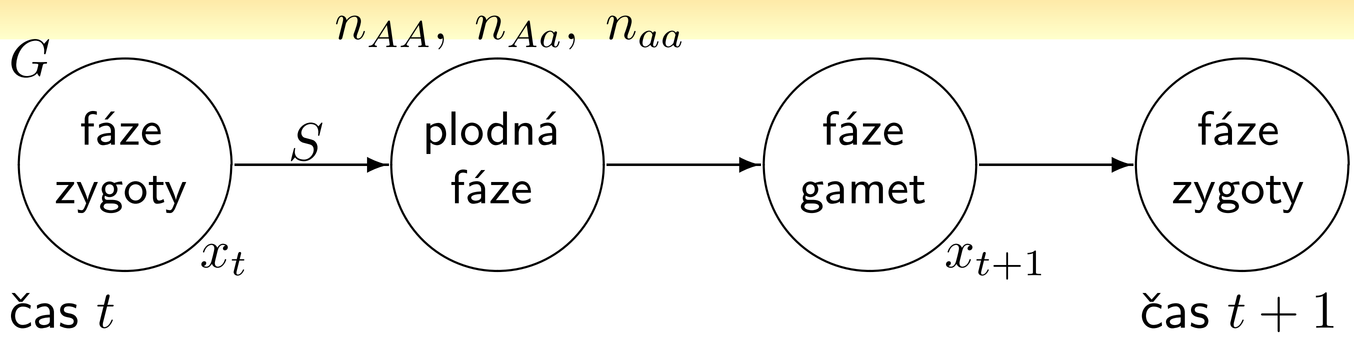
Lokus s alelami A, a
x_t ... relativní četnost alely A v čase t
G_t ... počet zygot
p_{AA} ... relativní četnost genotypu AA, atd.

$$p_{AA} = x_t^2, \quad p_{Aa} = 2x_t(1-x_t), \quad p_{aa} = (1-x_t)^2$$

S_{AA} ... pravděpodobnost, že zygota genotypu AA přežije až do fáze plodnosti, atd.
n_{AA} ... počet plodných jedinců genotypu AA, $n_{AA} = S_{AA}p_{AA}G_t$, atd.

$$n_{AA} = S_{AA}G_t x_t^2,\ n_{Aa} = 2S_{Aa}G_t x_t(1-x_t),\ n_{aa} = S_{aa}G_t(1-x_t)^2$$

FHW rovnice



Lokus s alelami A, a
x_t ... relativní četnost alely A v čase t
G_t ... počet zygot
p_{AA} ... relativní četnost genotypu AA, atd.

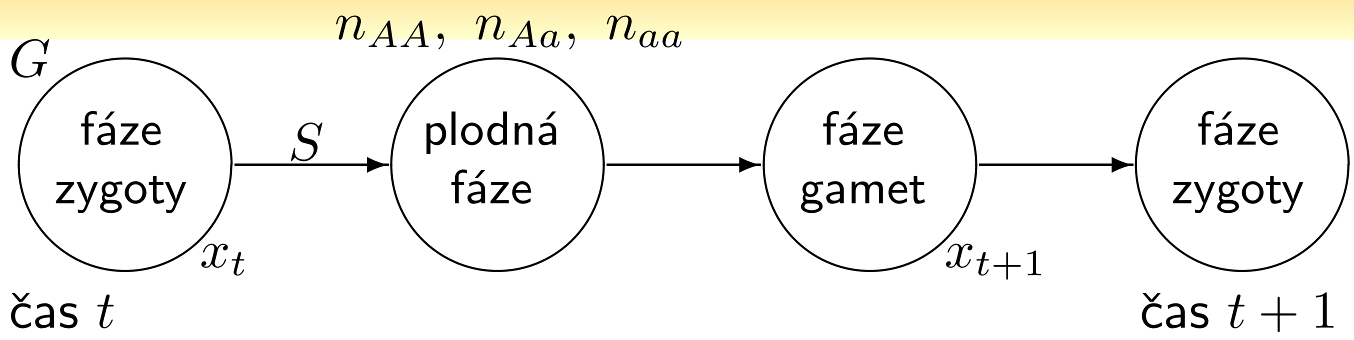
$$p_{AA} = x_t^2, \quad p_{Aa} = 2x_t(1-x_t), \quad p_{aa} = (1-x_t)^2$$

S_{AA} ... pravděpodobnost, že zygota genotypu AA přežije až do fáze plodnosti, atd.
n_{AA} ... počet plodných jedinců genotypu AA, $n_{AA} = S_{AA}p_{AA}G_t$, atd.

$$n_{AA} = S_{AA}G_t x_t^2,\ n_{Aa} = 2S_{Aa}G_t x_t(1-x_t),\ n_{aa} = S_{aa}G_t(1-x_t)^2$$

$$x_{t+1} = \frac{2n_{AA} + n_{Aa}}{2(n_{AA} + n_{Aa} + n_{aa})}$$

FHW rovnice



Lokus s alelami A, a

x_t . . . relativní četnost alely A v čase t

G_t . . . počet zygot

p_{AA} . . . relativní četnost genotypu AA, atd.

$$p_{AA} = x_t^2, \quad p_{Aa} = 2x_t(1-x_t), \quad p_{aa} = (1-x_t)^2$$

S_{AA} . . . pravděpodobnost, že zygota genotypu AA přežije až do fáze plodnosti, atd.

n_{AA} . . . počet plodných jedinců genotypu AA, $n_{AA} = S_{AA}p_{AA}G_t$, atd.

$$n_{AA} = S_{AA}G_t x_t^2,\ n_{Aa} = 2S_{Aa}G_t x_t(1-x_t),\ n_{aa} = S_{aa}G_t(1-x_t)^2$$

$$x_{t+1} = \frac{2n_{AA} + n_{Aa}}{2(n_{AA}+n_{Aa}+n_{aa})} = x_t \frac{S_{AA}x_t + S_{Aa}(1-x_t)}{S_{AA}x_t^2 + 2S_{Aa}x_t(1-x_t) + S_{aa}(1-x_t)^2}$$

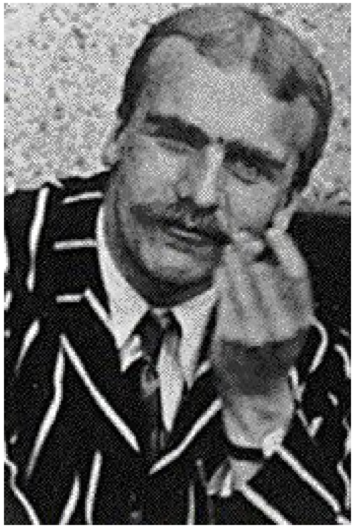
FHW rovnice

$$x_{t+1} = x_t \frac{S_{AA} x_t + S_{Aa}(1 - x_t)}{S_{AA} x_t^2 + 2S_{Aa} x_t (1 - x_t) + S_{aa}(1 - x_t)^2}$$

FHW rovnice

$$x_{t+1} = x_t \frac{S_{AA}x_t + S_{Aa}(1-x_t)}{S_{AA}x_t^2 + 2S_{Aa}x_t(1-x_t) + S_{aa}(1-x_t)^2}$$

Fisherova-Haldaneova-Wrightova rovnice matematické populační genetiky



FHW rovnice

$$x_{t+1} = x_t \frac{S_{AA}x_t + S_{Aa}(1 - x_t)}{S_{AA}x_t^2 + 2S_{Aa}x_t(1 - x_t) + S_{aa}(1 - x_t)^2}$$

