evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

UNIVERSITAS MASARYKIANA BRUNENSIS

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Matematika v biologii I

Zdeněk Pospíšil

22. března 2011

Úvod

Lindenmayerovy systémy

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Aristid Lindenmayer (1925–1989)

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Aristid Lindenmayer (1925–1989)

Abeceda: množina A
Stav: konečná posloupnost prvků z A
Axiom: iniciální stav s_0
Přepisovací pravidla: zobrazení $f : A \to A \cup A^2 \cup A^3 \cup \dots$
Stav s_{i+1} vznikne ze stavu s_i tak, že každý člen x v s_i se nahradí výrazem $f(x)$

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Aristid Lindenmayer (1925–1989)

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)
Axiom: 1
Přepisovací pravidla:

$1 \mapsto 23$	$2 \mapsto 2$	$3 \mapsto 24$	$4 \mapsto 54$	$5 \mapsto 6$
$6 \mapsto 7$	$7 \mapsto 8(1)$	$8 \mapsto 8$	$(\mapsto ($	$) \mapsto)$

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)
Axiom: 1
Přepisovací pravidla:

$1 \mapsto 23$	$2 \mapsto 2$	$3 \mapsto 24$	$4 \mapsto 54$	$5 \mapsto 6$
$6 \mapsto 7$	$7 \mapsto 8(1)$	$8 \mapsto 8$	$(\mapsto ($	$) \mapsto)$

$$s_0 = 1$$

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)
Axiom: 1
Přepisovací pravidla:

$1 \mapsto 23$	$2 \mapsto 2$	$3 \mapsto 24$	$4 \mapsto 54$	$5 \mapsto 6$
$6 \mapsto 7$	$7 \mapsto 8(1)$	$8 \mapsto 8$	$(\mapsto ($	$) \mapsto)$

$$
\begin{aligned}
s_0 &= 1 \\
s_1 &= 23
\end{aligned}
$$

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)
Axiom: 1
Přepisovací pravidla:

$$
\begin{array}{lllll}
1 \mapsto 23 & 2 \mapsto 2 & 3 \mapsto 24 & 4 \mapsto 54 & 5 \mapsto 6 \\
6 \mapsto 7 & 7 \mapsto 8(1) & 8 \mapsto 8 & (\mapsto (&) \mapsto)
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
s_0 &= 1 \\
s_1 &= 23 \\
s_2 &= 224
\end{aligned}
$$

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Axiom: 1

Přepisovací pravidla: $1 \mapsto 23$ $\quad 2 \mapsto 2$ $\quad 3 \mapsto 24$ $\quad 4 \mapsto 54$ $\quad 5 \mapsto 6$

$6 \mapsto 7$ $\quad 7 \mapsto 8(1)$ $\quad 8 \mapsto 8$ $\quad (\mapsto ($ $\quad) \mapsto)$

$$\begin{aligned} s_0 &= 1 \\ s_1 &= 23 \\ s_2 &= 224 \\ s_3 &= 2254 \end{aligned}$$

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)
Axiom: 1
Přepisovací pravidla:

$1 \mapsto 23$	$2 \mapsto 2$	$3 \mapsto 24$	$4 \mapsto 54$	$5 \mapsto 6$
$6 \mapsto 7$	$7 \mapsto 8(1)$	$8 \mapsto 8$	$(\mapsto ($	$) \mapsto)$

$$s_0 = 1$$
$$s_1 = 23$$
$$s_2 = 224$$
$$s_3 = 2254$$
$$s_4 = 22654$$

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)
Axiom: 1
Přepisovací pravidla:

$1 \mapsto 23$	$2 \mapsto 2$	$3 \mapsto 24$	$4 \mapsto 54$	$5 \mapsto 6$
$6 \mapsto 7$	$7 \mapsto 8(1)$	$8 \mapsto 8$	$(\mapsto ($	$) \mapsto)$

$$s_0 = 1$$
$$s_1 = 23$$
$$s_2 = 224$$
$$s_3 = 2254$$
$$s_4 = 22654$$
$$s_5 = 227654$$

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)
Axiom: 1
Přepisovací pravidla:

$1 \mapsto 23$	$2 \mapsto 2$	$3 \mapsto 24$	$4 \mapsto 54$	$5 \mapsto 6$
$6 \mapsto 7$	$7 \mapsto 8(1)$	$8 \mapsto 8$	$(\mapsto ($	$) \mapsto)$

$s_0 = 1$

$s_1 = 23$

$s_2 = 224$

$s_3 = 2254$

$s_4 = 22654$

$s_5 = 227654$

$s_6 = 228(1)7654$

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)
Axiom: 1
Přepisovací pravidla: $1 \mapsto 23$ $2 \mapsto 2$ $3 \mapsto 24$ $4 \mapsto 54$ $5 \mapsto 6$
$6 \mapsto 7$ $7 \mapsto 8(1)$ $8 \mapsto 8$ $(\mapsto ($ $) \mapsto)$

$s_0 = 1$

$s_1 = 23$

$s_2 = 224$

$s_3 = 2254$

$s_4 = 22654$

$s_5 = 227654$

$s_6 = 228(1)7654$

$s_7 = 228(23)8(1)7654$

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)
Axiom: 1
Přepisovací pravidla: $1 \mapsto 23$ $\quad 2 \mapsto 2$ $\quad 3 \mapsto 24$ $\quad 4 \mapsto 54$ $\quad 5 \mapsto 6$
$6 \mapsto 7$ $\quad 7 \mapsto 8(1)$ $\quad 8 \mapsto 8$ $\quad (\mapsto ($ $\quad) \mapsto)$

$s_0 = 1$
$s_1 = 23$
$s_2 = 224$
$s_3 = 2254$
$s_4 = 22654$
$s_5 = 227654$
$s_6 = 228(1)7654$
$s_7 = 228(23)8(1)7654$
$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)
Axiom: 1
Přepisovací pravidla: $1 \mapsto 23$ $\quad 2 \mapsto 2$ $\quad 3 \mapsto 24$ $\quad 4 \mapsto 54$ $\quad 5 \mapsto 6$
$6 \mapsto 7$ $\quad 7 \mapsto 8(1)$ $\quad 8 \mapsto 8$ $\quad (\mapsto ($ $\quad) \mapsto)$

$s_0 = 1$
$s_1 = 23$
$s_2 = 224$
$s_3 = 2254$
$s_4 = 22654$
$s_5 = 227654$
$s_6 = 228(1)7654$
$s_7 = 228(23)8(1)7654$
$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$
$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)
Axiom: 1
Přepisovací pravidla: $1 \mapsto 23$, $2 \mapsto 2$, $3 \mapsto 24$, $4 \mapsto 54$, $5 \mapsto 6$, $6 \mapsto 7$, $7 \mapsto 8(1)$, $8 \mapsto 8$, $(\mapsto ($, $) \mapsto)$

$s_0 = 1$
$s_1 = 23$
$s_2 = 224$
$s_3 = 2254$
$s_4 = 22654$
$s_5 = 227654$
$s_6 = 228(1)7654$
$s_7 = 228(23)8(1)7654$
$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$
$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$
$s_{10} = 228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)
Axiom: 1
Přepisovací pravidla:

$1 \mapsto 23$	$2 \mapsto 2$	$3 \mapsto 24$	$4 \mapsto 54$	$5 \mapsto 6$
$6 \mapsto 7$	$7 \mapsto 8(1)$	$8 \mapsto 8$	$(\mapsto ($	$) \mapsto)$

$s_0 = 1$

$s_1 = 23$

$s_2 = 224$

$s_3 = 2254$

$s_4 = 22654$

$s_5 = 227654$

$s_6 = 228(1)7654$

$s_7 = 228(23)8(1)7654$

$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$

$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$

$s_{10} = 228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)
Axiom: 1

Přepisovací pravidla:					
	$1 \mapsto 23$	$2 \mapsto 2$	$3 \mapsto 24$	$4 \mapsto 54$	$5 \mapsto 6$
	$6 \mapsto 7$	$7 \mapsto 8(1)$	$8 \mapsto 8$	$(\mapsto ($	$) \mapsto)$

$s_0 =1$ $\boxed{1}$

$s_1 =23$ $\boxed{2|3}$

$s_2 =224$

$s_3 =2254$

$s_4 =22654$

$s_5 =227654$

$s_6 =228(1)7654$

$s_7 =228(23)8(1)7654$

$s_8 =228(224)8(23)8(1)7654$

$s_9 =228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$

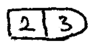
$s_{10} =228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

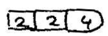
Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)
Axiom: 1
Přepisovací pravidla: $1 \mapsto 23$ $2 \mapsto 2$ $3 \mapsto 24$ $4 \mapsto 54$ $5 \mapsto 6$ $6 \mapsto 7$ $7 \mapsto 8(1)$ $8 \mapsto 8$ $(\mapsto ($ $) \mapsto)$

$s_0 =1$

$s_1 =23$



$s_2 =224$



$s_3 =2254$

$s_4 =22654$

$s_5 =227654$

$s_6 =228(1)7654$

$s_7 =228(23)8(1)7654$

$s_8 =228(224)8(23)8(1)7654$

$s_9 =228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$

$s_{10} =228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

Axiom: 1

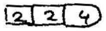
Přepisovací pravidla:

$$
\begin{array}{lllll}
1 \mapsto 23 & 2 \mapsto 2 & 3 \mapsto 24 & 4 \mapsto 54 & 5 \mapsto 6 \\
6 \mapsto 7 & 7 \mapsto 8(1) & 8 \mapsto 8 & (\mapsto (&) \mapsto)
\end{array}
$$

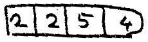
$s_0 = 1$

$s_1 = 23$

$s_2 = 224$



$s_3 = 2254$



$s_4 = 22654$

$s_5 = 227654$

$s_6 = 228(1)7654$

$s_7 = 228(23)8(1)7654$

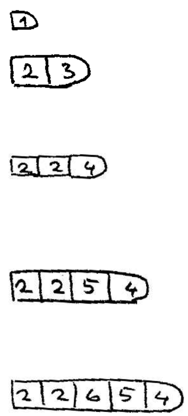
$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$

$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$

$s_{10} = 228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)
Axiom: 1
Přepisovací pravidla: $1 \mapsto 23$ $\quad 2 \mapsto 2$ $\quad 3 \mapsto 24$ $\quad 4 \mapsto 54$ $\quad 5 \mapsto 6$
$6 \mapsto 7$ $\quad 7 \mapsto 8(1)$ $\quad 8 \mapsto 8$ $\quad (\mapsto ($ $\quad) \mapsto)$



$s_0 = 1$

$s_1 = 23$

$s_2 = 224$

$s_3 = 2254$

$s_4 = 22654$

$s_5 = 227654$

$s_6 = 228(1)7654$

$s_7 = 228(23)8(1)7654$

$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$

$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$

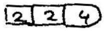
$s_{10} = 228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$

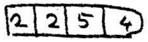
Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

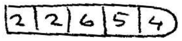
Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)
Axiom: 1
Přepisovací pravidla: $1 \mapsto 23$ $2 \mapsto 2$ $3 \mapsto 24$ $4 \mapsto 54$ $5 \mapsto 6$
$6 \mapsto 7$ $7 \mapsto 8(1)$ $8 \mapsto 8$ $(\mapsto ($ $) \mapsto)$

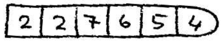
$s_0 =1$ 

$s_1 =23$ 

$s_2 =224$ 

$s_3 =2254$ 

$s_4 =22654$ 

$s_5 =227654$ 

$s_6 =228(1)7654$

$s_7 =228(23)8(1)7654$

$s_8 =228(224)8(23)8(1)7654$

$s_9 =228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$

$s_{10} =228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$

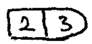
Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

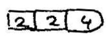
Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

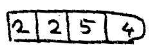
Axiom: 1

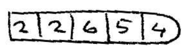
Přepisovací pravidla: $1 \mapsto 23$ $2 \mapsto 2$ $3 \mapsto 24$ $4 \mapsto 54$ $5 \mapsto 6$
$6 \mapsto 7$ $7 \mapsto 8(1)$ $8 \mapsto 8$ $(\mapsto ($ $) \mapsto)$

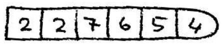
$s_0 =$1 

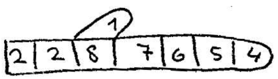
$s_1 =$23 

$s_2 =$224 

$s_3 =$2254 

$s_4 =$22654 

$s_5 =$227654 

$s_6 =$228(1)7654 

$s_7 =$228(23)8(1)7654

$s_8 =$228(224)8(23)8(1)7654

$s_9 =$228(2254)8(224)8(23)8(1)7654

$s_{10} =$228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654

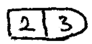
Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

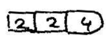
Axiom: 1

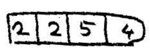
Přepisovací pravidla:

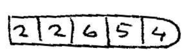
$1 \mapsto 23$	$2 \mapsto 2$	$3 \mapsto 24$	$4 \mapsto 54$	$5 \mapsto 6$
$6 \mapsto 7$	$7 \mapsto 8(1)$	$8 \mapsto 8$	$(\mapsto ($	$) \mapsto)$

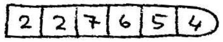
$s_0 = 1$ 

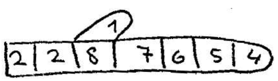
$s_1 = 23$ 

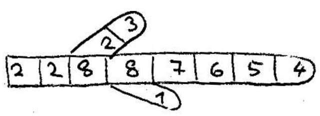
$s_2 = 224$ 

$s_3 = 2254$ 

$s_4 = 22654$ 

$s_5 = 227654$ 

$s_6 = 228(1)7654$ 

$s_7 = 228(23)8(1)7654$ 

$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$

$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$

$s_{10} = 228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$

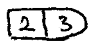
Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

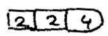
Axiom: 1

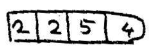
Přepisovací pravidla:

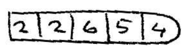
$1 \mapsto 23$	$2 \mapsto 2$	$3 \mapsto 24$	$4 \mapsto 54$	$5 \mapsto 6$
$6 \mapsto 7$	$7 \mapsto 8(1)$	$8 \mapsto 8$	$(\mapsto ($	$) \mapsto)$

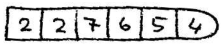
$s_0 =$1 

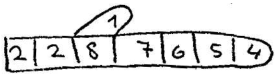
$s_1 =$23 

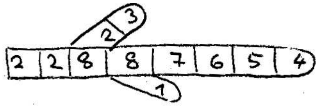
$s_2 =$224 

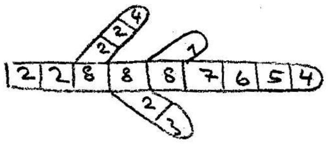
$s_3 =$2254 

$s_4 =$22654 

$s_5 =$227654 

$s_6 =$228(1)7654 

$s_7 =$228(23)8(1)7654 

$s_8 =$228(224)8(23)8(1)7654 

$s_9 =$228(2254)8(224)8(23)8(1)7654

$s_{10} =$228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654

Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

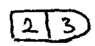
Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)

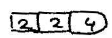
Axiom: 1

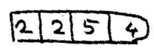
Přepisovací pravidla:

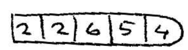
$1 \mapsto 23$	$2 \mapsto 2$	$3 \mapsto 24$	$4 \mapsto 54$	$5 \mapsto 6$
$6 \mapsto 7$	$7 \mapsto 8(1)$	$8 \mapsto 8$	$(\mapsto ($	$) \mapsto)$

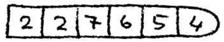
$s_0 = 1$ 

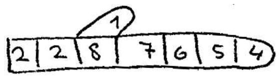
$s_1 = 23$ 

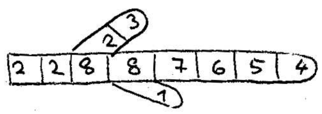
$s_2 = 224$ 

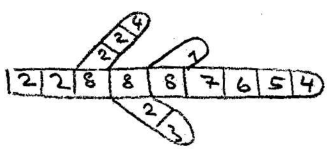
$s_3 = 2254$ 

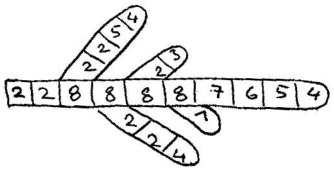
$s_4 = 22654$ 

$s_5 = 227654$ 

$s_6 = 228(1)7654$ 

$s_7 = 228(23)8(1)7654$ 

$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$ 

$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$ 

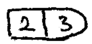
$s_{10} = 228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$

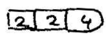
Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

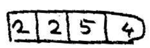
Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (,)
Axiom: 1
Přepisovací pravidla:

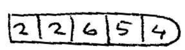
$1 \mapsto 23$	$2 \mapsto 2$	$3 \mapsto 24$	$4 \mapsto 54$	$5 \mapsto 6$
$6 \mapsto 7$	$7 \mapsto 8(1)$	$8 \mapsto 8$	$(\mapsto ($	$) \mapsto)$

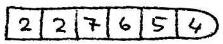
$s_0 = 1$ 

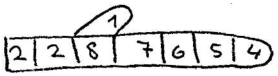
$s_1 = 23$ 

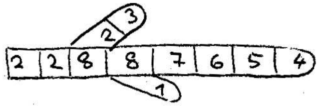
$s_2 = 224$ 

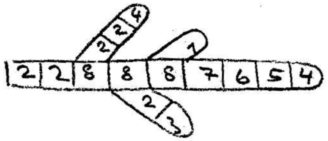
$s_3 = 2254$ 

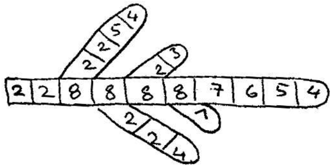
$s_4 = 22654$ 

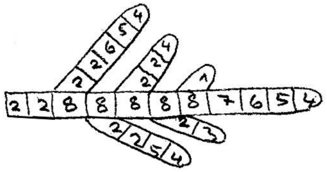
$s_5 = 227654$ 

$s_6 = 228(1)7654$ 

$s_7 = 228(23)8(1)7654$ 

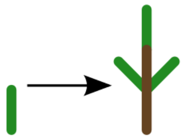
$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$ 

$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$ 

$s_{10} = 228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$ 

Abeceda: M, S, $+$, $-$, [,]
Axiom: M
Pravidla: $M \mapsto S[+M][-M]SM$ $\qquad S \mapsto SS$

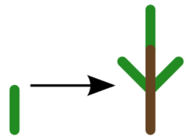
Abeceda: M, S, $+$, $-$, $[$, $]$
Axiom: M
Pravidla: $M \mapsto S[+M][-M]SM$ $\qquad$ $S \mapsto SS$

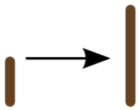


Abeceda: M, S, $+$, $-$, $[$, $]$

Axiom: M

Pravidla: $M \mapsto S[+M][-M]SM$ $\qquad$ $S \mapsto SS$



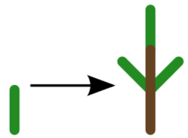


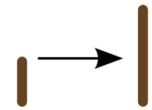
$i = 0$

Abeceda: M, S, $+$, $-$, $[$, $]$

Axiom: M

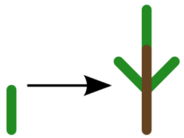
Pravidla: $M \mapsto S[+M][-M]SM$ $\qquad S \mapsto SS$



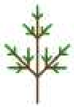


$i = 1$

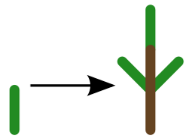
Abeceda: M, S, $+$, $-$, [,]
Axiom: M
Pravidla: $M \mapsto S[+M][-M]SM$ $\qquad$ $S \mapsto SS$

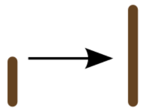


$i = 2$

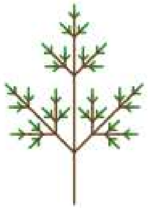


Abeceda: M, S, $+$, $-$, $[$, $]$
Axiom: M
Pravidla: $M \mapsto S[+M][-M]SM$ $\quad S \mapsto SS$

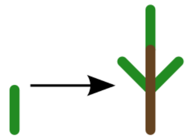


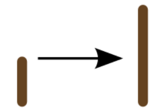


$i = 3$

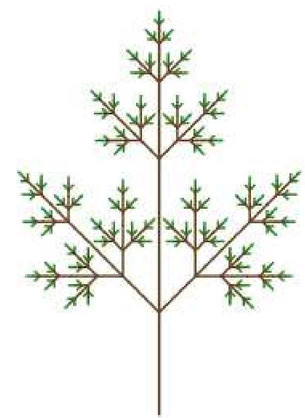


Abeceda: M, S, $+$, $-$, $[$, $]$
Axiom: M
Pravidla: $M \mapsto S[+M][-M]SM$ $\qquad$ $S \mapsto SS$

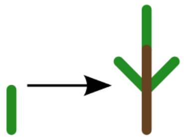


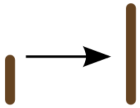


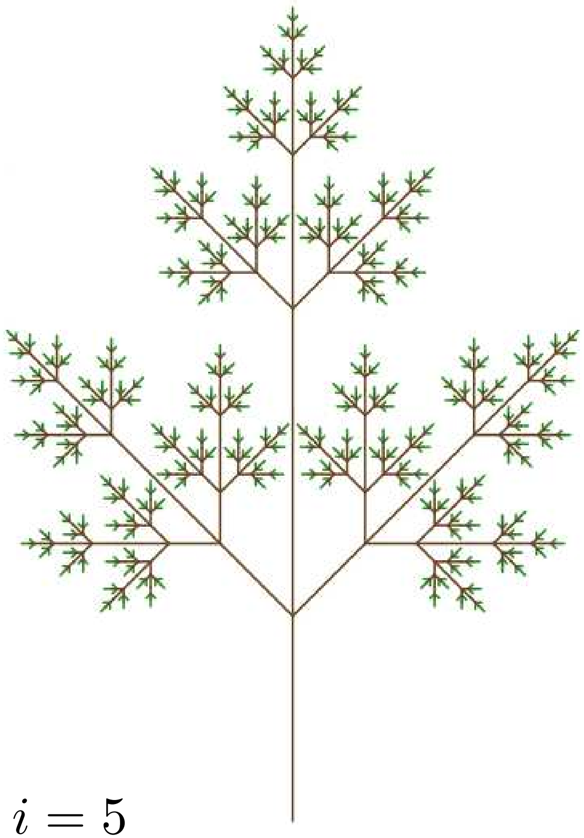
$i = 4$



Abeceda: M, S, $+$, $-$, [,]
Axiom: M
Pravidla: $M \mapsto S[+M][-M]SM$ $\qquad$ $S \mapsto SS$







$i = 5$

Maticové populační modely

Leonardo Pisánský, Fibonacci (1170–1250)

Fibonacciovi králíci

Leonardo Pisánský, Fibonacci (1170–1250):

> *Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.*

Fibonacciovi králíci

Leonardo Pisánský, Fibonacci (1170–1250):

> *Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.*

$x(t)$ – počet párů králíků v t-tém měsíci

Fibonacciovi králíci

Leonardo Pisánský, Fibonacci (1170–1250):

> *Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.*

$x(t)$ – počet párů králíků v t-tém měsíci

$$x(t) = x(t-1) + x(t-2)$$

Fibonacciovi králíci

Leonardo Pisánský, Fibonacci (1170–1250):

> *Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.*

$x(t)$ – počet párů králíků v t-tém měsíci

$$x(t) = x(t-1) + x(t-2)$$

$$x(t+2) = x(t+1) + x(t), \quad x(0) = 1, \; x(1) = 2$$

Fibonacciovi králíci

Leonardo Pisánský, Fibonacci (1170–1250):

> *Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.*

$x(t)$ – počet párů králíků v t-tém měsíci

$$x(t) = x(t-1) + x(t-2)$$

$$x(t+2) = x(t+1) + x(t), \quad x(0) = 1,\ x(1) = 2$$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$x(t)$	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Fibonacciovi králíci

Leonardo Pisánský, Fibonacci (1170–1250):

> *Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.*

$x(t)$ – počet párů králíků v t-tém měsíci

$$x(t) = x(t-1) + x(t-2)$$

$$x(t+2) = x(t+1) + x(t), \quad x(0) = 1,\ x(1) = 2$$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{t+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{t+1}$$

Fibonacciovi králíci

$x(t)$ – množství párů juvenilních králíků v t-tém měsíci
$y(t)$ – množství párů plodných králíků v t-tém měsíci

Fibonacciovi králíci

$x(t)$ – množství párů juvenilních králíků v t-tém měsíci
$y(t)$ – množství párů plodných králíků v t-tém měsíci

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \phantom{x(t)+{}} y(t) \\ y(t+1) &= x(t) + y(t) \end{aligned}$$

Fibonacciovi králíci

$x(t)$ – množství párů juvenilních králíků v t-tém měsíci
$y(t)$ – množství párů plodných králíků v t-tém měsíci

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \phantom{x(t)+{}} y(t) \\ y(t+1) &= x(t) + y(t) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x(t+1) \\ y(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Fibonacciovi králíci

$x(t)$ – množství párů juvenilních králíků v t-tém období
$y(t)$ – množství párů plodných králíků v t-tém období

σ_1 – podíl juvenilních párů, které přežijí jedno období
σ_2 – podíl plodných párů, které přežijí jedno období
γ – podíl juvenilních párů, které během jednoho období dospějí
b – plodnost: průměrný počet párů které „vyprodukuje" plodný pár za jedno období

Fibonacciovi králíci

$x(t)$ – množství párů juvenilních králíků v t-tém období
$y(t)$ – množství párů plodných králíků v t-tém období

σ_1 – podíl juvenilních párů, které přežijí jedno období
σ_2 – podíl plodných párů, které přežijí jedno období
γ – podíl juvenilních párů, které během jednoho období dospějí
b – plodnost: průměrný počet párů které „vyprodukuje" plodný pár za jedno období

$$\begin{aligned} x(t+1) &= (1-\gamma)\sigma_1\, x(t) + \quad b\, y(t) \\ y(t+1) &= \qquad\quad \gamma\sigma_1\, x(t) + \sigma_2\, y(t) \end{aligned}$$

Fibonacciovi králíci

$x(t)$ – množství párů juvenilních králíků v t-tém období
$y(t)$ – množství párů plodných králíků v t-tém období

σ_1 – podíl juvenilních párů, které přežijí jedno období
σ_2 – podíl plodných párů, které přežijí jedno období
γ – podíl juvenilních párů, které během jednoho období dospějí
b – plodnost: průměrný počet párů které „vyprodukuje" plodný pár za jedno období

$$\begin{aligned} x(t+1) &= (1-\gamma)\sigma_1\, x(t) + \quad b\, y(t) \\ y(t+1) &= \qquad\quad \gamma\sigma_1\, x(t) + \sigma_2\, y(t) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x(t+1) \\ y(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1(1-\gamma) & b \\ \sigma_1\gamma & \sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Fibonacciovi králíci

$x(t)$ – množství párů juvenilních králíků v t-tém období
$y(t)$ – množství párů plodných králíků v t-tém období

σ_1 – podíl juvenilních párů, které přežijí jedno období
σ_2 – podíl plodných párů, které přežijí jedno období
γ – podíl juvenilních párů, které během jednoho období dospějí
b – plodnost: průměrný počet párů které „vyprodukuje" plodný pár za jedno období

$$\begin{aligned} x(t+1) &= (1-\gamma)\sigma_1\, x(t) + b\, y(t) \\ y(t+1) &= \gamma\sigma_1\, x(t) + \sigma_2\, y(t) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t+1) = \begin{pmatrix} \sigma_1(1-\gamma) & b \\ \sigma_1\gamma & \sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t)$$

Fibonacciovi králíci

$x(t)$ – množství párů juvenilních králíků v t-tém období
$y(t)$ – množství párů plodných králíků v t-tém období

σ_1 – podíl juvenilních párů, které přežijí jedno období
σ_2 – podíl plodných párů, které přežijí jedno období
γ – podíl juvenilních párů, které během jednoho období dospějí
b – plodnost: průměrný počet párů které „vyprodukuje" plodný pár za jedno období

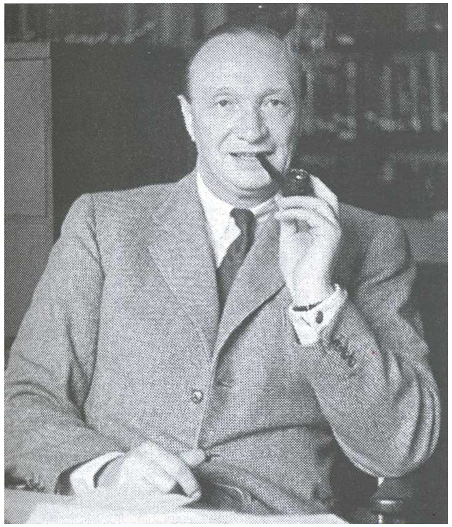
$$\begin{aligned} x(t+1) &= (1-\gamma)\sigma_1\, x(t) + b\, y(t) \\ y(t+1) &= \gamma\sigma_1\, x(t) + \sigma_2\, y(t) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t+1) = \begin{pmatrix} \sigma_1(1-\gamma) & b \\ \sigma_1\gamma & \sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t)$$

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}(t)$$

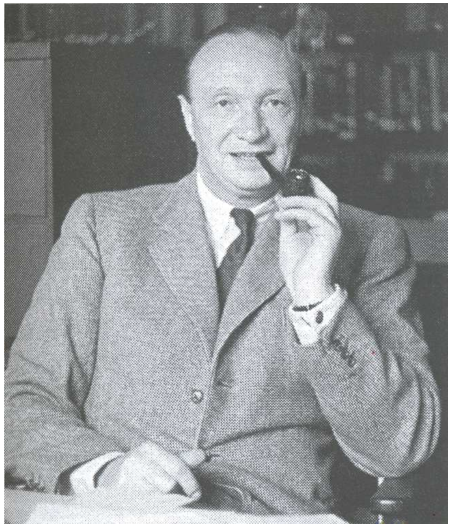
Leslieho populace

Patrick Holt Leslie (1900–1972)



Leslieho populace

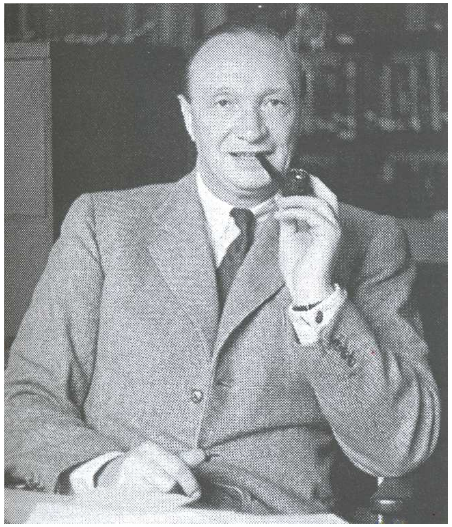
$x_i(t)$ – počet žen věku i let; přesněji věku z intervalu $\langle i-1, i\rangle$ let
p_i – podíl žen věku i, které přežijí do dalšího roku



Leslieho populace

$x_i(t)$ – počet žen věku i let; přesněji věku z intervalu $(i-1, i\rangle$ let
p_i – podíl žen věku i, které přežijí do dalšího roku

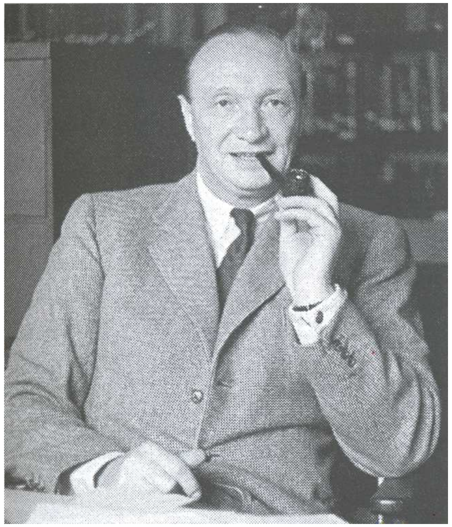
$$x_{i+1}(t+1) = p_i x_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, k-1$$



Leslieho populace

$x_i(t)$ – počet žen věku i let; přesněji věku z intervalu $(i-1, i\rangle$ let
p_i – podíl žen věku i, které přežijí do dalšího roku
f_i – očekávaný počet dcer, které během roku porodí žena věku i let