Fisherova-Haldaneova-Wrightova rovnice matematické populační genetiky

w . . . náhodná veličina „zdatnost alely"

FHW rovnice

$$x_{t+1} = x_t \frac{S_{AA}x_t + S_{Aa}(1-x_t)}{S_{AA}x_t^2 + 2S_{Aa}x_t(1-x_t) + S_{aa}(1-x_t)^2}$$

Fisherova-Haldaneova-Wrightova rovnice matematické populační genetiky

w ... náhodná veličina „zdatnost alely"

$$w = \begin{cases} 1, & \text{alela je v genotypu přežívajícího jedince} \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

FHW rovnice

$$x_{t+1} = x_t \frac{S_{AA}x_t + S_{Aa}(1-x_t)}{S_{AA}x_t^2 + 2S_{Aa}x_t(1-x_t) + S_{aa}(1-x_t)^2}$$

Fisherova-Haldaneova-Wrightova rovnice matematické populační genetiky

w . . . náhodná veličina „zdatnost alely"
$\bar{w}$ . . . střední hodnota w

FHW rovnice

$$x_{t+1} = x_t \frac{S_{AA}x_t + S_{Aa}(1-x_t)}{S_{AA}x_t^2 + 2S_{Aa}x_t(1-x_t) + S_{aa}(1-x_t)^2}$$

Fisherova-Haldaneova-Wrightova rovnice matematické populační genetiky

w ... náhodná veličina „zdatnost alely"
$\bar{w}$ ... střední hodnota w

$\bar{w} = S_{AA}x_t^2 + 2S_{Aa}x_t(1-x_t) + S_{aa}(1-x_t)^2$

FHW rovnice

$$x_{t+1} = x_t \frac{S_{AA}x_t + S_{Aa}(1-x_t)}{S_{AA}x_t^2 + 2S_{Aa}x_t(1-x_t) + S_{aa}(1-x_t)^2}$$

Fisherova-Haldaneova-Wrightova rovnice matematické populační genetiky

w ... náhodná veličina „zdatnost alely"
$\bar{w}$ ... střední hodnota w

$$\begin{aligned}\bar{w} = S_{AA}x_t^2 + 2S_{Aa}x_t(1-x_t) + S_{aa}(1-x_t)^2 &= \\ = \big(S_{AA}x_t + S_{Aa}(1-x_t)\big)x_t + \big(S_{Aa}x_t + S_{aa}(1-x_t)\big)(1-x_t)\end{aligned}$$

FHW rovnice

$$x_{t+1} = x_t \frac{S_{AA}x_t + S_{Aa}(1-x_t)}{S_{AA}x_t^2 + 2S_{Aa}x_t(1-x_t) + S_{aa}(1-x_t)^2}$$

Fisherova-Haldaneova-Wrightova rovnice matematické populační genetiky

w ... náhodná veličina „zdatnost alely"
$\bar{w}$ ... střední hodnota w

$$\begin{aligned}\bar{w} = S_{AA}x_t^2 + 2S_{Aa}x_t(1-x_t) + S_{aa}(1-x_t)^2 &= \\ = \big(S_{AA}x_t + S_{Aa}(1-x_t)\big)x_t + \big(S_{Aa}x_t + S_{aa}(1-x_t)\big)(1-x_t) &= \\ = w_A x_t + w_a(1-x_t)\end{aligned}$$

FHW rovnice

$$x_{t+1} = x_t \frac{S_{AA}x_t + S_{Aa}(1-x_t)}{S_{AA}x_t^2 + 2S_{Aa}x_t(1-x_t) + S_{aa}(1-x_t)^2}$$

Fisherova-Haldaneova-Wrightova rovnice matematické populační genetiky

w ... náhodná veličina „zdatnost alely"
$\bar{w}$ ... střední hodnota w

$$\begin{aligned}\bar{w} = S_{AA}x_t^2 + 2S_{Aa}x_t(1-x_t) + S_{aa}(1-x_t)^2 &= \\ = \big(S_{AA}x_t + S_{Aa}(1-x_t)\big)x_t + \big(S_{Aa}x_t + S_{aa}(1-x_t)\big)(1-x_t) &= \\ = w_A x_t + w_a(1-x_t)&\end{aligned}$$

w_A ... zdatnost alely A
w_a ... zdatnost alely a

FHW rovnice

$$x_{t+1} = x_t \frac{S_{AA}x_t + S_{Aa}(1-x_t)}{S_{AA}x_t^2 + 2S_{Aa}x_t(1-x_t) + S_{aa}(1-x_t)^2}$$

Fisherova-Haldaneova-Wrightova rovnice matematické populační genetiky

w . . . náhodná veličina „zdatnost alely"
$\bar{w}$ . . . střední hodnota w

$$\begin{aligned}\bar{w} = S_{AA}x_t^2 + 2S_{Aa}x_t(1-x_t) + S_{aa}(1-x_t)^2 &= \\ = \big(S_{AA}x_t + S_{Aa}(1-x_t)\big)x_t + \big(S_{Aa}x_t + S_{aa}(1-x_t)\big)(1-x_t) &= \\ = w_A x_t + w_a(1-x_t)\end{aligned}$$

w_A . . . zdatnost alely A
w_a . . . zdatnost alely a

$$x_{t+1} = x_t \frac{w_A}{\bar{w}}$$

FHW rovnice

$$x_{t+1} = x_t \frac{S_{AA}x_t + S_{Aa}(1-x_t)}{S_{AA}x_t^2 + 2S_{Aa}x_t(1-x_t) + S_{aa}(1-x_t)^2}$$

Fisherova-Haldaneova-Wrightova rovnice matematické populační genetiky

w ... náhodná veličina „zdatnost alely"
$\bar{w}$ ... střední hodnota w

$$\begin{aligned}\bar{w} = S_{AA}x_t^2 + 2S_{Aa}x_t(1-x_t) + S_{aa}(1-x_t)^2 &= \\ = \big(S_{AA}x_t + S_{Aa}(1-x_t)\big)x_t + \big(S_{Aa}x_t + S_{aa}(1-x_t)\big)(1-x_t) &= \\ = w_A x_t + w_a(1-x_t)\end{aligned}$$

w_A ... zdatnost alely A
w_a ... zdatnost alely a

$$x_{t+1} = x_t \frac{w_A}{\bar{w}}$$

$$\Delta x_t = x_t \left(\frac{w_A}{\bar{w}} - 1 \right)$$

FHW rovnice

$$\Delta x = x\left(\frac{w_A}{\bar{w}} - 1\right)$$

FHW rovnice

$$\Delta x = x\left(\frac{w_A}{\bar{w}} - 1\right)$$

$f_A = \dfrac{w_A}{\bar{w}}$ ... normalizovaná relativní zdatnost alely A

FHW rovnice

$$\Delta x = x\left(\frac{w_A}{\bar{w}} - 1\right)$$

$f_A = \dfrac{w_A}{\bar{w}}$ ... normalizovaná relativní zdatnost alely A

$$\Delta x = x(f_A - 1)$$

Replikátorová rovnice

FHW rovnice

$$\Delta x = x\left(\frac{w_A}{\bar{w}} - 1\right)$$

$f_A = \dfrac{w_A}{\bar{w}}$ ... normalizovaná relativní zdatnost alely A

$$\Delta x = x(f_A - 1)$$

Replikátorová rovnice

Rovnice odvozená ze selekčního systému:

$$x_i' = x_i\big(f_i(\boldsymbol{x}) - \bar{f}(\boldsymbol{x})\big), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