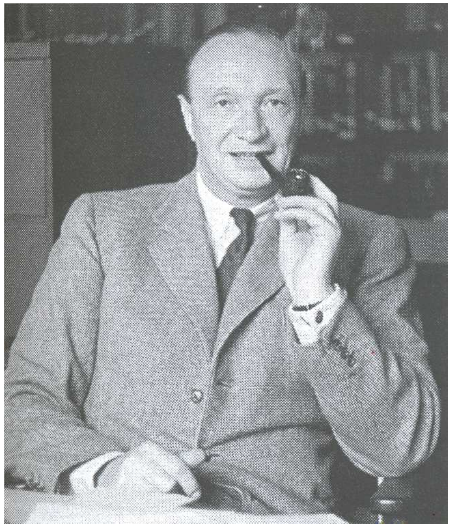
$$x_{i+1}(t+1) = p_i x_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, k-1$$



Leslieho populace

$x_i(t)$ – počet žen věku i let; přesněji věku z intervalu $(i-1, i\rangle$ let
p_i – podíl žen věku i, které přežijí do dalšího roku
f_i – očekávaný počet dcer, které během roku porodí žena věku i let

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= f_1 x_1(t) + f_2 x_2(t) + \cdots + f_k x_k(t) \\ x_{i+1}(t+1) &= p_i x_i(t), \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, k-1 \end{aligned}$$



Leslieho populace

$x_i(t)$ – počet žen věku i let; přesněji věku z intervalu $(i-1, i\rangle$ let
p_i – podíl žen věku i, které přežijí do dalšího roku
f_i – očekávaný počet dcer, které během roku porodí žena věku i let

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= f_1 x_1(t) + f_2 x_2(t) + \cdots + f_k x_k(t) \\ x_{i+1}(t+1) &= p_i x_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, k-1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \\ \vdots \\ x_{k-1}(t+1) \\ x_k(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \ldots & f_{k-1} & f_k \\ p_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & p_{k-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{k-1}(t) \\ x_k(t) \end{pmatrix}$$

Leslieho populace

$x_i(t)$ – počet žen věku i let; přesněji věku z intervalu $(i-1, i\rangle$ let
p_i – podíl žen věku i, které přežijí do dalšího roku
f_i – očekávaný počet dcer, které během roku porodí žena věku i let

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= f_1 x_1(t) + f_2 x_2(t) + \cdots + f_k x_k(t) \\ x_{i+1}(t+1) &= p_i x_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, k-1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \\ \vdots \\ x_{k-1}(t+1) \\ x_k(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \ldots & f_{k-1} & f_k \\ p_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & p_{k-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{k-1}(t) \\ x_k(t) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}(t)$$

Leonard Lefkowitch (1929–2010)

Populace strukturovaná podle stadií

Obojživelníci: vajíčko – pulec – dospělý jedinec



Populace strukturovaná podle stadií

Obojživelníci: vajíčko – pulec – dospělý jedinec
Hmyz: vajíčko – larva – kukla – imago

Populace strukturovaná podle stadií

Obojživelníci: vajíčko – pulec – dospělý jedinec
Hmyz: vajíčko – larva – kukla – imago
Rostliny: semeno – malá růžice – střední růžice – velká růžice – kvetoucí rostlina

Populace strukturovaná podle stadií

$x_i(t)$ – počet jedinců stadia i v čase t ($i = 1$ – „novorozenci")
p_{ii} – podíl jedinců stadia i, kteří přežijí období a nepromění se; $0 \le p_{ii} \le 1$
p_{ij} – podíl jedinců stadia j, kteří se během období přemění na stadium i; $0 \le p_{ij} \le 1$
f_i – očekávaný počet „novorozenců", které vyprodukuje jedinec stadia i; $f_i \ge 0$

Populace strukturovaná podle stadií

$x_i(t)$ – počet jedinců stadia i v čase t ($i = 1$ – „novorozenci")
p_{ii} – podíl jedinců stadia i, kteří přežijí období a nepromění se; $0 \leq p_{ii} \leq 1$
p_{ij} – podíl jedinců stadia j, kteří se během období přemění na stadium i; $0 \leq p_{ij} \leq 1$
f_i – očekávaný počet „novorozenců", které vyprodukuje jedinec stadia i; $f_i \geq 0$

$$\sum_{j=1}^{k} p_{ij} \leq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

Populace strukturovaná podle stadií

$x_i(t)$ – počet jedinců stadia i v čase t ($i = 1$ – „novorozenci")
p_{ii} – podíl jedinců stadia i, kteří přežijí období a nepromění se; $0 \leq p_{ii} \leq 1$
p_{ij} – podíl jedinců stadia j, kteří se během období přemění na stadium i; $0 \leq p_{ij} \leq 1$
f_i – očekávaný počet „novorozenců", které vyprodukuje jedinec stadia i; $f_i \geq 0$

$$\sum_{j=1}^{k} p_{ij} \leq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

$$x_1(t+1) = \sum_{j=1}^{k} f_j x_j(t),$$
$$x_i(t+1) = \sum_{j=1}^{k} p_{ij} x_j(t), \quad i = 2, 3, \ldots, k$$

Populace strukturovaná podle stadií

$x_i(t)$ – počet jedinců stadia i v čase t ($i = 1$ – „novorozenci")
p_{ii} – podíl jedinců stadia i, kteří přežijí období a nepromění se; $0 \leq p_{ii} \leq 1$
p_{ij} – podíl jedinců stadia j, kteří se během období přemění na stadium i; $0 \leq p_{ij} \leq 1$
f_i – očekávaný počet „novorozenců", které vyprodukuje jedinec stadia i; $f_i \geq 0$

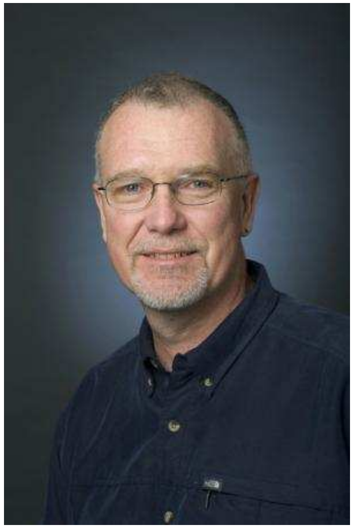
$$\sum_{j=1}^{k} p_{ij} \leq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

$$x_1(t+1) = \sum_{j=1}^{k} f_j x_j(t),$$
$$x_i(t+1) = \sum_{j=1}^{k} p_{ij} x_j(t), \quad i = 2, 3, \ldots, k$$

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}(t)$$

Obecný maticový model

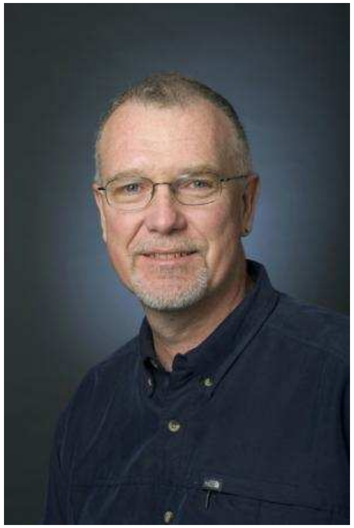
$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}(t)$$



Obecný maticový model

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}(t)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$	–	vlastní hodnoty matice A, $\lambda_1 \geq \|\lambda_2\| \geq \cdots \geq \|\lambda_k\|$
$\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \ldots, \boldsymbol{w_k}$	–	příslušné vlastní vektory

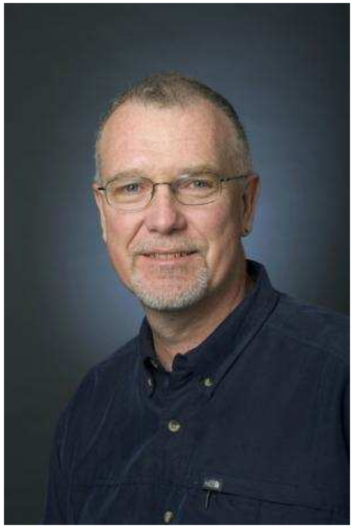


Obecný maticový model

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}(t)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$	–	vlastní hodnoty matice A, $\lambda_1 \geq \lvert\lambda_2\rvert \geq \cdots \geq \lvert\lambda_k\rvert$
$\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \dots, \boldsymbol{w_k}$	–	příslušné vlastní vektory

Pro jednoduchost předpokládejme, že $\lambda_1 > \lvert\lambda_2\rvert$ a $\lambda_i \neq \lambda_j$ pro $i \neq j$.



Obecný maticový model

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}(t)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ – vlastní hodnoty matice A, $\lambda_1 \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_k|$
$\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \dots, \boldsymbol{w_k}$ – příslušné vlastní vektory

Pro jednoduchost předpokládejme, že $\lambda_1 > |\lambda_2|$ a $\lambda_i \neq \lambda_j$ pro $i \neq j$.

$$\boldsymbol{x}(0) = c_1\boldsymbol{w_1} + c_2\boldsymbol{w_2} + \cdots + c_k\boldsymbol{w_k}$$

Obecný maticový model

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}(t)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$	–	vlastní hodnoty matice A, $\lambda_1 \geq \lvert\lambda_2\rvert \geq \cdots \geq \lvert\lambda_k\rvert$
$\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \dots, \boldsymbol{w_k}$	–	příslušné vlastní vektory

Pro jednoduchost předpokládejme, že $\lambda_1 > \lvert\lambda_2\rvert$ a $\lambda_i \neq \lambda_j$ pro $i \neq j$.

$$\boldsymbol{x}(0) = c_1\boldsymbol{w_1} + c_2\boldsymbol{w_2} + \cdots + c_k\boldsymbol{w_k}$$

$$\boldsymbol{x}(1) = c_1\lambda_1\boldsymbol{w_1} + c_2\lambda_2\boldsymbol{w_2} + \cdots + c_k\lambda_k\boldsymbol{w_k}$$

Obecný maticový model

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}(t)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$	–	vlastní hodnoty matice A, $\lambda_1 \geq \lvert\lambda_2\rvert \geq \cdots \geq \lvert\lambda_k\rvert$
$\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \ldots, \boldsymbol{w_k}$	–	příslušné vlastní vektory

Pro jednoduchost předpokládejme, že $\lambda_1 > \lvert\lambda_2\rvert$ a $\lambda_i \neq \lambda_j$ pro $i \neq j$.

$$\boldsymbol{x}(0) = c_1\boldsymbol{w_1} + c_2\boldsymbol{w_2} + \cdots + c_k\boldsymbol{w_k}$$

$$\boldsymbol{x}(1) = c_1\lambda_1\boldsymbol{w_1} + c_2\lambda_2\boldsymbol{w_2} + \cdots + c_k\lambda_k\boldsymbol{w_k}$$

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1\lambda_1^t\boldsymbol{w_1} + c_2\lambda_2^t\boldsymbol{w_2} + \cdots + c_k\lambda_k^t\boldsymbol{w_k}$$

Obecný maticový model

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}(t)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ – vlastní hodnoty matice A, $\lambda_1 \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_k|$
$\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \ldots, \boldsymbol{w_k}$ – příslušné vlastní vektory

Pro jednoduchost předpokládejme, že $\lambda_1 > |\lambda_2|$ a $\lambda_i \neq \lambda_j$ pro $i \neq j$.

$$\boldsymbol{x}(0) = c_1\boldsymbol{w_1} + c_2\boldsymbol{w_2} + \cdots + c_k\boldsymbol{w_k}$$

$$\boldsymbol{x}(1) = c_1\lambda_1\boldsymbol{w_1} + c_2\lambda_2\boldsymbol{w_2} + \cdots + c_k\lambda_k\boldsymbol{w_k}$$

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1\lambda_1^t\boldsymbol{w_1} + c_2\lambda_2^t\boldsymbol{w_2} + \cdots + c_k\lambda_k^t\boldsymbol{w_k}$$

$$\frac{1}{\lambda_1^t}\boldsymbol{x}(t) = c_1\boldsymbol{w_1} + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^t\boldsymbol{w_2} + \cdots + c_k\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^t\boldsymbol{w_k}$$

Růst homogenní populace v diskrétním čase

Populace bez omezení

Leonhard Euler (1707–1783), *Introductio in analysin infinitorum (1748)*

Populace bez omezení

$x(t)$ – velikost populace v čase t, který plyne v „přirozených" jednotkách

Populace bez omezení

$x(t)$ – velikost populace v čase t, který plyne v „přirozených" jednotkách

$$x(t+1) = x(t) - \text{uhynulí} + \text{narození}$$

Populace bez omezení

$x(t)$ – velikost populace v čase t, který plyne v „přirozených" jednotkách

$$x(t+1) = x(t) - \text{uhynulí} + \text{narození}$$

$$x(t+1) = x(t) - dx(t) + bx(t)$$

d – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in \langle 0, 1 \rangle$
b – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$

Populace bez omezení

$x(t)$ – velikost populace v čase t, který plyne v „přirozených" jednotkách

$$x(t+1) = x(t) - \text{uhynulí} + \text{narození}$$

$$x(t+1) = x(t) - dx(t) + bx(t) = (1-d+b)x(t)$$

d – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in \langle 0, 1 \rangle$

b – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$

Populace bez omezení

$x(t)$ – velikost populace v čase t, který plyne v „přirozených" jednotkách

$$x(t+1) = x(t) - \text{uhynulí} + \text{narození}$$

$$x(t+1) = x(t) - dx(t) + bx(t) = (1 - d + b)x(t)$$

d – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in \langle 0, 1 \rangle$
b – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$
$r = 1 - d + b$ – růstový koeficient, $r \geq 0$

Populace bez omezení

$x(t)$ – velikost populace v čase t, který plyne v „přirozených" jednotkách

$$x(t+1) = x(t) - \text{uhynulí} + \text{narození}$$

$$x(t+1) = x(t) - dx(t) + bx(t) = (1-d+b)x(t) = rx(t)$$

d – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in \langle 0, 1 \rangle$
b – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$
$r = 1 - d + b$ – růstový koeficient, $r \geq 0$

Populace bez omezení

$x(t)$ – velikost populace v čase t, který plyne v „přirozených" jednotkách

$$x(t+1) = x(t) - \text{uhynulí} + \text{narození}$$

$$x(t+1) = x(t) - dx(t) + bx(t) = (1-d+b)x(t) = rx(t)$$

d – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in \langle 0, 1 \rangle$
b – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$
$r = 1 - d + b$ – růstový koeficient, $r \geq 0$

$$x(t+1) = rx(t)$$

Populace bez omezení

$x(t)$ – velikost populace v čase t, který plyne v „přirozených" jednotkách

$$x(t+1) = x(t) - \text{uhynulí} + \text{narození}$$

$$x(t+1) = x(t) - dx(t) + bx(t) = (1-d+b)x(t) = rx(t)$$

d – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in \langle 0, 1 \rangle$
b – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$
$r = 1 - d + b$ – růstový koeficient, $r \geq 0$

$$x(t+1) = rx(t)$$

Rekurentní formule pro geometrickou posloupnost

Populace bez omezení

$x(t)$ – velikost populace v čase t, který plyne v „přirozených" jednotkách

$$x(t+1) = x(t) - \text{uhynulí} + \text{narození}$$

$$x(t+1) = x(t) - dx(t) + bx(t) = (1-d+b)x(t) = rx(t)$$

d – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in \langle 0, 1 \rangle$
b – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$
$r = 1 - d + b$ – růstový koeficient, $r \geq 0$

$$\color{red}{x(t+1) = rx(t)}$$

$x(0) = x_0$ – počáteční velikost populace

$$x(t) = x_0 r^t$$

Populace bez omezení

$x(t)$ – velikost populace v čase t, který plyne v „přirozených" jednotkách

$$x(t+1) = x(t) - \text{uhynulí} + \text{narození}$$

$$x(t+1) = x(t) - dx(t) + bx(t) = (1-d+b)x(t) = rx(t)$$

d – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in \langle 0, 1 \rangle$
b – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$
$r = 1 - d + b$ – růstový koeficient, $r \geq 0$

$$x(t+1) = rx(t)$$

Thomas R. Malthus (1766–1834)

$x(0) = x_0$ – počáteční velikost populace

$$x(t) = x_0 r^t$$

$$\begin{cases} r > 1, \text{ tj. } b > d, & \text{populace roste} \\ r = 1, \text{ tj. } b = d, & \text{populace má konstatntní velikost} \\ r < 1, \text{ tj. } b < d, & \text{populace vymírá} \end{cases}$$