FHW rovnice

$$\Delta x = x\left(\frac{w_A}{\bar{w}} - 1\right)$$

$f_A = \dfrac{w_A}{\bar{w}}$ ... normalizovaná relativní zdatnost alely A

$$\Delta x = x(f_A - 1)$$

Replikátorová rovnice

Rovnice odvozená ze selekčního systému:

$$x_i' = x_i\big(f_i(\boldsymbol{x}) - \bar{f}(\boldsymbol{x})\big), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Replikátorová rovnice I

Obecné vlastnosti replikátorové rovnice

$$x_i' = x_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}) \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Obecné vlastnosti replikátorové rovnice

$$x_i' = x_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}) \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$S_n = \left\{ \boldsymbol{x} \in \bar{\mathbb{R}}_+^n \ : \mathbf{1}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} = 1 \right\}, \quad S_n^\circ = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^n \ : \mathbf{1}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} = 1 \right\}, \quad \partial S_n = S_n \setminus S_n^\circ$$

n-rozměrný simplex, resp. jeho vnitřek, resp. jeho hranice.

Obecné vlastnosti replikátorové rovnice

$$x_i' = x_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}) \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

- $\boldsymbol{x}(0) \in S_n \Rightarrow \boldsymbol{x}(t) \in S_n$ pro všechna $t \geq 0$

Obecné vlastnosti replikátorové rovnice

$$x_i' = x_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}) \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

- $\boldsymbol{x}(0) \in S_n \Rightarrow \boldsymbol{x}(t) \in S_n$ pro všechna $t \geq 0$
- $\boldsymbol{x}(0) \in \partial S_n \Rightarrow \boldsymbol{x}(t) \in \partial S_n$ pro všechna $t \geq 0$

Obecné vlastnosti replikátorové rovnice

$$x_i' = x_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}) \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

- $\boldsymbol{x}(0) \in S_n \Rightarrow \boldsymbol{x}(t) \in S_n$ pro všechna $t \geq 0$
- $\boldsymbol{x}(0) \in \partial S_n \Rightarrow \boldsymbol{x}(t) \in \partial S_n$ pro všechna $t \geq 0$
- $\boldsymbol{x}(0) \in S_n^{\circ} \Rightarrow \boldsymbol{x}(t) \in S_n^{\circ}$ pro všechna $t \geq 0$

Obecné vlastnosti replikátorové rovnice

$$x_i' = x_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}) \right), \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

- $\boldsymbol{x}(0) \in S_n \Rightarrow \boldsymbol{x}(t) \in S_n$ pro všechna $t \geq 0$
- $\boldsymbol{x}(0) \in \partial S_n \Rightarrow \boldsymbol{x}(t) \in \partial S_n$ pro všechna $t \geq 0$
- $\boldsymbol{x}(0) \in S_n^\circ \Rightarrow \boldsymbol{x}(t) \in S_n^\circ$ pro všechna $t \geq 0$
- Nechť $\Psi : S_n \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Položme $g_i = f_i + \Psi$ pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Pak $\boldsymbol{x}$ je řešením předchozí rovnice právě tehdy, když je řešením rovnice

$$x_i' = x_i \left(g_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j g_j(\boldsymbol{x}) \right), \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Obecné vlastnosti replikátorové rovnice

$$x_i' = x_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}) \right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Věta: Nechť existuje bod $\hat{\boldsymbol{x}} \in S_n$ a jeho okolí U tak, že

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i f_i(\boldsymbol{x}) > \bar{f}(\boldsymbol{x}) \quad \text{pro všechny } \boldsymbol{x} \in S_n \cap (U \setminus \{\hat{\boldsymbol{x}}\}) .$$

Pak $\hat{\boldsymbol{x}}$ je asymptoticky stabilní rovnovážný bod rovnice.

Obecné vlastnosti replikátorové rovnice

$$x_i' = x_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}) \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Věta: Nechť existuje bod $\hat{\boldsymbol{x}} \in S_n$ a jeho okolí U tak, že

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i f_i(\boldsymbol{x}) > \bar{f}(\boldsymbol{x}) \quad \text{pro všechny } \boldsymbol{x} \in S_n \cap (U \setminus \{\hat{\boldsymbol{x}}\}) .$$

Pak $\hat{\boldsymbol{x}}$ je asymptoticky stabilní rovnovážný bod rovnice.

$\hat{\boldsymbol{x}}$ . . . *evolučně stabilní stav.*

Rovnice s lineárními zdatnostmi

$$x_i' = x_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}) \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Rovnice s lineárními zdatnostmi

$$x_i' = x_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}) \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$$

Rovnice s lineárními zdatnostmi

$$x_i' = x_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}) \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$$

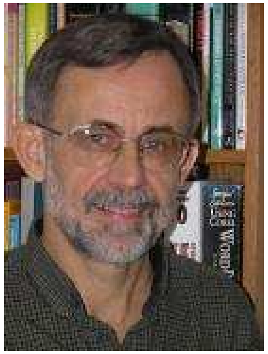
$$x_i' = x_i \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j a_{jk} x_k \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_i' = x_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}) \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$$

$$x_i' = x_i \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j a_{jk} x_k \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Taylorova-Jonkerova rovnice



Rovnice s lineárními zdatnostmi

$$x_i' = x_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}) \right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$$

$$x_i' = x_i \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j a_{jk} x_k \right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Taylorova-Jonkerova rovnice

$$x_i' = x_i \big((\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i - \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \boldsymbol{x} \big), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Rovnice s lineárními zdatnostmi

$$x_i' = x_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}) \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$$

$$x_i' = x_i \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j a_{jk} x_k \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Taylorova-Jonkerova rovnice

$$x_i' = x_i \big((\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i - \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \boldsymbol{x} \big), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_i' = x_i (\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{x})^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \boldsymbol{x}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Rovnice s lineárními zdatnostmi

$$x_i' = x_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}) \right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$$

$$x_i' = x_i \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j a_{jk} x_k \right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Taylorova-Jonkerova rovnice

$$x_i' = x_i \big((\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i - \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \boldsymbol{x} \big), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$x_i' = x_i (\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{x})^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \boldsymbol{x}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} \circ \big((\mathsf{E} - \boldsymbol{x} \mathbf{1}^{\mathsf{T}}) \mathsf{A} \boldsymbol{x} \big)$$

Taylorova-Jonkerova a Lotkovy-Volterrovy rovnice

$$x_i' = x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i - \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\mathsf{A}\boldsymbol{x}\big), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Taylorova-Jonkerova a Lotkovy-Volterrovy rovnice

$$x_i' = x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{x}\big), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Položme $b_{ij} = a_{nj} - a_{ij}$, $r_i = a_{in} - a_{nn}$ pro $i, j = 1, 2, \ldots, n-1$.
Transformace nezávisle proměnné (času) a funkcí x_i dané rovnostmi

$$\tau = \int_0^t x_n(s)\mathrm{d}s, \qquad y_j = \frac{x_j}{x_n}, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1$$

zobrazí trajektorie replikátorové rovnice s počáteční hodnotou ve vnitřku simplexu S_n° na trajektorie Lotkova-Volterrova systému

$$\frac{\mathrm{d}y_j}{\mathrm{d}\tau} = y_j\left(r_j - \sum_{k=1}^{n-1} b_{jk}y_k\right), \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1$$

s počáteční hodnotou v kladném orthantu $\mathbb{R}_+^{n-1}$.

Taylorova-Jonkerova a Lotkovy-Volterrovy rovnice

$$x_i' = x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{x}\big), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$y_j' = y_j\big(r_j - (\mathsf{B}\boldsymbol{y})_j\big), \qquad j = 1, 2, \dots, n-1$$

Systémy jsou topologicky ekvivalentní

Příklad: $n = 2$

Příklad: $n = 2$

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Příklad: $n = 2$

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

odpovídající Lotkova-Volterrova rovnice je

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = y\big(a_{12} - a_{22} - (a_{21} - a_{11})y\big)$$

Příklad: $n = 2$

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

odpovídající Lotkova-Volterrova rovnice je

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = y\big(a_{12} - a_{22} - (a_{21} - a_{11})y\big)$$

To je (Verhulstova) logistická rovnice.

Příklad: $n = 2$

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

odpovídající Lotkova-Volterrova rovnice je

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = y\big(a_{12} - a_{22} - (a_{21} - a_{11})y\big)$$

To je (Verhulstova) logistická rovnice.

Řešení s počáteční podmínkou $y(0) = y_0 > 0$ je

$$y(\tau) = \frac{(a_{12} - a_{22})y_0}{(a_{21} - a_{11})y_0 + \big(a_{12} - a_{22} - (a_{21} - a_{11})y_0\big)\mathrm{e}^{(a_{22} - a_{12})\tau}}$$

Vlastnosti Taylorovy-Jonkerovy rovnice

$$x_i' = x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{x}\big), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Vlastnosti Taylorovy-Jonkerovy rovnice

$$x_i' = x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{x}\big), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

- S_n, ∂S_n, S_n° jsou pozitivně invariantní množiny rovnice.

Vlastnosti Taylorovy-Jonkerovy rovnice

$$x_i' = x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{x}\big), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- S_n, ∂S_n, S_n° jsou pozitivně invariantní množiny rovnice.
- Přičtení diagonální matice k matici A nebo přičtení konstantního vektoru ke sloupci (řádku) matice A nezmění řešení rovnice.

Vlastnosti Taylorovy-Jonkerovy rovnice

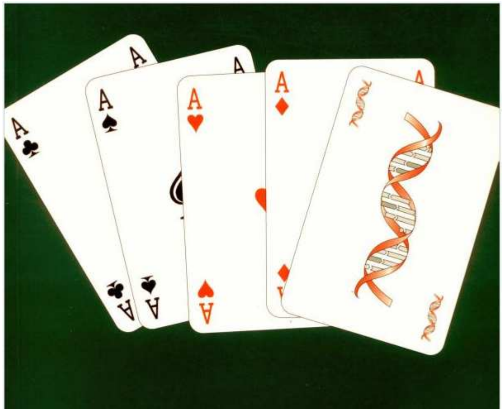
$$x_i' = x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{x}\big), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

- S_n, ∂S_n, S_n° jsou pozitivně invariantní množiny rovnice.
- Přičtení diagonální matice k matici A nebo přičtení konstantního vektoru ke sloupci (řádku) matice A nezmění řešení rovnice.
- Evolučně stabilní stav $\hat{\boldsymbol{x}}$ má vlastnost

$$\hat{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{x} > \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{x}$$

pro všechny $\boldsymbol{x} \in S_n \cap (U \setminus \{\hat{\boldsymbol{x}}\})$; U je okolí $\hat{\boldsymbol{x}}$.

Hry

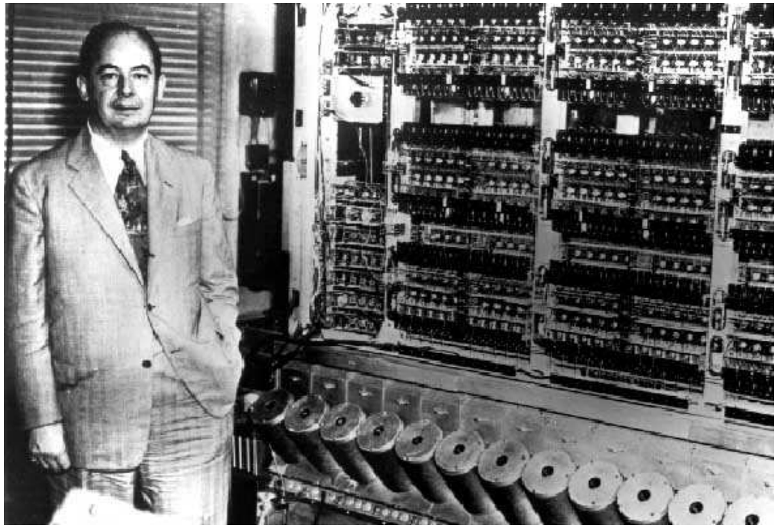


Definice

Hra dvou hráčů v normálním tvaru:
čtveřice $\mathcal{G} = (X, Y, u, v)$, kde X, Y jsou konečné množiny a u, v jsou funkce $X \times Y \to \mathbb{R}$.

Množiny X, resp. Y ... *množiny strategií prvního, resp. druhého, hráče*.

Funkce u, resp. v... *výplatní funkce prvního, resp. druhého, hráče*.



Definice

Položme

$$X = \{1, 2, \ldots, n\} \qquad Y = \{1, 2, \ldots, m\}$$

$$a_{ij} = u(i, j) \qquad b_{ji} = v(i, j)$$

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Definice

Položme

$$X = \{1, 2, \dots, n\} \quad Y = \{1, 2, \dots, m\}$$

$$a_{ij} = u(i, j) \quad b_{ji} = v(i, j)$$

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

S tímto označením máme

$$u(i, j) = a_{ij} = \boldsymbol{e}_i^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \boldsymbol{e}_j, \qquad v(i, j) = b_{ji} = \boldsymbol{e}_j^{\mathsf{T}} \mathsf{B} \boldsymbol{e}_i.$$

Matice A, B . . . *výplatní matice*.

Definice

$$\mathcal{G} = (X, Y, u, v) = (\mathsf{A}, \mathsf{B})$$

Hra může být reprezentována tabulkou

		hráč 2			
		1	2	$\dots$	m
hráč 1	1	b_{11} a_{11}	b_{21} a_{12}	$\dots$	b_{m1} a_{1m}
	2	b_{12} a_{21}	b_{22} a_{22}	$\dots$	b_{m2} a_{2m}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	n	b_{1n} a_{n1}	b_{2n} a_{n2}	$\dots$	b_{mn} a_{nm}

Definice

Pravděpodobnostní rozšíření bimaticové hry $\mathcal{G} = (X, Y, u, v)$:

čtveřice $\mathcal{G}^* = (X^*, Y^*, u^*, v^*)$;

$X^* = S_n$, $Y^* = S_m$,
u^*, v^* jsou funkce $X^* \times Y^* \to \mathbb{R}$, definované rovností

$$u^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^\mathsf{T} \mathsf{A} \boldsymbol{y}, \qquad v^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^\mathsf{T} \mathsf{B} \boldsymbol{x}.$$

X, Y . . . ryzí strategie

X^*, Y^* . . . smíšené strategie

Definice

Pravděpodobnostní rozšíření bimaticové hry $\mathcal{G} = (X, Y, u, v)$:

čtveřice $\mathcal{G}^* = (X^*, Y^*, u^*, v^*)$;