Populace bez omezení

$$x(t+1) = rx(t), \quad x(0) = x_0$$

Populace bez omezení

$$x(t+1) = rx(t), \quad x(0) = x_0$$

růstový koeficient

$$r = \frac{x(t+1)}{x(t)}$$

Populace bez omezení

$$x(t+1) = rx(t), \quad x(0) = x_0$$

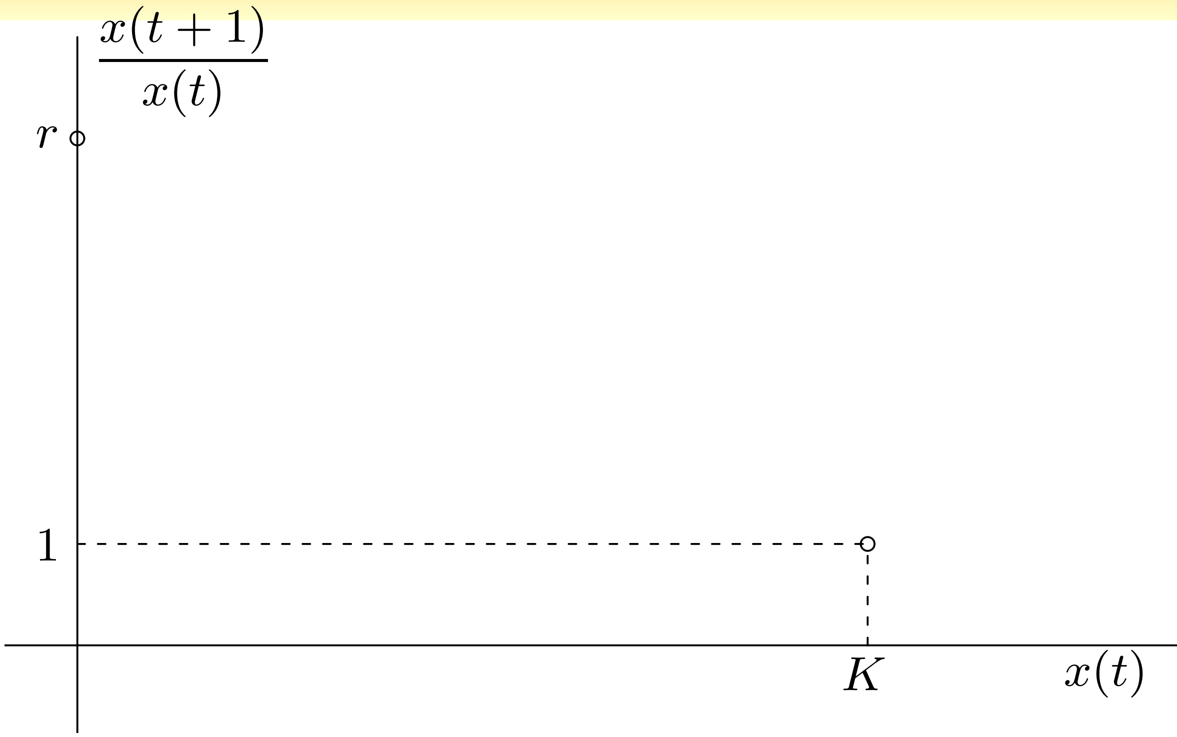
růstový koeficient

$$r = \frac{x(t+1)}{x(t)}$$

závisí na velikosti populace

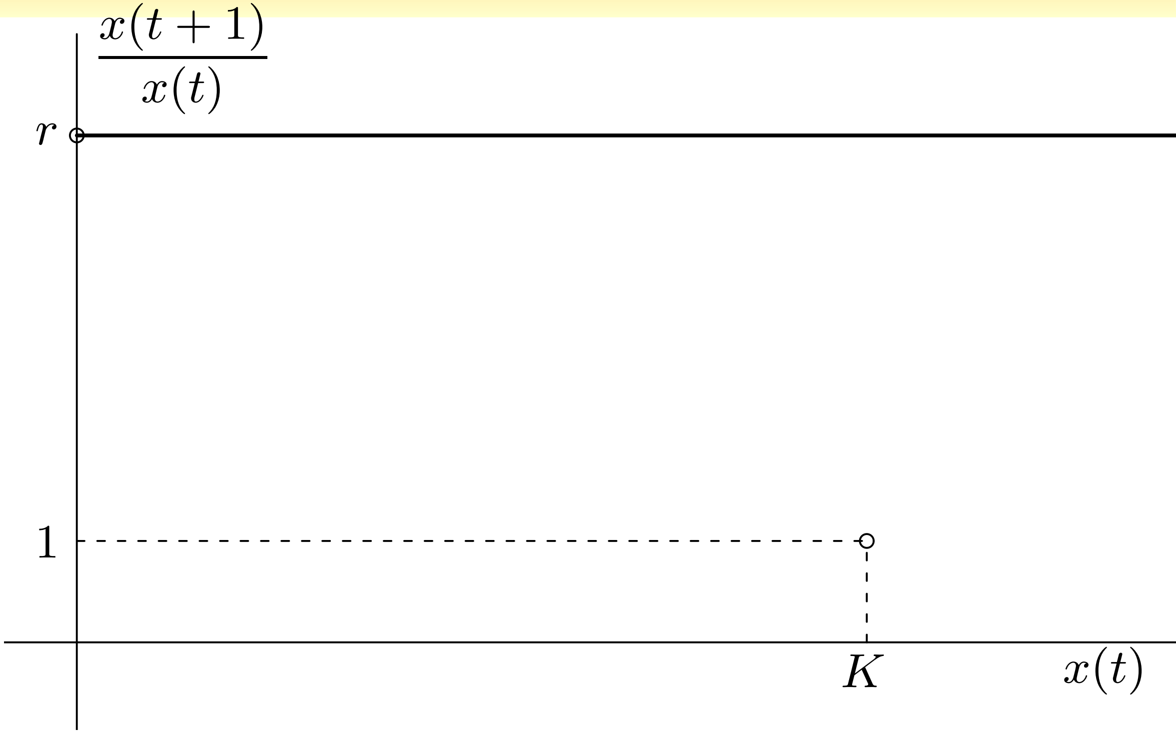
$$r = r\big(x(t)\big)$$

Populace s omezenými zdroji



Populace s omezenými zdroji

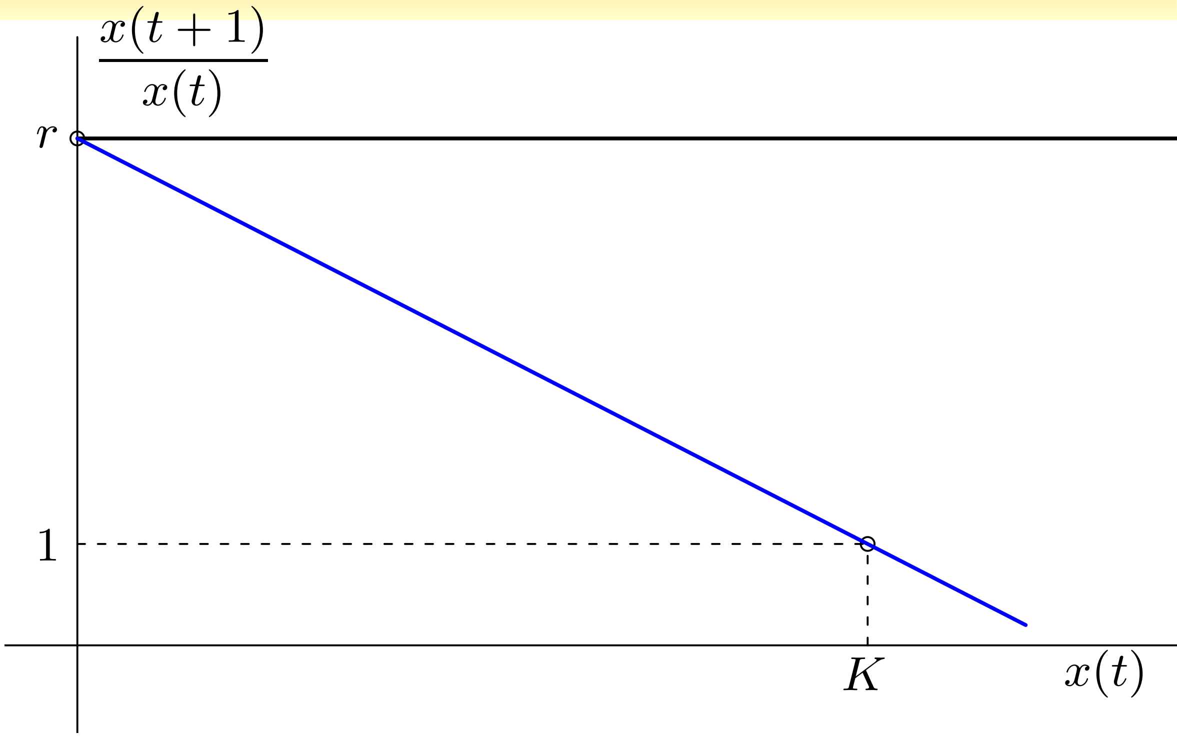
Malthus:
$x(t+1) = rx(t)$



Populace s omezenými zdroji

Malthus:
$x(t+1) = rx(t)$

Verhulst:
$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

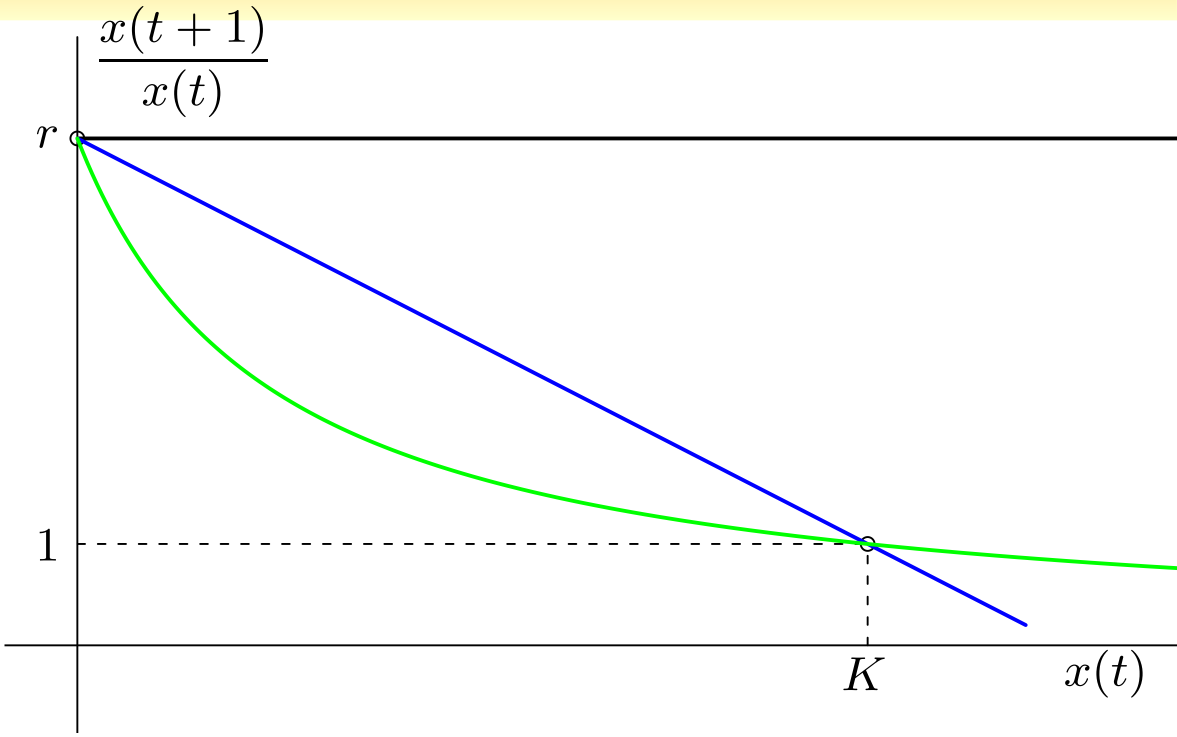


Populace s omezenými zdroji

Malthus:
$x(t+1) = rx(t)$

Verhulst:
$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K}\right)x(t)$

Beverton-Holt, Pielou:
$x(t+1) = \dfrac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}}\,x(t)$

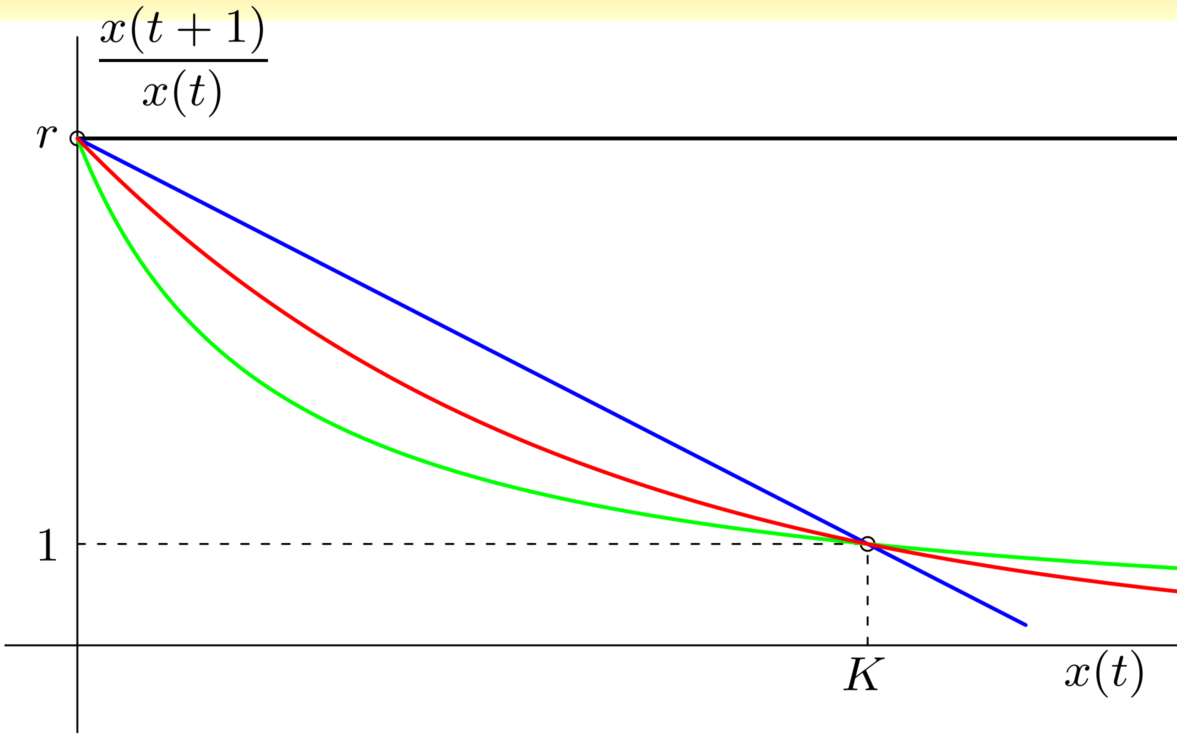


Populace s omezenými zdroji

Malthus:
$x(t+1) = rx(t)$

Verhulst:
$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K}\right)x(t)$

Beverton-Holt, Pielou:
$x(t+1) = \frac{r}{1+(r-1)\frac{x(t)}{K}}\,x(t)$



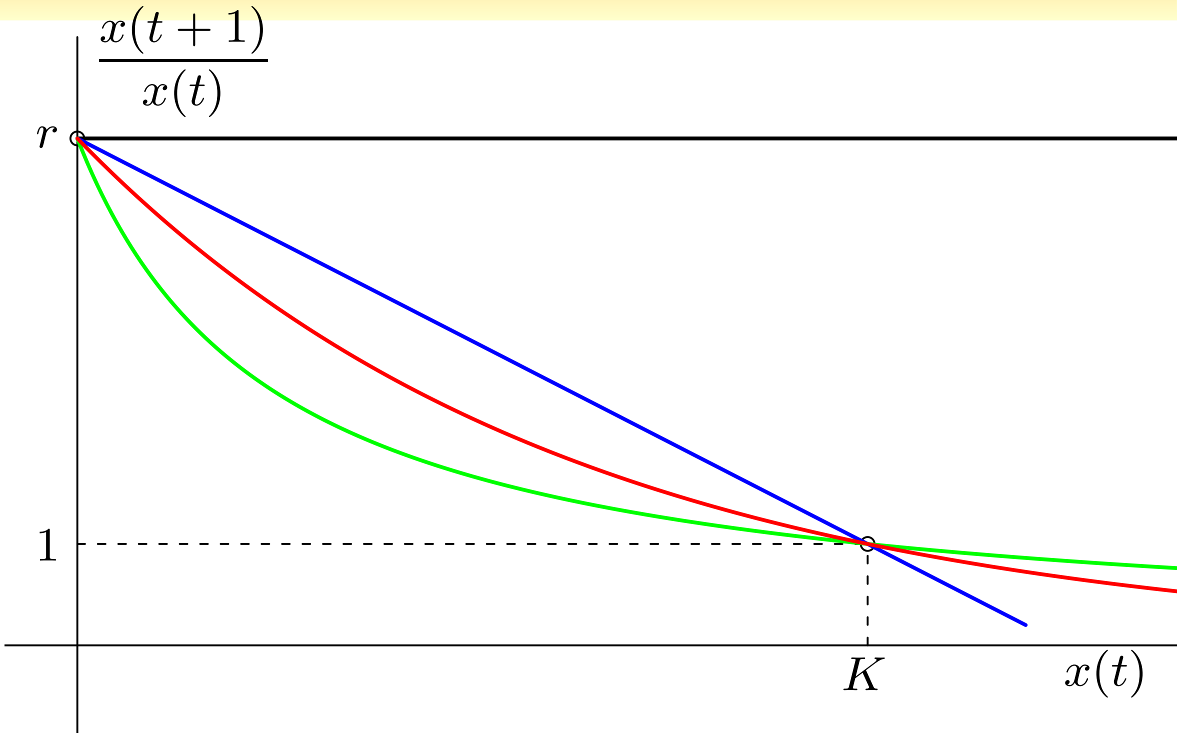
Ricker:
$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}}\,x(t)$