$X^* = S_n$, $Y^* = S_m$,
u^*, v^* jsou funkce $X^* \times Y^* \to \mathbb{R}$, definované rovností

$$u^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^\mathsf{T} \mathsf{A} \boldsymbol{y}, \qquad v^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^\mathsf{T} \mathsf{B} \boldsymbol{x}.$$

X, Y ... ryzí strategie

X^*, Y^* ... smíšené strategie

$\mathcal{G}^* = (X^*, Y^*, u^*, v^*) = (\mathsf{A}, \mathsf{B})$

Strategie

$\bar{\boldsymbol{x}} \in X^*$ ... *nejlepší odpověď na strategii* $\boldsymbol{y} \in Y^*$:

$$(\forall \boldsymbol{x} \in X^*)\ u^*(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) = \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \boldsymbol{y} = u^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

$\bar{\boldsymbol{y}} \in Y^*$ ... *nejlepší odpověď na strategii* $\boldsymbol{x} \in X^*$:

$$(\forall \boldsymbol{y} \in Y^*)\ v^*(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{y}}) = \bar{\boldsymbol{y}}^{\mathsf{T}} \mathsf{B} \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y}^{\mathsf{T}} \mathsf{B} \boldsymbol{x} = v^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Strategie

$\bar{\boldsymbol{x}} \in X^*$ ... *nejlepší odpověď na strategii* $\boldsymbol{y} \in Y^*$:

$$(\forall \boldsymbol{x} \in X^*)\ u^*(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) = \bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T} \mathsf{A} \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{x}^\mathsf{T} \mathsf{A} \boldsymbol{y} = u^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

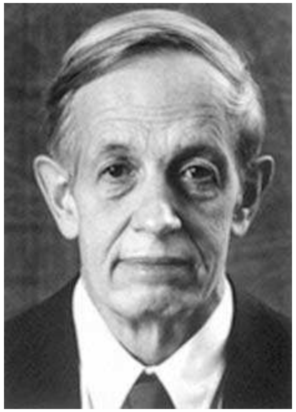
$\bar{\boldsymbol{y}} \in Y^*$ ... *nejlepší odpověď na strategii* $\boldsymbol{x} \in X^*$:

$$(\forall \boldsymbol{y} \in Y^*)\ v^*(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{y}}) = \bar{\boldsymbol{y}}^\mathsf{T} \mathsf{B} \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y}^\mathsf{T} \mathsf{B} \boldsymbol{x} = v^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

$(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) \in X^* \times Y^*$ ... *(Nashova) rovnováha*:

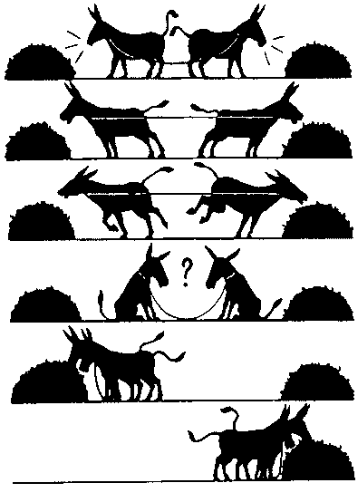
$$\forall (\boldsymbol{x} \in X^*) \forall (\boldsymbol{y} \in Y^*)\ \bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T} \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{x}^\mathsf{T} \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{y}}, \quad \bar{\boldsymbol{y}}^\mathsf{T} \mathsf{B} \bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{y}^\mathsf{T} \mathsf{B} \bar{\boldsymbol{x}}$$

tj. $\bar{\boldsymbol{x}}$ je nejlepší odpovědí na $\bar{\boldsymbol{y}}$ a současně $\bar{\boldsymbol{y}}$ je nejlepší odpovědí na $\bar{\boldsymbol{x}}$.



Partnerská hra

$\mathcal{G} = (\mathsf{A}, \mathsf{B})$, $c \in \mathbb{R}_+$



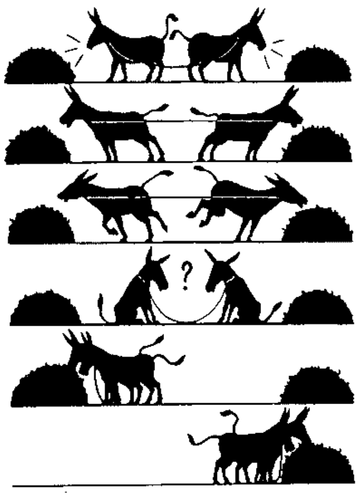
Partnerská hra

$\mathcal{G} = (\mathsf{A}, \mathsf{B})$, $c \in \mathbb{R}_+$

$\mathcal{G}$ se nazývá *c-partnerská hra*, pokud

$$(\exists \mathsf{D}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})\ \mathsf{A} = \mathsf{D} + \mathbf{1}\boldsymbol{q}^{\mathsf{T}}, \quad \mathsf{B} = c\mathsf{D}^{\mathsf{T}} + \mathbf{1}\boldsymbol{p}^{\mathsf{T}}$$

tj. $a_{ij} = d_{ij} + q_j, \quad b_{ji} = cd_{ij} + p_i$



Partnerská hra

$\mathcal{G} = (\mathsf{A}, \mathsf{B})$, $c \in \mathbb{R}_+$

$\mathcal{G}$ se nazývá c-*partnerská hra*, pokud

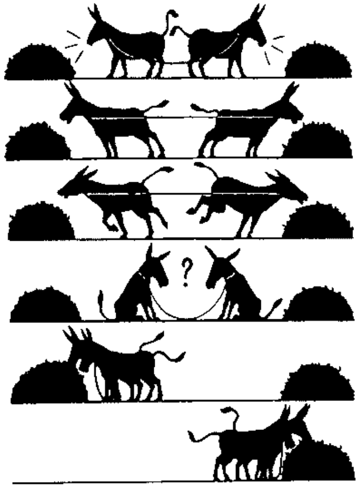
$$(\exists \mathsf{D}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})\ \mathsf{A} = \mathsf{D} + \mathbf{1}\boldsymbol{q}^{\mathsf{T}}, \quad \mathsf{B} = c\mathsf{D}^{\mathsf{T}} + \mathbf{1}\boldsymbol{p}^{\mathsf{T}}$$

tj. $a_{ij} = d_{ij} + q_j, \quad b_{ji} = cd_{ij} + p_i$

$\mathcal{G}$ se nazývá *hra se stejným zájmem (identical interest game)*, pokud

$$c = 1, \quad \boldsymbol{p} = \boldsymbol{o} = \boldsymbol{q}$$

tj. $\mathsf{A} = \mathsf{B}^{\mathsf{T}}$



Symetrická hra

$\mathcal{G} = (\mathsf{A}, \mathsf{B})$

Symetrická hra

$\mathcal{G} = (\mathsf{A}, \mathsf{B})$

$\mathcal{G}$ se nazývá *symetrická hra*, pokud

$$\mathsf{A} = \mathsf{B}$$

tj. $u(i,j) = v(j,i)$

Symetrická hra

$\mathcal{G} = (\mathsf{A}, \mathsf{B})$

$\mathcal{G}$ se nazývá *symetrická hra (maticová hra)*, pokud

$$\mathsf{A} = \mathsf{B}$$

tj. $u(i, j) = v(j, i)$

Symetrická hra

$\mathcal{G} = (\mathsf{A}, \mathsf{B})$

$\mathcal{G}$ se nazývá *symetrická hra (maticová hra)*, pokud

$$\mathsf{A} = \mathsf{B}$$

tj. $u(i, j) = v(j, i)$

$(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) \in X^{*2}$ je *rovnovážnou strategií*, pokud

$$(\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X^*)\ \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{y}}, \quad \bar{\boldsymbol{y}}^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{y}^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{x}}$$

Symetrická hra

$\mathcal{G} = (\mathsf{A}, \mathsf{B})$

$\mathcal{G}$ se nazývá *symetrická hra (maticová hra)*, pokud

$$\mathsf{A} = \mathsf{B}$$

tj. $u(i,j) = v(j,i)$

$(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) \in X^{*2}$ je *rovnovážnou strategií*, pokud

$$(\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X^*)\ \bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T} \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{x}^\mathsf{T} \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{y}}, \quad \bar{\boldsymbol{y}}^\mathsf{T} \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{y}^\mathsf{T} \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{x}}$$

$\bar{x} \in X^*$ je *symetrická (Nashova) rovnováha*, pokud
$(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{x}})$ je rovnováhou hry (A, A), tj.

$$(\forall \boldsymbol{x} \in X^*)\ \bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T} \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{x}^\mathsf{T} \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{x}}$$

Maticová hra a replikátorová rovnice

$$x_i' = x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{x}\big), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Maticová hra a replikátorová rovnice

$$x_i' = x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{x}\big), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$\hat{\boldsymbol{x}}$ – evolučně stabilní stav rovnice

$$\Downarrow$$

$\hat{\boldsymbol{x}}$ – nejlepší odpověď na jakoukoliv strategii z jejího okolí ve hře $\mathcal{G} = \mathsf{A}$

Maticová hra a replikátorová rovnice

$$x_i' = x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{x}\big), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$\hat{\boldsymbol{x}}$ – evolučně stabilní stav rovnice

$$\Downarrow$$

$\hat{\boldsymbol{x}}$ – nejlepší odpověď na jakoukoliv strategii z jejího okolí ve hře $\mathcal{G} = \mathsf{A}$

N ... množina symetrických Nashových rovnováh maticové hry $\mathcal{G} = \mathsf{A}$
E ... množina stacionárních řešení rovnice
S ... množina stabilních stacionárních řešení rovnice

$$S \subseteq N \subseteq E$$

Replikátorová rovnice II

Replikátorová rovnice bimaticové hry

$$
\begin{aligned}
x_i' &= x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{y})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}\big), && i = 1, 2, \ldots, n\\
y_j' &= y_j\big((\mathsf{B}\boldsymbol{x})_j - \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}\big), && j = 1, 2, \ldots, m
\end{aligned}
$$

Replikátorová rovnice bimaticové hry

$$\begin{aligned} x_i' &= x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{y})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}\big), & i &= 1,2,\dots,n \\ y_j' &= y_j\big((\mathsf{B}\boldsymbol{x})_j - \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}\big), & j &= 1,2,\dots,m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_i' &= x_i(\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{x})^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}, & i &= 1,2,\dots,n \\ y_j' &= y_j(\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{y})^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}, & j &= 1,2,\dots,m \end{aligned}$$

Replikátorová rovnice bimaticové hry

$$
\begin{aligned}
x_i' &= x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{y})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}\big), && i = 1, 2, \dots, n\\
y_j' &= y_j\big((\mathsf{B}\boldsymbol{x})_j - \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}\big), && j = 1, 2, \dots, m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_i' &= x_i(\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{x})^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}, && i = 1, 2, \dots, n\\
y_j' &= y_j(\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{y})^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}, && j = 1, 2, \dots, m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \mathsf{O} & (\mathsf{E} - \boldsymbol{x}\mathbf{1}^\mathsf{T})\mathsf{A}\\ (\mathsf{E} - \boldsymbol{y}\mathbf{1}^\mathsf{T})\mathsf{B} & \mathsf{O}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}
$$

Replikátorová rovnice bimaticové hry

$$x_i' = x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{y})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}\big), \qquad i = 1, 2, \dots, n$$
$$y_j' = y_j\big((\mathsf{B}\boldsymbol{x})_j - \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}\big), \qquad j = 1, 2, \dots, m$$

$$x_i' = x_i(\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{x})^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$
$$y_j' = y_j(\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{y})^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}, \qquad j = 1, 2, \dots, m$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}\mathsf{O} & (\mathsf{E} - \boldsymbol{x}\mathbf{1}^\mathsf{T})\mathsf{A}\\ (\mathsf{E} - \boldsymbol{y}\mathbf{1}^\mathsf{T})\mathsf{B} & \mathsf{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix} \circ \left[\mathsf{E} - \begin{pmatrix}\mathbf{1}\boldsymbol{x}^\mathsf{T} & \mathsf{O}\\ \mathsf{O} & \mathbf{1}\boldsymbol{y}^\mathsf{T}\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\mathsf{O} & \mathsf{A}\\ \mathsf{B} & \mathsf{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}$$

Jednoduché vlastnosti bimaticové replikátorové rovnice

$$
\begin{aligned}
x_i' &= x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{y})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}\big), & i &= 1,2,\ldots,n\\
y_j' &= y_j\big((\mathsf{B}\boldsymbol{x})_j - \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}\big), & j &= 1,2,\ldots,m
\end{aligned}
$$

Jednoduché vlastnosti bimaticové replikátorové rovnice

$$\begin{aligned} x_i' &= x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{y})_i - \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\mathsf{A}\boldsymbol{y}\big), \qquad & i &= 1,2,\dots,n \\ y_j' &= y_j\big((\mathsf{B}\boldsymbol{x})_j - \boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}\mathsf{B}\boldsymbol{x}\big), \qquad & j &= 1,2,\dots,m \end{aligned}$$

- $S_n \times S_m$, $\partial S_n \times \partial S_m$ $S_n^\circ \times S_m^\circ$ jsou pozitivně invariantní množiny rovnice

Jednoduché vlastnosti bimaticové replikátorové rovnice

$$x_i' = x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{y})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}\big), \qquad i = 1, 2, \dots, n$$
$$y_j' = y_j\big((\mathsf{B}\boldsymbol{x})_j - \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}\big), \qquad j = 1, 2, \dots, m$$

- $S_n \times S_m$, $\partial S_n \times \partial S_m$ $S_n^\circ \times S_m^\circ$ jsou pozitivně invariantní množiny rovnice,
- v důsledku toho může být $(n+m)$-dimensionální systém redukován na $(n+m-2)$-dimensionální:

$$\begin{aligned} x_i' &= x_i(\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{x})^\mathsf{T}\left(\tilde{\mathsf{A}}\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{a}}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ y_j' &= y_j(\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{y})^\mathsf{T}\left(\tilde{\mathsf{B}}\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{b}}\right), \quad j = 1, 2, \dots, m-1. \end{aligned}$$

kde $\tilde{a}_{ij} = a_{ij} - a_{im} - a_{nj} + a_{nm}, \quad \hat{a}_i = a_{nm} - a_{im}$
$\tilde{b}_{ij} = b_{ij} - b_{in} - b_{mj} + b_{mn}, \quad \hat{b}_j = b_{mn} - b_{jn}.$

Příklad: $n = m = 2$

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Příklad: $n = m = 2$

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Redukovaný systém:

$$\begin{aligned} x' &= x(1-x)(\alpha_1 y - \alpha_2) \\ y' &= y(1-y)(\beta_1 x - \beta_2) \end{aligned}$$

kde $\alpha_1 = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}$, $\alpha_2 = a_{22} - a_{12}$,
$\beta_1 = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}$, $\beta_2 = b_{22} - b_{12}$