Populace s omezenými zdroji

Malthus:
$x(t+1) = rx(t)$

$\Delta x(t) = (r-1)x(t)$

Verhulst:
$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K}\right)x(t)$$



Beverton-Holt, Pielou:
$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}}x(t)$$

Ricker:
$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}}x(t)$$

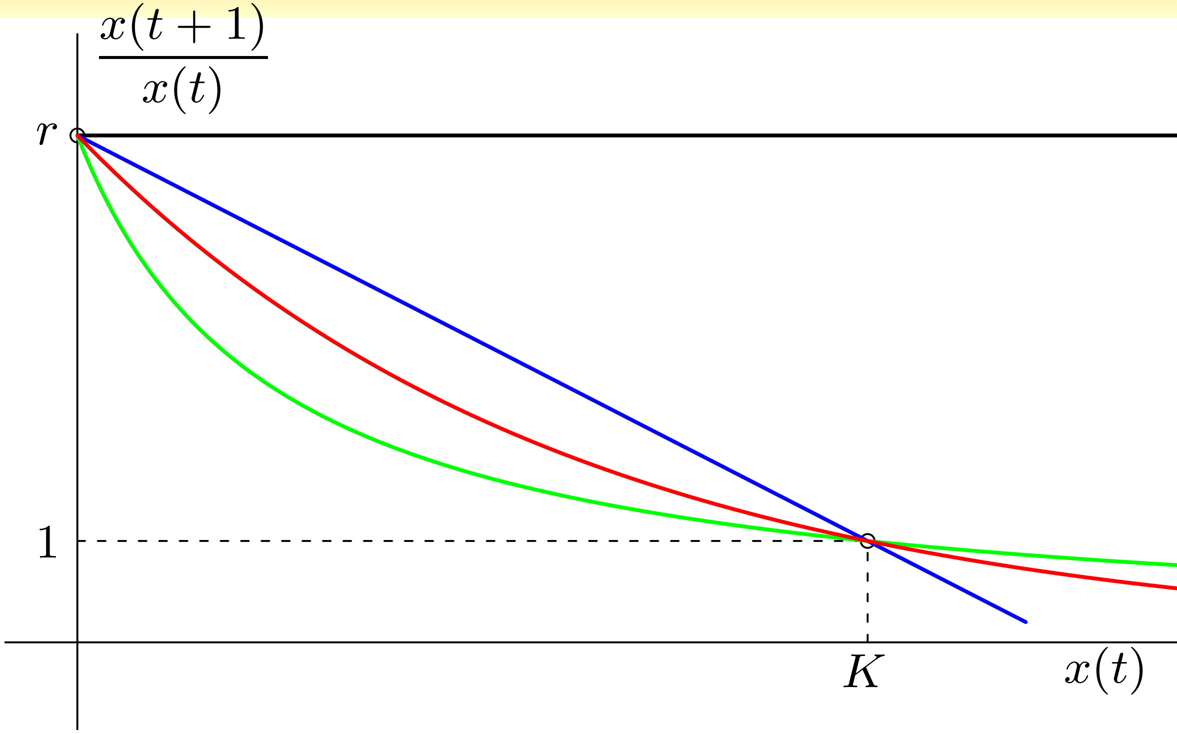
Populace s omezenými zdroji

Malthus:
$x(t+1) = rx(t)$

$\Delta x(t) = (r-1)x(t)$

Verhulst:
$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t)$$



Beverton-Holt, Pielou:
$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

Ricker:
$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t)$

Populace s omezenými zdroji

Malthus:

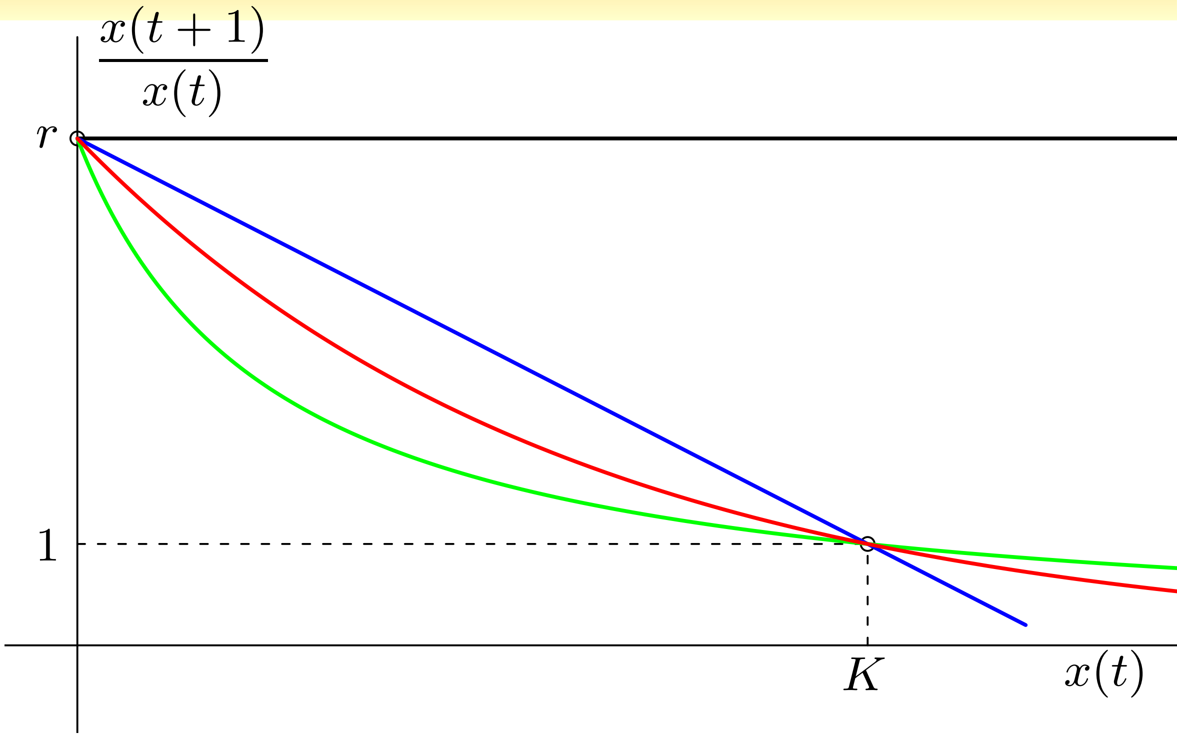
$$x(t+1) = rx(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)x(t)$$

Verhulst:

$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t)$$



Beverton-Holt, Pielou:

$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

$$\Delta x(t) = \frac{(r-1)}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}} \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t)$$

Ricker:

$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

Populace s omezenými zdroji

Malthus:

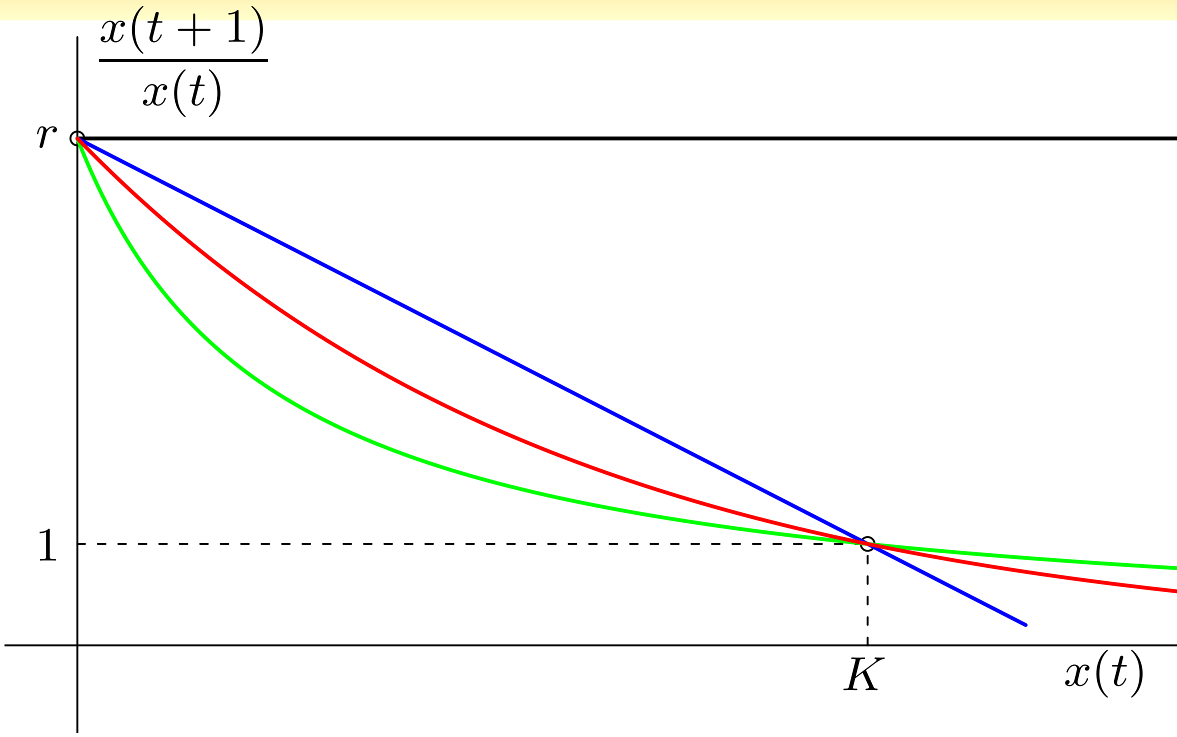
$$x(t+1) = rx(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)x(t)$$

Verhulst:

$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t)$$



Beverton-Holt, Pielou:

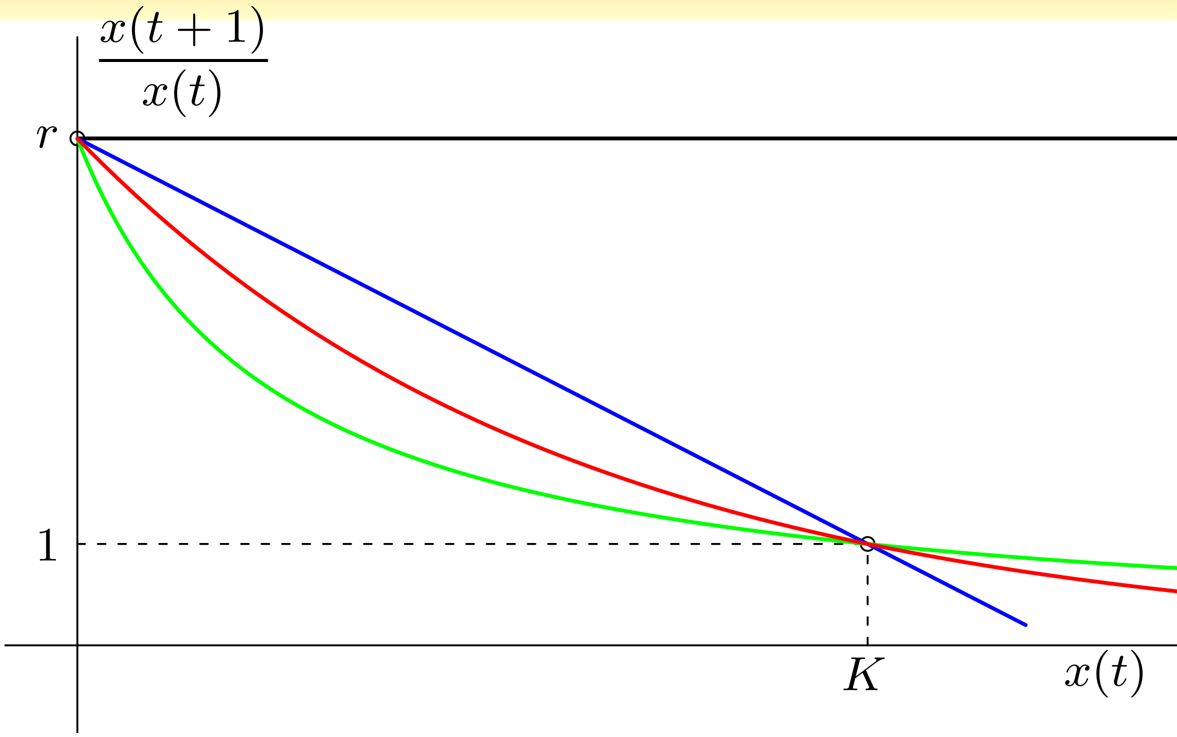
$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

$$\Delta x(t) = \frac{r-1}{r}\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t+1)$$

Ricker:

$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

Populace s omezenými zdroji



Malthus:

$x(t+1) = rx(t)$

$\Delta x(t) = (r-1)x(t)$

Verhulst:

$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K}\right)x(t)$

$\Delta x(t) = (r-1)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)x(t)$

Beverton-Holt, Pielou:

$x(t+1) = \dfrac{r}{1+(r-1)\frac{x(t)}{K}}\,x(t)$

$\Delta x(t) = \frac{r-1}{r}\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)x(t+1)$

Ricker:

$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}}x(t)$

$\Delta x(t) = \left(r^{1-\frac{x(t)}{K}} - 1\right)x(t)$

Populace s omezenými zdroji

Malthus:

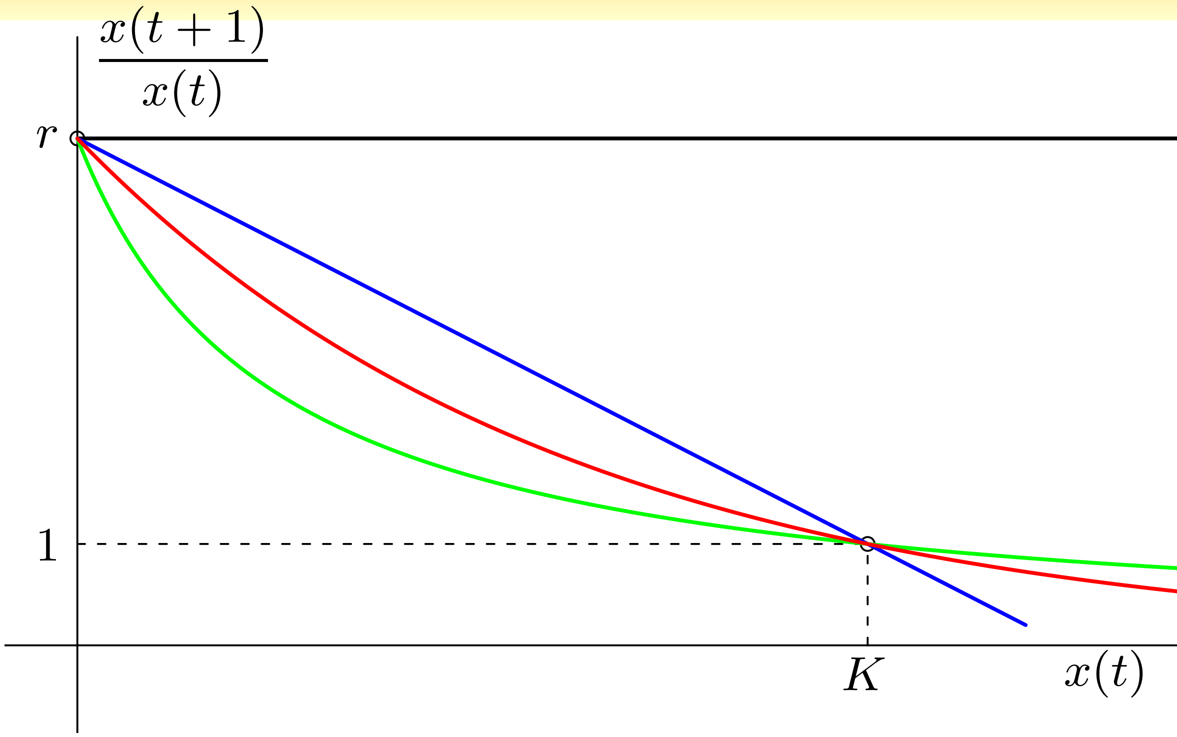
$$x(t+1) = rx(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)x(t)$$