Příklad: $n = m = 2$

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Redukovaný systém:

$$\begin{aligned} x' &= x(1-x)(\alpha_1 y - \alpha_2) \\ y' &= y(1-y)(\beta_1 x - \beta_2) \end{aligned}$$

kde $\alpha_1 = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}$, $\alpha_2 = a_{22} - a_{12}$,
$\beta_1 = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}$, $\beta_2 = b_{22} - b_{12}$

Fázový prostor: $[0,1] \times [0,1]$

Příklad: $n = m = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Redukovaný systém:

$$\begin{aligned} x' &= x(1-x)(\alpha_1 y - \alpha_2) \\ y' &= y(1-y)(\beta_1 x - \beta_2) \end{aligned}$$

kde $\alpha_1 = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}$, $\alpha_2 = a_{22} - a_{12}$,
$\beta_1 = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}$, $\beta_2 = b_{22} - b_{12}$

Fázový prostor: $[0,1] \times [0,1]$

Stacionární řešení: $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ odpovídají ryzím strategiím.

Pokud $\alpha_1 \neq 0,\ 0 < \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} < 1,\ \beta_1 \neq 0,\ 0 < \dfrac{\beta_2}{\beta_1} < 1$, pak vnitřní stacionární řešení:

$\left(\dfrac{\beta_2}{\beta_1}, \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$ odpovídá smíšeným strategiím.

Příklad: $n = m = 2$

Redukovaný systém:

$$\begin{aligned} x' &= x(1-x)(\alpha_1 y - \alpha_2) \\ y' &= y(1-y)(\beta_1 x - \beta_2) \end{aligned}$$

Variační matice systému:

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} -\alpha_2 & 0 \\ 0 & -\beta_2 \end{pmatrix}, \quad J(0,1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix},$$

$$J(1,0) = \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 \\ 0 & \beta_1 - \beta_2 \end{pmatrix}, \quad J(1,1) = \begin{pmatrix} \alpha_2 - \alpha_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 - \beta_1 \end{pmatrix},$$

Příklad: $n = m = 2$

Redukovaný systém:

$$\begin{aligned} x' &= x(1-x)(\alpha_1 y - \alpha_2) \\ y' &= y(1-y)(\beta_1 x - \beta_2) \end{aligned}$$

Variační matice systému:

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} -\alpha_2 & 0 \\ 0 & -\beta_2 \end{pmatrix}, \quad J(0,1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix},$$

$$J(1,0) = \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 \\ 0 & \beta_1 - \beta_2 \end{pmatrix}, \quad J(1,1) = \begin{pmatrix} \alpha_2 - \alpha_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 - \beta_1 \end{pmatrix},$$

$$J\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\alpha_1\beta_2(\beta_1 - \beta_2)}{\beta_1^2} \\ \dfrac{\alpha_2\beta_1(\alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_1^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Stacionární řešení replikátorových rovnic

$$
\begin{aligned}
x_i' &= x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{y})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}\big), && i = 1, 2, \dots, n\\
y_j' &= y_j\big((\mathsf{B}\boldsymbol{x})_j - \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}\big), && j = 1, 2, \dots, m
\end{aligned}
$$

N ... množina Nashových rovnováh bimaticové hry $\mathcal{G} = (\mathsf{A}, \mathsf{B})$
E ... množina stacionárních řešení systému

Stacionární řešení replikátorových rovnic

$$\begin{aligned} x_i' &= x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{y})_i - \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\mathsf{A}\boldsymbol{y}\big), \qquad & i &= 1,2,\ldots,n \\ y_j' &= y_j\big((\mathsf{B}\boldsymbol{x})_j - \boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}\mathsf{B}\boldsymbol{x}\big), \qquad & j &= 1,2,\ldots,m \end{aligned}$$

N ... množina Nashových rovnováh bimaticové hry $\mathcal{G} = (\mathsf{A}, \mathsf{B})$
E ... množina stacionárních řešení systému

$$N \ \subseteq \ E$$

Stacionární řešení replikátorových rovnic

$$\begin{aligned} x_i' &= x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{y})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}\big), \qquad & i &= 1,2,\dots,n \\ y_j' &= y_j\big((\mathsf{B}\boldsymbol{x})_j - \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}\big), \qquad & j &= 1,2,\dots,m \end{aligned}$$

N . . . množina Nashových rovnováh bimaticové hry $\mathcal{G} = (\mathsf{A}, \mathsf{B})$
E . . . množina stacionárních řešení systému

$$N \subseteq E$$

$$(S_n^\circ \times S_m^\circ) \cap N = E \cap (S_n^\circ \times S_m^\circ)$$

Bipartitní systém

$$
\begin{aligned}
x_i' &= x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{y})_i - \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\mathsf{A}\boldsymbol{y}\big), && i = 1, 2, \dots, n \\
y_j' &= y_j\big((\mathsf{B}\boldsymbol{x})_j - \boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}\mathsf{B}\boldsymbol{x}\big), && j = 1, 2, \dots, m
\end{aligned}
$$

Bipartitní systém

$$\begin{aligned} x_i' &= x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{y})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}\big), & i &= 1, 2, \dots, n \\ y_j' &= y_j\big((\mathsf{B}\boldsymbol{x})_j - \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}\big), & j &= 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

Uvažujme systém na množině $S_n^\circ \times S_m^\circ$

$$x_i' = x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{y})_i - \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\mathsf{A}\boldsymbol{y}\big), \qquad i = 1,2,\dots,n$$
$$y_j' = y_j\big((\mathsf{B}\boldsymbol{x})_j - \boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}\mathsf{B}\boldsymbol{x}\big), \qquad j = 1,2,\dots,m$$

Uvažujme systém na množině $S_n^\circ \times S_m^\circ$

Transformace

$$\tilde{a}_{ij} = a_{ij} - a_{nj}, \quad \hat{a}_i = a_{im} - a_{nm}, \qquad u_i = \ln\frac{x_i}{x_n}, \quad v_j = \ln\frac{y_j}{y_m},$$
$$\tilde{b}_{ji} = b_{ji} - b_{mi}, \quad \hat{b}_j = b_{jn} - b_{mn},$$

$$u_i' = \frac{\sum_{k=1}^{m-1}\tilde{a}_{ik}\mathrm{e}^{v_k} + \hat{a}_i}{1 + \sum_{k=1}^{m-1}\mathrm{e}^{v_k}}, \qquad i = 1,2,\dots,n-1,$$

$$v_j' = \frac{\sum_{k=1}^{n-1}\tilde{b}_{jk}\mathrm{e}^{u_k} + \hat{b}_i}{1 + \sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{e}^{u_k}}, \qquad j = 1,2,\dots,m-1.$$

Hamiltonovský systém

$$\begin{aligned} x_i' &= x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{y})_i - \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\mathsf{A}\boldsymbol{y}\big), \qquad & i &= 1, 2, \dots, n \\ y_j' &= y_j\big((\mathsf{B}\boldsymbol{x})_j - \boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}\mathsf{B}\boldsymbol{x}\big), \qquad & j &= 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

Uvažujme systém na množině $S_n^\circ \times S_m^\circ$

Nechť (A, B) je c-partnerská hra a $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) \in S_n^\circ \times S_m^\circ$ je Nashova rovnováha.

Pak funkce

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = c\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i \ln x_i - \sum_{j=1}^{m} \bar{y}_j \ln y_j$$

je invariantem systému.