Verhulst:

$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K}\right)x(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)x(t)$$



Beverton-Holt, Pielou:

$$x(t+1) = \frac{r}{1+(r-1)\frac{x(t)}{K}}x(t)$$

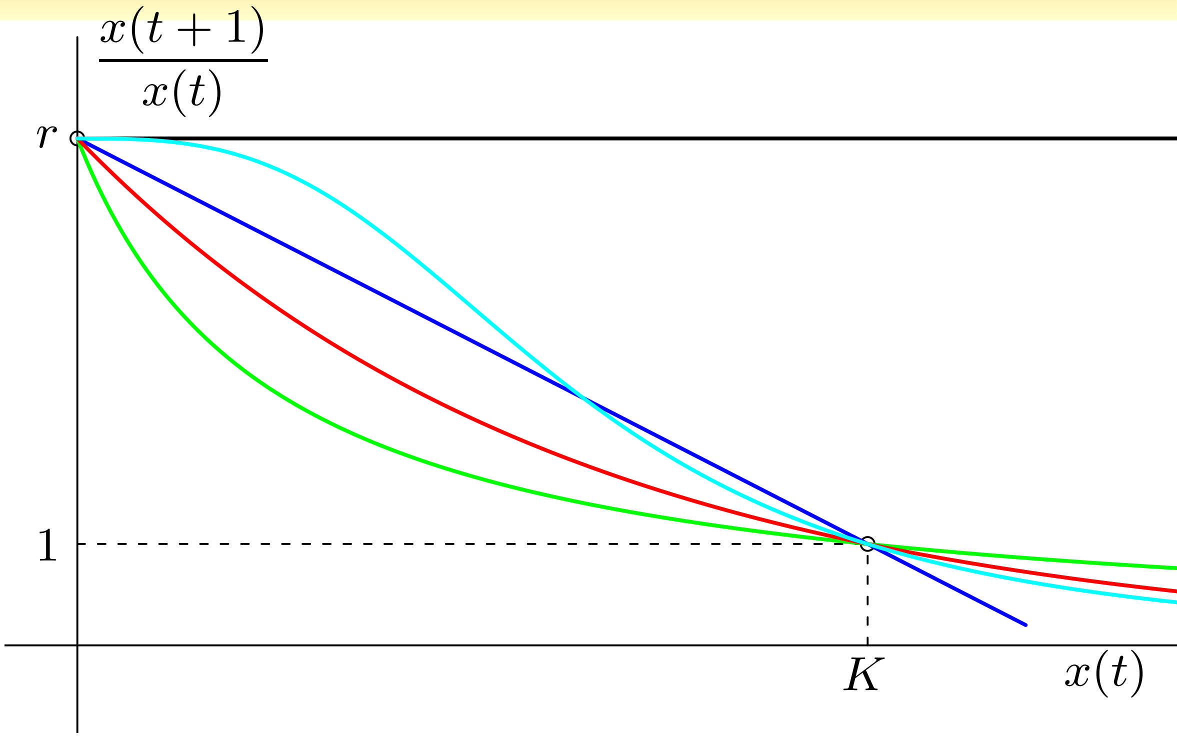
$$\Delta x(t) = \frac{r-1}{r}\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)x(t+1)$$

Ricker:

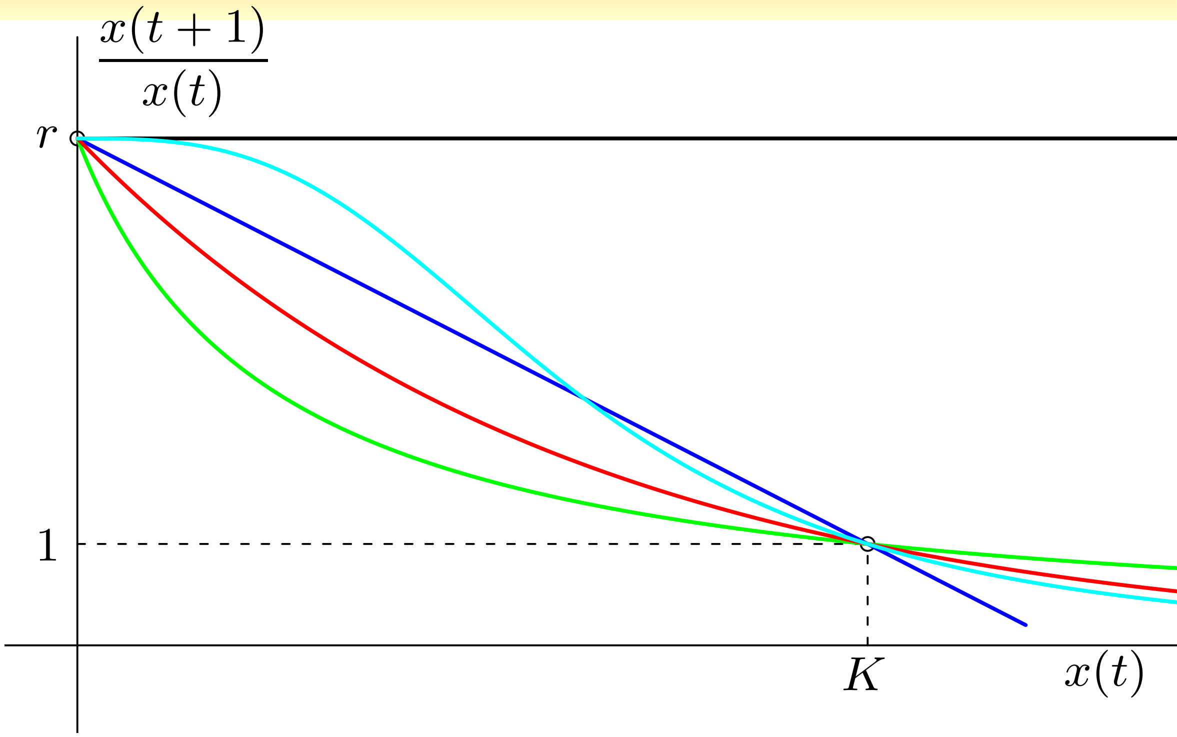
$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}}x(t)$$

$$\Delta x(t) = \left(r^{1-\frac{x(t)}{K}} - 1\right)x(t)$$

Populace s omezenými zdroji



Populace s omezenými zdroji

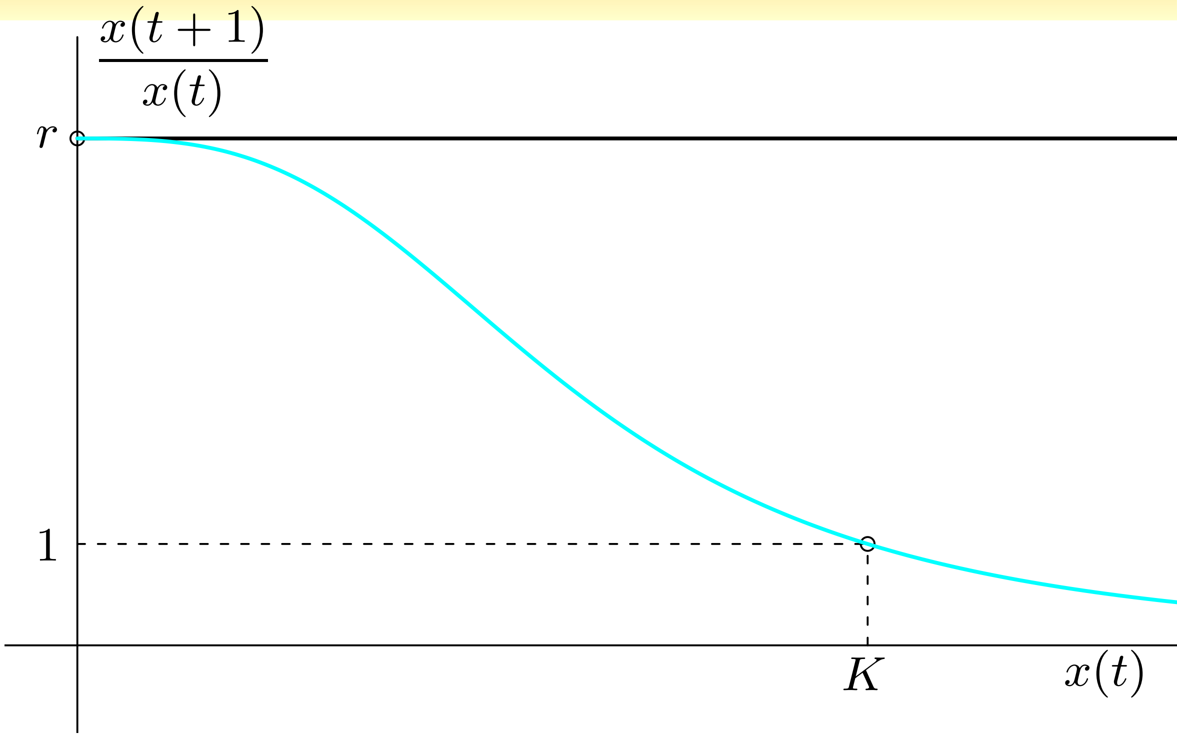


Základní rovnice:

$$x(t+1) = \frac{r}{1+(r-1)\left(\frac{x(t)}{K}\right)^{\beta}}x(t)$$

$$\Delta x(t) = \frac{r-1}{1+(r-1)\left(\frac{x(t)}{K}\right)^{\beta}}\left(1-\left(\frac{x(t)}{K}\right)^{\beta}\right)x(t) = \frac{r-1}{r}\left(1-\left(\frac{x(t)}{K}\right)^{\beta}\right)x(t+1)$$

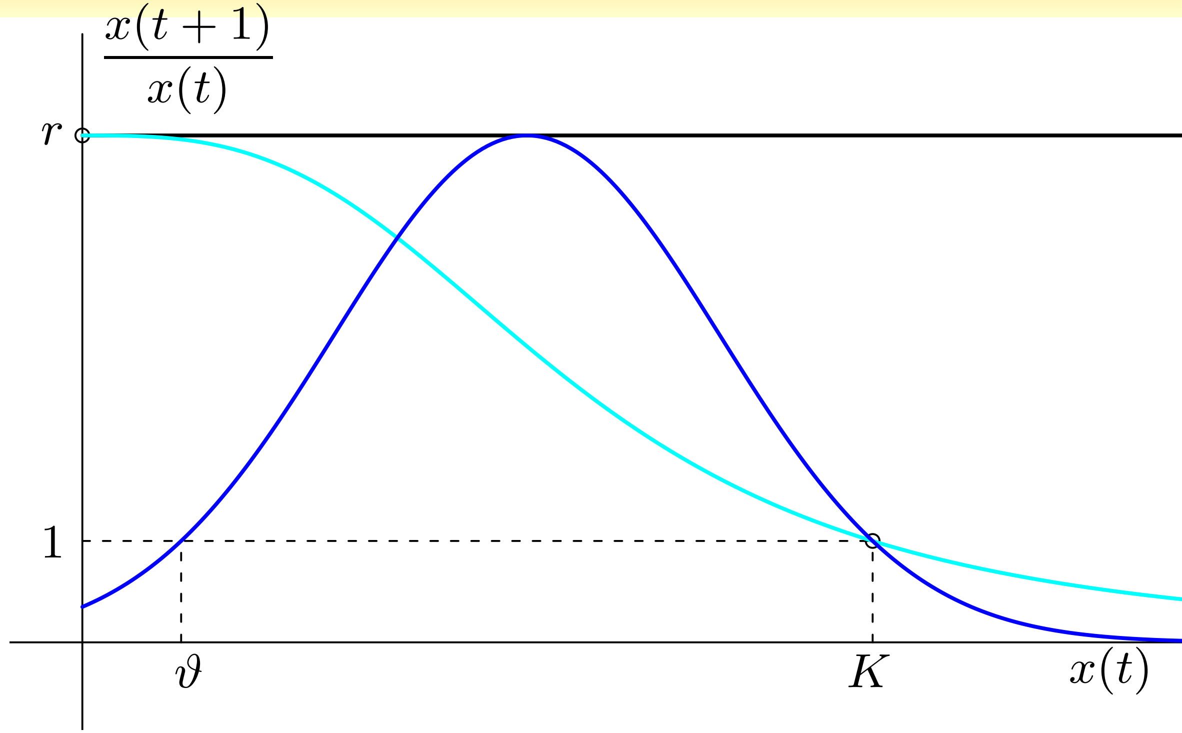
Populace s omezenými zdroji



Rovnice se zpožděním:

$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\left(\frac{x(t-1)}{K}\right)^{\beta}} x(t)$$

Populace s omezenými zdroji

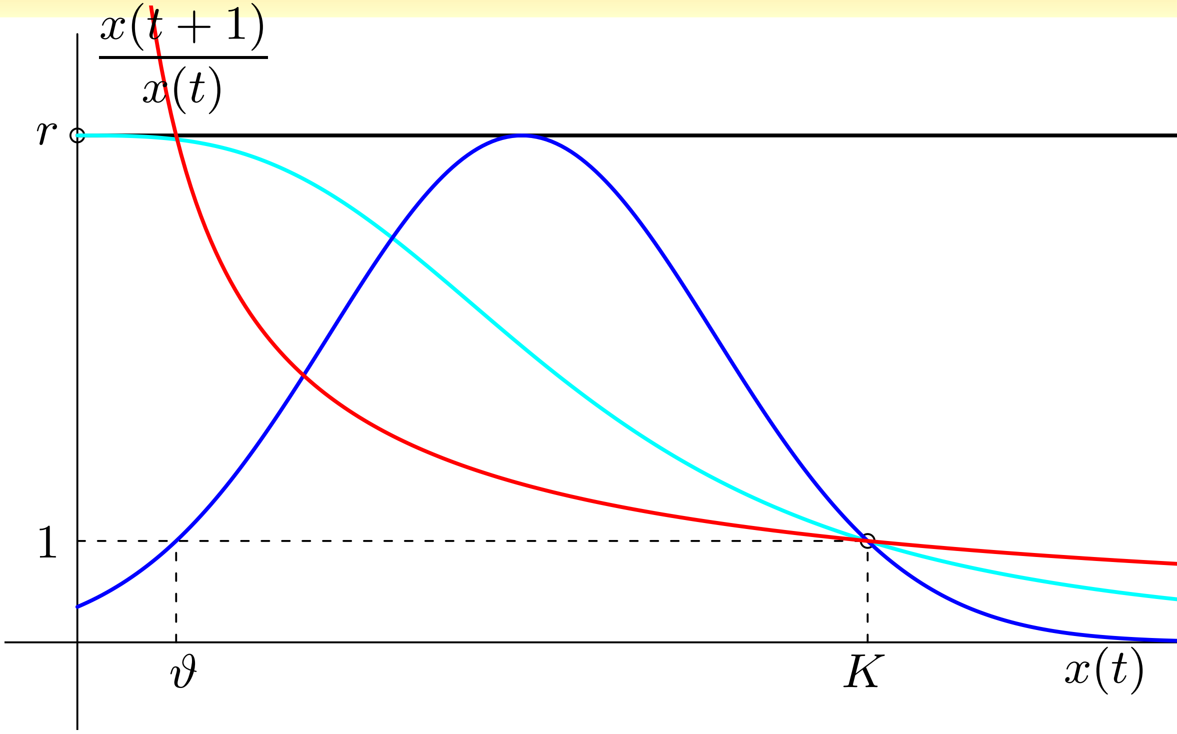


Allee:

$$x(t+1) = r^{\frac{4K}{(K-\vartheta)^2}\left(1-\frac{x(t)}{K}\right)(x-\vartheta)}x(t)$$