Hamiltonovský systém

$$
\begin{aligned}
x_i' &= x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{y})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}\big), & i &= 1,2,\dots,n\\
y_j' &= y_j\big((\mathsf{B}\boldsymbol{x})_j - \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}\big), & j &= 1,2,\dots,m
\end{aligned}
$$

Uvažujme systém na množině $S_n^\circ \times S_m^\circ$

Nechť (A,B) je c-partnerská hra a $(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}) \in S_n^\circ \times S_m^\circ$ je Nashova rovnováha.

Substituce $r_{ij} = a_{ij} - a_{nj} - a_{im} + a_{nm}$,

$$u_i = \ln\frac{x_i}{x_n},\ v_j = \ln\frac{y_j}{y_m},$$

pro $i = 1,2,\dots,n-1$, $j = 1,2,\dots,m-1$
transformuje replikátorový systém na Hamiltonovský:

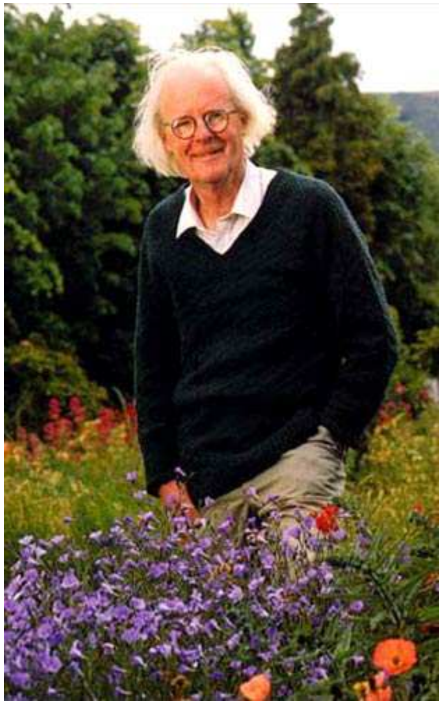
$$
\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}\mathsf{O} & \mathsf{R}\\ -\mathsf{R}^\mathsf{T} & \mathsf{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nabla_{\boldsymbol{u}}H\\ \nabla_{\boldsymbol{v}}H\end{pmatrix}
$$

Příklady

Jestřábi a holubice

	Jestřáb	Holubice
Jestřáb	$\frac{1}{2}V - C$	V
Holubice	0	$\frac{1}{2}V$

V – hodnota zdroje
C – náklady na boj



Jestřábi a holubice

	Jestřáb	Holubice
Jestřáb	$\frac{1}{2}V - C$	V
Holubice	0	$\frac{1}{2}V$

V – hodnota zdroje
C – náklady na boj

Verhulstova logistická rovnice ekvivalentná s touto replikátorovou:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = y\left(\tfrac{1}{2}V - (C - \tfrac{1}{2}V)y\right)$$

Jestřábi a holubice

	Jestřáb	Holubice
Jestřáb	$\frac{1}{2}V - C$	V
Holubice	0	$\frac{1}{2}V$

V – hodnota zdroje
C – náklady na boj

Verhulstova logistická rovnice ekvivalentná s touto replikátorovou:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = y\left(\tfrac{1}{2}V - (C - \tfrac{1}{2}V)y\right)$$

$$C > \tfrac{1}{2}V \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{V}{2C-V} \\ \frac{2(C-V)}{2C-V} \end{pmatrix}$$

$$C \leq \tfrac{1}{2}V \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Strategie páření

Ještěrka *Uta stansburniana*

				
velké teritorium, několik samic		0	vyhrává	prohrává
teritorium s jedinou samicí		prohrává	0	vyhrává
žádné teritorium		vyhrává	prohrává	0

Hra kámen-nůžky-papír

			
	0	vyhrává	prohrává
	prohrává	0	vyhrává
	vyhrává	prohrává	0

Strategie páření

	Kámen	Nůžky	Papír
Kámen	0	1	-1
Nůžky	-1	0	1
Papír	1	-1	0

Replikátorová rovnice

Strategie páření

	Kámen	Nůžky	Papír
Kámen	0	1	-1
Nůžky	-1	0	1
Papír	1	-1	0

Replikátorová rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x&x&x\\y&y&y\\z&z&z\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}x(y-z)\\y(z-x)\\z(x-y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}yz\\xz\\xy\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}\nabla xyz$$

Strategie páření

	Kámen	Nůžky	Papír
Kámen	0	1	-1
Nůžky	-1	0	1
Papír	1	-1	0

Replikátorová rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla xyz$$

Hamiltonovský systém

Souboj pohlaví

	Strategie	
samec	věrný	záletník
samice	zdrženlivá	nevázaná

V – hodnota potomka
$2C$ – rodičovská investice
c – náklady na námluvy

Souboj pohlaví

	Strategie	
samec	věrný	záletník
samice	zdrženlivá	nevázaná

V – hodnota potomka

$2C$ – rodičovská investice

c – náklady na námluvy

		samice	
		zdrženlivá	nevázaná
samec	věrný	$V-C-c$ $V-C-c$	$V-C$ $V-C$
	záletník	0 0	$V-2C$ V

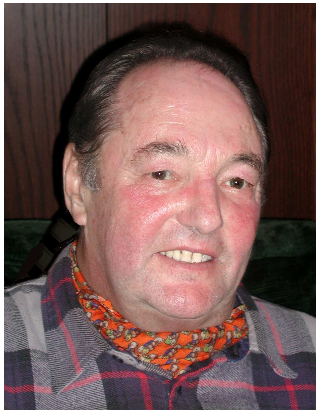
Souboj pohlaví

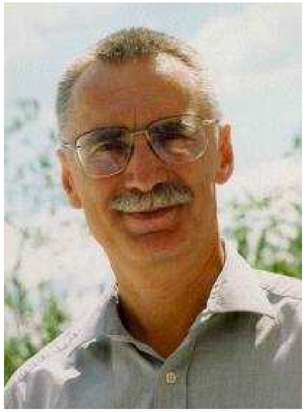
	Strategie	
samec	věrný	záletník
samice	zdrženlivá	nevázaná

V – hodnota potomka

$2C$ – rodičovská investice

c – náklady na námluvy





		samice	
		zdrženlivá	nevázaná
samec	věrný	$V - C - c$ $V - C - c$	$V - C$ $V - C$
	záletník	0 0	$V - 2C$ V

Literatura

- MAYNARD SMITH, J., PRICE, G.: The logic of animal conflict. *Nature* **246** (1973) 15–18
- MAYNARD SMITH, J.: *Evolution and the Theory of Games.* Cambridge Univ. Press: Cambridge, 1982
- TAYLOR, P. D., JONKER, L.: Evolutionary stable strategies and game dynamics. *Math. Biosci.* **44** (1978) 145–156
- DAWKINS, R.: *The Selfish Gene.* Oxford Univ. Press: Oxford, 1976 [Český překlad: Sobecký gen. Mladá fronta: Praha, 1998]
- SCHUSTER, P., SIGMUND, K.: Coyness, philandering and stable strategies. *Anim. Behavior* **29** (1981) 186–192
- HOFBAUER, J.: Evolutionary dynamics for bimatrix games: A Hamiltonian system? *J. Math. Biol.* **34** (1996) 675–688
- HOFBAUER, J., SIGMUND, K.: *Evolutionary Games and Population Dynamics.* Cambridge Univ. Press: Cambridge, 2002