Warder Clyde Allee (1885–1955)

Populace s omezenými zdroji



Gompertz:

$$x(t+1) = \left({\color{red} r x(t)^{-\frac{\ln r}{\ln K}}} \right) x(t)$$

Benjamin Gompertz (1779–1865)

Interagující populace

Interagující populace

Růst jedné populace (Rickerův model)

$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t), \quad x(0) = x_0$$

Interagující populace

Růst jedné populace (Rickerův model)

$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t), \quad x(0) = x_0$$

růstový koeficient: $r^{1-\frac{x(t)}{K}}$ klesá s rostoucí velikostí populace

Interagující populace

Růst jedné populace (Rickerův model)

$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t), \quad x(0) = x_0$$

růstový koeficient: $r^{1-\frac{x(t)}{K}}$ klesá s rostoucí velikostí populace

$x(t)$, $y(t)$ – velikosti dvou interagujících populací v čase t

Interagující populace

Růst jedné populace (Rickerův model)

$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t), \quad x(0) = x_0$$

růstový koeficient: $r^{1-\frac{x(t)}{K}}$ klesá s rostoucí velikostí populace

$x(t)$, $y(t)$ – velikosti dvou interagujících populací v čase t

Lotka-Volterra:

$$x(t+1) = r_1^{1-\frac{x(t)}{K_1}-\alpha_{12}y(t)} x(t), \quad x(0) = x_0$$

$$y(t+1) = r_2^{1-\frac{y(t)}{K_2}-\alpha_{21}x(t)} y(t), \quad y(0) = y_0$$

Interagující populace

Růst jedné populace (Rickerův model)

$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t), \quad x(0) = x_0$$

růstový koeficient: $r^{1-\frac{x(t)}{K}}$ klesá s rostoucí velikostí populace

$x(t)$, $y(t)$ – velikosti dvou interagujících populací v čase t

Lotka-Volterra:

$$x(t+1) = r_1^{1-\frac{x(t)}{K_1}-\alpha_{12}y(t)} x(t), \quad x(0) = x_0$$

$$y(t+1) = r_2^{1-\frac{y(t)}{K_2}-\alpha_{21}x(t)} y(t), \quad y(0) = y_0$$

$\alpha_{12} > 0$, $\alpha_{21} > 0$ – konkurence, kompetice

Interagující populace

Růst jedné populace (Rickerův model)

$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t), \quad x(0) = x_0$$

růstový koeficient: $r^{1-\frac{x(t)}{K}}$ klesá s rostoucí velikostí populace

$x(t)$, $y(t)$ – velikosti dvou interagujících populací v čase t

Lotka-Volterra:

$$x(t+1) = r_1^{1-\frac{x(t)}{K_1}-\alpha_{12}y(t)} x(t), \quad x(0) = x_0$$

$$y(t+1) = r_2^{1-\frac{y(t)}{K_2}-\alpha_{21}x(t)} y(t), \quad y(0) = y_0$$

$\alpha_{12} > 0$, $\alpha_{21} > 0$ – konkurence, kompetice
$\alpha_{12} < 0$, $\alpha_{21} < 0$ – mutualismus, symbióza

Interagující populace

Růst jedné populace (Rickerův model)

$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t), \quad x(0) = x_0$$

růstový koeficient: $r^{1-\frac{x(t)}{K}}$ klesá s rostoucí velikostí populace

$x(t)$, $y(t)$ – velikosti dvou interagujících populací v čase t

Lotka-Volterra:

$$x(t+1) = r_1^{1-\frac{x(t)}{K_1}-\alpha_{12}y(t)} x(t), \quad x(0) = x_0$$

$$y(t+1) = r_2^{1-\frac{y(t)}{K_2}-\alpha_{21}x(t)} y(t), \quad y(0) = y_0$$

$\alpha_{12} > 0$, $\alpha_{21} > 0$ – konkurence, kompetice
$\alpha_{12} < 0$, $\alpha_{21} < 0$ – mutualismus, symbióza
$\alpha_{12} > 0$, $\alpha_{21} < 0$ – predace (populace s velikostí x je kořist, s velikostí y je dravec)

Lékařská diagnostika

Stav pacienta:	má chorobu	A	Test	diagnostikuje chorobu	$+$
	nemá chorobu	A^C		nediagnostikuje chorobu	$-$

Stav pacienta:	má chorobu	A	Test	diagnostikuje chorobu	$+$
	nemá chorobu	A^C		nediagnostikuje chorobu	$-$

$\mathrm{P}(A)$ – prevalence nebo incidence choroby
$\mathrm{P}(+|A)$ – senzitivita testu
$\mathrm{P}(-|A^C)$ – specificita testu

Stav pacienta:	má chorobu	A	Test	diagnostikuje chorobu	$+$
	nemá chorobu	A^C		nediagnostikuje chorobu	$-$

$\mathrm{P}(A)$	– prevalence nebo incidence choroby	0,005
$\mathrm{P}(+\mid A)$	– senzitivita testu	0,99
$\mathrm{P}(-\mid A^C)$	– specificita testu	0,95

Stav pacienta:	má chorobu	A	Test	diagnostikuje chorobu	$+$
	nemá chorobu	A^C		nediagnostikuje chorobu	$-$

$\mathrm{P}(A)$	– prevalence nebo incidence choroby	0,005
$\mathrm{P}(+\|A)$	– senzitivita testu	0,99
$\mathrm{P}(-\|A^C)$	– specificita testu	0,95

$\mathrm{P}(A|+) =$

Stav pacienta:	má chorobu	A	Test diagnostikuje chorobu	$+$
	nemá chorobu	A^C	nediagnostikuje chorobu	$-$

$\mathrm{P}(A)$	– prevalence nebo incidence choroby	0,005
$\mathrm{P}(+\vert A)$	– senzitivita testu	0,99
$\mathrm{P}(-\vert A^C)$	– specificita testu	0,95

$\mathrm{P}(A|+) =$

	$+$	$-$	Σ
A			
A^C			
Σ			

Stav pacienta:	má chorobu	A	Test	diagnostikuje chorobu	$+$
	nemá chorobu	A^C		nediagnostikuje chorobu	$-$

$\mathrm{P}(A)$	– prevalence nebo incidence choroby	0,005
$\mathrm{P}(+\|A)$	– senzitivita testu	0,99
$\mathrm{P}(-\|A^C)$	– specificita testu	0,95

$\mathrm{P}(A|+) =$

	$+$	$-$	Σ
A			
A^C			
Σ			1 000 000

Stav pacienta:	má chorobu	A	Test	diagnostikuje chorobu	$+$
	nemá chorobu	A^C		nediagnostikuje chorobu	$-$

$\mathrm{P}(A)$	– prevalence nebo incidence choroby	0,005
$\mathrm{P}(+\|A)$	– senzitivita testu	0,99
$\mathrm{P}(-\|A^C)$	– specificita testu	0,95

$\mathrm{P}(A|+) =$

	$+$	$-$	Σ
A			5 000
A^C			
Σ			1 000 000

Stav pacienta:	má chorobu	A	Test	diagnostikuje chorobu	$+$
	nemá chorobu	A^C		nediagnostikuje chorobu	$-$

$\mathrm{P}(A)$	– prevalence nebo incidence choroby	0,005
$\mathrm{P}(+\mid A)$	– senzitivita testu	0,99
$\mathrm{P}(-\mid A^C)$	– specificita testu	0,95

$\mathrm{P}(A\mid +) =$

	$+$	$-$	Σ
A			5 000
A^C			995 000
Σ			1 000 000

Stav pacienta:	má chorobu	A	Test	diagnostikuje chorobu	$+$
	nemá chorobu	A^C		nediagnostikuje chorobu	$-$

$\mathrm{P}(A)$	– prevalence nebo incidence choroby	0,005
$\mathrm{P}(+\vert A)$	– senzitivita testu	0,99
$\mathrm{P}(-\vert A^C)$	– specificita testu	0,95

$\mathrm{P}(A|+) =$

	$+$	$-$	Σ
A	4 950		5 000
A^C			995 000
Σ			1 000 000

Stav pacienta:	má chorobu	A	Test	diagnostikuje chorobu	$+$
	nemá chorobu	A^C		nediagnostikuje chorobu	$-$

$\mathrm{P}(A)$	– prevalence nebo incidence choroby	0,005
$\mathrm{P}(+\|A)$	– senzitivita testu	0,99
$\mathrm{P}(-\|A^C)$	– specificita testu	0,95

$\mathrm{P}(A|+) =$

	$+$	$-$	Σ
A	4 950	50	5 000
A^C			995 000
Σ			1 000 000

Stav pacienta:	má chorobu	A	Test	diagnostikuje chorobu	$+$
	nemá chorobu	A^C		nediagnostikuje chorobu	$-$

$\mathrm{P}(A)$	– prevalence nebo incidence choroby	0,005
$\mathrm{P}(+\|A)$	– senzitivita testu	0,99
$\mathrm{P}(-\|A^C)$	– specificita testu	0,95

$\mathrm{P}(A|+) =$

	$+$	$-$	Σ
A	4 950	50	5 000
A^C		945 250	995 000
Σ			1 000 000

Stav pacienta:	má chorobu	A	Test	diagnostikuje chorobu	$+$
	nemá chorobu	A^C		nediagnostikuje chorobu	$-$

$\mathrm{P}(A)$	– prevalence nebo incidence choroby	0,005
$\mathrm{P}(+\|A)$	– senzitivita testu	0,99
$\mathrm{P}(-\|A^C)$	– specificita testu	0,95

$\mathrm{P}(A|+) =$

	$+$	$-$	Σ
A	4 950	50	5 000
A^C	49 750	945 250	995 000
Σ			1 000 000

Stav pacienta:	má chorobu A	Test	diagnostikuje chorobu	$+$
	nemá chorobu A^C		nediagnostikuje chorobu	$-$

$\mathrm{P}(A)$ – prevalence nebo incidence choroby 0,005

$\mathrm{P}(+|A)$ – senzitivita testu 0,99

$\mathrm{P}(-|A^C)$ – specificita testu 0,95

$\mathrm{P}(A|+) =$

	$+$	$-$	Σ
A	4 950	50	5 000
A^C	49 750	945 250	995 000
Σ	54 700	945 300	1 000 000

Stav pacienta:	má chorobu	A	Test	diagnostikuje chorobu	$+$
	nemá chorobu	A^C		nediagnostikuje chorobu	$-$

$\mathrm{P}(A)$	– prevalence nebo incidence choroby	0,005
$\mathrm{P}(+\vert A)$	– senzitivita testu	0,99
$\mathrm{P}(-\vert A^C)$	– specificita testu	0,95

$\mathrm{P}(A|+) = 0{,}0905$

	$+$	$-$	Σ
A	4 950	50	5 000
A^C	49 750	945 250	995 000
Σ	54 700	945 300	1 000 000

Stav pacienta:	má chorobu	A	Test	diagnostikuje chorobu	$+$
	nemá chorobu	A^C		nediagnostikuje chorobu	$-$

$\mathrm{P}(A)$	– prevalence nebo incidence choroby	0,005
$\mathrm{P}(+\vert A)$	– senzitivita testu	0,99
$\mathrm{P}(-\vert A^C)$	– specificita testu	0,95

$$\mathrm{P}(A|+) = \frac{\mathrm{P}(+|A)\,\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(+|A)\,\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(+|A^C)\,\mathrm{P}(A^C)}$$

Thomas Bayes (1701–1761)

Stav pacienta:	má chorobu	A	Test	diagnostikuje chorobu	$+$
	nemá chorobu	A^C		nediagnostikuje chorobu	$-$

$\mathrm{P}(A)$	– prevalence nebo incidence choroby	0,005
$\mathrm{P}(+\vert A)$	– senzitivita testu	0,99
$\mathrm{P}(-\vert A^C)$	– specificita testu	0,95

$$\mathrm{P}(A|+) = \frac{\mathrm{P}(+|A)\,\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(+|A)\,\mathrm{P}(A) + \big(1 - \mathrm{P}(-|A^C)\big)\big(1 - \mathrm{P}(A)\big)}$$

Thomas Bayes (1701–1761)

Stav pacienta:	má chorobu	A	Test	diagnostikuje chorobu	$+$
	nemá chorobu	A^C		nediagnostikuje chorobu	$-$

$\mathrm{P}(A)$	– prevalence nebo incidence choroby	0,005
$\mathrm{P}(+\vert A)$	– senzitivita testu	0,99
$\mathrm{P}(-\vert A^C)$	– specificita testu	0,95

$$\mathrm{P}(A|+) = \frac{\mathrm{P}(+|A)\,\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(+|A)\,\mathrm{P}(A) + \big(1 - \mathrm{P}(-|A^C)\big)\big(1 - \mathrm{P}(A)\big)} = 0{,}0905$$

Thomas Bayes (1701–1761)

Stav pacienta:	má chorobu	A	Test	diagnostikuje chorobu	$+$
	nemá chorobu	A^C		nediagnostikuje chorobu	$-$

$\mathrm{P}(A)$	– prevalence nebo incidence choroby	0,005
$\mathrm{P}(+\vert A)$	– senzitivita testu	0,99
$\mathrm{P}(-\vert A^C)$	– specificita testu	0,95

$$\mathrm{P}(A|++) = \frac{\mathrm{P}(+|A)\,\mathrm{P}(A|+)}{\mathrm{P}(+|A)\,\mathrm{P}(A|+) + \big(1-\mathrm{P}(-|A^C)\big)\big(1-\mathrm{P}(A|+)\big)} = 0{,}663$$

Thomas Bayes (1701–1761)

Stav pacienta:	má chorobu	A	Test	diagnostikuje chorobu	$+$
	nemá chorobu	A^C		nediagnostikuje chorobu	$-$

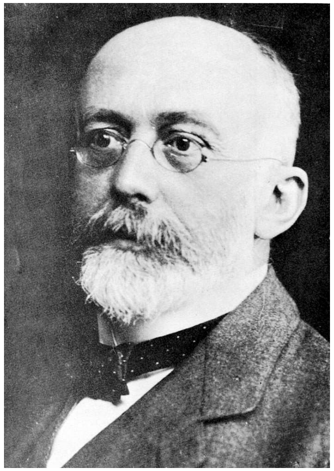
$\mathrm{P}(A)$	– prevalence nebo incidence choroby	0,005
$\mathrm{P}(+\vert A)$	– senzitivita testu	0,99
$\mathrm{P}(-\vert A^C)$	– specificita testu	0,95

$$\mathrm{P}(A|+++) = \frac{\mathrm{P}(+|A)\,\mathrm{P}(A|++)}{\mathrm{P}(+|A)\,\mathrm{P}(A|++) + \big(1-\mathrm{P}(-|A^C)\big)\big(1-\mathrm{P}(A|++)\big)} = 0{,}952$$

Thomas Bayes (1701–1761)

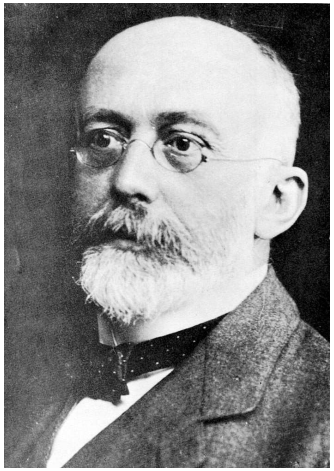
Hardyho-Weinbergův zákon

Godfrey Harold Hardy (1877–1947) *Science (1908)*
Wilhelm Weinberg (1862–1937) *Jahresh. Wuertt. Ver. vaterl. Natkd. (1908)*

Godfrey Harold Hardy (1877–1947) *Science (1908)*
Wilhelm Weinberg (1862–1937) *Jahresh. Wuertt. Ver. vaterl. Natkd. (1908)*

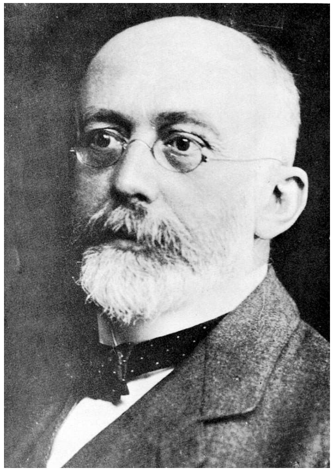
$$\begin{tikzcd}
\text{dospělá samice} \arrow[r] & \text{gameta} \arrow[dr] & & \\
 & & \text{zygota} \arrow[r] & \text{dospělý jedinec} \\
\text{dospělý samec} \arrow[r] & \text{gameta} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Godfrey Harold Hardy (1877–1947) *Science (1908)*
Wilhelm Weinberg (1862–1937) *Jahresh. Wuertt. Ver. vaterl. Natkd. (1908)*

$$
\begin{array}{lllll}
\text{dospělá samice} \longrightarrow \text{gameta} & \searrow & & & \\
 & & \text{zygota} & \longrightarrow & \text{dospělý jedinec} \\
\text{dospělý samec} \longrightarrow \text{gameta} & \nearrow & & &
\end{array}
$$

dospělý jedinec: diploidní (2 alely v lokusu)
gameta: haploidní (1 alela v lokusu)

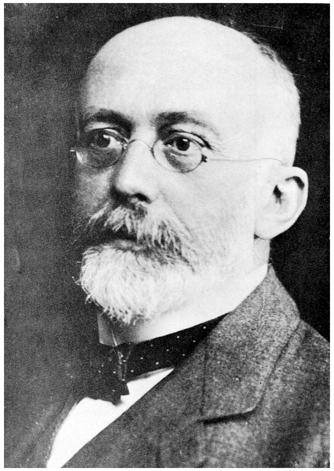


Godfrey Harold Hardy (1877–1947) *Science (1908)*
Wilhelm Weinberg (1862–1937) *Jahresh. Wuertt. Ver. vaterl. Natkd. (1908)*

dospělá samice $\longrightarrow$ gameta
dospělý samec $\longrightarrow$ gameta
$\searrow\nearrow$ zygota $\longrightarrow$ dospělý jedinec

dospělý jedinec: diploidní (2 alely v lokusu)
gameta: haploidní (1 alela v lokusu)

- plodnost nezávisí na genotypu
- přežití nezávisí na genotypu
- alela je do gamety vybrána náhodně
- náhodné křížení



Lokus A s alelami a_1, a_2.

Lokus A s alelami a_1, a_2.
Rodičovská generace: $x = \mathrm{P}(a_1a_1)$, $\quad y = \mathrm{P}(a_1a_2)$, $\quad z = \mathrm{P}(a_2a_2)$

Lokus A s alelami a_1, a_2.

Rodičovská generace: $x = \mathrm{P}(a_1 a_1), \quad y = \mathrm{P}(a_1 a_2), \quad z = \mathrm{P}(a_2 a_2)$

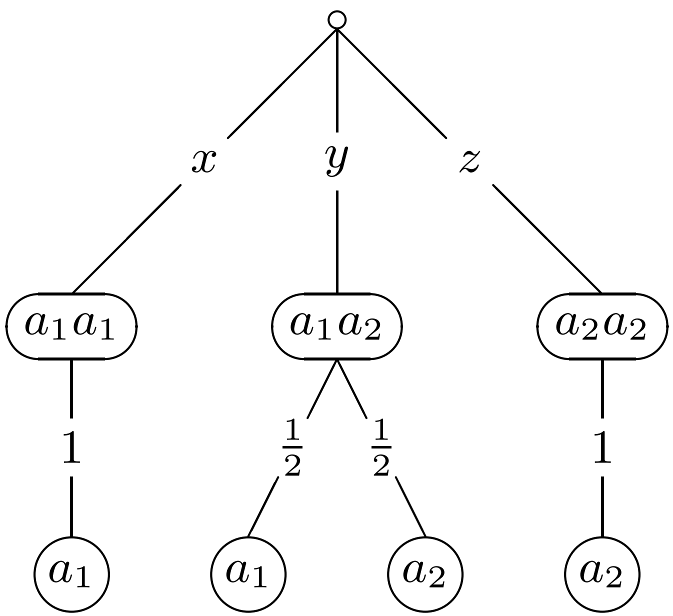
$$p = \mathrm{P}(a_1) = x + \frac{1}{2}y, \quad q = \mathrm{P}(a_2) = \frac{1}{2}y + z$$

Lokus A s alelami a_1, a_2.

Rodičovská generace: $x = \mathrm{P}(a_1a_1), \quad y = \mathrm{P}(a_1a_2), \quad z = \mathrm{P}(a_2a_2)$

$$p = \mathrm{P}(a_1) = x + \tfrac{1}{2}y, \quad q = \mathrm{P}(a_2) = \tfrac{1}{2}y + z$$

Vytvoření gamety:

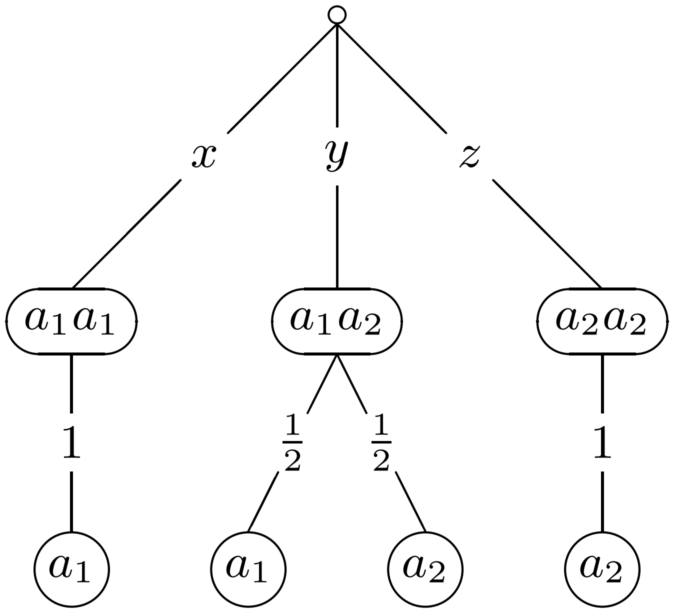


Lokus A s alelami a_1, a_2.

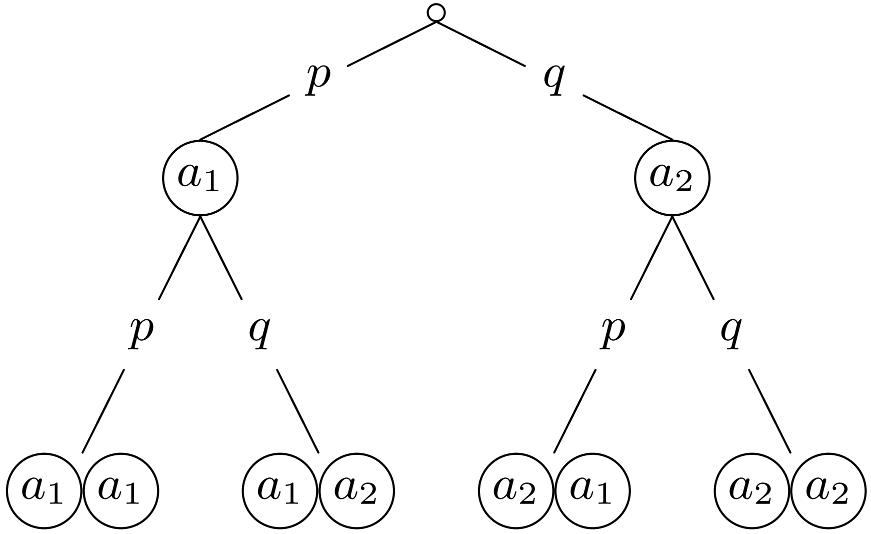
Rodičovská generace: $x = \mathrm{P}(a_1 a_1), \quad y = \mathrm{P}(a_1 a_2), \quad z = \mathrm{P}(a_2 a_2)$

$$p = \mathrm{P}(a_1) = x + \tfrac{1}{2}y, \quad q = \mathrm{P}(a_2) = \tfrac{1}{2}y + z$$

Vytvoření gamety:



Spojení gamet:

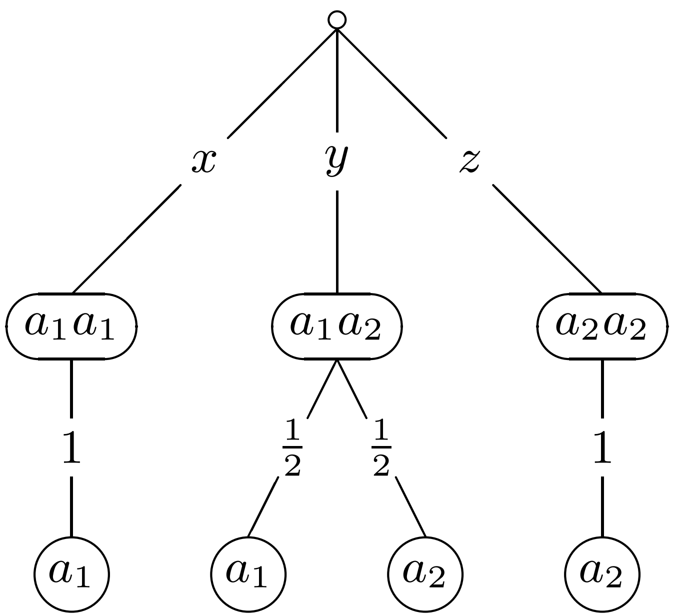


Lokus A s alelami a_1, a_2.

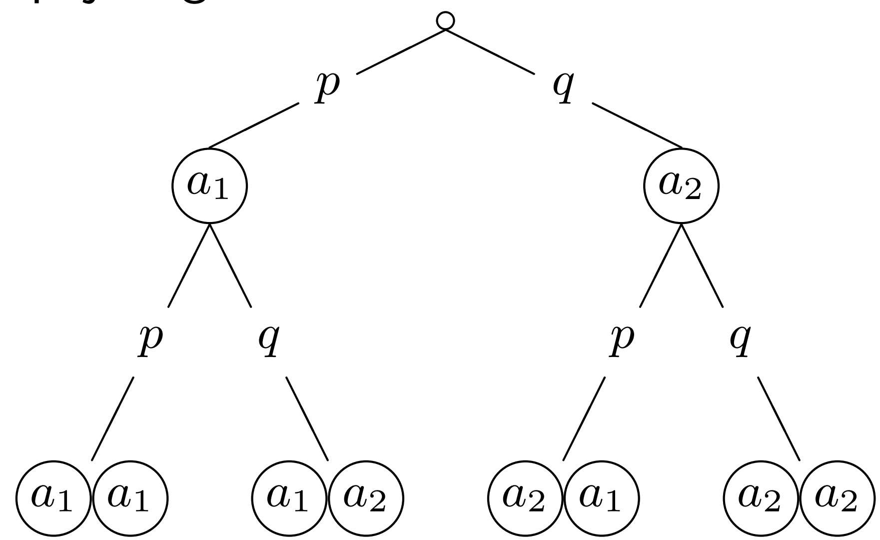
Rodičovská generace: $x = \mathrm{P}(a_1 a_1), \quad y = \mathrm{P}(a_1 a_2), \quad z = \mathrm{P}(a_2 a_2)$

$$p = \mathrm{P}(a_1) = x + \tfrac{1}{2} y, \quad q = \mathrm{P}(a_2) = \tfrac{1}{2} y + z$$

Vytvoření gamety:



Spojení gamet:



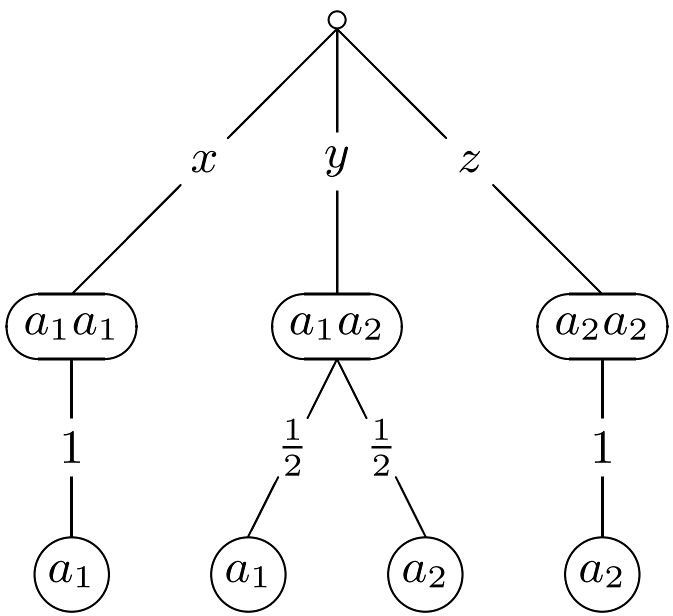
Filiální generace: $\mathrm{P}(a_1 a_1) = p^2, \quad \mathrm{P}(a_1 a_2) = pq + qp = 2pq, \quad \mathrm{P}(a_2 a_2) = q^2$

Lokus A s alelami a_1, a_2.

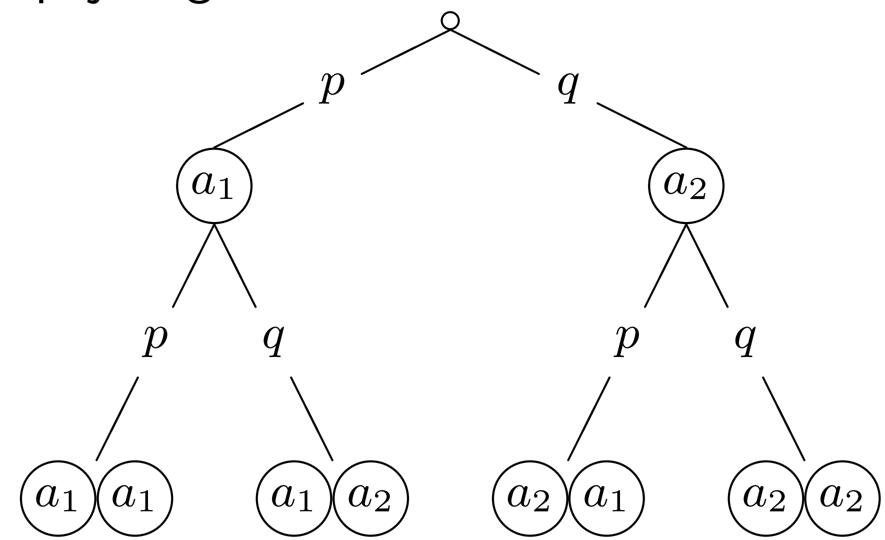
Rodičovská generace: $x = \mathrm{P}(a_1a_1), \quad y = \mathrm{P}(a_1a_2), \quad z = \mathrm{P}(a_2a_2)$

$$p = \mathrm{P}(a_1) = x + \tfrac{1}{2}y, \quad q = \mathrm{P}(a_2) = \tfrac{1}{2}y + z$$

Vytvoření gamety:



Spojení gamet:



Filiální generace: $\mathrm{P}(a_1a_1) = p^2, \quad \mathrm{P}(a_1a_2) = pq + qp = 2pq, \quad \mathrm{P}(a_2a_2) = q^2$

$$\mathrm{P}(a_1) = p^2 + pq = p(p+q) = p, \quad \mathrm{P}(a_2) = pq + q^2 = (p+q)q = q$$

K dalšímu čtení

- JOHN MAYNARD SMITH. *Mathematical Ideas in Biology.* Cambridge Univ. Press: Cambridge, 1968.
- TOMÁŠ HAVRÁNEK A KOL. *Matematika pro biologické a lékařské vědy* Academia: Praha, 1981.
- JAMES DICKSON MURRAY. *Mathematical Biology. I An Introduction, II Spatial Models and Biomedical Applications.* Springer: New York-Berlin-Heidelberg, 2001, 2003.
- HAL CASWELL. *Matrix Population Models.* Sinauer: Sunderland MA, 2001.
- MARK KOT. *Elements of Mathematical Ecology.* Cambridge Univ. Press: Cambridge, 2001.
- KURT KREITH, DON CHAKERIAN. *Iterative Algebra and Dynamic Modeling.* Springer: New York, 1999.
- VOJTĚCH JAROŠÍK. Růst a regulace populací. Academia: Praha, 2005.
- ANTHONY W.F. EDWARDS. *Foundations of Mathematical Genetics.* Cambridge Univ. Press: Cambridge, 1977.
- JOHN A. ADAM. *Mathematics in Nature. Modeling Patterns in the Natural World.* Princeton University Press: Princeton&Oxford, 2003.
- 7 RŮZNÝCH AUTORŮ SSSR. *Číslo a myšlení.* Mladá fronta: Praha, 1983.
- IAN STEWART. *Čísla přírody. Neskutečná skutečnost matematické představivosti.* Archa: Bratislava, 1996.